

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. Каразина**

На правах рукописи

Выюнник Владимир Иванович

УДК 535.326:537.874

**МЕТОДЫ КООРДИНАТНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ В СОЗДАНИИ
НЕСИНГУЛЯРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПОКРЫТИЙ,
ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ НЕВИДИМОСТЬ И МИМИКРИЮ**

01. 04. 03 — радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Звягинцев Анатолий Александрович
кандидат физ.-мат. наук, доцент

Харьков — 2016

Содержание

| | |
|--|-----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ | 12 |
| 1.1 Выводы по разделу..... | 31 |
| РАЗДЕЛ 2. НЕИДЕАЛЬНЫЙ ПЛАЩ НЕВИДИМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСИНГУЛЯРНОЙ КООРДИНАТНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ..... | 33 |
| 2.1 Постановка задачи | 33 |
| 2.2 Получение компонент материальных параметров..... | 35 |
| 2.3 Численное моделирование..... | 51 |
| 2.4 Выводы по разделу | 60 |
| РАЗДЕЛ 3. НЕСИНГУЛЯРНЫЙ ПЛАЩ-КОВЕР НЕВИДИМОСТИ | 62 |
| 3.1 Численный метод вычисления материальных параметров плаща..... | 62 |
| 3.2 Постановка задачи | 69 |
| 3.3 Численное моделирование..... | 71 |
| 3.4 Выводы по разделу | 76 |
| РАЗДЕЛ 4. МИМИКРИЯ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДХОДА ТРАНСФОРМАЦИОННОЙ ОПТИКИ | 78 |
| 4.1 Постановка задачи | 78 |
| 4.2 Численное моделирование..... | 83 |
| 4.3 Аналитический подход к расчету плаща мимикрии | 102 |
| 4.4 Постановка задачи | 102 |
| 4.5 Численное моделирование..... | 105 |
| 4.6 Выводы по разделу..... | 109 |
| РАЗДЕЛ 5. ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИИ-ИСТОЧНИКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ ПЛАЩА НЕВИДИМОСТИ..... | 112 |
| 5.1 Постановка задачи | 112 |
| 5.2 Генетический алгоритм..... | 114 |

| | |
|----------------------------------|-----|
| 5.3 Результаты и обсуждение..... | 116 |
| 5.4 Выводы по разделу..... | 119 |
| ВЫВОДЫ | 120 |
| Список литературы | 122 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Создание электромагнитных систем, обеспечивающих максимальный контроль распространения электромагнитных волн является одной из актуальных задач современной радиофизики. В последние два десятилетия возможности науки в управлении электромагнитными свойствами материалов были значительно расширены. Это стало возможным с созданием и изучением нового класса не существующих в природе материалов – метаматериалов. Свойства таких материалов определяются, в первую очередь, не их составом, а их структурой. Применительно к электромагнетизму, такие структуры, с характеристическими размерами намного меньшими длины волны, однако надатомными, позволяют обеспечить метаматериалам многие уникальные свойства, к числу которых относятся отрицательные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей, в том числе наблюдаемые одновременно.

Эффективное использование свойств материалов для управления распространением электромагнитных волн стало возможным с развитием нового направления исследований, основанного на использовании координатных трансформаций, называемого также трансформационной оптикой (ТО).

ТО представляет собой новый подход, позволяющий проектирование устройств на основе метаматериалов. Используя инвариантность уравнений Максвелла относительно координатных преобразований, ТО устанавливает связь между геометрической трансформацией пространства и анизотропией материальных параметров среды.

Кроме фундаментального, ТО имеет и широкое практическое применение. Устройства, рассчитанные с использованием подхода ТО могут работать не только в оптическом, но и в других диапазонах частот, в том числе СВЧ.

Одним из наиболее интересных и важных среди многочисленных примене-

ний метаматериалов и ТО является создание диэлектрических, как правило анизотропных покрытий, позволяющих осуществлять полное сокрытие объекта от внешнего наблюдателя, для которых в литературе закрепился термин плащи невидимости (*invisibility cloaks*).

Традиционные методы маскировки не обеспечивают истинную невидимость, в частности, они не работают при облучении скрываемого объекта "на просвет", когда источник и приемник находятся по разные стороны от него.

К настоящему времени с использованием различных координатных преобразований предложено множество разнообразных плащей невидимости различных форм. Создание таких покрытий, однако, сопряжено с решением целого ряда принципиальных проблем. Одной из таких проблем является сингулярность материальных параметров, которая может возникать на внутренней границе плаща, и является следствием вида координатных преобразований, используемых при расчетах плащей. Значения одной или нескольких компонент материальных параметров трансформированного пространства, вычисляемые на основе таких преобразований, будут бесконечно большими.

Известные решения данной проблемы не лишены недостатков. В частности, несингулярные плащи неевклидовой геометрии создают дополнительный набег фазы волны и, таким образом, оказываются детектируемыми. Фактически такие плащи являются плащами невидимости для лучей, а не для волн. Другие предложенные несингулярные плащи либо обеспечивают сокрытие объекта только для определенных направлений, либо по своей природе являются двумерными. Таким образом, актуальной является задача как поиска новых подходов к решению проблемы сингулярности материальных параметров плащей невидимости, так и разработки, с использованием ТО, устройств с новыми физическими свойствами. Для исследования возможных путей решения этой проблемы представляет интерес изучение трансформаций,

ведущих к неидеальному, и в то же время к несингулярному плащу. Необходимо также отметить, что плащи невидимости являются далеко не единственными устройствами, созданными на основе подхода ТО. Исследование таких трансформаций может не только послужить отправной точкой к экспериментальному созданию плащей невидимости но и, как мы увидим в дальнейшем, стать основой для создания устройств, которые обеспечат другие разновидности маскировки.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Диссертационная работа выполнена на кафедре физики сверхвысоких частот Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. Материалы диссертации непосредственно связаны с темами госбюджетных НИР (государственный регистрационный номер – 0106U001547, 0109U000551 и 0112U001063).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование в рамках трансформационной оптики влияния схем и параметров координатных преобразований на характеристики рассеяния плащей невидимости, что представляет интерес для решения проблемы сингулярности их материальных параметров и разработки устройств с новыми физическими свойствами.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Провести исследование дифракции плоской электромагнитной волны на неидеальном несингулярном цилиндрическом плаще невидимости и зависимости ее характеристик от параметров координатной трансформации.
2. Исследовать возможность расширения рабочего диапазона углов

падающей волны, при которых обеспечивается невидимость объекта окруженного односторонним несингулярным цилиндрическим плащом эллиптического сечения.

3. Провести сравнение численного и аналитического подходов к вычислению материальных параметров плащей с целью дополнительного обоснования численного подхода и сформулировать рекомендации по их применению.
4. Проанализировать полученный факт совпадения суммарной величины рассеянного поля от неидеального несингулярного устройства невидимости цилиндрической формы и от соответствующего идеально проводящего цилиндра, радиус которого равен радиусу окружности, от которой производится трансформация.
5. Провести исследование влияния функций-источников в уравнении Пуассона на характеристики рассчитанных численным методом плащей невидимости.

Объект исследования — процесс рассеяния электромагнитной волны на плащах невидимости и мимикрии.

Предмет исследования — характеристики рассеяния плащей, зависящие от их физико-геометрических параметров, рассчитываемых с использованием координатной трансформации.

Методы исследования. Основными методами, базирующимися на электродинамике, при помощи которых в работе рассчитывали материальные параметры плащей с определенными электродинамическими характеристиками, являются подходы, основанные на использовании координатных трансформаций, которые, в свою очередь, базируются на инвариантности уравнений Максвелла относительно координатных

преобразований. Для получения координатных зависимостей использовали как аналитический, так и численный подходы. Численное моделирование рассеяния волн на полученных структурах проводили с использованием метода конечных элементов.

Научная новизна полученных результатов.

Полученные в рамках основанных на использовании координатных трансформаций подходов аналитические выражения для расчета материальных параметров трансформированной системы позволили создавать электродинамические структуры с новыми необычными свойствами. В частности:

1. Впервые показано, что величина рассеяния волн от неидеального плаща невидимости цилиндрической формы практически полностью совпадает с величиной рассеяния от идеально проводящего цилиндра, радиус которого равен радиусу окружности, от которой производится трансформация.
2. Впервые установлена возможность создания плащей мимики, обеспечивающих покрытому ими телу мимикию под тело другой наперед заданной формы, так что для внешнего наблюдателя объект, покрытый таким плащом, представляется объектом другой формы. Продемонстрировано, что материальные параметры в таких плащах имеют несингапурский характер.
3. Впервые показана возможность снижения на несколько порядков суммарной величины напряженности рассеянного плащом невидимости поля, рассчитанного с использованием численного метода, путем выбора значений функций-источников в уравнении Пуассона.

4. Впервые предложен несингулярный плащ-ковер невидимости, полученный путем координатной трансформации в системе координат эллиптического цилиндра, используемый в манере, характерной для ковра невидимости. Обосновано, что работа такого плаща-ковра не зависит от направления падающей волны. Продемонстрирована возможность создания таких цилиндрических плащей-ковров произвольного сечения.

Практическое значение полученных результатов.

1. Предложены схемы координатной трансформации, используемые для расчета материальных параметров, которые позволяют создание несингулярных цилиндрических плащей невидимости и мимикии, что представляет собой определенный вклад в развитие трансформационно-оптических подходов. Эффект мимикии, установленный в работе, может послужить основой для создания новых устройств, работающих в различных диапазонах частот.
2. Предложенный в работе неидеальный несингулярный плащ невидимости цилиндрической формы позволяет, в принципе, осуществить его практическую реализацию.
3. Результаты диссертации также могут быть использованы для оценки производительности при экспериментальном создании неидеальных многослойных плащей невидимости с однородными величинами материальных параметров в каждом слое.
4. Используемый при создании несингулярного плаща-ковра подход может быть применен при расчете несингулярных цилиндрических плащей-

ковров произвольного сечения.

5. Массив полученных данных по рассеянию электромагнитных волн плащами мимикрии может, в принципе, быть использован при расчете многослойных плащей мимикрии с однородными величинами материальных параметров в каждом слое путем проведения многоокритериальной оптимизации.

Личный вклад соискателя состоит в постановке задач с учетом литературных данных, проведении расчетов и моделировании (верификации) работы рассчитанных плащей, активном участии в анализе и интерпретации полученных результатов, подготовке и написании статей и тезисов докладов.

Формулировка темы и цели, анализ и обсуждение полученных результатов исследования и формулировка выводов проведены совместно с научным руководителем канд. физ-мат. н., доц. А. А. Звягинцевым.

Апробация результатов диссертации. Материалы диссертации прошли апробацию на следующих конференциях: The 11th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (Харьков, Украина, 2011 г.); The 6th International Conference on Ultra Wideband and Ultra Short Impulse Signals (Севастополь, Украина, 2012 г.); Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo), 22nd International Crimean Conference (Севастополь, Украина, 2012 г.); Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo), 23rd International Crimean Conference (Севастополь, Украина, 2012 г.); X International Conference on Antenna Theory and Techniques (Харьков, Украина, 2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 5 статьях, опубликованных в специализированных научных изданиях и в 5 тезисах докладов на международных конференциях.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 5

разделов, выводов и списка цитируемой литературы.

В первом разделе приведен обзор публикаций по использованию подходов трансформационной оптики при проектировании плащей невидимости, а также публикаций, относящихся к созданию и усовершенствованию метаматериалов. Показано общее направление прогресса в исследованиях. Особое внимание уделено имеющимся подходам к созданию плащей, материальные параметры которых имеют несингулярный характер, их достоинствам и недостаткам.

Второй раздел посвящен исследованию рассеяния электромагнитных волн от неидеального плаща невидимости и его зависимости от параметров координатной трансформации, используемой при его расчете.

В третьем разделе рассматривается создание несингулярного плаща-ковра невидимости путем использования несингулярного одностороннего эллиптического плаща подобно ковру невидимости, располагая его большую полуось на проводящей плоскости. Для проверки функционирования такого плаща-ковра проводится численное моделирование. Также рассматривается численный подход к получению материальных параметров путем решения уравнения Лапласа – Пуассона.

В четвертом разделе, используя выводы второго раздела, демонстрируется возможность создания плащей мимики – плащей, обеспечивающих покрытому ими телу мимикирию под тело другой формы. Проводится численное моделирование, подтверждающее работу таких плащей.

В пятом разделе исследуется зависимость параметров плаща невидимости, рассчитанных численным методом, от значений функций-источников в уравнении Пуассона.

В заключение приводятся выводы по работе.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Трансформационная оптика представляет собой новый подход к созданию электромагнитных систем, которые обеспечивают беспрецедентный ранее контроль распространения электромагнитных волн. Она использует факт эквивалентности между материальными параметрами среды и геометрией пространства в их влиянии на распространение света.

Диапазон проблем, при решении которых используется трансформационная оптика, чрезвычайно широк. Здесь следует упомянуть исследования в области субволновой фокусировки [1] и создания супер [2–5] и гиперлинз [5–7], которые позволяют преодолеть дифракционный предел, а также контроль спонтанной эмиссии [8,9].

Огромный интерес вызывает возможность создания плащей невидимости, устройств, обеспечивающих полное скрытие тела для внешнего наблюдателя [10, 11].

Трансформационная оптика применяется в задачах моделирования космических явлений, таких как черные дыры [12], космические струны [13] и измерения энергии Казимира в пространстве де Ситтера [14]. Подход трансформационной оптики перешагнул рубеж использования собственно в радиофизике, применяется в акустике [15–17] и в термодинамике [18–20].

Прогресс трансформационной оптики неразрывно связан с достижениями в области исследования и создания метаматериалов – нового класса искусственных, не существующих в природе материалов.

Свойства всех природных и созданных до недавнего времени человеком материалов в значительной степени определяются их химическим составом и связями между составляющими их атомами и молекулами. При этом возмож-

ности получения материалов с желаемыми, наперед заданными свойствами были ограничены.

Для целей данного рассмотрения важным является то, что все, ранее используемые материалы, имели положительное значение либо диэлектрической ϵ , либо магнитной μ проницаемости, либо той и другой.

Диэлектрическая и магнитная проницаемость представляют собой макроскопические характеристики, описывающие взаимодействие вещества с электромагнитным излучением. Сама возможность такого описания – следствие того факта, что составляющие вещество атомы и молекулы, а также структуры, образованные ими (ячейки кристаллической решетки), имеют размеры, много меньшие, чем длина волны излучения.

На рис. 1.1 представлены все возможные комбинации значений материальных параметров (ϵ и μ) и их влияние на электромагнитные свойства вещества.

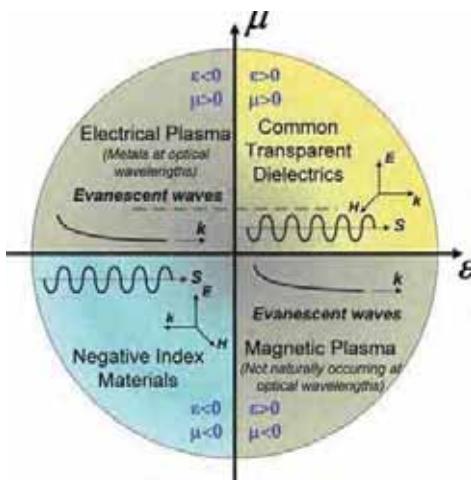


Рисунок 1.1 – Пространство параметров ϵ и μ .

Две координатных оси соответствуют действительным частям диэлектрической и магнитной проницаемостей [21]

Область в первой четверти представлена материалами с одновременно по-

ложительными значениями ε и μ , что включает в себя большинство диэлектрических материалов. Область во второй четверти соответствует металлам, сегнетоэлектрикам и легированным полупроводникам, которые могут проявлять отрицательную диэлектрическую проницаемость на определенных частотах ниже плазменной. Область в четвертой четверти представлена некоторыми ферромагнетиками.

В материалах, соответствующих второй и четвертой четверти, электромагнитные волны экспоненциально затухают и, таким образом, не могут в них распространяться. В материалах из первой же четверти, возможно распространение электромагнитных волн, причем векторы напряженности электрического и магнитного поля \vec{E} и \vec{H} и волновой вектор \vec{k} образуют правую тройку.

Наконец, область в третьей четверти, с одновременно отрицательными ε и μ , не имеет соответствующих ей природных материалов.

Свойства таких, на тот момент гипотетических материалов (с $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$), были исследованы Веселаго [22] еще в 60-е годы XX века. Он показал, что в таких средах векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют левую тройку векторов ("левая" среда). В самом деле, для плоской монохроматической волны, у которой все величины пропорциональны $e^{i(kz-\omega t)}$, уравнения Максвелла могут быть записаны как:

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \vec{E} &= \mu\omega \vec{H}; \\ \vec{k} \times \vec{H} &= \varepsilon\omega \vec{E},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где ω – круговая частота.

Из рис. 1.1 видно, что если $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$, то \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую тройку векторов, а если $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ – то левую.

В связи с этим вектор Умова-Пойнтинга $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ направлен противоположно волновому вектору \vec{k} и в таких материалах будет наблюдаться обращен-

ный эффект Доплера и обращенный эффект Вавилова-Черенкова.

Также Веселаго был уточнен закон Снеллиуса путем введения коэффициента – соотношения, учитывающего "левизну" и "правизну" каждой из сред

$$\frac{\sin \phi}{\sin \psi} = n_{1,2} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad (1.2)$$

где ϕ – угол падения луча света, ψ – угол преломления луча света, $n_{1,2}$ – относительный показатель преломления, а p_1 и p_2 – величины, которые могут принимать значения ± 1 , и, характеризующие "правизну" или "левизну" каждой среды соответственно.

Работа Веселаго [22] долгое время имела чисто теоретический интерес, поскольку не были известны такие "левые" материалы. Одна из проблем создания таких материалов заключалась в том, что на частотах выше нескольких гигагерц магнитный отклик быстро уменьшается и на оптических частотах во всех природных материалах магнитная проницаемость практически равна проницаемости вакуума. Причина этого заключается в том, что магнитная поляризация является результатом взаимодействия электромагнитного поля либо со спинами неспаренных электронов, либо с токами орбитальных электронов, собственные частоты которых лежат в нижней микроволновой области.

Необходимо отметить и то, что взаимодействие магнитной составляющей поля с атомами вещества намного слабее, чем электрической. Как показано в [21], связь магнитного поля с атомом пропорциональна магнетону Бора $\mu_B = e\hbar / 2m_e c = \alpha e a_0 / 2$, в то время как связь электрического поля пропорциональна $e a_0$, где a_0 – радиус Бора, \hbar – постоянная Планка, e и m_e – заряд и масса электрона соответственно, c – скорость света. Индуцированный магнитный диполь также содержит постоянную тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$, так что взаимодействие света с веществом через магнитную проницаемость в α^2 раз

слабее, чем взаимодействие света с веществом через диэлектрическую проницаемость. Все это затрудняет получение магнитного отклика в диапазоне частот выше нескольких гигагерц.

Как уже было сказано, металлы имеют отрицательную диэлектрическую проницаемость на частотах, ниже плазменной. Плазменная частота для металлов лежит в ультрафиолетовой области спектра. Например, для меди $\omega_p = 13.4 \cdot 10^{15}$ Гц. [21].

Диэлектрическая проницаемость металлов подчиняется, как показано в [21], модифицированной модели Друде-Лоренца, учитывающей не только свободные электроны, но и переходы электронов с орбитали на орбиталь. При этом для больших частот, близких, но меньших плазменной, диэлектрическая проницаемость, во-первых, отрицательна, а, во-вторых, имеет практически действительное значение (с незначительной мнимой частью). Однако, с уменьшением частоты мнимая часть, соответствующая потерям (диссипации энергии), стремительно растет.

В работе [23] была предложена структура, позволяющая снизить эффективную плазменную частоту. Она состояла из длинных и очень тонких цилиндрических металлических проводников, расположенных периодически в квадратной решетке. Электрическое поле прикладывалось параллельно проводникам. При этом длина волны излучения была много больше как радиуса проводника, так и параметра решетки (длины ребра ячейки).

Было показано, что такая структура приводит к двум эффектам: во-первых, поскольку электроны ограничены для перемещения только в пределах проводника, а радиус проводника много меньше длины волны, то это приводит к снижению эффективной электронной плотности. Во-вторых, тонкие проводники имеют большую индуктивность, которая препятствует изменению протекающего в них тока. Это подобно тому, как если бы носители заряда – электроны

увеличили свою массу. Вычисленная авторами эффективная масса электрона составила почти 15 масс протона, а плазменная частота порядка 8 ГГц.

Рассмотренная выше структура однако анизотропна и демонстрирует отрицательные значения ϵ только для волн, электрическое поле в которых параллельно осям проводников. Располагая проводники вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, можно получить изотропный материал, когда длина волны много больше параметра решетки.

Такой подход позволил создавать искусственные материалы, демонстрирующие отрицательное значение ϵ в микроволновой области.

В 1999 году в работе [24] были предложены микроструктуры, названные резонаторами типа "разрезное кольцо" (split ring resonators).

Эти сами по себе немагнитные проводящие структуры обеспечивали сильный магнитный отклик на высоких частотах.

Когда размеры параметра решетки таких структур много меньше длины волны, из них может быть составлен материал, характеризуемый определенным значением μ . При этом каждая такая структура будет играть роль искусственного атома. Для такого материала было продемонстрировано, что на частотах выше резонансной может быть получено отрицательное эффективное значение магнитной проницаемости.

Работа такого резонатора может быть проиллюстрирована, исходя из следующих соображений. Рассмотрим проводящую круглую пластину, облучаемую электромагнитной волной с компонентой магнитного поля, перпендикулярной плоскости пластины. В такой пластине будет индуцироваться круговой ток, который будет создавать магнитный поток, противодействующий изменению внешнего магнитного потока, в соответствии с правилом Ленца. Поскольку токи в основном сосредоточены вблизи краев пластины, можно удалить ее внутреннюю часть и оставить кольцо. Однако магнитный отклик такой

конструкции будет чисто индуктивным и его величина мала. Для его усиления авторы [24] предложили резонансную конструкцию – кольцо с разрезом, в котором разрез препятствует формированию кругового тока и служит емкостью, на краях которой накапливаются заряды. Кроме того, было предложено использовать кольцо-в-кольце, когда два разрезных кольца концентрически расположены одно внутри другого, причем кольца располагаются так, что разрезы ”смотрят” в противоположные стороны. Дело в том, что в одинарном разрезном кольце заряды, скапливаясь вокруг разрыва, создают нежелательный электрический момент. При такой же конструкции электрические дипольные моменты будут стремиться нейтрализовывать друг друга.

Как и при любом резонансе, отклик системы на внешнее воздействие на частотах ниже резонансной совпадает по направлению с приложенным воздействием и противоположен ему на частотах несколько выше резонансной. Если резонанс может быть сделан достаточно острый, возможно получить отрицательное значение для μ_{eff} выше резонансной частоты, как изображено на рис.

1.2.

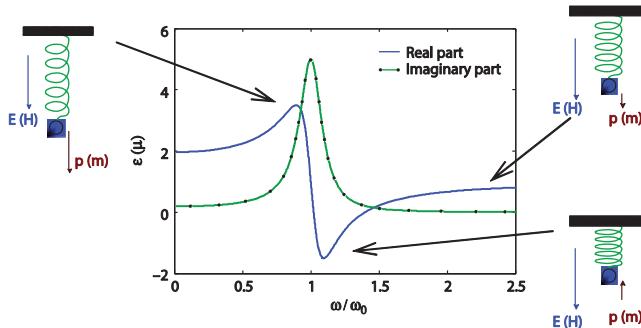


Рисунок 1.2 – Положительный и отрицательный электромагнитный отклик вблизи резонанса. Три механических осциллятора иллюстрируют механическую аналогию [21]

Объединяя два набора структур с $\epsilon_{eff} < 0$ и $\mu_{eff} < 0$, возможно получение

метаматериала с отрицательным показателем преломления $n = \pm\sqrt{\epsilon\mu}$, который был впервые экспериментально продемонстрирован в [25, 26].

Дальнейшие усилия исследователей были направлены на получение метаматериалов, работающих в инфракрасном и оптическом диапазонах частот.

В принципе, увеличение рабочей частоты может быть достигнуто простым масштабированием описанной выше конструкции на основе резонаторов типа "разрезное кольцо".

Так в работе [27] представлен метаматериал на основе резонаторов типа "разрезное кольцо", работающий в диапазоне нескольких ТГц.

Материал, использующий в качестве резонатора одинарное разрезное кольцо и работающий на частотах порядка 100 ТГц, описан в [28].

Однако такой подход связан как с принципиальными, так и с техническими трудностями. Как показано в [29], резонансная частота резонаторов типа "разрезное кольцо" линейно возрастает с уменьшением их размеров до частот примерно 100 ТГц, а затем наступает насыщение. Это связано с тем, что на высоких частотах, кинетическая энергия электронов в металле возрастает относительно магнитной энергии (на низких частотах ее влиянием можно пренебречь).

