Задача 1

У момент вмикання електричної лампи розжарювання в мережу температура вольфрамової ниті дорівнює $T_1 = 20^0 C$. У робочому режимі лампа споживає потужність P_2=70 Вт, при цьому температура ниті – $T_2 = 2100^0 C$. Яку потужність споживає лампа в момент вмикання?

Дано:
$T_1 = 20^0 C$
P_2=70 Вт
$T_2 = 2100^0 C$
$P_1 - ?$

Розв'язання

Оскільки лампа працює від тієї самої напруги U, то запишемо формулу для визначення потужностей P_1 та P_2:

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{U^2}{R_1}, \\ P_2 = \dfrac{U^2}{R_2}. \end{cases} \tag{1}$$

Залежність опору від температури має вигляд $R = R_0(1+\alpha\Delta T)$. Тут $\Delta T = T - T_0$. α – температурний коефіцієнт електричного опору – відносна зміна електричного опору при зміні температури на 1 К, вимірюється в K^{-1}. Для вольфрамової спіралі $\alpha = 0,0045\,K^{-1}$ (https://uk.wikipedia.org/wiki/Температурний_коефіцієнт_електричного_опору), R_0 – електричний опір за температури T_0. Оскільки до формули для R входить різниця температур ΔT, то температуру можна брати у градусах Цельсія, тоді R_0 – опір вольфрамової спіралі за температури $0^0 C$. А формула залежності опору від температури виглядатиме так: $R = R_0(1+\alpha T)$.

Можна стверджувати, що опір вольфрамової нитки зростає лінійно при зростанні температури. При цьому опори R_1 та R_2 можна знайти за формулами:

$$\begin{cases} R_1 = R_0(1+\alpha T_1), \\ R_2 = R_0(1+\alpha T_2). \end{cases} \tag{2}$$

Підставимо опір R_1 та R_2 з формули (2) до формул (1). Тоді співвідношення (1) набудуть вигляду

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{U^2}{R_0(1+\alpha T_1)}, \\ P_2 = \dfrac{U^2}{R_0(1+\alpha T_2)}. \end{cases} \tag{3}$$

Розділимо тепер верхню формулу на нижню. Як результат отримаємо:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\dfrac{U^2}{R_0(1+\alpha T_1)}}{\dfrac{U^2}{R_0(1+\alpha T_2)}} = \frac{U^2}{R_0(1+\alpha T_1)}\frac{R_0(1+\alpha T_2)}{U^2} = \frac{R_0(1+\alpha T_2)}{R_0(1+\alpha T_1)} = \frac{1+\alpha T_2}{1+\alpha T_1}. \tag{4}$$

Отже потужність P_1 дорівнюватиме

$$P_1 = P_2 \frac{1+\alpha T_2}{1+\alpha T_1} = \frac{P_2\left(1+\alpha T_2\right)}{1+\alpha T_1}. \qquad (5)$$

Формула (5) – розв’язок задачі в загальному вигляді. Розмірність результату вочевидь збігається.

Підставимо до (5) числові значення величин. Отримаємо відповідь:

$$P_1 = 70\frac{1+4.5\cdot 10^{-3}\cdot 2100}{1+4.5\cdot 10^{-3}\cdot 20} \approx 671.1\,(Вт)$$

Відповідь: $P_1 = 671.1$ *Вт.*

Задача 2

Хлопчик, який не дуже добре знає фізику (а саме, закон заломлення світла), намагається влучити палицею в камінь, що знаходиться на дні струмка глибиною 50 см. Хлопчик прицілився точно в камінь та кинув палицю під кутом 45° до поверхні води. Палиця полетіла точно по прямій лінії та не влучила у камінь, а вдарилась об дно на деякій відстані d від нього. Поясніть, чому це відбулось, і знайдіть відстань d.

Дано:

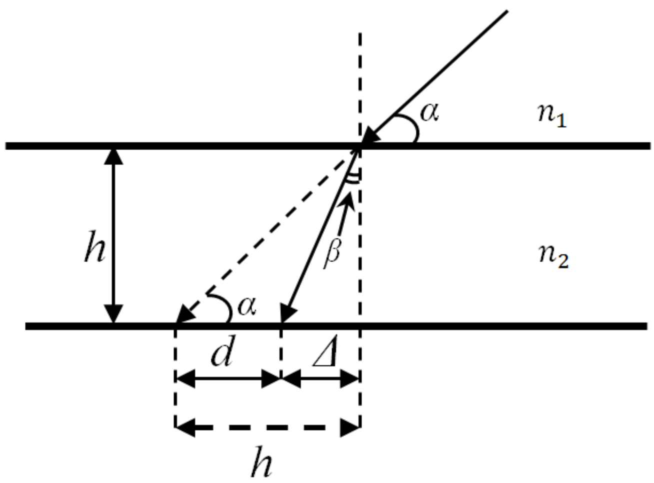
$h = 50 \text{ см} = 0.5 \text{ м}$

$\alpha = 45^\circ = \pi/4$

$\frac{n_1}{n_2} = n_{12} \approx 1.33$

$d - ?$

Розв'язання



Оскільки $\alpha = \pi / 4$, то закон заломлення має вигляд $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}$. Звідси $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{12}}$. Із прямокутного трикутника отримаємо $ctg\beta = \frac{h}{\Delta}$. Застосовуючи відому тригонометричну тотожність $1 + ctg^2\beta = \frac{1}{sin^2\beta}$, маємо $1 + \frac{h^2}{\Delta^2} = \frac{n_{12}^2}{sin^2\alpha}$, звідки можна виразити Δ:

$$\Delta = \frac{h}{\sqrt{\frac{n_{12}^2}{sin^2\alpha} - 1}}$$

Враховуючи, що кут $\alpha = 45^\circ$, з рівнобедреного трикутника маємо $d + \Delta = h$. Тоді відстань d можна обчислити як різницю h і Δ:

$$d = h - \Delta = h - \frac{h}{\sqrt{\frac{n_{12}^{2}}{sin^{2}\alpha} - 1}} = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{n_{12}^{2}}{sin^{2}\alpha} - 1}}\right).$$