Кроме того существуют технологические трудности, связанные с изготавлением таких резонаторов, поскольку технологии оптической или электронно-лучевой литографии обеспечивают послойное нанесение на подложку. В то же время для возникновения магнитного отклика требуется, чтобы плоскость слоя, на котором размещается резонатор, была параллельна волновому вектору падающей волны.

Поэтому ведутся интенсивные поиски структур, демонстрирующих отрицательный показатель преломления в инфракрасном и видимом диапазонах. Так в работе [30] предложена многослойная металл-диэлектрик-металл

перфорированная структура с отрицательным показателем преломления в диапазоне длин волн порядка $2 \mu m$.

Метаматериал типа "рыбачья сеть" предложенный в [31] имеет отрицательный показатель преломления в диапазоне длин волн порядка $580 nm$ (желтый свет).

В силу трудностей предсказания свойств тех или иных структур широко используется численное моделирование с применением подходов оптимизации.

В работе [32] была предложена методика проектирования микроструктур "левых" метаматериалов, использующая метод конечных разностей во временной области (МКРВО, английское сокращение FDTD). Проектируемая микроструктура состоит из набора квадратных проводящих пластин – ячеек. При этом проводится оптимизация с использованием генетического алгоритма. Предложенный подход позволяет рассчитывать "левые" метаматериалы для широкого диапазона частот.

Подобный подход, но с использованием сотоподобных ячеек, что дает более быструю сходимость при оптимизации, предложен в [33].

Как было показано ранее, в "левых" метаматериалах используются резонансные эффекты для их работы и поэтому они являются узкополосными по своей природе. Несмотря на это, предпринимаются большие усилия для создания метаматериалов, работающих в широкой полосе частот. Метаматериалы, основанные на резонаторах типа "разрезное кольцо", не очень хорошо подходят для достижения этой цели. Намного более перспективными являются метаматериалы, основанные на взаимодействии поверхностных плазмонных поляритонов (поверхностных волн), генерируемых в результате взаимодействия электромагнитных волн с границей раздела двух материалов с разными знаками диэлектрической и/или магнитной проницаемостей [34, 35].

Вероятно, одними из самых многообещающих метаматериалов на основе

поляритонов являются уже упоминавшиеся выше материалы типа "рыбачья сеть", состоящие из чередующихся слоев металла и диэлектрика, с проделанными в них отверстиями [30, 36].

С появлением метаматериалов стали доступны все возможные комбинации материальных параметров, что открывает широкие возможности для управления распространением электромагнитных волн в них.

Закономерно возникает вопрос: каким образом мы могли бы реализовать желаемое, наперед заданное поведение волн в таких средах? Ответ на него дает трансформационная оптика.

Трансформационная оптика базируется на инвариантности уравнений Максвелла относительно координатных преобразований. Еще в начале 60-х годов прошлого века в работе [37] а также в работах [38, 39] были получены фундаментальные результаты, на которые опирается современная трансформационная оптика. Так в работе [37] не только было показано, что уравнения Максвелла не меняют форму при деформирующих пространство преобразованиях, но также получены выражения для радиально анизотропной диэлектрической и магнитной проницаемостей сферически-неоднородного материала

$$\varepsilon(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2(R)} \frac{dr(R)}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{dr(R)/dR} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{dr(R)/dR} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

соответствующие пространственной трансформации от сферических координат r, Θ, φ к координатам $R(r), \Theta, \varphi$. Также было показано, что плоская волна, проходящая через указанный выше материал проходит через него без искажений.

К сожалению работы [37–39] были фактически забыты, а результаты, представленные в них, были повторно установлены в работах [40, 41] а также в [42].

Трансформационная оптика описывает отношения между величинами в двух областях пространства, координаты которых связаны пространственными преобразованиями.

В работе [41] было показано, что если мы имеем некоторое пространство, полученное из исходного путем координатных преобразований вида

$$\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r}),$$

или в координатной форме

$$\vec{u}_i' = \vec{u}_i'(u_1, u_2, u_3),$$

где \vec{u}_i' ($i=1, 2, 3$) обозначает компоненты трансформированной координатной системы, то уравнения Максвелла с учетом материальных уравнений среды для нетрансформированного пространства могут быть записаны как:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t};$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Для трансформированного пространства уравнения Максвелла относительно новых координат $\vec{u}_1', \vec{u}_2', \vec{u}_3'$ могут быть представлены в форме:

$$\nabla' \times \vec{E}' = -\mu' \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t};$$

$$\nabla' \times \vec{H}' = \epsilon' \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}, \quad (1.5)$$

где μ' и ϵ' представляют собой тензорные величины, а \vec{H}' и \vec{E}' представляют собой перенормированные (разложенные по новому базису) \vec{H} и \vec{E} .

Таким образом, уравнения Максвелла в трансформированном пространстве могут быть записаны точно в такой же форме, как в исходном пространстве.

Для однородной изотропной среды, в которой отсутствуют сторонние токи и заряды, одним из решений уравнений Максвелла будет плоская волна $\vec{H} = \vec{H}(X)$, $\vec{E} = \vec{E}(X)$ распространяющаяся вдоль оси X . В случае же "искаженной" среды, аналогичным решением уравнений Максвелла будет волна, распространяющаяся вдоль соответствующей криволинейной линии, как изображено на рис. 1.3.

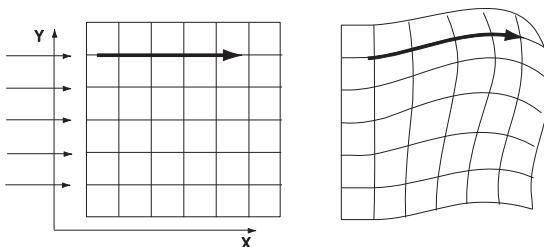


Рисунок 1.3 – Путь светового луча в нетрансформированной и трансформированной системах

Можно посмотреть на это под другим углом. В трансформированном ("искаженном") пространстве, в соответствии с принципом Ферма, луч света распространяется по кратчайшему оптическому пути, даже несмотря на криволинейный характер этого пути.

Важно то, что, используя различные координатные преобразования, можно управлять траекторией световых лучей, добиваясь желаемого результата.

Необходимо также отметить, что геометрическая трансформация эквивалентна изменению материальных параметров и наоборот. По сути, неоднородность и анизотропия играют роль геометрической деформации, что приводит к практически эффективному способу создать любое преобразование координат в пространстве, обеспечивая только полный контроль над ε и μ . Поэтому

метаматериалы могут, по крайней мере в принципе, быть использованы для имитации преобразования координат и заставить свет следовать по изогнутым траекториям.

Первые (сферические) плащи невидимости были одновременно предложены в работах [10, 11] Дж. Пенди и У. Леонхардтом (именно Дж. Пенди был введен термин “invisibility cloak”). Такие плащи могут быть получены, определяя координатные преобразования, отображающие шар радиуса b в полый шар $a < r < b$. При этом центральная точка шара отображается (раздувается) в сферу радиуса a .

Такое преобразование координат может быть задано посредством выражений:

$$r' = a + r(b-a)/b; \theta' = \theta; \phi' = \phi. \quad (1.6)$$

При этом луч света L в исходном пространстве будет соответствовать лучу света L' в трансформированном пространстве (см. рис. 1.4).

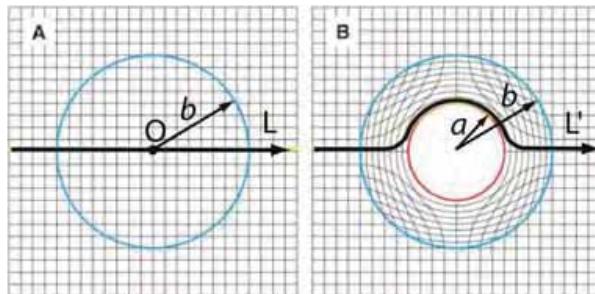


Рисунок 1.4 – Схема координатной трансформации в сферическом плаще [43]

Как видно из рис. 1.4, луч света огибает тело радиуса a . Для внешнего наблюдателя такое тело будет невидимым аналогично тому, как в исходном пространстве невидима точка O . Можно сказать, что в трансформированном про-

странстве "моделируется" поведение световых лучей, никак не взаимодействующих с точкой в исходном пространстве.

Похожие трансформационные выражения легко могут быть получены и для случая цилиндрического плаща.

Для проверки работоспособности предложенной концепции плаща невидимости использовались различные подходы. Так в работе [44] исследовались временные задержки и отражения от плаща невидимости, используя подход геометрической оптики. Показано, что для макроскопических тел, размер которых намного больше длины волны, отражение может быть экспоненциально мало, а временная задержка однородна для всех направлений. Аналогичный подход, использующий трассировку лучей, представлен в работе [45].

Помимо геометрооптического подхода для проверки возможности создания идеального плаща, использовалось численное моделирование, с применением метода конечных элементов. В первой работе [46] такого плана продемонстрировано, что способность плаща скрывать окруженный им объект не слишком чувствительна к умеренным изменениям диэлектрической и магнитной проницаемостей. Также было показано, что эффективность такого плаща уменьшается плавно с увеличением потерь, и что возможно создание неидеального (но все же достаточно эффективного) восьмислойного плаща, каждый из слоев которого состоит из однородного материала.

Однако в силу дискретной природы численные методы не могут использоваться для того, чтобы доказать, что создание идеального плаща невидимости, обеспечивающего нулевое рассеяние, вообще возможно.

В работах [47, 48] (цилиндрический плащ) и в [49] (сферический плащ) задача рассеяния электромагнитных волн плащами невидимости решена аналитически, что подтвердило возможность создания идеального плаща невидимости, обеспечивающего полное сокрытие объекта от внешнего наблюдателя.

Помимо упомянутых выше сферических и цилиндрических плащей были предложены подходы к созданию плащей различной, в том числе произвольной формы. Так в работе [50] предложен метод создания многоугольного или эллиптического плаща. В работе [51] описан подход на основе разложения в ряд Фурье для расчета цилиндрических плащей произвольного поперечного сечения. В работе [52] в аналитической форме, подобно подходу [51], получены обобщенные процедуры трансформации, позволяющие разработку двумерных плащей произвольной формы. Метод для конструирования важного класса двумерных неправильных многоугольных плащей, который затем был обобщен на случай 2D плащей произвольной геометрии, был предложен в [53]. Методика пространственной трансформации, применяемая к важному классу двумерных электромагнитных плащей, которые не обладают осевой симметрией вокруг продольной оси, была представлена в [54]. Такие плащи основаны на эксцентрической эллиптической кольцевой геометрии, которая представляет собой обобщение ранее опубликованных конфигураций плащей. Наконец в [55] получены выражения для материальных параметров тороидальных плащей.

Однако на пути создания идеального плаща невидимости имеются значительные проблемы. Одной из проблем в предложенной выше схеме является возможность возникновения сингулярности материальных параметров на внутренней границе плаща. Такой плащ, значения материальных параметров которого стремятся к бесконечности называется сингулярным. Так в цилиндрическом плаще, рассчитанном с использованием координатного преобразования, отображающего цилиндр радиуса b в полый цилиндр $a < r < b$, где ось цилиндра отображается на цилиндрическую поверхность радиуса a , одна из компонент материальных параметров будет стремиться к бесконечности на его внутренней границе.

Для решения данной проблемы были предложены различные подходы. Од-

ним из них был поиск таких преобразований координат, которые не вели бы к сингулярности.

Например, вместо преобразования, "раздувающего" точку в круг, было предложено координатное преобразование в системе координат эллиптического цилиндра, "раздувающее" линейный сегмент между фокусами эллипса в эллипс [56]. Такое преобразование приводит к материальным параметрам, которые несингулярны, а диапазон их изменения сравнительно невелик. К сожалению такой плащ является идеальным только при его облучении параллельно межфокусной оси эллипса, хотя показана возможность создания всеракурсного неидеального плаща путем уменьшения модуля эксцентриситета эллипса.

В работе [57] был представлен произвольно асимметричный плащ с несингулярными и гомогенными параметрами, полученный путем деления произвольной N-сторонней многоугольной области в N треугольных областей с пространственным сжатием и сглаживанием внутренней границы многоугольного плаща. Предложенный плащ несинулярен и, кроме того, каждый регион плаща состоит из однородных материалов.

В работе [58] был предложен общий метод для создания приближенного несингулярного двумерного плаща, вычисляя тензоры материальных параметров трехмерного идеального плаща на поперечном зеркально-симметричном сечении.

Одним из наиболее интересных является описанный в работах [43, 59, 60] подход. Вместо использования трансформации в евклидовом пространстве было предложено использовать криволинейную неевклидову трансформацию. Геометрия исходного пространства, называемого в трансформационной оптике виртуальным, представлена на рис. 1.5а. Свет распространяется через виртуальное пространство, состоящее из плоской поверхности и соприкасающейся с ней сферы. Некоторые световые лучи переходят с плоскости на сферу, делают

по ней один оборот и, возвращаясь обратно на плоскость, продолжают путь в исходном направлении. Лучи никогда не пересекают зигзагоподобную линию 1 на сфере. Плоскость и сфера (с нанесенной на них координатной сеткой) отображаются в двумерное пространство, называемое в трансформационной оптике физическим, как показано на рис. 1.5б (окружность 2 показывает границы устройства, а линия 3 – линия касания сферы и плоскости). Раскрывая линию 1, которую свет никогда не пересекает, можно создать область, ограниченную линией 4, скрытую от внешнего наблюдателя (см. рис. 1.5б).

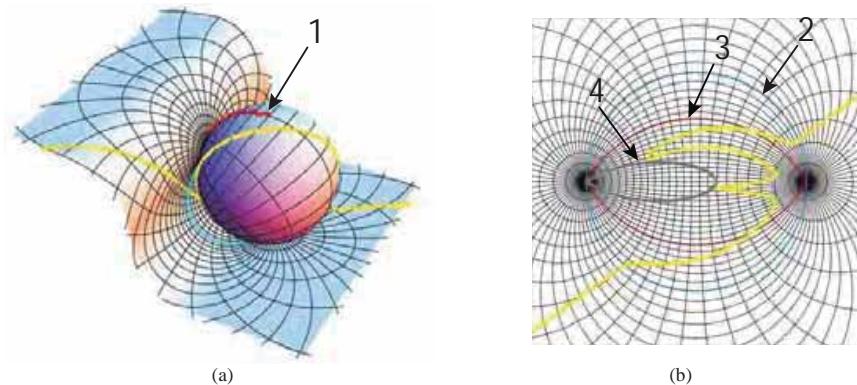


Рисунок 1.5 – Схема неевклидовой трансформации: (а) – виртуальное пространство содержащее сферу и плоскость, которые соединяются вдоль линейного сегмента; (б) – двумерное физическое пространство, где сфера виртуального пространства отображается внутри кривой 3. Скрываемая область – область, ограниченная кривой 4 [60]

Возможно расширение данного подхода для создания трехмерного плаща. Вместо 2D поверхности шара используется 3D поверхность 4D сферы (гиперсфера). Хотя материальные параметры в таком плаще несингулярны, для создания такого плаща все еще необходимо использование резонансных эффектов в метаматериале [61], и такой плащ оказывается узкополосным.

Посредством комбинирования описанной выше схемы с "рыбьим глазом"

Максвелла была продемонстрирована [43] возможность создания плаща, материальные параметры которого всегда больше или равны единице и конечны.

При всех своих достоинствах плащи, полученные с использованием неевклидовой трансформации, не лишены недостатков. Луч света в таком устройстве невидимости проходит дополнительный путь по неевклидовой его части и, таким образом, оно может быть обнаружено путем измерения времени распространения волны или при использовании техники интерферометрии [62].

Как указывают сами авторы, предложенный ими подход предназначен для режима геометрической оптики, т.е. обеспечивает широкополосное всеракурсное сокрытие для лучей, а не для волн.

Еще один принципиально отличный подход состоит в создании так называемых ковров невидимости (*invisibility carpet*). Вместо плаща, который должен обеспечивать невидимость при облучении со всех направлений, ковер обеспечивает невидимость объекта, расположенного на плоскости. Для внешнего наблюдателя объект, расположенный на поверхности и покрытый таким ковром, будет сливаться с плоскостью, мимикрируя под нее, как схематически показано на рис. 1.6.

Впервые эта схема была предложена в работе [63]. При этом объект покрытый плащом располагался на проводящей поверхности. Авторы использовали процедуру оптимизации для минимизации анизотропии при двумерной координатной трансформации. При этом было показано, что возможно создание ковра с единичным значением магнитной проницаемости, т.е. чисто диэлектрического. При этом слабой анизотропией можно пренебречь, получая плащ с изотропным показателем преломления.

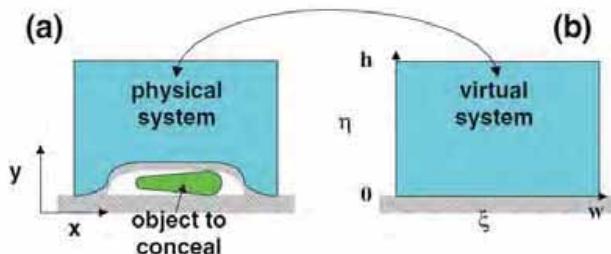


Рисунок 1.6 – Схема устройства ковра невидимости [63]

Численное моделирование подтверждает работоспособность такого плаща-ковра. Однако предложенная конструкция получена посредством двумерной координатной трансформации и, как следствие, может быть обнаружена в третьем измерении. С помощью алгоритмов трассировки лучей, дающих фотографическое изображение объектов, была проверена работоспособность такого плаща [64] и показано, что при наблюдении под углом к плоскости трансформации появляются искажения.

Также была показана возможность создания трехмерных ковров [65, 66], хотя это неизбежно требует наличия в них некоторой анизотропии.

Первоначально плащи-ковры должны были располагаться на проводящей поверхности. В дальнейшем были предложены ковры, работающие на диэлектрической поверхности [67, 68].

Экспериментальная реализация ковра сокрытия, работающего в диапазоне микроволновых частот, была впервые представлена в работе [69]. Ковер был реализован с использованием нерезонансных элементов, что обеспечило его широкополосность (полоса охватывающая диапазон от 13 до 16 ГГц). Этот ковер не мог быть масштабирован к оптическим частотам ввиду того, что используемые металлические элементы имели бы некоторые потери.

Первая экспериментальная демонстрация ковра, обеспечивающего сокрытие объекта в инфракрасном диапазоне, была представлена в работе [70].

Предложенный авторами ковер, состоящий только из изотропных диэлектрических материалов, обеспечивал широкополосное сокрытие в диапазоне длин волн 1400–1800 нм. Ковры, работающие в инфракрасном и видимом диапазонах, были экспериментально представлены в работах [71–73].

Наконец в работе [74] приведен ковер, представляющий собой трехмерную структуру и обеспечивающий широкополосное сокрытие объекта в диапазоне от 1.4 до 2.7 мкм. Несмотря на то, что при расчете ковра фактически использовалась двумерная трансформация, он продемонстрировал хорошую работоспособность для углов обзора до 60 градусов.

Для упрощения экспериментального создания плащей невидимости были предложены устройства, состоящие из нескольких однородных слоев диэлектрика. Так в работе [75] описан цилиндрический плащ, рассчитанный с использованием техники оптимизации посредством минимизации рассеяния от такого устройства.

Ковры, состоящие из нескольких слоев диэлектрика, предложены и в работах [76–80].

Существенным недостатком ковров из изотропных материалов является появление бокового сдвига отраженного от ковра луча (сравнимого с высотой ковра) по сравнению с лучом, отраженным от плоской проводящей поверхности, которая совпадает с основанием плаща [81]. Было показано, что для того, чтобы избежать такого сдвига, материал плаща с необходимостью должен иметь некоторую анизотропию.

1.1 Выводы по разделу

Таким образом, использование метаматериалов, материальные параметры которых могут принимать любые, в том числе и отрицательные значения, вместе с применением трансформационной оптики позволяет обеспечить

полный контроль за распространением электромагнитных волн. Это, в свою очередь, позволяет создавать разнообразные электромагнитные структуры с уникальными свойствами. К числу таких структур относятся плащи невидимости.

Однако, традиционный подход, используемый при расчете таких плащей, может приводить к бесконечно большой величине компонент материальных параметров на внутренней границе плаща. Имеющиеся к настоящему моменту подходы к решению этой проблемы не лишены недостатков. В данной работе проводится исследование координатных трансформаций, позволяющих осуществлять расчет несингулярных цилиндрических плащей как кругового так и произвольного сечений.

Важным является также развитие подходов к получению плащей невидимости произвольной формы. Наконец представляет интерес поиск и создание структур, обладающих новыми, необычными, ранее не встречающимися свойствами.

РАЗДЕЛ 2

НЕИДЕАЛЬНЫЙ ПЛАЩ НЕВИДИМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСИНГУЛЯРНОЙ КООРДИНАТНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

В разделе 2 рассмотрено создание неидеального несингулярного цилиндрического плаща невидимости с использованием трансформационно-оптического подхода. Анализируется влияние параметров координатной трансформации на характеристики рассеяния такого покрытия, а также на величины его материальных параметров.

Результаты раздела опубликованы в работах [82, 83].

2.1 Постановка задачи

Под созданием плащей здесь и далее понимается нахождение координатной трансформации и вычисление на ее основе материальных параметров трансформированной системы, которые, как предполагается, обеспечат плащу ожидаемые свойства. Далее проводится численное моделирование рассеяния электромагнитных волн на рассчитанном плаще с целью проверки его работы. Конкретное содержание описанных выше шагов будет разъясниться по мере изложения.

Рассмотрим координатную трансформацию в системе координат кругового цилиндра, как изображено на рис. 2.1, где кольцевая область $r \in [\Gamma, \Omega]$ отображается в кольцевую область $r' \in [\Gamma', \Omega']$.

Такая трансформация выбрана с целью избежать сингулярности материальных параметров, которая неизбежно имеет место, если в кольцевую область $r' \in [\Gamma', \Omega']$ отображается точка.

В то же время, поскольку кольцевая область $r \in [\Gamma, \Omega]$ имеет конечный размер, полученный в результате такой трансформации плащ невидимости не будет идеальным.

Требуется найти распределение материальных параметров в таком плаще.

Исходная кольцевая область в трансформационной оптике носит название виртуального пространства, а область, в которую производится отображение – физического пространства. Все величины в физическом пространстве обозначим буквами со штрихом, а в виртуальном пространстве – буквами без штриха.

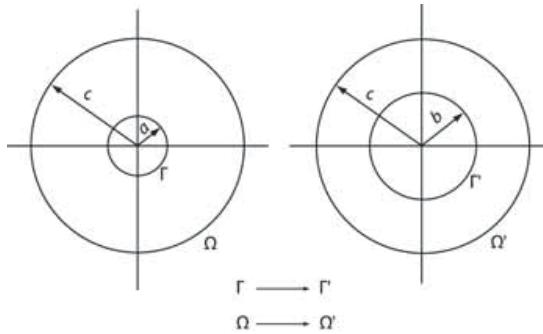


Рисунок 2.1 – Схема координатной трансформации

Такую координатную трансформацию в цилиндрической системе координат можно представить как:

$$r' = \frac{c-b}{c-a} \cdot (r-a) + b; \theta' = \theta; z' = z. \quad (2.1)$$

Здесь и далее виртуальное пространство предполагается однородным, с действительными величинами ε и μ равными 1. В результате в плащах, рассчитанных с использованием описанных ниже подходов, будут отсутствовать потери. В данной работе рассматриваются только такие плащи.

2.2 Получение компонент материальных параметров

Как было упомянуто ранее, уравнения Максвелла инвариантны относительно координатных трансформаций и отличаются только материальными параметрами. Поэтому задача сводится к определению того, как связаны величины материальных параметров в исходной и трансформированной системах.

Для решения этой задачи полезно будет сначала определить некоторые соотношения между координатами, возникающие при преобразовании от одного пространства к другому. Необходимо отметить, что координатные системы, используемые в обоих пространствах, не зависят от вида преобразования и могут быть выбраны произвольно. Первоначально, для простоты, будем считать их декартовыми.

Предположим, что координаты двух пространств связаны посредством функции преобразования, связывающей радиус-векторы обоих пространств как

$$\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r}), \quad (2.2)$$

или в компонентной форме

$$u'^i = u^i(u^i).$$

Радиус вектор \vec{r} представляет собой как функцию u^i , так и функцию u^i . Его частные производные относительно u^i (или u^i) представляют собой координатные вектора [84]:

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}; \quad \vec{b}_i^* = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}. \quad (2.3)$$

Параллелепипед, образованный тремя координатными векторами, имеет объем

$$V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1). \quad (2.4)$$

Помимо набора координатных векторов имеется набор взаимных координатных векторов \vec{a}^i . Наборы связаны между собой следующим соотношением (свойство ортогональности)

$$\vec{a}^i \cdot \vec{a}_j = \delta_j^i, \quad (2.5)$$

где нижний и верхний индексы обозначают координатные и взаимные координатные векторы соответственно, а δ_j^i обозначает символ Кронекера.

Величины в пространстве могут иметь различные компоненты в двух координатных системах. Для нахождения связи между компонентами найдем сначала связь между координатными векторами. Она может быть получена следующим образом

$$\vec{b}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u^i} \vec{a}_j. \quad (2.6)$$

Определим набор производных, связывающих два координатных вектора как якобианову матрицу

$$\Lambda = \left(\Lambda_i^{j'} \right) = \left(\frac{\partial u^j}{\partial u^i} \right). \quad (2.7)$$

При этом инверсная матрица определится как

$$\Lambda^{-1} = \left(\Lambda_{j'}^i \right) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial u^j} \right). \quad (2.8)$$

С учетом (2.8) можно записать

$$\vec{a}_i = \Lambda_i^j \vec{b}_j. \quad (2.9)$$

Выражение для полного дифференциала радиус-вектора имеет вид

$$d\vec{r} = \vec{a}_i du^i = \vec{a}^i du_i. \quad (2.10)$$

С учетом изложенного для радиус-вектора мы можем записать

$$d\vec{r} = \vec{b}_j du^j = \Lambda_j^i \vec{a}_i du^j = \vec{a}_i \Lambda_j^i du^j.$$

Отсюда, с учетом (2.10) получаем

$$du^i = \Lambda_j^i du^j. \quad (2.11)$$

и с использованием (2.8) имеем

$$\Lambda_j^i du^j = \Lambda_j^i \Lambda_k^j du^k = \delta_k^i du^k = du^i. \quad (2.12)$$

Также нам понадобится выражение для линейного элемента ds , который представляет собой длину $d\vec{r}$. Используя уравнение (2.10), мы можем представить ds как

$$(ds)^2 = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j du^i du^j = \vec{a}^i \cdot \vec{a}^j du_i du_j, \quad (2.13)$$

Скалярные произведения координатных векторов представляют собой метрические тензоры g_{ij} и g^{ij} и уравнение (2.13) может быть записано как

$$(ds)^2 = g_{ij} du^i du^j = g^{ij} du_i du_j. \quad (2.14)$$

В декартовой координатной системе метрические тензоры представляют собой просто δ_{ij} и δ^{ij} , тогда как в криволинейных координатных системах метрические тензоры определяются как

$$g_{ij} = \Lambda_i^k \Lambda_j^l \delta_{kl}; g^{ij} = \Lambda_k^i \Lambda_l^j \delta^{kl}. \quad (2.15)$$

Выражения (2.15) могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{aligned} g &= (g_{ij}) = (\Lambda^{-1})^T I \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^T \Lambda^{-1}; \\ g^{-1} &= (g^{ij}) = \Lambda I \Lambda^T = \Lambda \Lambda^T. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Координатные векторы, как правило, не имеют единичной длины. Их соответствующие единичные векторы получаются путем нормализации:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{a}_i}{\sqrt{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i}} = \frac{\vec{a}_i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad \vec{e}^i = \frac{\vec{a}^i}{\sqrt{\vec{a}^i \cdot \vec{a}^i}} = \frac{\vec{a}^i}{\sqrt{g^{ii}}}, \quad (2.17)$$

где g_{ii} и g^{ii} представляют собой диагональные элементы тензоров g_{ij} и g^{ij} соответственно ($i = 1, 2, 3$).

Подставляя выражение (2.9) в (2.4), можно получить следующую формулу для объема

$$V = \Lambda_1^i \cdot \vec{b}_i \cdot (\Lambda_2^j \cdot \vec{b}_j \times \Lambda_3^k \cdot \vec{b}_k) = \Lambda_1^i \Lambda_2^j \Lambda_3^k \cdot \vec{b}_i \cdot (\vec{b}_j \times \vec{b}_k). \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) также может быть записано в виде

$$V = \det(\Lambda^{-1}). \quad (2.19)$$

Используя все представленные выше выражения, перейдем теперь непосредственно к установлению связи между материальными параметрами в различных координатных системах. Для этого исследуем, как уравнения Максвелла преобразуются при переходе от одной координатной системы к другой.

В трансформационной оптике виртуальное пространство обычно представ-

ляет собой однородную среду с материальными параметрами ε и μ и известными полями \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} в ней. Электромагнитные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла и материальным соотношениям

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}; \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho; \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (2.23)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2.24)$$

Эти физические величины не зависят от координатной системы, но могут иметь различные компоненты в разных системах. Мы определяем новый набор величин ε , μ , \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} в другом пространстве, называемом физическим, которое получено из первоначального пространства путем координатной трансформации. Для этого нам необходимо сформулировать уравнения Максвелла в новой, криволинейной системе координат. Следуя подходу, представленному в [10, 42], используем теорему Стокса

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{a}, \quad (2.25)$$

и рассмотрим интегрирование дифференциального элемента, показанного на рис. 2.2.

При интегрировании левой части выражения (2.25) вдоль указанного пути

получим

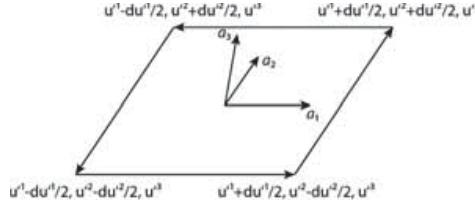


Рисунок 2.2 – Путь интегрирования

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{H} \cdot d\vec{r} &= (\vec{H} \cdot \vec{a}_1 du^{(1)})_{u^{(2)}-du^{(2)}/2} + (\vec{H} \cdot \vec{a}_2 du^{(2)})_{u^{(1)}+du^{(1)}/2} \\
 &\quad - (\vec{H} \cdot \vec{a}_1 du^{(1)})_{u^{(2)}+du^{(2)}/2} - (\vec{H} \cdot \vec{a}_2 du^{(2)})_{u^{(1)}-du^{(1)}/2} = \\
 &= [\vec{H} \cdot \vec{a}_1 du^{(1)} - \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{a}_1 du^{(1)})}{\partial u^{(2)}} \frac{du^{(2)}}{2}] + [\vec{H} \cdot \vec{a}_2 du^{(2)} + \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{a}_2 du^{(2)})}{\partial u^{(1)}} \frac{du^{(1)}}{2}] \\
 &\quad - [\vec{H} \cdot \vec{a}_1 du^{(1)} + \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{a}_1 du^{(1)})}{\partial u^{(2)}} \frac{du^{(2)}}{2}] - [\vec{H} \cdot \vec{a}_2 du^{(2)} - \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{a}_2 du^{(2)})}{\partial u^{(1)}} \frac{du^{(1)}}{2}] \\
 &= (h_1 du^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_1}{\partial u^{(2)}} du^{(1)} du^{(2)}) + (h_2 du^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_2}{\partial u^{(1)}} du^{(1)} du^{(2)}) \\
 &\quad - (h_1 du^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_1}{\partial u^{(2)}} du^{(1)} du^{(2)}) - (h_2 du^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_2}{\partial u^{(1)}} du^{(1)} du^{(2)}) \\
 &= (\frac{\partial h_2}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial h_1}{\partial u^{(2)}}) du^{(1)} du^{(2)}. \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (2.25) есть

$$\iint \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{a} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot (\vec{a}_1 du^{(1)} \times \vec{a}_2 du^{(2)}). \tag{2.27}$$

Тогда уравнение (2.25) можно записать как

$$(\nabla \times \vec{H}) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \frac{\partial h_2}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial h_1}{\partial u^{(2)}}. \tag{2.28}$$

Координаты u^i – это декартовы координаты в физическом пространстве, а правая часть уравнения (2.28) представляет собой третью декартову компоненту ротора в физическом пространстве, и таким образом h_i представляют собой компоненты магнитного поля в физическом пространстве

$$H'_i = h_i. \quad (2.29)$$

Подобным же образом аналогичное выражение может быть получено и для компонент электрического поля

$$E'_i = e_i. \quad (2.30)$$

Подставляя уравнение (2.29) в (2.28), получим

$$(\nabla \times \vec{H}) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \frac{\partial H'_2}{\partial u'^1} - \frac{\partial H'_1}{\partial u'^2} = (\nabla' \times \vec{H}')^3. \quad (2.31)$$

С учетом (2.21) уравнение (2.31) может быть записано как

$$(\nabla \times \vec{H}) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2).$$

Разлагая \vec{D} и \vec{J} по векторному базису \vec{a}_i и с учетом (2.4) и (2.19), мы можем записать

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{H}) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \left(\frac{\partial d^i}{\partial t} + j^i \right) \vec{a}_i \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &= \left(\frac{\partial d^3}{\partial t} + j^3 \right) \vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \left(\frac{\partial d^3}{\partial t} + j^3 \right) \det(\Lambda^{-1}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где d^i и j^i – компоненты \vec{D} и \vec{J} .

Используя разложение \vec{D} по компонентам трансформированной и исход-

ной систем

$$\vec{D} = d^i \vec{a}_i = D^i \vec{b}_i, \quad (2.33)$$

и с учетом выражения (2.9), а также соотношения $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, можно записать d^3 как

$$d^3 = \Lambda_i^{3'} D^i = \Lambda_i^{3'} \varepsilon_j^i E^j = \Lambda_i^{3'} \varepsilon_j^i \Lambda_k^j e^k = \Lambda_i^{3'} \varepsilon_j^i \Lambda_k^j g^{kl} e_l.$$

Подставляя полученное выражение для d^3 в (2.31) и используя (2.30), получим

$$(\nabla \times \vec{H}) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \Lambda_i^{3'} \varepsilon_j^i \Lambda_k^j g^{kl} \det(\Lambda^{-1}) \frac{\partial E_l'}{\partial t} + \det(\Lambda^{-1}) j^3. \quad (2.34)$$

Сравнивая (2.34) с (2.31), можно записать

$$(\nabla' \times \vec{H}')^3 = \Lambda_i^{3'} \varepsilon_j^i \Lambda_k^j g^{kl} \det(\Lambda^{-1}) \frac{\partial E_l'}{\partial t} + \det(\Lambda^{-1}) j^3. \quad (2.35)$$

Из уравнения (2.35) следует, что

$$(\nabla' \times \vec{H}')^m = \Lambda_i^{m'} \varepsilon_j^i \Lambda_k^j g^{kl} \det(\Lambda^{-1}) \frac{\partial E_l'}{\partial t} + \det(\Lambda^{-1}) j^m, \quad (2.36)$$

где $m = 1, 2, 3$.

Определяя плотность электрического тока через его декартовы компоненты как

$$J'^m = \det(\Lambda^{-1}) j^m, \quad (2.37)$$

можно записать уравнение (2.36) в матричной форме

$$\begin{aligned}\nabla' \times \vec{H}' &= \Lambda \varepsilon \Lambda^{-1} g^{-1} \det(\Lambda^{-1}) \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \vec{J}' \\ &= \Lambda \varepsilon \Lambda^T \det(\Lambda^{-1}) \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \vec{J}'.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Отсюда видно, что уравнение для трансформированной среды (2.38) имеет ту же форму, что и уравнение (2.21), если диэлектрическая проницаемость для этой среды может быть представлена в следующем виде

$$\varepsilon' = \Lambda \varepsilon \Lambda^T \det(\Lambda^{-1}). \quad (2.39)$$

Аналогично может быть получено и выражение для магнитной проницаемости трансформированной среды

$$\mu' = \Lambda \mu \Lambda^T \det(\Lambda^{-1}). \quad (2.40)$$

Полученные выражения для диэлектрической и магнитной проницаемостей содержат декартовы компоненты и трансформация рассматривается как трансформация между пространствами, выраженными в декартовых компонентах.

Несмотря на то, что при численном моделировании рассеяния, как правило, используются декартовы компоненты, для создания плащей часто удобнее использовать другие ортогональные координатные системы, в данном случае систему координат кругового цилиндра. Поэтому необходимо получить выражения для компонент материальных параметров в обобщенных ортогональных координатах.

Рассмотрим две обобщенных ортогональных координатных системы v^i и v'^i в виртуальном и физическом пространстве соответственно. Помимо общих свойств для криволинейных координатных систем, координатные векторы ортогональной координатной системы перпендикулярны друг другу. Метрический тензор поэтому имеет диагональный вид

$$\tilde{g}_{ij} = \vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = (h_i)^2 \delta_{ij}, \quad (2.41)$$

где \vec{c}_i есть единичные векторы q^i координатной системы и $h_i = \sqrt{c_i \cdot c_i}$.

Эти два пространства связаны посредством выражения

$$v^i = v^i(q^i). \quad (2.42)$$

Якобианова матрица, связывающая два координатных вектора, есть

$$\lambda = (\lambda_j^{i'}) = \left(\frac{\partial v^i}{\partial v^{i'}} \right). \quad (2.43)$$

Якобианова матрица в декартовых координатах может быть записана как

$$\Lambda_j^{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial v^k}{\partial v^{i'}} \frac{\partial v^{i'}}{\partial u^{i'}}. \quad (2.44)$$

Определяя якобианову матрицу ортогональных координат v' по декартовым координатам u

$$T = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right),$$

можно записать уравнение (2.43) в матричной форме как

$$\Lambda = T'^{-1} \lambda T. \quad (2.45)$$

В исходной ортогональной координатной системе v^i материальное уравнение для электрической индукции и напряженности электрического поля может быть записано в компонентной форме как

$$\tilde{d}^i = \underline{\varepsilon}_j^i \tilde{e}^j, \quad (2.46)$$

где \tilde{d}^i и \tilde{e}^j – контравариантные компоненты.

Тензор диэлектрической проницаемости в ортогональной координатной системе может быть преобразован в тензор в декартовых компонентах в соответствии с правилами тензорного преобразования

$$\underline{\varepsilon}_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial v^l}{\partial u^j} \underline{\varepsilon}_l^k,$$

что эквивалентно

$$\underline{\varepsilon} = T^{-1} \underline{\varepsilon} T. \quad (2.47)$$

Подставляя выражения (2.45) и (2.47) в уравнение (2.39), получим

$$\begin{aligned} T'^{-1} \underline{\varepsilon}' T' &= \Lambda T^{-1} \underline{\varepsilon} T \Lambda^T \det(\Lambda^{-1}) = \\ &= T'^{-1} \lambda \bar{T} T^{-1} \underline{\varepsilon} \bar{T} T^T \lambda^T (T^T)^{-1} \det(\Lambda^{-1}) = \\ &= T'^{-1} \lambda \underline{\varepsilon} T T^T \lambda^T (T^T)^{-1} \det(\Lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношения (2.16), получим тензор диэлектрической проницаемости в ортогональных координатных системах

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}' &= \lambda \underline{\varepsilon} T T^T \lambda^T (T^T)^{-1} \det(\Lambda^{-1}) \\ &= \lambda \underline{\varepsilon} \bar{g}^{-1} \lambda^T \bar{g} \det(\Lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Полученный тензор диэлектрической проницаемости связывает между собой контравариантные компоненты электрической индукции и напряженности электрического поля. Эти компоненты, однако, основываются на разложении по координатным векторам, длина которых, в общем случае, не равна единице. Поэтому этот тензор не может служить для нахождения абсолютных значений физических величин.

Для получения требуемого выражения для компонент диэлектрической проницаемости необходимо разложить векторы электрической индукции и напряженности электрического поля по единичным векторам ортогональной координатной системы и затем найти связь между компонентами этого разложения и контравариантными компонентами.

Разложим \vec{D} и \vec{E} по единичным векторам \vec{w}_i как

$$\vec{E} = \tilde{E}^i \vec{w}_i, \vec{D} = \tilde{D}^i \vec{w}_i.$$

Как следует из (2.17) и (2.41) компоненты этого разложения связаны с контравариантными компонентами посредством коэффициентов h_i

$$\tilde{E}^i = h_i \tilde{e}^i; \tilde{D}^i = h_i \tilde{d}^i, \quad (2.49)$$

или в матричной форме как

$$\tilde{E} = \tilde{g}^{1/2} \tilde{e}; \tilde{D} = \tilde{g}^{1/2} \tilde{d}. \quad (2.50)$$

Новое выражение, связывающее электрическую индукцию и напряженность электрического поля, представленные в виде компонентов по единичным векторам, может быть записано как

$$\tilde{D} = \tilde{\epsilon} \tilde{E}. \quad (2.51)$$

Подставляя (2.50) в (2.51), получим

$$\tilde{g}^{1/2} \tilde{d} = \tilde{\epsilon} \tilde{g}^{1/2} \tilde{e}.$$

Отсюда с учетом (2.46) получим

$$\underline{\epsilon} = \tilde{g}^{-1/2} \tilde{\epsilon} \tilde{g}^{1/2}, \tilde{\epsilon} = \tilde{g}^{1/2} \underline{\epsilon} \tilde{g}^{-1/2}. \quad (2.52)$$

Используя (2.52) и (2.48), выражение, связывающее компоненты диэлектрической проницаемости в виртуальном и физическом пространстве в ортогональной координатной системе, может быть записано как

$$\tilde{\varepsilon}' = S \tilde{\varepsilon} S^T \det(S), \quad (2.53)$$

где

$$S = \tilde{g}^{1/2} \lambda \tilde{g}^{-1/2} = (T' T^T)^{-1/2} \lambda (T T^T)^{1/2}. \quad (2.54)$$

Аналогичное выражение может быть получено и для магнитной проницаемости

$$\tilde{\mu}' = S \tilde{\mu} S^T / \det(S). \quad (2.55)$$

Поскольку выражения для компонент материальных параметров часто удобнее получать в ортогональных компонентах, а при расчете обычно используются декартовы компоненты, часто необходимо иметь формулу для вычисления вторых через первые. Используя (2.47) и (2.52), можно получить выражение для декартовых компонент материальных параметров

$$\varepsilon = Q^{-1} \tilde{\varepsilon} Q,$$

где $Q = \tilde{g}^{1/2} T = (T T^T)^{-1/2} T$. Матрица Q является ортогональной матрицей $Q^{-1} = Q^T$ и, таким образом, можно записать выражение для декартовых компонент как

$$\varepsilon = Q^T \tilde{\varepsilon} Q. \quad (2.56)$$

При использовании координатной системы кругового цилиндра T представляет собой якобианову матрицу цилиндрической координатной

системы по декартовой в виртуальном пространстве, а T' – якобианову матрицу цилиндрической координатной системы по декартовой в физическом пространстве. Эти матрицы могут быть записаны в виде:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.57)$$

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial x'} & \frac{\partial r'}{\partial y'} & \frac{\partial r'}{\partial z'} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x'} & \frac{\partial \theta'}{\partial y'} & \frac{\partial \theta'}{\partial z'} \\ \frac{\partial z'}{\partial x'} & \frac{\partial z'}{\partial y'} & \frac{\partial z'}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{r'} & \frac{\cos(\theta)}{r'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Матрица трансформации λ представляет собой якобианову матрицу, состоящую из элементов вида

$$\lambda_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial v^j}, \quad (2.59)$$

которые представляют собой производные цилиндрических координат в физическом пространстве по цилиндрическим координатам в виртуальном

пространстве.

Для координатной трансформации (2.1) матрица трансформации λ имеет вид

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{c-b}{c-a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Подставляя выражения (2.57), (2.58) и (2.60) в (2.54) и затем в (2.53), и, предполагая $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ изотропными и равными 1, получим матрицу цилиндрических компонент материальных параметров в физическом пространстве

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\mu}' = \begin{pmatrix} \frac{KM}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{KM} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{Kr} \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

в которой $K = \frac{c-b}{c-a}$; $M = \frac{(r-b)(c-a)}{c-b} + a$.

Сравнивая выражения для компонент материальных параметров (2.61) с выражениями для цилиндрических компонент ε и μ , полученных в [46] для координатной трансформации, при которой на внутренний радиус плаща

отображается не окружность, а точка (сингулярный плащ с бесконечным значением одной из компонент)

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \tilde{\boldsymbol{\mu}}' = \begin{pmatrix} \frac{r' - b}{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r'}{r' - b} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{c}{c - b}\right)^2 \frac{r' - b}{r'} \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

можно заметить, что в отличие от координатной трансформации, используемой в [46], величина $\frac{r'}{KM}$ при $r' = b$ конечна, если радиус a не равен нулю.

На рис. 2.3 представлена зависимость величины $\frac{r'}{KM}$ (т. е. ε_θ и μ_θ) от r' для случая $c = 0.4$; $b = 0.1$ и различных a . Видно, что даже в случае, когда a меньше b в 100 раз, величина $\frac{r'}{KM}$ равна 133.

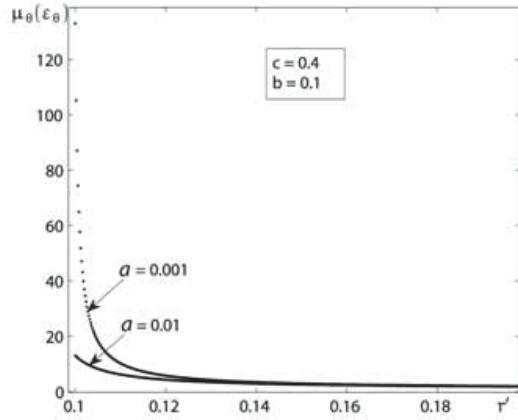


Рисунок 2.3 – Зависимость величины $\mu_\theta(\varepsilon_\theta)$ от r'

Для численного моделирования использовались декартовы компоненты материальных параметров, которые мы получали, используя соотношение (2.56). В результате получаем выражения для декартовых компонент:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{xx} &= \dot{\mu}_{xx} = \cos^2(\theta)P_{rr} + \sin^2(\theta)P_{\theta\theta}; \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \dot{\mu}_{xy} = \cos(\theta)P_{rr}\sin(\theta) - \sin(\theta)P_{\theta\theta}\cos(\theta); \\ \dot{\varepsilon}_{yx} &= \dot{\mu}_{yx} = \cos(\theta)P_{rr}\sin(\theta) - \sin(\theta)P_{\theta\theta}\cos(\theta); \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \dot{\mu}_{yy} = \sin^2(\theta)P_{rr} + \cos^2(\theta)P_{\theta\theta}; \\ \dot{\varepsilon}_{zz} &= \dot{\mu}_{zz} = P_{zz},\end{aligned}\quad (2.63)$$

где $P_{rr} = \frac{KM}{r}$; $P_{\theta\theta} = \frac{r'}{KM}$ и $P_{zz} = \frac{M}{Kr}$.

2.3 Численное моделирование

Для проверки функционирования результирующего плаща было проведено численное моделирование с использованием метода конечных элементов (МКЭ, английское сокращение FEM) [85–87]. В работе исследовалась

двумерная задача для случая падения плоской E -поляризованной волны. Здесь и далее в работе падающая волна везде имеет амплитуду 1 В/м (абсолютное значение). При такой поляризации свойства материала плаща характеризуется только μ_{xx} , μ_{xy} , μ_{yx} , μ_{yy} и ε_{zz} компонентами материальных параметров. В принципе, выбор поляризации может быть произвольным.

На рис. 2.4 схематически изображена область решения метода конечных элементов для данной задачи с увеличенной сеткой разбиения.

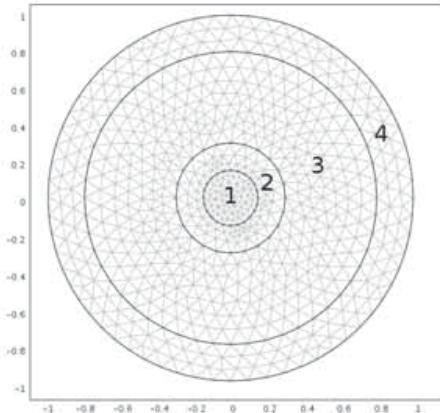


Рисунок 2.4 – Область решения метода конечных элементов

Область 1 представляет собой идеально проводящий цилиндр, окруженный плащом 2. Область 3 представляет собой свободное пространство, окруженное идеально согласованным слоем (ИСС, английское сокращение PML) 4 [88–90]. Границные условия в задаче задаются следующим образом.

На границе области 1 используется граничное условие

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad (2.64)$$

а на внешней границе решения (внешней границе ИСС) — рассеивающее

граничное условие (РГУ, английское сокращение SBC)

$$\vec{n} \cdot (\nabla E_z) + ik_0 E_z = 0, \quad (2.65)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности, а k_0 – волновое число свободного пространства. Такое условие подобно условию излучения Зоммерфельда [85]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} + ik_0 E_z \right) = 0.$$

После нахождения поля в области решения, поле в дальней зоне может быть вычислено, используя формулу Стреттона-Чу [91–93]

$$\vec{E}_p = \sqrt{\lambda} \frac{ik}{4\pi} \int_S [\vec{n} \times \vec{E} - \eta \vec{r}_0 \times (\vec{n} \times \vec{H})] \exp(i k \vec{r} \cdot \vec{r}_0) dS,$$

в которой \vec{E} и \vec{H} – поля на поверхности рассеивателя, \vec{r}_0 – единичный вектор, направленный из начала координат к точке p , \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ – поверхностный импеданс, k – волновое число, λ – длина волны, \vec{r} – радиус вектор к поверхности S рассеивателя, \vec{E}_p – поле в дальней зоне в точке p .

На рис. 2.5 представлено распределение E_z компоненты полного поля при рассеянии плоской волны от объекта невидимости (идеально проводящего цилиндра, покрытого плащом), а на рис. 2.6 от идеально проводящего цилиндра, имеющего радиус равный величине a соответствующего объекта невидимости.

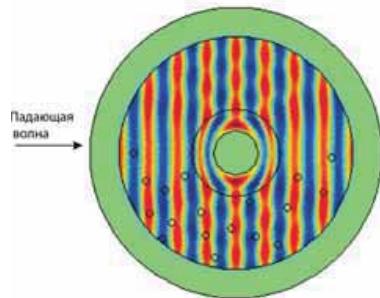


Рисунок 2.5 – Распределение E_z компоненты электрического поля в окрестностях устройства невидимости ($\lambda = 0.2$ м, $c = 0.3$ м, $b = 0.15$ м, $a = 0.001$ м, E – поляризованный падающей плоской волны)

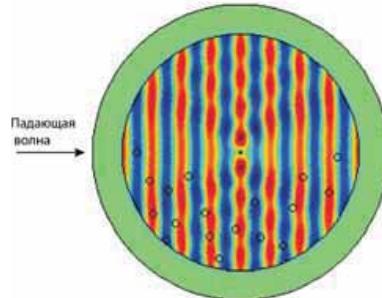


Рисунок 2.6 – Распределение E_z компоненты электрического поля в окрестностях идеально проводящего кругового цилиндра ($\lambda = 0.2$ м, радиус цилиндра $a = 0.001$ м, E – поляризованный падающей плоской волны)

Маркерами (в виде кружочков) на рис. 2.5 и 2.6 обозначены случайным образом выбранные точки в свободном пространстве, в которых оценивалось абсолютное значение E_z компоненты полного поля. Полученные результаты представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 – Распределение E_z компоненты полного поля

| № точки | Объект невидимости | Идеально проводящий цилиндр |
|--|--------------------|-----------------------------|
| | E_z , В/м | |
| 1 | 0.88597 | 0.88595 |
| 2 | 0.99786 | 0.99840 |
| <i>Продолжение на следующей странице</i> | | |

Продолжение таблицы 2.1

| № точки | Объект невидимости | Идеально проводящий цилиндр |
|---------|--------------------|-----------------------------|
| | E_z , В/м | |
| 3 | 1.11796 | 1.11774 |
| 4 | 1.07637 | 1.07659 |
| 5 | 0.93539 | 0.93601 |
| 6 | 1.11919 | 1.11919 |
| 7 | 1.12993 | 1.12936 |
| 8 | 1.15112 | 1.15082 |
| 9 | 0.86931 | 0.86967 |
| 10 | 1.08557 | 1.08571 |
| 11 | 1.01835 | 1.01785 |
| 12 | 1.02190 | 1.02190 |
| 13 | 1.03954 | 1.03981 |
| 14 | 0.86164 | 0.86201 |
| 15 | 0.94631 | 0.94607 |
| 16 | 0.92008 | 0.92046 |
| 17 | 1.05420 | 1.05409 |
| 18 | 0.84425 | 0.84492 |

Из табл. 2.1 видно, что в случайным образом выбранных точках в ближней зоне абсолютные значения E_z компонент полного поля в случае рассеяния от плаща невидимости и от идеально проводящего цилиндра соответствующего радиуса совпадают с точностью примерно до третьего знака после запятой. С учетом того, что точки выбирались случайным образом можно говорить о

практически полном совпадении полей в ближней зоне для этих случаев.

На рис. 2.7, 2.8 приведены диаграммы рассеяния несингулярных объектов невидимости для различных значений a в сравнении с диаграммой рассеяния сингулярного устройства невидимости и диаграммой рассеяния идеально проводящего цилиндра.

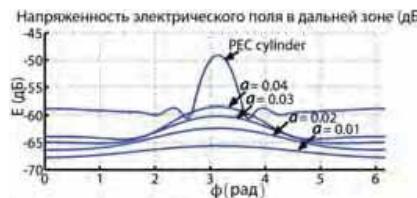


Рисунок 2.7 – Диаграммы рассеяния несингулярных объектов невидимости, с $c = 0.3$ м., $b = 0.15$ м. для различных a (в м.). PEC cylinder – идеально проводящий цилиндр с радиусом 0.15 м

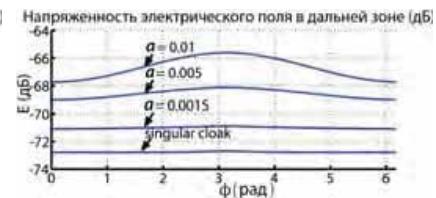


Рисунок 2.8 – Диаграммы рассеяния несингулярных объектов невидимости, с $c = 0.3$ м., $b = 0.15$ м. для различных a (в м.). singular cloak – сингулярное устройство невидимости с $c = 0.3$ м., $b = 0.15$ м

Необходимо отметить, что сингулярное устройство невидимости демонстрирует в численном эксперименте ненулевое значение рассеяния, что связано с принципиальной невозможностью использования при моделировании бесконечно больших величин материальных параметров.

Для оценки эффективности плаща использовали подход [75], согласно которому определяли суммарную величину рассеяния, как интеграл по внешней границе области решения от абсолютной величины рассеянного электрического поля в дальней зоне. Эффективность такого неидеального плаща сравнивали с эффективностью сингулярного плаща, компоненты материальных параметров которого вычисляли используя выражение (2.62). Также было проведено численное исследование рассеяния от идеально проводящего цилиндра, имеющего радиус, соответствующий радиусу a в

исходном пространстве. Подобно устройству невидимости, для идеально проводящего плаща оценивалась суммарная величина рассеяния. Полученные результаты для величин рассеяния приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2 – Оценка эффективности работы несингулярного плаща

| Сингулярный плащ невидимости | | | | |
|--|---------|---------|---------|------------------------|
| λ , м | c , м | b , м | a , м | $\oint E_{far} dl$, В |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | | 0.001444 |
| Несингулярный плащ невидимости | | | | |
| λ , м | c , м | b , м | a , м | $\oint E_{far} dl$, В |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.0015 | 0.00177 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.005 | 0.002337 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.01 | 0.002912 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.02 | 0.003704 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.03 | 0.004293 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.04 | 0.004782 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.05 | 0.005208 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.1 | 0.006851 |
| 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.15 | 0.008172 |
| <i>Продолжение на следующей странице</i> | | | | |

Продолжение таблицы 2.2

| Идеально проводящий цилиндр | | | | |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|
| $\lambda, \text{ м}$ | $c, \text{ м}$ | $b, \text{ м}$ | $a, \text{ м}$ | $\oint E_{far} dl, \text{ В}$ |
| 0.2 | | | 0.0015 | 0.001641 |
| 0.2 | | | 0.005 | 0.002311 |
| 0.2 | | | 0.01 | 0.002906 |
| 0.2 | | | 0.02 | 0.003702 |
| 0.2 | | | 0.03 | 0.004292 |
| 0.2 | | | 0.04 | 0.004781 |
| 0.2 | | | 0.05 | 0.005207 |
| 0.2 | | | 0.1 | 0.00685 |
| 0.2 | | | 0.15 | 0.008172 |

Как видно из табл. 2.2 суммарная величина рассеяния от неидеального плаща невидимости практически совпадает с величиной рассеяния от идеально проводящего цилиндра соответствующего радиуса a . Среднее относительное отклонение суммарной величины рассеяния

$$\left| \frac{\oint E_{far \text{плаща невидимости}} dl - \oint E_{far \text{круг. цилиндра}} dl}{\oint E_{far \text{круг. цилиндра}} dl} \right| = 0.011398.$$

Можно заметить, что подобный результат, в принципе предсказуем. В самом деле, при рассмотрении идеального сингулярного плаща невидимости суммарная величина рассеяния от такого плаща должна стремиться к нулю, т.е. к величине рассеяния от точки в виртуальном пространстве, которая при координатной трансформации "раздувается" в область, ограниченную плащом.

В данном же случае, естественно ожидать полного совпадения суммарной величины рассеяния от неидеального плаща с величиной рассеяния от

идеально проводящего цилиндра радиуса a .

Поскольку значение среднего относительного отклонения суммарной величины рассеяния отлично от нуля, его можно считать приближенной оценкой погрешности вычислений.

В то же время необходимо учитывать, что поле в дальней зоне вычисляется с использованием формулы Стреттона-Чу, которая вносит дополнительную погрешность [94].

Предложенный в данном разделе плащ является несингулярным, что в принципе открывает возможность для его практической реализации. В то же время анизотропный характер такого плаща, компоненты материальных параметров которого изменяются от точки к точке, делает такую задачу технологически крайне затруднительной.

Одним из возможных решений является предложенный в [46] подход, использующий многослойную ступенчатую аппроксимацию, где вместо исходного анизотропного плаща с значениями компонент ε и μ , зависящими от координат, используется многослойная структура с постоянными значениями компонент в каждом слое.

На рис. 2.9 показано распределение E_z компоненты электрического поля в окрестностях такого плаща, состоящего из 10 слоев, при падении плоской E поляризованной волны с $\lambda = 0.2$ м. Исходный плащ имел размеры $a = 0.0015$, $b = 0.15$, $c = 0.3$ м. Собственно плащ был разбит на 10 слоев, и на внутренней границе каждого слоя вычислялись значения соответствующих компонент ε_z , μ_r и μ_θ , которые затем использовались как константные значения для этих слоев многослойного плаща.

Проведенное численное моделирование показало, что эффективность (скрывающая способность) такого многослойного плаща примерно в два раза ниже, чем у исходного. Суммарная величина рассеяния составила у

десятислойного плаща 0.003311 В, по сравнению с 0.00177 В у исходного плаща.

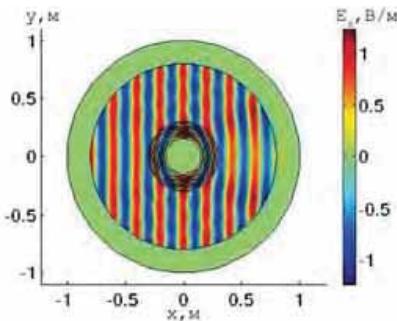


Рисунок 2.9 – Распределение z -компоненты электрического поля
вблизи десятислойного плаща
невидимости

2.4 Выводы по разделу

Полученный с использованием несингулярной координатной трансформации цилиндрический плащ невидимости является неидеальным, но, в то же время, при достаточно малых a демонстрирует хорошую эффективность в плане скрытия объекта (в данном случае – идеально проводящего кругового цилиндра). Так при $a = 0.0015$ м. его диаграмма рассеяния в дальней зоне во всем диапазоне углов лежит всего примерно на децибел выше диаграммы рассеяния идеального плаща невидимости, полученного с использованием сингулярной координатной трансформации. При этом компоненты материальных параметров конечны и относительно невелики по величине, что в принципе позволяет практическую реализацию такого покрытия.

Представляет интерес использование полученных характеристик рассеяния для расчета многослойных плащей с однородными величинами ε и μ в

каждом слое. Проведенные предварительные исследования продемонстрировали возможность как расчета, так в дальнейшем и практического их создания.

Важным результатом является то, что величина интеграла поля, рассеянного идеально проводящим цилиндром практически совпадает с величиной интеграла рассеянного поля от устройства невидимости (всегда несколько меньше), когда радиус идеально проводящего цилиндра совпадает с радиусом a исходной системы координат.

Таким образом, можно сказать, что несингулярный плащ невидимости снижает суммарную величину рассеяния от идеально проводящего цилиндра радиуса b до величины рассеяния от идеально проводящего цилиндра радиуса a . Для внешнего наблюдателя такой, покрытый плащом цилиндр будет представляться цилиндром намного меньшего радиуса.

В предельном случае $a = b$, геометрическая трансформация в плаще отсутствует, и мы имеем идеально проводящий цилиндр радиуса b , окруженный свободным пространством.

Также обнаружено, что в ближней зоне распределение полей при рассеянии от неидеального плаща невидимости и от соответствующего цилиндра практически совпадают.

РАЗДЕЛ 3

НЕСИНГУЛЯРНЫЙ ПЛАЩ-КОВЕР НЕВИДИМОСТИ

В разделе 3 предложен плащ-ковер невидимости, основанный на однородном несингулярном диэлектрическом цилиндрическом плаще эллиптического сечения, используемом подобно ковру. Такой ковер обеспечивает невидимость скрываемого объекта при облучении его в широком диапазоне углов. Показана возможность создания плаща-ковра невидимости произвольного сечения.

Поскольку для плащей произвольной формы получение аналитических выражений, описывающих координатную трансформацию, часто затруднено, в разделе также проведено обоснование численного подхода к получению материальных параметров плаща.

Результаты раздела опубликованы в работах [95, 96].

3.1 Численный метод вычисления материальных параметров плаща

Применявшийся нами ранее аналитический подход к вычислению материальных параметров плащей основан на использовании задаваемой в явном виде зависимости между координатами физического и виртуального пространства.

Как было отмечено выше, для идеального цилиндрического плаща такая зависимость может быть задана как:

$$r' = \frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot r + R_1; \theta' = \theta, z' = z, \quad (3.1)$$

где R_2 представляет внешний радиус рассматриваемой области, R_1 – внешний

радиус скрываемой плащом области. Цилиндрические координаты r, θ, z без штриха обозначают координаты в виртуальном пространстве, а со штрихом – в физическом, как схематически показано на рис. 3.1.

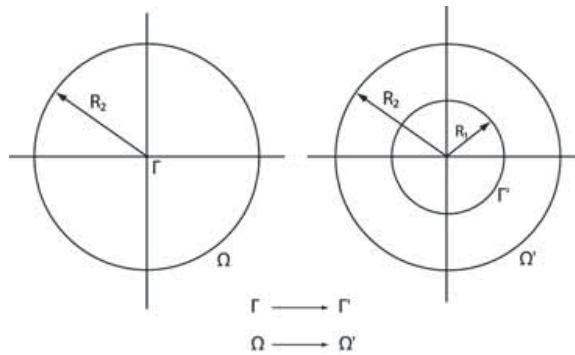


Рисунок 3.1 – Схема координатной трансформации

Несложно заметить, что выражение (3.1) может быть получено, рассматривая значения координат на границах Γ' и Ω' кольцевой области $[\Gamma', \Omega']$ физического пространства.

В самом деле, на границе $\Omega' r' = R_2$, когда $r = R_2$, а на границе $\Gamma' r' = R_1$, когда $r = 0$.

Напрашивается аналогия, что подобная координатная зависимость может быть получена путем решения некоторого дифференциального уравнения с заданными граничными условиями. В работе [97] было показано, что зависимость между координатами при пространственной трансформации может быть получена путем решения уравнения Лапласа координат физического пространства относительно координат виртуального пространства с граничными условиями, связывающими эти координаты на внутренней и внешней границах плаща. Авторы показали, что входящий в выражение (2.53), которое связывает компоненты материальных параметров, тензор S может трактоваться как

тензор градиента деформации в механике сплошных сред, т.е. предложили трактовать координатную трансформацию как пространственную деформацию.

Чтобы избежать несингулярных решений уравнения Лапласа, описывающего прямую координатную трансформацию, было предложено решать инверсную систему, т.е. уравнение Лапласа координат виртуального пространства относительно координат физического, которое, в общем виде, может быть записано как:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3'^2} \right) u_i = 0; \\ u(R_1') = a, u(R_2') = b. \end{cases} \quad (3.2)$$

Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial u_i}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta'^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z'^2} = 0, \quad (3.3)$$

где u_i ($i = 1, 2, 3$) координатные компоненты первоначальной нетрансформированной системы r, θ, z соответственно.

Для двумерного цилиндрического плаща, если мы установим $\theta' = \theta$ и $z' = z$, координатная компонента r удовлетворяет следующему уравнению с граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial r_i}{\partial r'} \right) = 0; \\ r(r' = R_1) = 0; r(r' = R_2) = R_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Однако, решением уравнения (3.4) будет являться выражение

$$r = R_2 \log_{R_2/R_1} \left(\frac{r'}{R_1} \right), \quad (3.5)$$

которое очевидно не совпадает с выражением (3.1). Однако если мы перепишем уравнение (3.5) следующим образом

$$r' = R_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{\frac{r}{R_2}}, \quad (3.6)$$

то легко сможем заметить, что эта трансформация будет подходящей для идеального плаща. В самом деле, на внешней границе $r' = R_2$, при $r = R_2$, а на внутренней границе $r' = R_1$, при $r = 0$.

Что же касается выражения (3.1), то оно будет являться решением уравнения Пуассона следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial r_i}{\partial r'} \right) = f(r', \theta', z') = \frac{R_2}{r'(R_2 - R_1)}; \\ r(r' = R_1) = 0; r(r' = R_2) = R_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Представляет интерес исследовать, насколько плащи, полученные с использованием трансформаций (3.1) и (3.6) отличаются друг от друга.

Для численного решения использовали метод конечных элементов. Так как при расчетах обычно используют декартовы компоненты, то необходимо получить их. Решая инверсную систему (3.2), а также аналогичную ей систему с уравнением Пуассона (3.7) и, полагая, что координаты u_i ($i = 1, 2, 3$) являются декартовыми координатами первоначальной нетрансформированной системы, а \bar{u}_i ($i = 1, 2, 3$) – декартовыми координатами трансформированной системы,

мы получим компоненты инверсной якобиановой матрицы $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_i}$ и саму матрицу

$$\Lambda_{j'}^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u_1} & \frac{\partial u_1}{\partial u_2} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial u_2}{\partial u_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Якобианова матрица прямого преобразования тогда будет

$$\Lambda_i^{j'} = (\Lambda_{j'}^i)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_2} & \frac{\partial u_1}{\partial u_2} & 0 \\ -\frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} - \frac{\partial u_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_2} & \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} - \frac{\partial u_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_2} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial u_1}{\partial u_1} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} - \frac{\partial u_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_2} & -\frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} - \frac{\partial u_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Затем находим выражение для $\det(\Lambda_i^{j'})$

$$\det(\Lambda_i^{j'}) = -\frac{1}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} - \frac{\partial u_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_2}} \quad (3.10)$$

и для $(\Lambda_i^{j'})^T$

$$(\Lambda_i^{j'})^T = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_2}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & \frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & 0 \\ \frac{\frac{\partial u_1}{\partial u_2}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial u_1}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Отсюда для материальных параметров получим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = \dot{\mu} &= \frac{\Lambda_i^{j'} \varepsilon (\Lambda_i^{j'})^T}{\det(\Lambda_i^{j'})} = \frac{\Lambda_i^{j'} \mu (\Lambda_i^{j'})^T}{\det(\Lambda_i^{j'})} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_2}^2 + \frac{\partial u_1}{\partial u_2}^2}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & \frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_1}{\partial u_2}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & 0 \\ \frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial u_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_1}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & -\frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_1}^2 + \frac{\partial u_1}{\partial u_1}^2}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} & -\frac{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_1}{\partial u_2}} \end{pmatrix}. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Для численного моделирования выбранный нами идеально проводящий

круговой цилиндр радиусом 0.15 м, окруженный плащом с внешним радиусом 0.3 м облучался плоской E – поляризованной волной, с длиной 0.2 м.

Исследовали четыре варианта сингулярного плаща, различающихся способом вычисления материальных параметров: I – плащ, полученный с использованием координатной трансформации (3.1), материальные параметры которого вычислены используя аналитический подход; II – плащ, соответствующий первому плащу, с материальными параметрами, полученными численным методом, путем решения уравнения Пуассона (3.7); III – плащ, полученный аналитическим методом, с использованием трансформации (3.6); IV – плащ, полученный численным методом, путем решения уравнения Лапласа.

Эффективность плащей оценивалась путем сравнения суммарной величины рассеяния ($\oint E_{far} dl$) плащей в дальней зоне. Результаты сравнения представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Сравнение суммарной величины рассеяния плащей

| $\oint E_{far} dl, \text{В}$ | | | |
|------------------------------|------------|------------|------------|
| I | II | III | IV |
| 0.00144456 | 0.00154527 | 0.00157889 | 0.00154449 |

Из табл. 3.1 видно, что величина рассеяния для случаев II–IV практически совпадает. Величина рассеяния для плаща I несколько меньше величин рассеяния для остальных случаев, что, вероятно, обусловливается погрешностями вычислений. В то же время можно констатировать, что мы имеем достаточно точное совпадение суммарной величины рассеяния для всех четырех рассмотренных случаев.

Интересно отметить, что результаты для плащей, полученных с использо-

ванием численного подхода, практически не отличаются друг от друга, хотя при этом и используются различные уравнения.

Все вышеизложенное позволяет сделать заключение, что численный подход к вычислению материальных параметров плашней невидимости может с успехом применяться при их создании.

3.2 Постановка задачи

Рассмотрим прежде всего координатную трансформацию в системе координат эллиптического цилиндра, как изображено на рис. 3.2.

В работе [56] показано, что пространственное преобразование от эллиптической области $\xi \in [0, \xi_2]$ к области эллиптического кольца $\xi' \in [\xi_1, \xi_2]$ может быть представлено в виде:

$$\xi' = \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2} \xi + \xi_1; \eta' = \eta; z' = z. \quad (3.13)$$

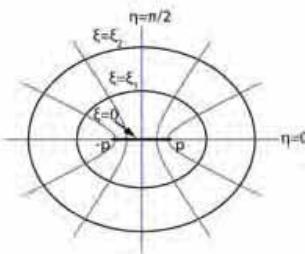


Рисунок 3.2 –Плащ эллиптического сечения в эллиптической координатной системе

Важным моментом является то, что в системе координат эллиптического цилиндра мы имеем однозначное соответствие между координатами любой

точки, лежащей на внутреннем эллипсе ($\xi' \in \xi_1$), и координатами исходной точки ($\xi \in \xi_0 = 0$), отображаемой на первую точку при координатной трансформации.

Связь между координатами указанных выше точек может быть записана как

$$(0, \eta, z) \rightarrow (\xi_1, \eta, z). \quad (3.14)$$

Это делает возможным задание граничных условий для численных методов решения без необходимости аналитического анализа связей между координатами.

Перейдем теперь к описанию численного подхода к созданию плаща. В предыдущем разделе было показано, что при координатной трансформации декартовы компоненты материальных параметров в трансформированной системе связаны с декартовыми компонентами материальных параметров в исходной системе посредством соотношений (2.39), (2.40).

При этом нахождение зависимости между материальными параметрами в обоих системах сводится к нахождению элементов якобиановой матрицы

$$\Lambda_i^{j'} = \frac{\partial u^j}{\partial u^i}. \quad (3.15)$$

Эти элементы могут быть получены либо аналитически, определяя в явном виде зависимость между исходными и трансформированными координатами, подобно выражению (3.13), либо численным методом.

Численный метод имеет неоспоримые преимущества при создании плащей произвольной формы ввиду подчас крайней сложности получения аналитической зависимости между координатами при трансформации. Применим его для расчета эллиптического несингularityного плаща.

С учетом описанных выше граничных условий можно записать уравнение

Лапласа в координатах эллиптического цилиндра, которое будет характеризовать связь между исходными и трансформированными координатами в инверсной форме в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{p^2(\sin^2\xi' + \sin^2\eta')} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta'^2} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z'^2} = 0; \\ \xi(\xi' = \xi_1) = 0; \xi(\xi' = \xi_2) = \xi_2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Решая уравнение (3.16), получаем элементы обратной якобиановой матрицы и затем находим прямую якобианову матрицу. При численном моделировании реально используются декартовы компоненты и соответственно при вычислениях используются уравнения Лапласа в декартовых координатах. Представление уравнения Лапласа в координатах эллиптического цилиндра сделано для ясности изложения.

Несложно заметить, что уравнение (3.16) без всяких изменений может быть использовано для нахождения матрицы преобразования для цилиндрического несингularityного плаща невидимости произвольного сечения, как изображено на рис. 3.3.

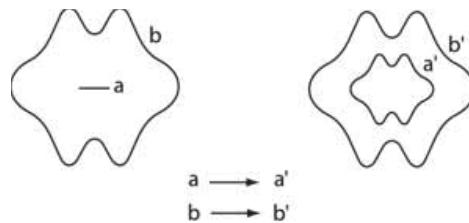


Рисунок 3.3 – Координатная трансформация для плаща произвольного сечения

3.3 Численное моделирование

Для численных экспериментов использовали метод конечных элементов. Для получения связи между декартовыми координатами использовали соотно-

шения:

$$\xi = Re \left(\operatorname{arch} \left(\frac{x+iy}{p} \right) \right); \quad \eta = Im \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{x+iy}{p} \right) \right). \quad (3.17)$$

С учетом этого можно записать декартовые координаты любой "исходной" точки на линейном сегменте между полюсами эллипса в виде:

$$x_0 = p \cosh(\xi_0 = 0) \cos(\eta); \quad y_0 = p \sinh(\xi_0 = 0) \sin(\eta), \quad (3.18)$$

и декартовые координаты точки на внутренней границе плаща, на которую отображается "исходная" точка в виде:

$$x_1 = p \cosh(\xi_1) \cos(\eta); \quad y_1 = p \sinh(\xi_1) \sin(\eta). \quad (3.19)$$

Соответственно граничные условия примут вид:

$$x(x' = x_1) = x_0; \quad y(y' = y_1) = y_0. \quad (3.20)$$

Решая уравнения Лапласа (для x и y координат) вместе с граничными условиями (3.20) посредством МКЭ, мы находим связь между трансформированными и исходными координатами, определяем элементы якобиановой матрицы, и далее компоненты диэлектрической и магнитной проницаемостей (ϵ_{zz} , μ_{xx} , μ_{xy} , μ_{yx} , μ_{yy}). Полученные значения компонент материальных параметров затем используем как входные данные для моделирования рассеяния электромагнитной волны плащом также с использованием МКЭ.

На рис. 3.4 представлен результат расчета E_z компоненты поля для плаща невидимости эллиптического сечения, а на рис. 3.5 – для плаща невидимости произвольного сечения. В обоих случаях падающая волна распространяется

вдоль линейного межфокусного сегмента, $p = 0.01$ м, а $\lambda = 0.08$ м.

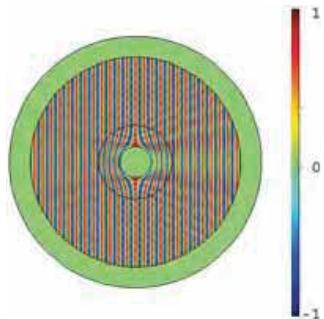


Рисунок 3.4 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи несингулярного плаща невидимости эллиптического сечения

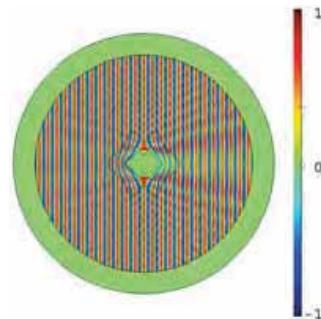


Рисунок 3.5 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи несингулярного плаща невидимости произвольного сечения

Для оценки эффективности несингулярного плаща невидимости и ее зависимости от величины p находили интеграл по внешней границе геометрии задачи от абсолютного значения рассеянного электрического поля (для плаща эллиптического сечения).

Также оценивали рассеяние от проводящего линейного сегмента длиной $2p$ при различных величинах p и рассеяние от сингулярного плаща эллиптического сечения, который рассчитывали с использованием трансформации, отображающей точку в центре эллипса (на пересечении его осей) на внутреннюю эллиптическую границу плаща.

Полученные результаты представлены в таблице 3.2, где x_1 и y_1 – длина большой и малой полуосей внутреннего эллипса, x_2 и y_2 – длина соответствующих полуосей внешнего эллипса, p – полуфокусное расстояние, λ – длина волны, и $\oint E_{far} dl$ – указанный выше интеграл. Все размеры даны в м.

Таблица 3.2 – Оценка эффективности работы несингулярного плаща

| Несингулярный плащ, плоская волна | | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|------------------------|
| λ , м | x_1 , м | y_1 , м | x_2 , м | y_2 , м | p , м | $\oint E_{far} dl$, В |
| 0.08 | 0.1500043 | 0.1500009 | 0.3500076 | 0.3500062 | 0.001 | 0.002793 |
| 0.08 | 0.1508922 | 0.1508093 | 0.3529551 | 0.3529197 | 0.005 | 0.003448 |
| 0.08 | 0.1500023 | 0.1496686 | 0.3500031 | 0.3498602 | 0.01 | 0.003976 |
| 0.08 | 0.1500036 | 0.1486643 | 0.3500242 | 0.3494523 | 0.02 | 0.00444 |
| 0.08 | 0.1500100 | 0.1469796 | 0.3500205 | 0.3487325 | 0.03 | 0.004727 |
| 0.08 | 0.1500358 | 0.1414593 | 0.3500292 | 0.3464396 | 0.05 | 0.005098 |
| Проводящий линейный сегмент ($l=2p$), плоская волна | | | | | | |
| λ , м | x_1 , м | y_1 , м | x_2 , м | y_2 , м | p , м | $\oint E_{far} dl$, В |
| 0.08 | | | | | 0.001 | 0.002099 |
| 0.08 | | | | | 0.005 | 0.003247 |
| 0.08 | | | | | 0.01 | 0.003795 |
| 0.08 | | | | | 0.02 | 0.004303 |
| 0.08 | | | | | 0.03 | 0.004618 |
| 0.08 | | | | | 0.05 | 0.005026 |
| Сингулярный плащ, плоская волна | | | | | | |
| 0.08 | 0.1500043 | 0.1500009 | 0.3500076 | 0.3500062 | 0.001 | 0.002578 |
| 0.08 | 0.1508922 | 0.1508093 | 0.3529551 | 0.3529197 | 0.005 | 0.002511 |
| 0.08 | 0.1500023 | 0.1496686 | 0.3500031 | 0.3498602 | 0.01 | 0.002572 |
| 0.08 | 0.1500036 | 0.1486643 | 0.3500242 | 0.3494523 | 0.02 | 0.002574 |
| 0.08 | 0.1500100 | 0.1469796 | 0.3500205 | 0.3487325 | 0.03 | 0.002554 |
| 0.08 | 0.1500358 | 0.1414593 | 0.3500292 | 0.3464396 | 0.05 | 0.002539 |

Из таблицы 3.2 видно, что величина интеграла рассеянного поля от несингулярного плаща невидимости очень близка к аналогичной величине при рассеянии от проводящего сегмента соответствующей длины и увеличивается, с увеличением его длины аналогичным образом, но значительно медленнее, чем длина сегмента. При $p = 0.001$ м величина рассеяния практически совпадает с величиной рассеяния от сингулярного плаща.

Рассчитанный несингулярный плащ невидимости имеет однородный характер и эффективно работает только при облучении его вдоль большой оси. Однако, такой несингулярный плащ может быть использован подобно ковру невидимости при расположении межфокусного сегмента на идеально проводящей поверхности, представляющей собой линию для двумерной задачи..

На рис. 3.6 показана работа несингулярного плаща-ковра: отражение гауссового пучка от плаща невидимости эллиптического сечения (E_z компонента), а на рис. 3.7 от плаща невидимости произвольного сечения (E_z компонента). В обоих случаях $p = 0.01$, $\lambda = 0.08$ м.

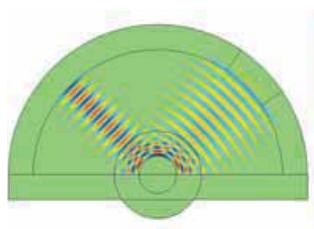


Рисунок 3.6 – Распределение z – компоненты электрического поля гауссового пучка при отражении от несингулярного плаща невидимости эллиптического сечения

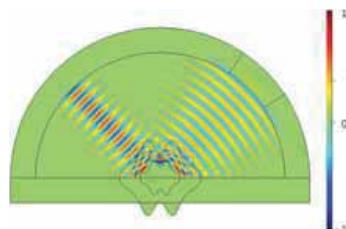


Рисунок 3.7 – Распределение z – компоненты электрического поля гауссового пучка при отражении от несингулярного плаща невидимости произвольного сечения

Также на рис. 3.8, 3.9 изображено огибание пучком плаща-ковра невидимости, когда пучок распространяется горизонтально (параллельно базовой проводящей поверхности).

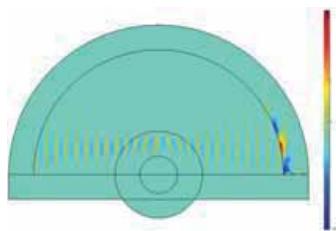


Рисунок 3.8 – Распределение z – компоненты электрического поля гауссового пучка при огибании несингулярного плаща невидимости эллиптического сечения

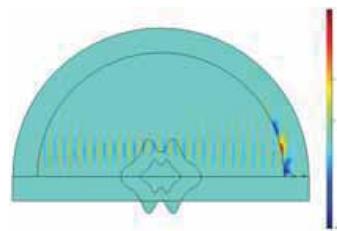


Рисунок 3.9 – Распределение z – компоненты электрического поля гауссового пучка при огибании несингулярного плаща невидимости произвольного сечения

Как видно из рисунков несингулярный плащ-ковер невидимости эффективно работает при облучении его со всех возможных направлений.

3.4 Выводы по разделу

В разделе 3 проанализирован численный подход к вычислению диэлектрической и магнитной проницаемостей плаща невидимости. Показано, что "классическая" координатная трансформация (3.1) используемая при расчете цилиндрического плаща невидимости имеет эквивалентное ей численное решение уравнения Пуассона (3.7).

Также продемонстрировано, что численному решению уравнения Лапласа соответствует определенное аналитическое решение, которое приводит к сингулярным материальным параметрам и соответственно к идеальному плащу. Анализ результатов численного моделирования подтвердил возможность использования численного подхода наряду с аналитическим.

Предложенный в разделе плащ-ковер невидимости, при использовании его

подобно ковру, с одной стороны, частично снимает проблему зависимости эффективности работы плаща от направления падающей волны, а, с другой, – проблему сингулярности материальных параметров, открывая возможности для физических экспериментов. Такой плащ-ковер анизотропен, поэтому не страдает от проблемы бокового сдвига [81], свойственной изотропным плащам.

С использованием численного подхода к вычислению ε и μ показана возможность расчета цилиндрических плащей-ковров произвольного сечения.

Проведенное численное моделирование с использованием метода конечных элементов подтвердило работоспособность такого подхода. Было показано, что плащ уменьшает рассеяние от проводящего эллиптического цилиндра (эллипса в двумерной задаче) до величин, характерных для рассеяния от проводящего сегмента соответствующей длины (сегмента длиной $2p$, который "раздувается" в эллипс при трансформации).

Проведено сравнение эффективности работы несингулярных плащей при различных значениях величины p с сингулярным плащом. Показано, что эффективность работы несингулярного плаща сравнима с эффективностью сингулярного плаща (имеет один порядок величины) при условии малости длины сегмента p ($p < \lambda$) и растет при уменьшении p , становясь практически равной эффективности сингулярного плаща.

РАЗДЕЛ 4
МИМИКРИЯ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДХОДА
ТРАНСФОРМАЦИОННОЙ ОПТИКИ

В разделе 4 рассматривается создание плащей мимики – покрытий нового класса, обеспечивающих окруженному ими телу мимикию под тело другой формы.

Результаты раздела 4 опубликованы в работах [98–101].

4.1 Постановка задачи

При рассмотрении в разделе 2 неидеального плаща невидимости было показано, что последний снижает величину рассеяния от идеально проводящего кругового цилиндра, окруженного таким плащом, до величины рассеяния от идеально проводящего кругового цилиндра меньшего радиуса. При этом оба цилиндра имеют одинаковую форму.

Возникает вопрос: возможно ли создание плаща, который не просто будет уменьшать величину рассеяния, а обеспечит покрытому им телу мимикию под тело другой наперед заданной формы так, что при этом для внешнего наблюдателя покрытое таким плащом тело, будет выглядеть как тело другой формы.

Прежде всего, отметим, что представленный в разделе 2 плащ может трактоваться как плащ мимикии большего кругового цилиндра под меньший.

Хотя в качестве главного критерия оценки эффективности плаща выступала суммарная величина рассеяния, и мы напрямую не сравнивали диаграммы рассеяния плаща невидимости и "голого" цилиндра меньшего радиуса в дальней зоне, в ближней зоне наблюдалось очень хорошее соответствие.

Для получения такого плаща использовали координатную трансформацию, при которой кольцевая область с меньшим внутренним радиусом, соответствующим радиусу "голого" цилиндра, отображалась в кольцевую область с большим внутренним радиусом, равным радиусу покрытого плащом цилиндра.

Естественно предположить, что для создания плаща мимикирии тела одной формы под тело другой формы, например, цилиндра квадратного сечения под круговой, кольцевая область должна трансформироваться в "кольцевую область", внутренняя граница которой будет иметь форму квадрата.

Как неоднократно указывалось ранее, при координатной трансформации компоненты материальных параметров в трансформированной системе координат могут быть получены как аналитически, определяя в явном виде зависимость между исходными и трансформированными координатами, так и численным методом.

Для конструирования плащей мимикирии используем координатные трансформации, схемы которых представлены на рис. 4.1.

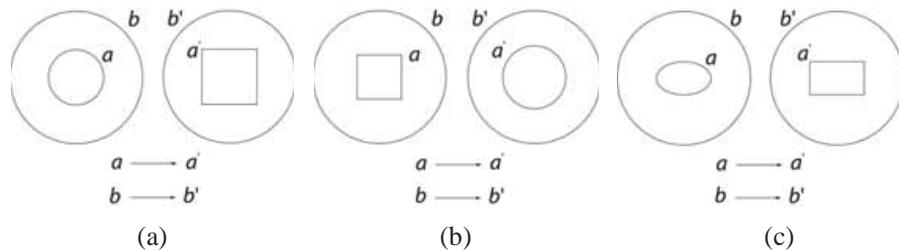


Рисунок 4.1 – Схемы координатной трансформации

При такой трансформации внутренняя граница a отображается на a' , а внешняя граница b отображается на b' (т. е. сама на себя).

Теперь нам необходимо найти зависимость между исходными и трансформированными координатами. Для этого будем использовать представленный ранее численный метод. Как и раньше, будем решать инверсное уравнение

Лапласа, которое вместе с граничными условиями характеризует связь между координатами исходной u_i ($i=1,2,3$) и координатами u'_i ($i=1,2,3$) трансформированной систем. Решая уравнение Лапласа, мы определим элементы обратной якобиановой матрицы, а затем и прямую якобианову матрицу.

Для решения уравнения Лапласа нам необходимо задать граничные условия $u(a') = a$, $u(b') = b$. Поскольку внешняя граница плаща отображается сама на себя, задание граничных условий сводится к определению зависимости между исходными и трансформированными координатами на внутренней границе.

Рассмотрим сначала задачу мимикии квадратного цилиндра под круговой (см. рис. 4.1а).

Рис. 4.2 иллюстрирует получение указанной выше зависимости для этой задачи.

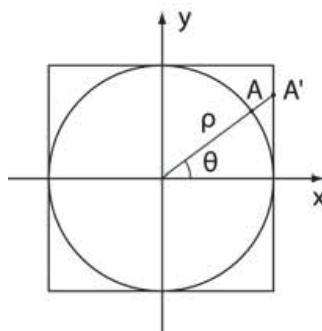


Рисунок 4.2 – Отображение точки на окружности на точку на квадрате

Квадрат здесь представляет собой внутреннюю границу плаща мимикии, на которой должно быть задано граничное условие в виде $u = x_1$, $u_2 = y_1$, где u и u_2 – координаты точки A' в новой (трансформированной) координатной системе, x_1 , y_1 представляют собой координаты точки A , а x и y координаты точки A' в исходной системе. Естественно, что при задании граничных условий координаты любой точки (в том числе и точки A') на внутренней границе

нам известны, и по этим координатам мы должны найти координаты точки A .

Так как выполняемая нами координатная трансформация производится вдоль радиус-векторов полярной системы координат, то угловая координата θ имеет одинаковую величину для точек A и A' . Мы можем записать ее через декартовы координаты как

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.1)$$

Если радиус окружности нам известен, то мы легко находим x_1 и y_1 по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos(\theta); \\ y_1 &= \rho \sin(\theta). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Перейдем теперь к задаче мимикрии кругового цилиндра под квадратный (см. рис. 4.1b). Как и в предыдущем случае, нам необходимо определить зависимость между исходными и трансформированными координатами на внутренней границе (см. рис. 4.3).

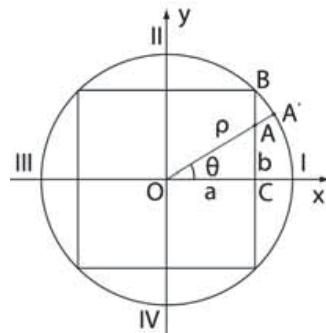


Рисунок 4.3 – Отображение точки на квадрате на точку на окружности

В этом случае мы не можем использовать такой простой подход, как в слу-

чае трансформации окружности в квадрат, поскольку нам неизвестна длина OA . Для нахождения зависимости между исходными и трансформированными координатами разделим геометрию (рис. 4.3) на 4 области (I – IV).

В области I находим зависимость координат точки A (x_1 и y_1) от координат точки A' . Аналогично поступаем и в областях II – IV.

Результаты представлены в таблице.

Таблица 4.1 – Зависимость координат точки A от координат точки A'

| Область I | Область II | Область III | Область IV |
|--|---|---|---|
| $y_1 = x_1 \operatorname{tg}(\theta)$ $x_1 = a$ | $x_2 = y_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $y_2 = a$ | $y_3 = x_3 \operatorname{tg}(\theta)$ $x_3 = -a$ | $x_4 = y_4 \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)$ $y_4 = -a$ |

Наконец, на рис. 4.4 представлена зависимость между исходными и трансформированными координатами на внутренней границе плаща для задачи мимикции цилиндра прямоугольного сечения под эллиптический цилиндр.

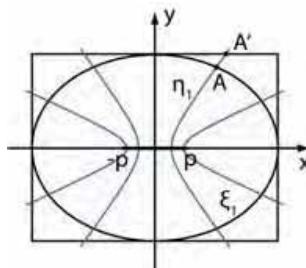


Рисунок 4.4 – Отображение точки на прямоугольнике на точку на эллипсе

В этом случае производим координатную трансформацию вдоль изолиний эллиптической координаты η , и следовательно точка A' и точка A имеют одинаковое значение координаты η_1 .

Координаты точки A' в исходной (нетрансформированной) системе представленные в эллиптической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}\xi &= Re\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x+iy}{p}\right)\right); \\ \eta &= Im\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x+iy}{p}\right)\right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Если координата ξ_1 эллипса нам известна, то для точки A декартовы координаты имеют вид:

$$\begin{aligned}x_1 &= p \operatorname{ch}(\xi_1) \cos(\eta_1); \\ y_1 &= p \operatorname{sh}(\xi_1) \sin(\eta_1).\end{aligned}\tag{4.4}$$

4.2 Численное моделирование

Численное моделирование проводили с использованием метода конечных элементов. Исследовали двумерную задачу для случая падения плоской E – поляризованной волны. Длина волны во всех экспериментах составляла 0.12 м.

На внутренней границе плаща граничные условия для всех трех задач мимикрии имеют вид:

$$\begin{aligned}u &= x_1; \\ u_2 &= y_1,\end{aligned}\tag{4.5}$$

где x_1 и y_1 берутся из соответствующих выражений.

На внешней границе плаща граничные условия для задач мимикрии имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= x; \\ u_2 &= y. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Решая уравнения Пуассона (для u и u_2 координат) вместе с граничными условиями с использованием МКЭ, находим связь между трансформированными и исходными координатами, определяем элементы якобиановой матрицы и далее компоненты диэлектрической и магнитной проницаемостей (μ_{xx} , μ_{xy} , μ_{yx} , μ_{yy} , ϵ_{zz}).

Пространственное распределение компонент материальных параметров для плаща мимикрии квадратного цилиндра под круговой приведено на рис. 4.5. Несложно заметить, что значения величин малы (не имеют сингулярностей).

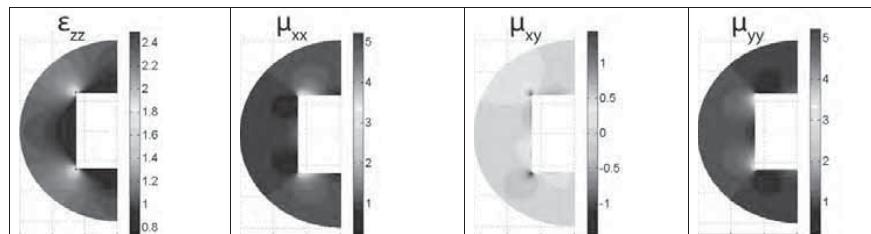


Рисунок 4.5 – Пространственное распределение компонент материальных параметров в плаще мимикрии квадратного цилиндра под круговой

Для проверки работы плащей мимикрии было проведено сравнение абсолютного значения рассеянного электрического поля в дальней зоне при рассеянии от проводящего кругового цилиндра и при рассеянии от плаща мимикрии квадратного цилиндра под круговой.

На рис. 4.6 представлен результат такого расчета. Круговой цилиндр имеет радиус 0.125 м, квадратный цилиндр имеет размеры 0.25 м \times 0.25 м, внешний радиус плаща 0.3 м.

Видно что в дальней зоне диаграммы рассеяния практически полностью совпадают.

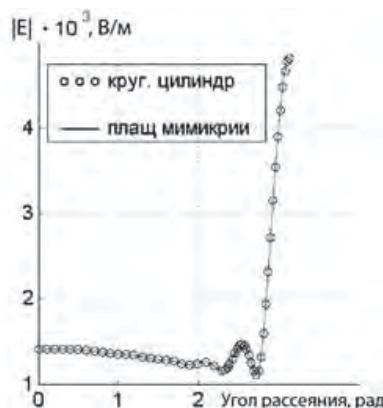


Рисунок 4.6 – Диаграммы рассеяния кругового цилиндра и плаща мимикрии квадратного цилиндра под круговой

Аналогичные диаграммы при рассеянии от квадратного цилиндра и при рассеянии от плаща мимикрии кругового цилиндра под квадратный представлены на рис. 4.7. Квадратный цилиндр имеет размеры $0.17678 \text{ м} \times 0.17678 \text{ м}$, круговой цилиндр имеет радиус 0.125 м, внешний радиус плаща 0.3 м.

Наконец, на рис. 4.8 показаны диаграммы рассеяния от эллиптического проводящего цилиндра и от плаща мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический. Эллиптический цилиндр имеет большую полуось эллипса $a = 0.125 \text{ м}$, и малую полуось эллипса $b = 0.075 \text{ м}$, прямоугольный цилиндр имеет сечение $0.25 \text{ м} \times 0.15 \text{ м}$, внешний радиус плаща 0.3 м.

Также нами проведена оценка работы плаща мимикрии в ближней зоне. На рис. 4.9 представлено распределения компоненты полного поля при рассеянии плоской волны от кругового идеально-проводящего цилиндра, а на рис. 4.10 от плаща мимикрии квадратного идеально-проводящего цилиндра под круговой.

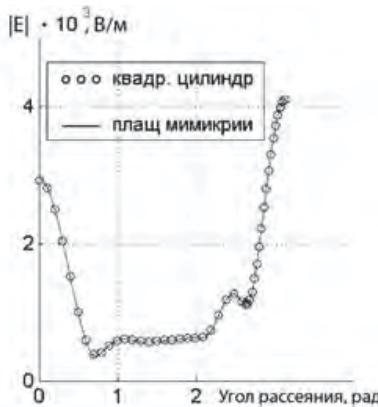


Рисунок 4.7 – Диаграммы рассеяния квадратного цилиндра и плаща мимикрии кругового цилиндра под квадратный

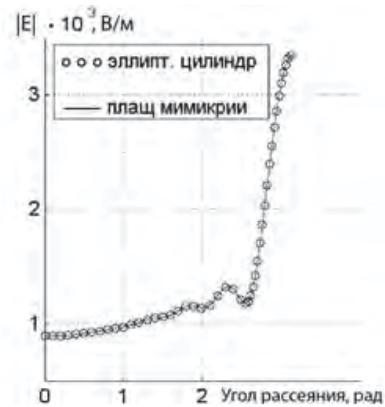


Рисунок 4.8 – Диаграммы рассеяния эллиптического цилиндра и плаща мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический

Круговыми маркерами на рисунках обозначены произвольно выбранные точки, в которых оценивались абсолютное значение E_z компоненты полного поля и абсолютное значение z компоненты рассеянного поля (scE_z).

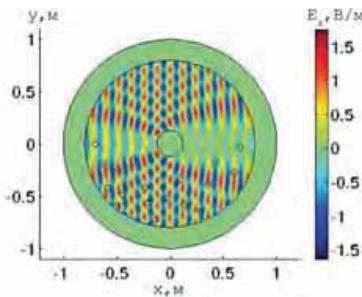


Рисунок 4.9 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи идеально-проводящего кругового цилиндра

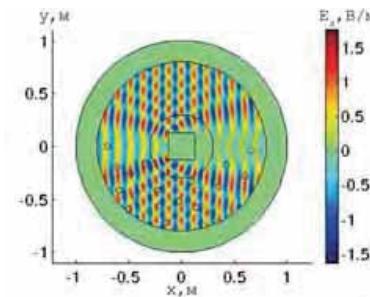


Рисунок 4.10 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи плаща мимикрии квадратного цилиндра под круговой

Аналогичные распределения E_z компоненты поля получены и для случая

квадратного цилиндра (рис. 4.11) и плаща мимикрии кругового цилиндра под квадратный (рис. 4.12), а также для эллиптического цилиндра и плаща мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический (рис. 4.13 и 4.14).

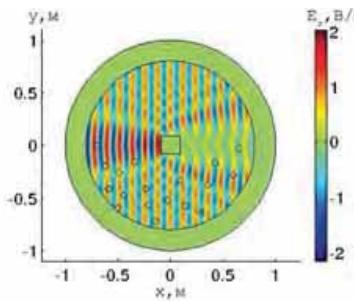


Рисунок 4.11 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи идеально-проводящего квадратного цилиндра

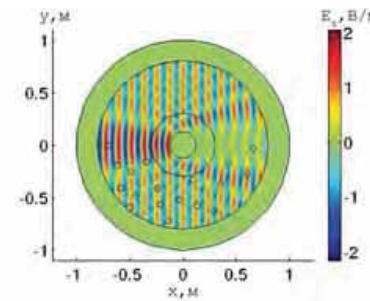


Рисунок 4.12 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи плаща мимикрии кругового цилиндра под квадратный

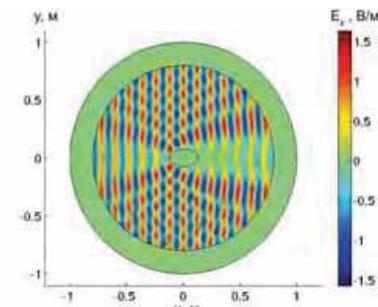


Рисунок 4.13 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи идеально-проводящего эллиптического цилиндра

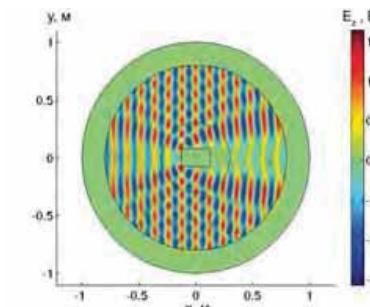


Рисунок 4.14 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи плаща мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический

Значения E_z компоненты полного поля и z компоненты рассеянного поля (scE_z), вычисленные в 18 произвольно выбранных точках представлены в

таблицах 4.2, 4.3, 4.4.

Таблица 4.2 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля плаща мимикрии квадратного цилиндра под круговой и кругового цилиндра

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|--|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | круговой цилиндр | плащ мимикрии | круговой цилиндр | плащ мимикрии |
| 1 | 1.27727519 | 1.27734398 | 0.31527009 | 0.31534726 |
| 2 | 1.29509793 | 1.29516546 | 0.32817156 | 0.32821206 |
| 3 | 0.70381577 | 0.70383814 | 0.30201414 | 0.30202870 |
| 4 | 0.97344040 | 0.97370425 | 0.28280327 | 0.28274917 |
| 5 | 1.22261672 | 1.22268252 | 0.35391356 | 0.35394050 |
| 6 | 1.03023504 | 1.02993840 | 0.31260506 | 0.31256159 |
| 7 | 0.62987135 | 0.62983476 | 0.43840168 | 0.43840242 |
| 8 | 0.89792832 | 0.89762113 | 0.36131904 | 0.36118453 |
| 9 | 0.82635042 | 0.82617330 | 0.30903323 | 0.30887866 |
| 10 | 1.03084186 | 1.03098828 | 0.27086460 | 0.27071315 |
| 11 | 0.90713525 | 0.90696492 | 0.31750006 | 0.31738175 |
| 12 | 0.62193042 | 0.62200133 | 0.38222939 | 0.38212276 |
| 13 | 1.21006800 | 1.21010575 | 0.28380647 | 0.28372038 |
| 14 | 1.19665730 | 1.19652716 | 0.25797322 | 0.25786517 |
| 15 | 1.13181228 | 1.13195768 | 0.31011842 | 0.31022286 |
| <i>Продолжение на следующей странице</i> | | | | |

Продолжение таблицы 4.2

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | круговой цилиндр | плаш мимикрии | круговой цилиндр | плаш мимикрии |
| 16 | 0.55814900 | 0.55811623 | 0.50898769 | 0.50898575 |
| 17 | 0.96711699 | 0.96706013 | 0.35189340 | 0.35190306 |
| 18 | 0.29903347 | 0.29901463 | 0.89739704 | 0.89726708 |

Из представленных в таблице 4.2 результатов можно получить величину среднего относительного отклонения для полного поля, которое равно 0.00012545 и аналогичную величину для рассеянного поля, равную 0.00023021. При этом максимальное отклонение для полного поля равно 0.00034223 и для рассеянного 0.00055945.

Таблица 4.3 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля плаща мимикрии кругового цилиндра под квадратный и квадратного цилиндра

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|--|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| | квадратный цилиндр | плаш мимикрии | квадратный цилиндр | плаш мимикрии |
| 1 | 0.63326499 | 0.63066557 | 0.63727195 | 0.64124544 |
| 2 | 0.67421368 | 0.67559091 | 0.42540529 | 0.42421413 |
| 3 | 1.06114650 | 1.05678416 | 0.12572735 | 0.12272155 |
| 4 | 0.87898267 | 0.87984356 | 0.12425387 | 0.12410331 |
| 5 | 0.81570858 | 0.81718900 | 0.23639334 | 0.23226591 |
| 6 | 1.12602958 | 1.12454161 | 0.13620971 | 0.13594152 |
| <i>Продолжение на следующей странице</i> | | | | |

Продолжение таблицы 4.3

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| | квадратный цилиндр | плащ мимикрии | квадратный цилиндр | плащ мимикрии |
| 7 | 1.34607980 | 1.34205903 | 0.34671791 | 0.34252700 |
| 8 | 1.07359316 | 1.07071913 | 0.17296934 | 0.17189225 |
| 9 | 1.00756167 | 1.00507618 | 0.14025211 | 0.13910685 |
| 10 | 0.92508354 | 0.92749720 | 0.12098482 | 0.11955333 |
| 11 | 1.04484051 | 1.04243530 | 0.15357032 | 0.15210210 |
| 12 | 0.87493085 | 0.87295329 | 0.22639335 | 0.22574787 |
| 13 | 1.01693442 | 1.01887640 | 0.15081336 | 0.15025389 |
| 14 | 1.14908342 | 1.14825756 | 0.14911121 | 0.14826381 |
| 15 | 0.89979651 | 0.90040392 | 0.29817651 | 0.29811291 |
| 16 | 0.68479390 | 0.68377260 | 0.49350101 | 0.49361931 |
| 17 | 1.11160624 | 1.11072051 | 0.34922469 | 0.34940690 |
| 18 | 0.34528173 | 0.34489487 | 0.79509170 | 0.79565284 |

Соответственно из таблицы 4.3 мы находим среднее относительное отклонение для полного поля, равное 0.00202456, а для рассеянного поля равное 0.00648847. Максимальное отклонение для полного поля составляет 0.00412794, а для рассеянного – 0.02449285.

Наконец для плаща мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический в сравнении с эллиптическим из таблицы 4.4 среднее относительное отклонение для полного поля равно 0.00007974, а для рассеянного поля равно 0.00020320. Максимальные отклонения для полного поля – 0.00022293, для рассеянного – 0.00049953.

Таблица 4.4 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля плаща мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический и эллиптического цилиндра

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|--|-----------------------|---------------|-----------------------|---------------|
| | эллиптический цилиндр | плащ мимикрии | эллиптический цилиндр | плащ мимикрии |
| 1 | 1.16794496 | 1.16797183 | 0.20460996 | 0.20458210 |
| 2 | 1.20810657 | 1.20811793 | 0.21595859 | 0.21598296 |
| 3 | 0.81407642 | 0.81400218 | 0.20434700 | 0.20440170 |
| 4 | 0.82213298 | 0.82217827 | 0.19979934 | 0.19979050 |
| 5 | 1.06039593 | 1.06045162 | 0.23792984 | 0.23799275 |
| 6 | 1.16881087 | 1.16875732 | 0.21991572 | 0.21991361 |
| 7 | 0.82475688 | 0.82468844 | 0.29941855 | 0.29947921 |
| 8 | 1.20893664 | 1.20880741 | 0.26801627 | 0.26795951 |
| 9 | 1.17141588 | 1.17124797 | 0.23716740 | 0.23708865 |
| 10 | 0.78309027 | 0.78318866 | 0.21749238 | 0.21738379 |
| 11 | 1.25823844 | 1.25812194 | 0.26439988 | 0.26430599 |
| 12 | 1.16648186 | 1.16628589 | 0.34911268 | 0.34901165 |
| 13 | 0.77379886 | 0.77397140 | 0.25965528 | 0.25957101 |
| 14 | 1.14931975 | 1.14931777 | 0.24159877 | 0.24152057 |
| 15 | 0.73987497 | 0.73992395 | 0.32166510 | 0.32166693 |
| 16 | 0.80642081 | 0.80635714 | 0.49016134 | 0.49011620 |
| 17 | 1.22654050 | 1.22646257 | 0.36615910 | 0.36612388 |
| <i>Продолжение на следующей странице</i> | | | | |

Продолжение таблицы 4.4

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|-----------------------|---------------|-----------------------|---------------|
| | эллиптический цилиндр | плащ мимикрии | эллиптический цилиндр | плащ мимикрии |
| 18 | 0.40706180 | 0.40705960 | 0.67376465 | 0.67370425 |

Из таблиц видно, что величина как полного, так и рассеянного поля в выбранных точках при рассеянии от тела, под которое производится мимикрия, и от плаща мимикрии совпадают с точностью до 2 – 3 знака после запятой.

Несложно заметить, что наилучший результат в плане мимикрии обеспечивает плащ мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический, а наихудший – плащ мимикрии кругового цилиндра под квадратный.

Можно предположить, что наихудший результат дает тот плащ, который обеспечивает мимикрию под цилиндр с углами, имеющий резкие изменения кривизны поверхности.

Что же касается плаща мимикрии прямоугольного цилиндра под эллиптический, то он демонстрирует наилучшую мимикрирующую способность, поскольку при численном моделировании облучается волной, распространяющейся перпендикулярно узкой стороне прямоугольного сечения.

Представленные выше цилиндрические плащи обеспечивают мимикрию цилиндра одного поперечного сечения под цилиндр другого сечения, при том, что размеры поперечных сечений этих цилиндров близки.

Так квадратный цилиндр, поперечное сечение которого представляет собой квадрат, мимикрирует под круговой цилиндр, с поперечным сечением, представляющим собой круг, при этом круг имеет размеры, которые позволяют ему быть вписанным в квадрат, как видно из рис. 4.2. Аналогично выбраны раз-

меры при мимикрии кругового цилиндра под квадратный и прямоугольного цилиндра под эллиптический.

Закономерно возникает вопрос, насколько хорошо работает такой плащ мимикрии, когда размеры покрытого плащом тела, сильно отличаются от размеров тела, под которое оно мимикрирует.

Мы рассмотрим только мимикрию квадратного цилиндра под круговой и мимикрию кругового цилиндра под квадратный.

Для мимикрии квадратного цилиндра под круговой исследовали два случая. В обоих случаях квадратный цилиндр по прежнему имеет размеры $0.25 \text{ м} \times 0.25 \text{ м}$. В первом случае (далее конфигурация I) он мимикрирует под круговой цилиндр, имеющий радиус 0.0625 м, а во втором (конфигурация II) – под круговой цилиндр, имеющий радиус 0.18 м.

На рис. 4.15, 4.16 представлены диаграммы абсолютного значения рассеянного электрического поля в дальней зоне для плащей мимикрии квадратного цилиндра под круговой.

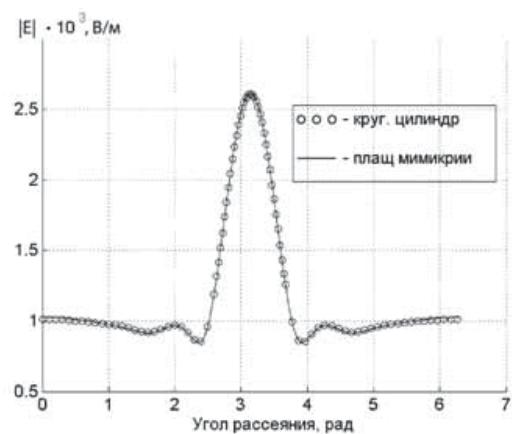


Рисунок 4.15 – Диаграммы рассеяния кругового цилиндра с радиусом 0.0625 м и плаща мимикрии квадратного цилиндра с размерами $0.25 \text{ м} \times 0.25 \text{ м}$ под круговой

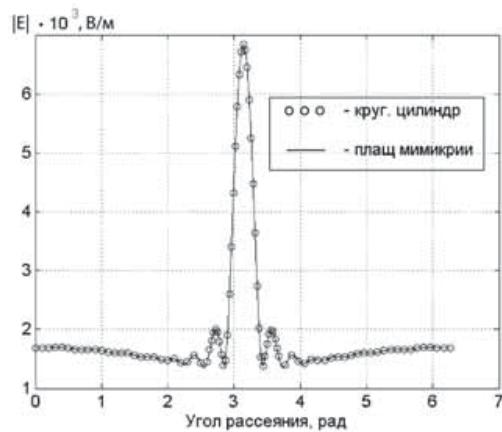


Рисунок 4.16 – Диаграммы рассеяния кругового цилиндра с радиусом 0.18 м и плаща мимикрии квадратного цилиндра с размерами 0.25 м × 0.25 м под круговой

Можно заметить, что диаграммы рассеяния с графической точностью совпадают, за исключением области вблизи 0 или 2π градусов на рис. 4.15, где отраженное плащом мимикрии поле несколько превышает такое поле, отраженное круговым цилиндром.

Для мимикрии кругового цилиндра под квадратный, круговой цилиндр имеет радиус 0.125 м. Он мимикрирует под квадратный цилиндр, имеющий размеры 0.08839 м × 0.08839 м (конфигурация III), и под квадратный цилиндр, имеющий размеры 0.26517 м × 0.26517 м (конфигурация IV).

Соответствующие диаграммы абсолютного значения рассеянного электрического поля в дальней зоне приведены на рис. 4.17, 4.18.

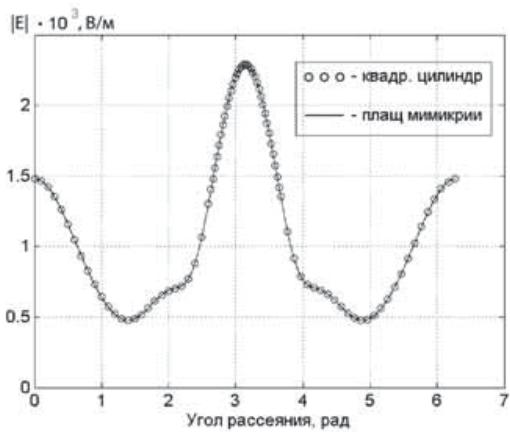


Рисунок 4.17 – Диаграммы рассеяния квадратного цилиндра с размерами $0.08839 \text{ м} \times 0.08839 \text{ м}$ и плаща мимикрии кругового цилиндра с радиусом 0.125 м под квадратный

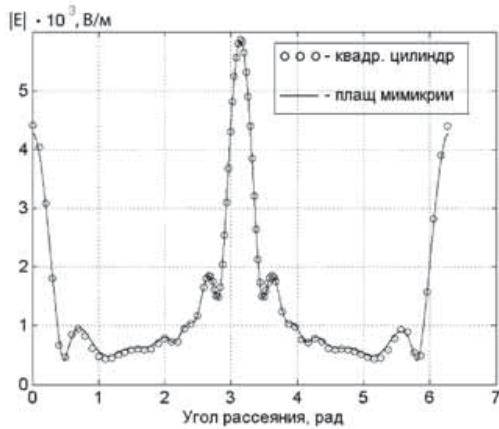


Рисунок 4.18 – Диаграммы рассеяния квадратного цилиндра с размерами $0.26517 \text{ м} \times 0.26517 \text{ м}$ и плаща мимикрии кругового цилиндра с радиусом 0.125 м под квадратный

Внешний радиус плаща во всех конфигурациях равен 0.3 м.

Оценки абсолютного значения E_z компоненты полного поля и абсолютного значения z компоненты рассеянного поля (scE_z) в произвольно выбранных

точках в ближней зоне для конфигурации I. приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля для конфигурации I

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | круговой цилиндр | плащ мимикрии | круговой цилиндр | плащ мимикрии |
| 1 | 1.15516441 | 1.15737609 | 0.22085607 | 0.22361068 |
| 2 | 1.22094460 | 1.22318889 | 0.22973512 | 0.23234460 |
| 3 | 0.79261506 | 0.79187519 | 0.21311066 | 0.21449632 |
| 4 | 1.04756788 | 1.04989839 | 0.20206164 | 0.20211770 |
| 5 | 1.13373360 | 1.13678664 | 0.24728416 | 0.24955759 |
| 6 | 0.94048557 | 0.93778444 | 0.22202324 | 0.22231487 |
| 7 | 0.75787400 | 0.75416394 | 0.30165467 | 0.30468719 |
| 8 | 0.76254699 | 0.76196787 | 0.25816725 | 0.25726221 |
| 9 | 0.78203674 | 0.78382709 | 0.22399654 | 0.22283021 |
| 10 | 1.19389027 | 1.19309459 | 0.19814000 | 0.19696705 |
| 11 | 0.82983324 | 0.83208973 | 0.23252373 | 0.23115850 |
| 12 | 1.27888541 | 1.27802271 | 0.29206029 | 0.29100599 |
| 13 | 1.00607923 | 1.00530612 | 0.21873244 | 0.21782036 |
| 14 | 0.85075823 | 0.85126230 | 0.20676973 | 0.20638223 |
| 15 | 0.77405059 | 0.77374822 | 0.23290333 | 0.23299830 |
| 16 | 0.88449144 | 0.88326620 | 0.45732056 | 0.45767222 |
| 17 | 1.27362831 | 1.27310576 | 0.35172023 | 0.35183445 |
| 18 | 0.52697058 | 0.52679463 | 0.54512710 | 0.54578553 |

Из таблицы 4.5 видно, что максимальное относительное отклонение для полного поля составляет 0.00491943, а для рассеянного поля максимальное отклонение составляет 0.01231878. При этом среднее отклонение для полного поля равно 0.00157592, а для рассеянного 0.00464833.

Для конфигурации II соответствующие данные приведены в табл. 4.6.

Таблица 4.6 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля для конфигурации II

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|--|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | круговой цилиндр | плаш мимикрии | круговой цилиндр | плаш мимикрии |
| 1 | 1.23060789 | 1.23020708 | 0.38552705 | 0.38547753 |
| 2 | 1.40091830 | 1.40096358 | 0.40175403 | 0.40181899 |
| 3 | 0.74973324 | 0.74983730 | 0.36736066 | 0.36746846 |
| 4 | 0.66588620 | 0.66582111 | 0.34202371 | 0.34206884 |
| 5 | 1.01578514 | 1.01553530 | 0.43434370 | 0.43446535 |
| 6 | 1.34394720 | 1.34403600 | 0.37965217 | 0.37970919 |
| 7 | 0.92176733 | 0.92214327 | 0.54671785 | 0.54688712 |
| 8 | 1.40649550 | 1.40649556 | 0.43919773 | 0.43919792 |
| 9 | 1.33915693 | 1.33913462 | 0.37098433 | 0.37096038 |
| 10 | 0.74145136 | 0.74143703 | 0.32309586 | 0.32308825 |
| 11 | 1.34012813 | 1.34011515 | 0.37735692 | 0.37731650 |
| 12 | 1.36366271 | 1.36364533 | 0.45850885 | 0.45847252 |
| 13 | 0.83213952 | 0.83207730 | 0.33315686 | 0.33316413 |
| 14 | 0.72132610 | 0.72137795 | 0.29614973 | 0.29609307 |
| <i>Продолжение на следующей странице</i> | | | | |

Продолжение таблицы 4.6

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | круговой цилиндр | плащ мимикрии | круговой цилиндр | плащ мимикрии |
| 15 | 1.36470263 | 1.36462050 | 0.37260883 | 0.37254292 |
| 16 | 0.29143496 | 0.29109856 | 0.70880267 | 0.70913648 |
| 17 | 0.69706704 | 0.69709278 | 0.48553662 | 0.48575728 |
| 18 | 0.17542978 | 0.17579573 | 1.07569782 | 1.07554629 |

Как видно из таблицы 4.6 максимальное относительное отклонение для полного поля составляет 0.00208168 и для рассеянного – 0.00045426. Среднее отклонение для полного поля равно 0.00027005, а для рассеянного – 0.00017700.

В следующей таблице под номером 4.7 представлены данные для плаща мимикрии кругового цилиндра под квадратный (конфигурация III).

Таблица 4.7 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля для конфигурации III

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| | квадратный цилиндр | плащ мимикрии | квадратный цилиндр | плащ мимикрии |
| 1 | 0.85695909 | 0.85706340 | 0.32146870 | 0.32145489 |
| 2 | 1.19194951 | 1.19199209 | 0.30165397 | 0.30162015 |
| 3 | 0.90563267 | 0.90558493 | 0.21345105 | 0.21342183 |
| 4 | 0.88432717 | 0.88436755 | 0.15063037 | 0.15061958 |
| 5 | 0.82328782 | 0.82339433 | 0.28068839 | 0.28064502 |

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 4.7

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| | квадратный цилиндр | плащ мимикрии | квадратный цилиндр | плащ мимикрии |
| 6 | 1.12129841 | 1.12125021 | 0.17360106 | 0.17358589 |
| 7 | 1.14194869 | 1.14180398 | 0.35402799 | 0.35398203 |
| 8 | 0.95806938 | 0.95801741 | 0.15774835 | 0.15775832 |
| 9 | 0.89961311 | 0.89956147 | 0.12192588 | 0.12195369 |
| 10 | 1.06345213 | 1.06351320 | 0.10355395 | 0.10359101 |
| 11 | 0.87094764 | 0.87089379 | 0.12907494 | 0.12912735 |
| 12 | 1.14012680 | 1.14029294 | 0.21269691 | 0.21280297 |
| 13 | 1.08392747 | 1.08389733 | 0.14973862 | 0.14980475 |
| 14 | 0.84650575 | 0.84643272 | 0.15524945 | 0.15533743 |
| 15 | 0.84492614 | 0.84461040 | 0.22039709 | 0.22058371 |
| 16 | 0.92227234 | 0.92199622 | 0.44802634 | 0.44818634 |
| 17 | 1.29471954 | 1.29467638 | 0.35289616 | 0.35301330 |
| 18 | 0.56775956 | 0.56771162 | 0.48399775 | 0.48404126 |

Из таблицы 4.7 следует, что максимальное относительное отклонение для полного поля составляет 0.00037383 и для рассеянного 0.00084603. При этом среднее отклонение для полного поля составляет 0.00010204 и для рассеянного – 0.00027340.

Наконец в таблице 4.8 представлены данные для конфигурации IV.

Таблица 4.8 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля для конфигурации IV

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| | квадратный цилиндр | плащ мимикрии | квадратный цилиндр | плащ мимикрии |
| 1 | 1.82105819 | 1.79016425 | 0.94428942 | 0.91012579 |
| 2 | 0.78978948 | 0.80437580 | 0.34880844 | 0.36844522 |
| 3 | 1.19402853 | 1.20653182 | 0.22106044 | 0.22728626 |
| 4 | 0.92259939 | 0.92826960 | 0.11978748 | 0.13993971 |
| 5 | 0.90060136 | 0.93047126 | 0.29635505 | 0.29290237 |
| 6 | 1.12150756 | 1.12792486 | 0.14359140 | 0.16563414 |
| 7 | 1.35995393 | 1.33039740 | 0.46789741 | 0.45837892 |
| 8 | 1.16227892 | 1.18020456 | 0.16694847 | 0.18077240 |
| 9 | 1.13028171 | 1.14549102 | 0.14049292 | 0.14936348 |
| 10 | 0.90353366 | 0.90925999 | 0.12384608 | 0.13392778 |
| 11 | 1.12779127 | 1.12250700 | 0.16645759 | 0.17446887 |
| 12 | 1.05007068 | 1.04013923 | 0.29079033 | 0.29477805 |
| 13 | 0.99076187 | 1.00363330 | 0.16817946 | 0.17645801 |
| 14 | 0.83836092 | 0.84111263 | 0.17231293 | 0.17479237 |
| 15 | 1.30567140 | 1.30555943 | 0.34525393 | 0.34688113 |
| 16 | 0.37654015 | 0.38161325 | 0.64747747 | 0.64304063 |
| 17 | 0.83252789 | 0.83572549 | 0.46902531 | 0.46544848 |
| 18 | 0.20275986 | 0.20514108 | 1.00450976 | 1.00188638 |

Из представленных в таблице 4.8 данных видно, что максимальное относительное отклонение для полного поля составляет 0.03210191 и для рассеянного

– 0.14400652. Средняя величина относительного отклонения для полного поля составляет 0.01143333, а для рассеянного – 0.04341356.

Сравнивая представленные в таблицах 4.5 – 4.8 данные несложно увидеть, что плащи мимикрии в конфигурациях II и III обеспечивают лучшую эффективность, чем плащи в конфигурациях I и IV.

Можно заметить, что более эффективными являются те плащи, где большим телом является "гладкое" тело (круговой цилиндр), независимо от того, находится ли оно в плаще (в случае мимикрии кругового цилиндра большего размера под квадратный цилиндр меньшего размера), либо под такое тело производится мимикрия. Плащи же, в которых большим телом является тело с углами, демонстрируют более низкую эффективность. В последнем случае (конфигурация IV) имеем самую низкую эффективность плаща мимикрии.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что для создания наиболее эффективных плащей мимикрии необходимо стремиться к тому, чтобы тело, под которое производится мимикрия, имело меньший размер и чтобы тело, окруженное плащом, не имело углов (было "гладким").

Возникает вопрос, насколько хорошо работают плащи, демонстрируя представленные выше отклонения. Сравнивая полученные средние величины относительного отклонения с такими величинами, полученными в разделе 2, где было предложено трактовать среднюю величину относительного отклонения как приближенную оценку погрешности вычислений, несложно заметить, что исследованные плащи обеспечивают средние величины относительного отклонения даже меньшие, чем такая оценка. Исходя из этого, можно сделать вывод, что плащи мимикрии обеспечивают практически полную мимикрию под заданный объект.

4.3 Аналитический подход к расчету плаща мимикрии

В предыдущих параграфах было рассмотрено создание плащей мимикрии с использованием численного подхода к вычислению материальных параметров плаща.

Настоящий параграф посвящен рассмотрению использования аналитического подхода при расчете плаща мимикрии. Использование аналитического подхода расширяет арсенал методов для расчета плащей мимикрии. Аналитический подход может быть применен, если кривые участвующие в трансформации (например огибающие цилиндров) могут быть описаны аналитически некой функцией без разрывов. С учетом этого ограничения форма рассчитываемых плащей может быть произвольной. Для расчета плащей мимикрии использовали подход, описанный в [51], и применяемый для плащей невидимости произвольной формы.

В качестве примера рассмотрим моделирование плаща мимикрии эллиптического цилиндра под круговой.

4.4 Постановка задачи

Рассмотрим координатную трансформацию в системе координат кругового цилиндра, как изображено на рис. 4.19, где кольцевая область $r \in [a, b]$ отображается в область $r' \in [a', b']$. Как и прежде все величины в исходном физическом пространстве обозначим буквами со штрихом, а в виртуальном пространстве – буквами без штриха.

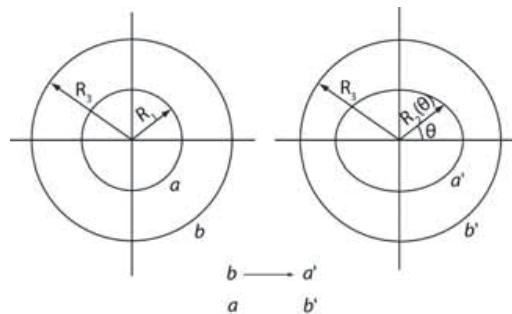


Рисунок 4.19 – Схема координатной трансформации

Рассматривая эллипс как окружность с переменным радиусом, координатную трансформацию в цилиндрической системе координат представим как:

$$r' = \frac{R_3 - R_2(\theta)}{R_3 - R_1} \cdot (r - R_1) + R_2(\theta); \quad \theta' = \theta; \quad z' = z. \quad (4.7)$$

При аналитическом подходе для получения компонент материальных параметров в системе координат кругового цилиндра используем уравнения (2.53, 2.55). Матрицы связи между системой координат кругового цилиндра и декартовой системой в виртуальном и физическом пространствах T и T' , входящие в эти уравнения, были ранее определены в (2.57) и (2.58).

Что же касается матрицы λ , элементы которой представляют собой производные координат кругового цилиндра в физическом пространстве по координатам кругового цилиндра в виртуальном пространстве, то для координатной трансформации (4.7) она будет иметь вид

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{R_3 - R_2(\theta)}{R_3 - R_1} & -\frac{\partial R_2(\theta)}{\partial \theta} \frac{(r - R_1)}{R_3 - R_1} + \frac{\partial R_2(\theta)}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Подставляя выражения (2.57), (2.58) и (4.8) в (2.54), а затем в (2.53, 2.55), и, предполагая $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ изотропными и равными 1, получим матрицу цилиндрических компонент материальных параметров в физическом пространстве

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\mu}' = \begin{pmatrix} \frac{K^2 M^2 + L^2}{MKr'} & \frac{L}{KM} & 0 \\ \frac{L}{KM} & \frac{r'}{KM} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{Kr'} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

в которой $K = \frac{R_3 - R_2(\theta')}{R_3 - R_1}; \quad L = -\frac{dR_2(\theta')}{d\theta'} \frac{(r' - R_2(\theta'))}{R_3 - R_2(\theta')} + \frac{dR_2(\theta')}{d\theta'},$
 $M = \frac{(r' - R_2(\theta'))(R_3 - R_1)}{R_3 - R_2(\theta')} + R_1.$

Для численного моделирования использовали декартовы компоненты материальных параметров, которые получали из компонент системы координат кругового цилиндра, используя соотношение (2.55).

В результате получаем выражения для вычисления декартовых компонент

материальных параметров:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{xx} &= \mu'_{xx} = (\cos(\theta)P_{rr} - \sin(\theta)P_{r\theta}) \cdot \cos(\theta) - (\cos(\theta)P_{r\theta} - \sin(\theta)P_{\theta\theta}) \cdot \sin(\theta); \\ \varepsilon'_{xy} &= \mu'_{xy} = (\cos(\theta)P_{rr} - \sin(\theta)P_{r\theta}) \cdot \sin(\theta) + (\cos(\theta)P_{r\theta} - \sin(\theta)P_{\theta\theta}) \cdot \cos(\theta); \\ \varepsilon'_{yx} &= \mu'_{yx} = (\sin(\theta)P_{rr} + \cos(\theta)P_{r\theta}) \cdot \cos(\theta) - (\sin(\theta)P_{r\theta} + \cos(\theta)P_{\theta\theta}) \cdot \sin(\theta); \\ \varepsilon'_{yy} &= \mu'_{yy} = (\sin(\theta)P_{rr} + \cos(\theta)P_{r\theta}) \cdot \sin(\theta) + (\sin(\theta)P_{r\theta} + \cos(\theta)P_{\theta\theta}) \cdot \cos(\theta); \\ \varepsilon'_{zz} &= \mu'_{zz} = P_{zz},\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$\text{где } P_{rr} = \frac{K^2 M^2 + L^2}{MKr'}; \quad P_{r\theta} = \frac{L}{KM}; \quad P_{\theta\theta} = \frac{r'}{KM} \text{ и } P_{zz} = \frac{M}{Kr'}.$$

Подставляя в (4.10) уравнение эллипса в полярных координатах

$$R_2(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{(b \cos(\theta))^2 + (a \sin(\theta))^2}}, \quad (4.11)$$

находим значения компонент материальных параметров для плаща мимикрии эллиптического цилиндра под круговой. Здесь a и b соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Несложно заметить, что изложенный выше подход применим не только к эллиптическому цилиндру, но и к цилиндром произвольного сечения, если направляющая такого цилиндра может быть представлена аналитически в полярных координатах.

4.5 Численное моделирование

Численное моделирование проводили с использованием метода конечных элементов. В работе исследовали двумерную задачу для случая падения плоской E – поляризованной волны. При такой поляризации материал плаща характеризуется только μ_{xx} , μ_{xy} , μ_{yx} , μ_{yy} и ε_{zz} компонентами материальных

параметров. В принципе, выбор поляризации может быть произвольным. Длина волны в численных экспериментах составляла 0.08 м.

На рис. 4.20 представлен результат расчета абсолютного значения рассеянного электрического поля в дальней зоне при рассеянии от идеально проводящего кругового цилиндра и от идеально проводящего эллиптического цилиндра, покрытого плащом, обеспечивающим мимикрию эллиптического цилиндра под круговой. Падающая волна распространяется вдоль межфокусного сегмента эллипса.

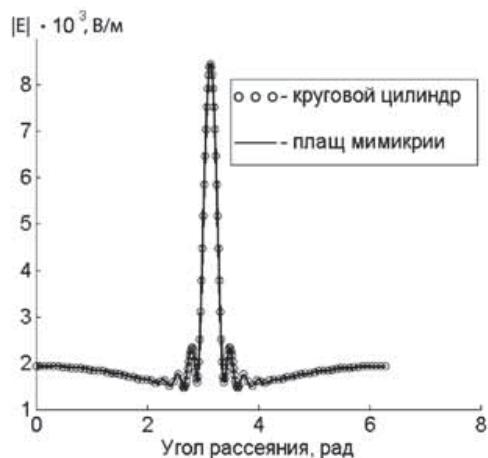


Рисунок 4.20 – Диаграммы рассеяния кругового цилиндра и плаща мимикрии эллиптического цилиндра под круговой

В качестве примера принимаем радиус кругового цилиндра равным 0.15 м, большую полуось эллипса эллиптического цилиндра равной 0.22 м, малую полуось эллипса — 0.15 м, внешний радиус плаща — 0.35 м.

Как видно из рис. 4.20, в дальней зоне диаграммы рассеяния практически полностью совпадают.

Были также произведены оценки эффективности плаща мимикрии в

ближней зоне. На рис. 4.21 представлено распределение E_z компоненты полного поля при рассеянии плоской волны от кругового идеально проводящего цилиндра, а на рис. 4.22 от идеально проводящего эллиптического цилиндра, покрытого плащом, обеспечивающим мимикрию эллиптического цилиндра под круговой.

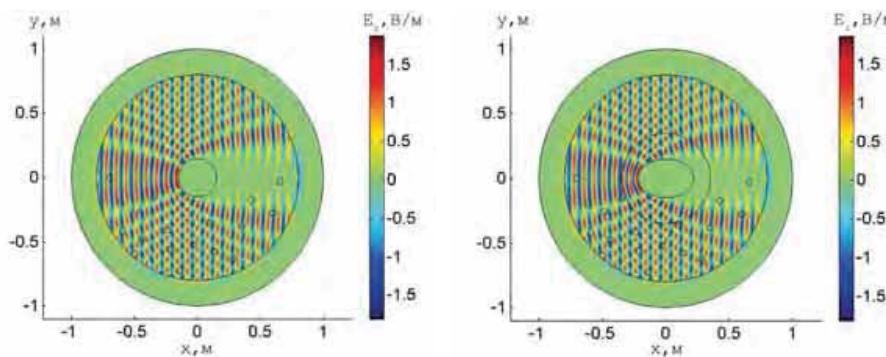


Рисунок 4.21 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи идеально-проводящего кругового цилиндра

Рисунок 4.22 – Распределение z – компоненты электрического поля вблизи плаща мимикрии эллиптического цилиндра под круговой

Кружочки на рисунках обозначают произвольно выбранные точки, в которых мы оценивали абсолютное значение E_z компоненты полного поля и абсолютное значение z компоненты рассеянного поля (scE_z). Полученные результаты сведены в таблицу 4.9.

Таблица 4.9 – Значения z – компонент полного и рассеянного поля плаща мимикрии эллиптического цилиндра под круговой и кругового цилиндра

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|--|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | круговой цилиндр | плащ мимикрии | круговой цилиндр | плащ мимикрии |
| 1 | 1.05149334 | 1.05529874 | 0.34741286 | 0.34738767 |
| 2 | 0.63843019 | 0.63819352 | 0.36166569 | 0.36182759 |
| 3 | 0.82355449 | 0.82561377 | 0.33134763 | 0.33163940 |
| 4 | 1.24720499 | 1.24833604 | 0.30885210 | 0.30895807 |
| 5 | 1.31782729 | 1.31636210 | 0.39012188 | 0.39032445 |
| 6 | 1.13729131 | 1.13553742 | 0.34207774 | 0.34215548 |
| 7 | 1.48617898 | 1.48633645 | 0.48651918 | 0.48680503 |
| 8 | 1.09859448 | 1.10043593 | 0.39366998 | 0.39385457 |
| 9 | 0.95478840 | 0.95316119 | 0.33389828 | 0.33405500 |
| 10 | 0.87751983 | 0.87615005 | 0.29087409 | 0.29105750 |
| 11 | 1.21570939 | 1.21507645 | 0.33764942 | 0.33799144 |
| 12 | 1.33984967 | 1.34018667 | 0.38215655 | 0.38286849 |
| <i>Продолжение на следующей странице</i> | | | | |

Продолжение таблицы 4.9

| № точки | E_z , В/м | | scE_z , В/м | |
|---------|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | круговой цилиндр | плащ мимикрии | круговой цилиндр | плащ мимикрии |
| 13 | 1.26124998 | 1.26203945 | 0.29610230 | 0.29653332 |
| 14 | 1.02544415 | 1.02485547 | 0.26235265 | 0.26278858 |
| 15 | 0.85825872 | 0.85843560 | 0.31458961 | 0.31517282 |
| 16 | 0.44796178 | 0.44777476 | 0.58941832 | 0.58963105 |
| 17 | 1.00877423 | 1.00837684 | 0.37296318 | 0.37307344 |
| 18 | 0.17717852 | 0.17805825 | 1.07453063 | 1.07496466 |

Максимальное относительное отклонение для полного поля

$$\left| \frac{E_{z\text{ плаща мимикрии}} - E_{z\text{ круг. цилиндра}}}{E_{z\text{ круг. цилиндра}}} \right|$$

составляет 0.00497, а для рассеянного поля – 0.00186.

4.6 Выводы по разделу

В разделе продемонстрирована возможность создания плащей мимикрии, т.е. таких плащей, что для внешнего наблюдателя покрытое ими тело представляется телом другой наперед заданной формы. Показано, что для нахождения материальных параметров таких плащей может с успехом применяться как

численный, так и аналитический методы. При этом возможно создание плащей мимикрии практически произвольной формы.

Значения компонент материальных параметров для таких плащей невелики ($\varepsilon = 0.8 \dots 2.4$, $\mu = -1.5 \dots 5$), имеют несингулярный характер, что, в принципе, открывает возможности для физических экспериментов.

Было исследовано несколько конфигураций плащей разной формы и размера. Проведенное численное моделирование и анализ рассеяния показали, что, в целом, диаграммы рассеяния от плащей мимикрии и от тел, под которые производится мимикрия, практически полностью совпадают. Сравнение абсолютных значений полей в произвольно выбранных точках в ближней зоне также показало хорошее совпадение.

В то же время наблюдается значительное различие в эффективности работы плащей. Так плащи, внутренние размеры которых наиболее точно соответствуют размерам тел, под которые они обеспечивают мимикрию, демонстрируют, в целом, наиболее высокую эффективность. Средние относительные отклонения полей в ближней зоне нигде не превышают величин в несколько тысячных, а максимальные отклонения – в несколько сотых.

Однако в случае, когда размеры тела, окруженного плащом, значительно отличаются от размеров тела, под которое производится мимикрия, результаты работы плащей не так однозначны.

В случае мимикрии кругового цилиндра малого радиуса (0.125 м) под квадратный цилиндр больших размеров ($\approx 0.27 \text{ м} \times 0.27 \text{ м}$) средние относительные отклонения полей составляют несколько сотых, а максимальные для рассеянного поля – порядка одной десятой. Также диаграммы рассеяния в дальней зоне для такой конфигурации имеют видимые несоответствия в диапазоне углов, близких к 0 градусов, т.е. для прямого отражения.

Представляется, что такой результат обусловлен тем, что квадратный иде-

ально проводящий цилиндр, одна из сторон которого расположена перпендикулярно падающей волне, обеспечивает отражение значительной части падающего на него излучения. Соответственно плащу, окружающему значительно меньший по размерам (в сравнении с квадратным цилиндром) идеально проводящий круговой цилиндр приходится обеспечивать наиболее сильное отклонение падающей волны, фактически разворачивая ее на 180° в обратном направлении.

Как практический вывод отсюда следует, что необходимо избегать попыток создания плащей, которые обеспечивают мимикрию под тело значительно большего размера, особенно если такие тела имеют форму, зеркально отражающую значительную часть падающего излучения в обратном направлении.

РАЗДЕЛ 5
**ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИИ-ИСТОЧНИКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ
 РАССЕЯНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ ПЛАЩА НЕВИДИМОСТИ**

В разделе 5 исследуется влияние функции-источника в уравнении Пуассона на характеристики плаща невидимости, рассчитанного численным методом. Проведена оптимизация с использованием генетического алгоритма для нахождения константных значений функций-источников, обеспечивающих максимальную эффективность плаща. Проведено сравнение характеристик такого плаща с характеристиками плаща, рассчитанного с использованием уравнения Лапласа.

Результаты раздела опубликованы в работе [102].

5.1 Постановка задачи

В предыдущих разделах при расчете плащей численным методом использовали уравнение Лапласа. Также было показано, что некоторые выражения, описывающие связь между координатами в исходной и трансформированной системах аналитически, в свою очередь, являются решениями уравнения Пуассона со специфической правой частью. Поскольку уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона, в работе [103] было предложено использовать для расчета плащей уравнения Пуассона с произвольной правой частью, и для некоторых константных значений функций-источников продемонстрирована возможность применения такого подхода.

Однако влияние функций-источников на характеристики рассеяния плащей

невидимости оставалось неисследованным. В данной работе проведено исследование влияния различных константных значений функций-источников на характеристики рассеяния плаща невидимости.

Рассмотрим координатную трансформацию в системе координат кругового цилиндра, как изображено на рис. 5.1, где область $r \in [0, b]$ отображается в область $r' \in [a', b']$.

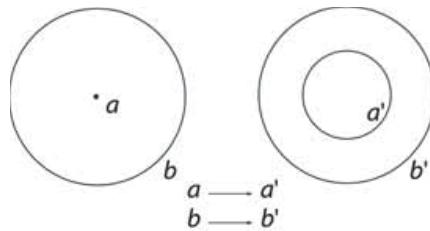


Рисунок 5.1 – Схема координатной трансформации

Запишем уравнение Пуассона, которое вместе с граничными условиями $u'(a) = a'$; $u'(b') = b'$ будет характеризовать связь между исходными и трансформированными координатами в виде:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3'^2} \right) u_i = f_i(u_1', u_2', u_3'); \\ u(a') = a, u(b') = b. \end{cases} \quad (5.1)$$

Решая уравнение (5.1) получаем элементы обратной якобиановой матрицы

$$\Lambda_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^j}, \text{ а затем находим прямую якобианову матрицу, как } \Lambda_i^{j'} = (\Lambda_{j'}^i)^{-1}.$$

Как было отмечено в [103], использование различных функций-источников в уравнении Пуассона при расчете плаща невидимости приводит к различным координатным преобразованиям и, как следствие, к плащам с различными ха-

рактеристиками.

Уравнение Пуассона вместе с граничными условиями имеет бесконечное множество решений, соответствующих различным функциям-источникам $f_i(u_1, u_2, u_3)$. В настоящей работе ограничимся заданием для функций-источников численных константных значений.

При этом исследуем, как влияют функции-источники на суммарную величину рассеяния волны плащом. Более конкретно проводится поиск такого решения, при котором интеграл рассеянного поля в домене свободного пространства (см. рис. 5.3) будет минимальным.

Это задача на оптимизацию решения. Существуют различные подходы к решению таких задач. В данной работе использовали генетический алгоритм (ГА) [104, 105].

5.2 Генетический алгоритм

Идея ГА позаимствована из теории естественного отбора или выживания наиболее приспособленных индивидов Чарльза Дарвина.

Поскольку в двумерной задаче используем два уравнения Пуассона, то имеем две функции-источника, обозначаемые как f_1 и f_2 . В генетическом алгоритме пара (комбинация) значений этих двух величин (f_1 и f_2) может трактоваться как хромосома (или индивид). Каждое из этих значений представляет собой ген.

При старте генетической оптимизации первоначально генерируется N хромосом со случайными значениями генов (первоначальная популяция). Для каждой хромосомы затем определяется фитнесс значение, показывающее “качество” хромосомы. Это значение определяет величину шансов данной хромо-

сомы участвовать в дальнейшем размножении, т.е. чем больше это значение, тем выше шансы данной хромосомы быть выбранной для дальнейшего размножения. Процесс выбора лучших хромосом называется селекцией.

Для отобранных хромосом затем с определенной вероятностью применяется скрещивание (кроссовер), а затем мутации (используется двоичное представление числа) и с определенной вероятностью каждый бит (ген) заменяется на свою противоположность (0 на 1 и наоборот).

Также в алгоритме применяется выборка некоторого числа (5%) лучших хромосом, которые без изменения переходят в следующее поколение (элитизм).

Полученные в результате всех этих операций хромосомы составляют следующее (дочернее) поколение, и цикл повторяется.

Блок–схема генетической оптимизации представлена на рис. 5.2.



Рисунок 5.2 – Блок-схема генетической оптимизации

При нашей оптимизации функция фитнеса представляет собой абсолютное значение интеграла рассеянного поля взятого по домену свободного пространства. Само численное моделирование проводится с использованием метода конечных элементов. В работе исследуется двумерная задача для случая распространения плоской E – поляризованной волны. Длина волны составляла 0.25 м, радиус идеально проводящего тела, окруженного плащом, равнялся 0.15 м, внешний радиус плаща – 0.45 м (см. рис. 5.3).

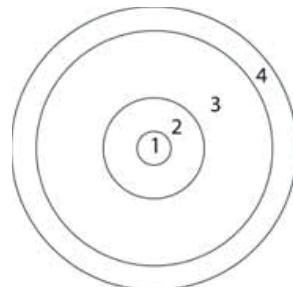


Рисунок 5.3 – Геометрия задачи: 1 – идеально проводящий цилиндр, 2 – плащ невидимости, 3 – домен свободного пространства, 4 – идеально согласованный слой

При проведении данной оптимизации мы установили диапазон возможных значений функций-источников от –50 до 50 с шагом 0.1, количество индивидов в одном поколении 80, количество поколений – 40.

5.3 Результаты и обсуждение

В результате проведенной оптимизации было получено наименьшее значение интеграла от рассеянного поля в домене свободного пространства, равное

$8.79996 \cdot 10^{-6}$ В/м. Этому наименьшему значению соответствуют значения функций-источников $f_1 = -7.7$ и $f_2 = -48.2$.

Сравним это с решением, где $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ (уравнения Лапласа). Интеграл от рассеянного поля в домене свободного пространства в этом случае будет равен 0.02384 В/м. Видно, что значение интеграла при $f_1 = -7.7$ и $f_2 = -48.2$ меньше интеграла решения при $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ на несколько порядков величины.

Известно, что в случае идеального плаща одна из компонент материальных параметров (в данном случае компонента μ_θ) должна стремиться к бесконечности на внутренней границе плаща. Плащ невидимости, материальные компоненты которого получены численным методом путем решения уравнения Лапласа, должен быть идеальным. Однако при реальных вычислениях, производится усечение величины компоненты μ_θ к большому, но все-таки конечному значению.

Таким образом, идеальный плащ оказывается неидеальным, и как мы видим его эффективность (способность скрывать окружаемое им тело) может быть улучшена.

На рис. 5.4 и 5.5 представлена картина распределения рассеянного поля в ближней зоне для случая $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ и для случая $f_1 = -7.7$, $f_2 = -48.2$.

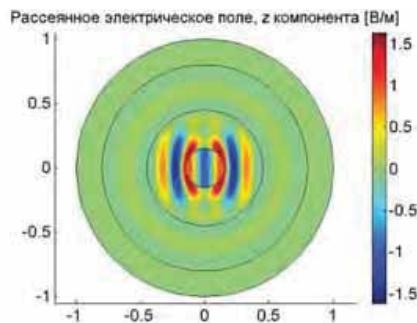


Рисунок 5.4 – Распределение z – компоненты рассеянного электрического поля для случая $f_1 = 0$, $f_2 = 0$

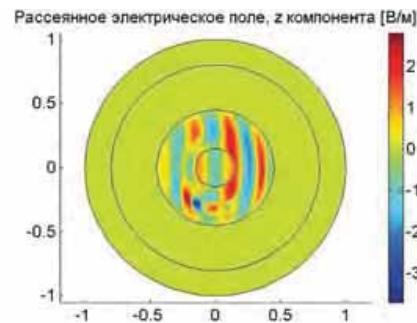


Рисунок 5.5 – Распределение z – компоненты рассеянного электрического поля для случая $f_1 = -7.7$, $f_2 = -48.2$

Видно, что в обоих случаях практически все рассеянное поле сосредоточено внутри плаща. В то же время видно, что решение $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ дает симметричное распределение поля, чего, очевидно, не наблюдается во втором случае.

Еще более яркая картина несимметричности распределения поля для решения, полученного в результате оптимизации, дают диаграммы распределения рассеянного поля в дальней зоне, представленные на рис. 5.6 и 5.7.

Несложно заметить, что плащ, материальные компоненты которого получены в результате решения уравнения Лапласа, дает строго симметричную диаграмму в отличие от плаща, полученного в результате оптимизации. Во втором случае диаграмма рассеяния имеет несимметричный хаотический вид.

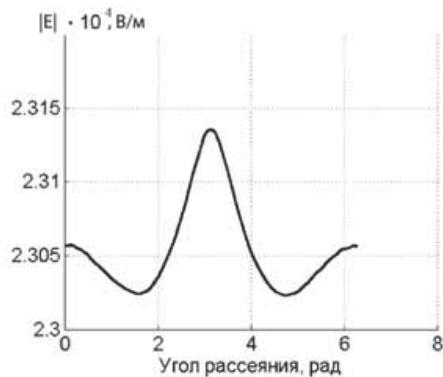


Рисунок 5.6 – Диаграмма рассеяния для случая $f_1 = 0$, $f_2 = 0$

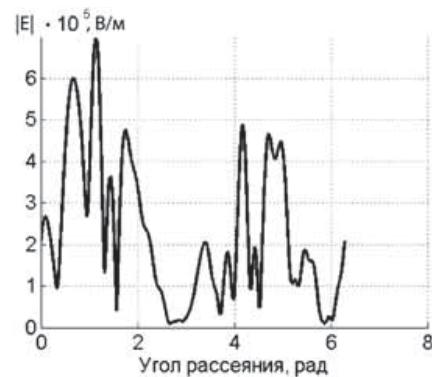


Рисунок 5.7 – Диаграмма рассеяния для случая $f_1 = -7.7$, $f_2 = -48.2$

Необходимо также отметить, что полученный результат крайне чувствителен к изменению как величин функций-источников, так и длины волны.

5.4 Выводы по разделу

Проведено исследование влияния константных значений функций-источников в уравнении Пуассона на характеристики рассчитанного численным методом плаща невидимости.

Показана возможность повышения эффективности плаща путем выбора соответствующих значений функций-источников посредством проведения генетической оптимизации.

Исследовано рассеяние поля таким плащом и продемонстрировано, что диаграмма рассеяния такого плаща имеет ассиметричный вид.

В то же время эффективность такого плаща имеет резонансный характер и крайне чувствительна к изменению значений функций-источников.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе разработаны новые подходы к решению актуальной научной задачи создания плащей невидимости, компоненты материальных параметров которых не имеют сингулярности, и в рамках трансформационной оптики предложены новые типы несингулярных плащей.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчете плащей невидимости и мимикрии различных форм и конфигураций, при исследовании их свойств и для оценки их производительности. В частности, использование при расчете многослойных упрощенных плащей позволит облегчить физическую реализацию таких устройств.

1. Проведено исследование неидеального несингулярного кругового цилиндрического плаща невидимости и впервые показано, что величина рассеяния от идеально проводящего цилиндра, окруженного таким плащом, практически полностью совпадает с величиной рассеяния от идеально проводящего цилиндра меньшего радиуса, размеры которого являются "базой" при координатной трансформации, используемой при расчете такого плаща.

Установлено, что величины компонент материальных параметров в нем конечны и находятся в пределах нескольких десятков (до полутора сотен единиц), что, в принципе, позволяет использовать такой подход для создания неидеальных, но все же достаточно эффективных устройств невидимости. Суммарная величина рассеяния для наиболее эффективного рассмотренного в работе неидеального плаща превосходит такую величину для соответствующего сингулярного плаща всего в 1.22 раза.

2. С использованием подхода трансформационной оптики впервые предложен новый тип плащей – плащей мимикрии, обеспечивающих покрытому ими телу мимикрию под тело другой наперед заданной формы. Предложена методика расчета материальных параметров таких плащей. Показано, что материальные параметры плащей мимикрии несингулярны. По результатам моделирования работы плащей мимикрии даны рекомендации относительно выбора конфигураций для улучшения их работы.
3. Проведено исследование влияния функций-источников в уравнении Пуассона, которое используется для установления связи между координатами, на характеристики рассчитываемого плаща невидимости и впервые показана возможность снижения на несколько порядков суммарной величины напряженности рассеянного плащом невидимости поля путем выбора соответствующих константных значений функций-источников.
4. Проведено дополнительное обоснование численного метода вычисления материальных параметров плащей. Этот метод применяется как при расчете плащей невидимости разнообразной формы, так и плащей мимикрии.
5. Впервые предложен новый тип плаща-ковра невидимости, основанный на одностороннем несингулярном диэлектрическом цилиндрическом плаще эллиптического сечения, используемый подобно ковру. Такой плащ-ковер позволяет эффективно скрывать расположенный на проводящей поверхности объект, при облучении его с различных направлений. Продемонстрирована возможность создания плащей-ковров произвольной формы.

Список литературы

1. Pendry J. B. Negative Refraction Makes a Perfect Lens / J. B. Pendry // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 3966–3969.
2. Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens / N. Fang, H. Lee, C. Sun, X. Zhang // Science. – 2005. – Vol. 308, No. 5721. – P. 534–537.
3. Theory of optical imaging beyond the diffraction limit with a far-field superlens / S. Durant, Z. Liu, N. Fang, X. Zhang // Proc. SPIE 6323, Plasmonics: Metallic Nanostructures and their Optical Properties IV, August 30, 2006. – San Diego, 2006. – P. 63231H–63231H–8.
4. Smolyaninov I. I. Magnifying Superlens in the Visible Frequency Range / I. I. Smolyaninov, Y.J. Hung, C. C. Davis // Lasers and Electro-Optics, 2007. CLEO 2007. Conference on, May 6 – 11. – Baltimore, 2007. – P. 1–2.
5. Zhang X. Superlenses to overcome the diffraction limit / X. Zhang, Z. Liu // Nature materials. – 2008. – Vol. 7, No. 6. – P. 435 – 441.
6. Jacob Z. Optical Hyperlens: Far-field imaging beyond the diffraction limit / Z. Jacob, L. V. Alekseyev, E. E. Narimanov // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14, No. 18. – P. 8247–8256.
7. Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects / Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong [et al.] // Science. – 2007. – Vol. 315, No. 5819. – P. 1686 – 1686.
8. Controlling spontaneous emission with metamaterials / M. A. Noginov, H. Li, Yu.

- A. Barnakov [et al.] // Opt. Lett. – 2010. – Vol. 35, No. 11. – P. 1863–1865.
9. Engineering photonic density of states using metamaterials / Z. Jacob, J.-Y. Kim, G. V. Naik [et al.] // Applied Physics B. – 2010. – Vol. 100, No. 1. – P. 215–218.
10. Pendry J. B. Controlling Electromagnetic Fields / J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith // Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 1780–1782.
11. Leonhardt U. Optical Conformal Mapping / U. Leonhardt // Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 1777–1780.
12. Chen H. Transformation optics that mimics the system outside a Schwarzschild black hole / H. Chen, R.-X. Miao, M. Li // Opt. Express. – 2010. – Vol. 18, No. 14. – P. 15183–15188.
13. Mackay T. G. Towards a metamaterial simulation of a spinning cosmic string / T. G. Mackay, A. Lakhtakia // Physics Letters A. – 2010. – Vol. 374, No. 23. – P. 2305–2308.
14. Li M. Casimir energy, holographic dark energy and electromagnetic metamaterial mimicking de Sitter / M. Li, R.-X. Miao, Y. Pang // Physics Letters B. – 2010. – Vol. 689, No. 2. – P. 55–59.
15. Cummer S. A. One path to acoustic cloaking / S. A. Cummer, D. Schurig // New Journal of Physics. – 2007. – Vol. 9, No. 45. – P. 1–8.
16. Chen H. Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials / H. Chen, C. T. Chan // Applied physics letters. – 2007. – Vol. 91, No. 18. – P. 183518–1–183518–3.
17. Zhang S. Broadband Acoustic Cloak for Ultrasound Waves / S. Zhang, C. Xia,

- N. Fang // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106. – P. 024301–1–024301–4.
18. Guenneau S. Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux / S. Guenneau, C. Amra, D. Veynante // Opt. Express. – 2012. – Vol. 20, No. 7. – P. 8207–8218.
19. Narayana S. Heat Flux Manipulation with Engineered Thermal Materials / S. Narayana, Y. Sato // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 108. – P. 214303–1–214303–5.
20. Experiments on Transformation Thermodynamics: Molding the Flow of Heat / R. Schittny, M. Kadic, S. Guenneau, M. Wegener // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110. – P. 195901–1–195901–5.
21. Cai W. Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications / W. Cai, V. M. Shalaev. – S. l. Springer, 2010. – 200 p.
22. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ / В. Г. Веселаго // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92, № 7. – С. 517–526.
23. Low frequency plasmons in thin-wire structures / J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart // Journal of Physics: Condensed Matter. – 1998. – Vol. 10, No. 22. – P. 4785–4809.
24. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena / J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1999. – Vol. 47, No. 11. – P. 2075–2084.
25. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity / D. Smith, W. Padilla, D. Vier [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84. – P. 4184–4187.

26. Shelby R. A. Experimental Verification of a Negative Index of Refraction / R. A. Shelby, D. R. Smith, S. Schultz // *Science*. – 2001. – Vol. 292, No. 5514. – P. 77–79.
27. Terahertz Magnetic Response from Artificial Materials / T. J. Yen, W. J. Padilla, N. Fang [et al.] // *Science*. – 2004. – Vol. 303, No. 5663. – P. 1494–1496.
28. Magnetic Response of Metamaterials at 100 Terahertz / S. Linden, C. Enkrich, M. Wegener [et al.] // *Science*. – 2004. – Vol. 306, No. 5700. – P. 1351–1353.
29. Saturation of the Magnetic Response of Split-Ring Resonators at Optical Frequencies / J. Zhou, Th. Koschny, M. Kafesaki [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95. – P. 223902–1–223902–4.
30. Experimental Demonstration of Near-Infrared Negative-Index Metamaterials / S. Zhang, W. Fan, N. C. Panoiu [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2005. – Vol. 95, No. 13. – P. 137404–1–137404–4.
31. Yellow-light negative-index metamaterials / S. Xiao, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev [et al.] // *Opt. Lett.* – 2009. – Vol. 34, No. 22. – P. 3478–3480.
32. The Microstructure Design Optimization of Negative Index Metamaterials Using Genetic Algorithm / Y. Zhao, F. Chen, H. Chen [et al.] // *Progress In Electromagnetics Research Letters*. – 2011. – Vol. 22. – P. 95–108.
33. Synthesis design of artificial magnetic metamaterials using a genetic algorithm / P. Y. Chen, C. H. Chen, H. Wang [et al.] // *Opt. Express*. – 2008. – Vol. 16, No. 17. – P. 12806–12818.
34. Ruppin R. Surface polaritons of a left-handed medium / R. Ruppin // *Physics Letters A*. – 2000. – Vol. 277, No. 1. – P. 61 – 64.

35. Ruppin R. Surface polaritons of a left-handed material slab / R. Ruppin // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2001. – Vol. 13, No. 9. – P. 1811– 1818.
36. Near-infrared double negative metamaterials / S. Zhang, W. Fan, K. J. Malloy [et al.] // Opt. Express. – 2005. – Vol. 13, No. 13. – P. 4922–4930.
37. Долин Л. С. О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнением / Л. С. Долин // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1961. – Т. 4, № 5. – С. 964–967.
38. Post E. J. Formal Structure of Electromagnetics: General Covariance and Electromagnetics / E. J. Post. – New York, Interscience Publishers, 1962. – 204 p.
39. Lax M. Maxwell equations in material form / M. Lax, D. F. Nelson // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13.– P. 1777–1784.
40. Ward A. J. Calculating photonic Green's functions using a nonorthogonal finite-difference time-domain method / A. J. Ward, J. B. Pendry // Physical Review B. – 1998.– Vol. 58.– P. 7252–7259.
41. Ward A. J. Refraction and geometry in Maxwell's equations / A. J. Ward, J. B. Pendry // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43. – P. 773–793.
42. Leonhardt U. General relativity in electrical engineering / U. Leonhardt, T. G. Philbin // New Journal of Physics. – 2006. – Vol. 8. – P. 1–19.
43. Perczel J. Invisibility cloaking without superluminal propagation / J. Perczel, T. Tyc, U. Leonhardt // New Journal of Physics. – 2011. – Vol. 13. – P. 1–23.
44. Leonhardt U. Notes on conformal invisibility devices / U. Leonhardt // New Journal of Physics. – 2006. – Vol. 8. – P. 1–17.

45. Schurig D. Calculation of material properties and ray tracing in transformation media / D. Schurig, J. B. Pendry, D. R. Smith // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14, No. 21. – P. 9794–9804.
46. Full-wave simulations of electromagnetic cloaking structures / S. A. Cummer, B.-I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith // Physical Review E. – 2006. – Vol. 74. – P. 036621–1–036621–5.
47. Ideal Cylindrical Cloak: Perfect but Sensitive to Tiny Perturbations / Z. Ruan, M. Yan, C. W. Neff, M. Qiu // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99, No. 11. – P. 113903–1–113903–4.
48. Response of a cylindrical invisibility cloak to electromagnetic waves / B. Zhang, H. Chen, B.-I. Wu [et al.] // Physical Review B. – 2007. – Vol. 76. – P. 121101–1–121101–4.
49. Electromagnetic Wave Interactions with a Metamaterial Cloak / H. Chen, B.-I. Wu, B. Zhang, J. A. Kong // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – P. 063903–1–063903–4.
50. Design of polygonal and elliptical cloaks / P.-H. Tichit, B. Kante, S. N. Burokur, A. de Lustrac // Proceedings of Nato ARW and META08, May 7–10, 2008. – Marrakesh-Morocco, 2008. – P. 120–125.
51. Nicolet A. Electromagnetic analysis of cylindrical cloaks of an arbitrary cross section / A. Nicolet, F. Zolla, S. Guenneau // Opt. Lett. – 2008. – Vol. 33, No. 14. – P. 1584–1586.
52. Li C. Two-dimensional electromagnetic cloaks with arbitrary geometries / C. Li, F. Li // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16, No. 17. – P. 13414–13420.
53. Li C. Two-Dimensional (2D) Polygonal Electromagnetic Cloaks / C. Li, K.

- Yao, F. Li // Chinese Physics Letters. – 2009. – Vol. 26, No. 6. – P. 064206–1–064206–4.
54. Kwon D.-H. Two-dimensional eccentric elliptic electromagnetic cloaks / D.- H. Kwon, D. H. Werner // Applied Physics Letters. – 2008. – Vol. 92, No. 1. – P. 013505–1–013505–3.
55. You Y. Invisibility cloaks for toroids / Y. You, G. W. Kattawar, P. Yang // Optics Express. – 2009. – Vol. 17. – P. 6591–6599.
56. Invisibility cloak without singularity / W. X. Jiang, T. J. Cui, X. M. Yang [et al.] // Applied Physics Letters. – 2008. – Vol. 93, No. 19. – 194102. – P. 1–10.
57. Han T. An arbitrarily shaped cloak with nonsingular and homogeneous parameters designed using a twofold transformation / T. Han, C. Qiu, X. Tang // Journal of Optics. – 2010. – Vol. 12, No. 9. – 095103. – P. 1–6.
58. Zhang P. Obtaining a nonsingular two-dimensional cloak of complex shape from a perfect three-dimensional cloak / P. Zhang, Y. Jin, S. He // Applied Physics Letters. – 2008. – Vol. 93. – P.243502–1–243502–3.
59. Leonhardt U. Broadband Invisibility by Non-Euclidean Cloaking / U. Leonhardt, T. Tyc // Science. – 2009. – Vol. 323, No. 5910. – P. 110–112.
60. Non-Euclidean Cloaking for Light Waves / T. Tyc, H. Chen, C. T. Chan, U. Leonhardt // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2010. – Vol. 16. – P.418–426.
61. Milonni P. W. Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light (Series in Optics and Optoelectronics) / P. W. Milonni. – Bristol and Philadelphia, Institute of Physics Publishing, 2005. – 247 p. – ISBN 0750309261.

62. Halimeh J. C. Time-of-flight imaging of invisibility cloaks / J. C. Halimeh, M. Wegener // Opt. Express. – 2012. – Vol. 20, No. 1. – P. 63–74.
63. Li J. Hiding under the Carpet: A New Strategy for Cloaking / J. Li, J. B. Pendry // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101. – P. 203901–1–203901–4.
64. Photorealistic images of carpet cloaks / J. C. Halimeh, T. Ergin, J. Mueller [et al.] // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17, No. 22. – P. 19328–19336.
65. Landy N. I. Designing Three-Dimensional Transformation Optical Media Using Quasiconformal Coordinate Transformations / N. I. Landy, N. Kundtz, D. R. Smith // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – P. 193902–1–193902–4.
66. Ma H. F. Three-dimensional broadband ground-plane cloak made of metamaterials / H. F. Ma, T. J. Cui // Nature communications. – 2010. – Vol. 1. – P. 1–6.
67. Zhang P. Cloaking an object on a dielectric half-space / P. Zhang, Y. Jin, S. He // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16, No. 5. – P. 3161–3166.
68. Zhang P. Carpet cloaking on a dielectric half-space / P. Zhang, M. Lobet, S. He // Opt. Express. – 2010. – Vol. 18, No. 17. – P. 18158–18163.
69. Broadband Ground-Plane Cloak / R. Liu, C. Ji, J. J. Mock [et al.] // Science. – 2009. – Vol. 323. – P. 366–369.
70. An optical cloak made of dielectrics / J. Valentine, J. Li, T. Zentgraf [et al.] // Nature Materials. – 2009. – Vol. 8. – P. 568–571.
71. Silicon nanostructure cloak operating at optical frequencies / L. H. Gabrielli, J. Cardenas, C. B. Poitras, M. Lipson // Nature Photonics. – 2009. – Vol. 3, No. 8. – P. 461–463.

72. Direct visualization of optical frequency invisibility cloak based on silicon nanorod array / J. H. Lee, J. Blair, V. A. Tamma [et al.] // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17, No. 15. – P. 12922–12928.
73. Carpet Cloak Device for Visible Light / C. Gladden, M. Gharghi, T. Zentgraf [et al.] // Frontiers in Optics 2011: Laser Science XXVII, October 16–20, 2011. – San Jose, Optical Society of America, 2011. – P. FMI2.
74. Three-Dimensional Invisibility Cloak at Optical Wavelengths / T. Ergin, N. Stenger, P. Brenner [et al.] // Science. – 2010. – Vol. 328. – P. 337–339.
75. Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability / S. Xi, H. Chen, B. Zhang [et al.] // Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics. – 2009. – Vol. 79. – P. 155122–1–155122–4.
76. Infrared carpet cloak designed with uniform silicon grating structure / X. Xu, Y. Feng, Y. Hao [et al.] // Applied Physics Letters. – 2009. – Vol. 95, No. 18. – P. 184102.
77. Simplified ground plane invisibility cloak by multilayer dielectrics / X. Xu, Y. Feng, Z. Yu [et al.] // Opt. Express. – 2010. – Vol. 18, No. 24. – P. 24477–24485.
78. Homogeneous optical cloak constructed with uniform layered structures / J. Zhang, L. Liu, Y. Luo [et al.] // Opt. Express. – 2011. – Vol. 19, No. 9. – P. 8625–8631.
79. Simplified N-Sided Irregular Polygonal Ground Plane Cloak Created with Oblique Layered Isotropic Dielectrics / S.-Y. Wang, S.-B. Liu, G.-L. Dai [et al.] // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2012. – Vol. 26, No. 1. – P. 75–88.

80. Wang S.-Y. Simplified triangular ground plane cloak by oblique multilayer dielectrics / S.-Y. Wang, S.-B. Liu // Chinese Physics B. – 2012. – Vol. 21, No. 4. – P. 044102–1–044102–5.
81. Zhang B. Lateral Shift Makes a Ground-Plane Cloak Detectable / B. Zhang, T. Chan, B.-I. Wu // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104. – P. 233903–1–233903–4.
82. Vyunnik V. I. Invisibility cloak with use non-singular coordinate transformation / V. I. Vyunnik, A. A. Zvyagintsev // Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM): 11th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling, September 11 – 13, 2011: Abstracts. – Kharkiv, 2011. – P. 1–3.
83. Вьюнник В. И. Плащ невидимости с использованием несингулярной координатной трансформации / В. И. Вьюнник, А. А. Звягинцев // Журналnano- и электронной физики. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 04036–1–04036–5.
84. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон – Ленинград, ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
85. Jin J. The Finite Element Method in Electromagnetics / J. Jin. – New York, Wiley-IEEE Press, 2002. – 753 p.
86. Volakis J. L. Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications / J. L. Volakis, A. Chatterjee, L. C. Kempel. – New York, Wiley-IEEE Press, 1998. – 368 p.
87. Kwon Y. W. The finite element method using MATLAB / Y. W. Kwon, H. Bang. – Boca Raton, CRC-Press, 1996. – 624 p.
88. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic

- waves / J.-P. Berenger // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 114, No. 2. – P. 185 – 200.
89. Chew W. C. A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates / W. C. Chew, W. H. Weedon // Microwave and Optical Technology Letters. – 1994. – Vol. 7, No. 13. – P. 599–604.
90. Nataf F. Absorbing boundary conditions and perfectly matched layers in wave propagation problems / F. Nataf // Direct and Inverse problems in Wave Propagation and Applications. – 2013. – Vol. 14 of Radon Ser. Comput. Appl. Math. – P. 219–231.
91. Stratton J. A. Diffraction Theory of Electromagnetic Waves / J. A. Stratton, L. J. Chu // Phys. Rev. – 1939. – Vol. 56. – P. 99–107.
92. Taaghil A. Near-field to near/far-field transformation for arbitrary near-field geometry, utilizing an equivalent magnetic current / A. Taaghil, T. K. Sarkar // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 1996. – Vol. 38, No. 3. – P. 536–542.
93. Sarkar T. K. Near-field to near/far-field transformation for arbitrary near-field geometry utilizing an equivalent electric current and MoM / T. K. Sarkar, A. Taaghil // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1999. – Vol. 47, No. 3. – P. 566–573.
94. Near-field to far-field transformation based on stratton-chu fomula for EMC measurements / Jeong-Seok Lee, Tae-Lim Song, Jin-Kyoung Du, Jong-Gwan Yook // Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 2013 IEEE. – Orlando. – 2013. – P. 606–607.
95. Вьюнник В. И. Численный метод проектирования несингулярного плаща-

ковра невидимости произвольной формы / В. И. Вьюнник, А. А. Звягинцев // Журналnano- и электронной физики. – 2012. – Т. 4, № 3. – С. 03022–1–03022–5.

96. Vyunnik V. I. Numerical methods of calculation transformation matrixes at designing nonsingular invisibility cloak-carpet / V. I. Vyunnik, A. A. Zvyagintsev // Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS): 6th International Conference, September 17 – 21, 2012: Abstracts. – Sevastopol, 2012. – P. 240–242.
97. Hu J. Design method for electromagnetic cloak with arbitrary shapes based on Laplace's equation / J. Hu, X. Zhou, G. Hu // Optics Express. – 2009. – Vol. 17, No. 3. – P. 1308–1320.
98. Вьюнник В. И. Мимикия объектов с использованием подхода трансформационной оптики / В. И. Вьюнник, А. А. Звягинцев // Радиофизика и радиоастрономия. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 169–175.
99. Vyunnik V. I. Modeling of the mimicry cloak using coordinate transformation / V. I. Vyunnik, A. A. Zvyagintsev // Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo): 23rd International Crimean Conference, September 8 – 14, 2013: Abstracts. – Sevastopol, 2013. – P. 1187–1189.
100. Vyunnik V.I. Numerical Simulation of the Elliptic Cylinder Mimicry Cloak for Transforming it into a Circular One / V. I. Vyunnik, A. A. Zvyagintsev // Telecommunications and Radio Engineering. – 2014. – Vol. 73 (2). – P. 127–134.
101. Vyunnik V.I. Modelling of a mimicry cloak for the elliptical cylinder to look like circular / V. I. Vyunnik, A. A. Zvyagintsev // Antenna Theory and Techniques (ICATT): X Anniversary International Conference, April 21 – 24,

2015: Abstracts. – Kharkiv, 2015. – P. 1–3.

102. Вьюнник В. И. Влияние функции-источника на характеристики рассеяния при численном расчете плаща невидимости / В. И. Вьюнник, А. А. Звягинцев // Вестник Харьковского национального университета – Радиофизика и электроника. – 2013. – Т. 23, № 1094. – С. 72–76.
103. Determination the material parameters for arbitrary cloak based on Poisson's equation / J.-J. Ma, X.-Y. Cao, K.-M. Yu, T. Liu // Progress In Electromagnetics Research M. – 2009. – Vol. 9. – P. 177–184.
104. Mitchell M. An introduction to genetic algorithms / M. Mitchell. Complex adaptive systems. – Cambridge (Mass.), MIT press, 1996. – 209 p. – ISBN 0-262-13316-4.
105. Coley D. A. An Introduction to Genetic Algorithms for scientists and engineers / D. A. Coley. – Singapore, World Scientific Publishing, 1999. – 244 p.