Розмірність, очевидно, збігається. Підставимо числові значення:

$$d = 0.5\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1.33^{2}}{2} \cdot 4 - 1}}\right) = 0.186\left(\text{м}\right) = 18.6 \ (\text{см}).$$

Відповідь: $d = 18.6$ см.

Задача 3

Два однакових тіла підвішені на невагомих нерозтяжних тросах на деякій відстані одне від одного. Після того, як до кожного тіла підвісили важок масою 50 кг та залишили на тій самій відстані, сила гравітаційної взаємодії між ними збільшилась у півтора рази. Знайти маси тіл та відстань між ними, якщо початкова гравітаційна сила була 3.3 мкН.

Дано:

$M = 50$ кг

$F_{G1} = \frac{3}{2}F_{G0}$

$F_{G0} = 3{,}3$ мкН

$m - ?$

$l - ?$

Розв'язання

У початковому положенні сила гравітаційної взаємодії між тілами визначається співвідношенням:

$F_{G0} = G\frac{m^2}{l^2}$.

Після того, як до кожного тіла додали важок, сила їх взаємодії змінилася:

$F_{G1} = G\frac{(m+M)^2}{l^2}$.

Оскільки сила взаємодії збільшилася у півтора рази, можна записати

$$G\frac{(m+M)^2}{l^2} = \frac{3}{2}G\frac{m^2}{l^2} \Rightarrow (m+M)^2 = \frac{3}{2}m^2.$$

Зробивши елементарні перетворення, отримаємо

$m^2 - 4mM - 2M^2 = 0$.

Це квадратне рівняння має дискримінант:

$D = 16M^2 + 8M^2 = 24M^2$.

Із двох коренів рівняння обираємо додатний:

$$m = \frac{1}{2}\left(4M + 2\sqrt{6}M\right) = (2+\sqrt{6})M.$$

Відстань можна знайти з першої формули, підставляючи вже відому масу:

$$l = \sqrt{\frac{G}{F_{G0}}}m = (2+\sqrt{6})\sqrt{\frac{G}{F_{G0}}}M$$

Перевірка розмірності:

$$[m] = \text{кг}, \qquad [l] = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{кг}^2}}{\text{Н}}}\text{кг} = \text{м}$$

Підстановка чисел:

$$m = (2 + \sqrt{6}) \cdot 50 \approx 222{,}47 \text{кг}$$

$$l = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}}{3{,}3 \cdot 10^{-6}}} \cdot 222{,}47 \approx 1000{,}78 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 1 \text{ м}$$

Відповідь: маса тіла $222{,}47 \text{кг}$, відстань між тілами –1 м.

Задача 4

З літака, який летить на висоті 500 м зі швидкістю 288 км/год, скинули вантаж на корабель, що рухається назустріч зі швидкістю 36 км/год. На якій відстані між кораблем та літаком потрібно скидати вантаж?

Дано:

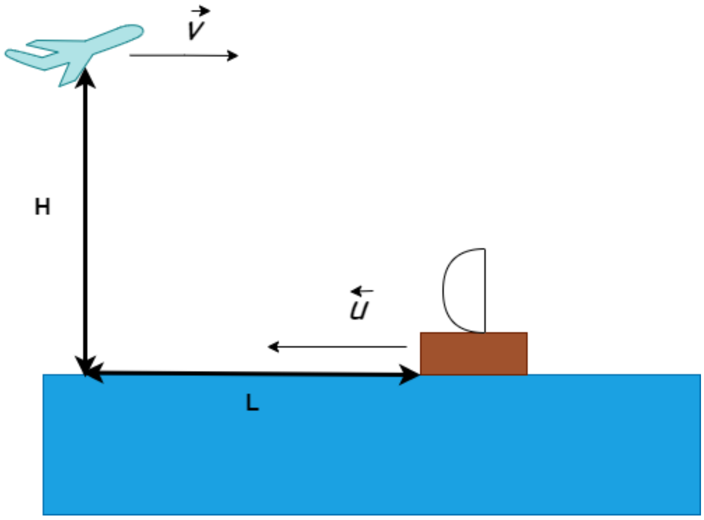
$H = 500$ м

$v = 288$ км/год = 80 м/с

$u = 36$ км/год = 10 м/с

$L - ?$

Розв'язання



Час t падіння вантажу з висоти H знаходиться так: $H = gt^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2H/g}$, де $g \approx 10\frac{м}{с^2}$ – прискорення вільного падіння. За цей час літак пролетить відстань $L_1 = vt$, а корабель пропливе відстань $L_2 = ut$. Для того, щоб після падіння вантаж зустрівся з кораблем, у момент скидання відстань між ними по горизонталі повинна дорівнювати $L = L_1 + L_2 = (v+u)\sqrt{2H/g}$.

Перевіримо розмірність: $[L] = \frac{м}{с}\sqrt{\frac{м}{м/с^2}} = м.$

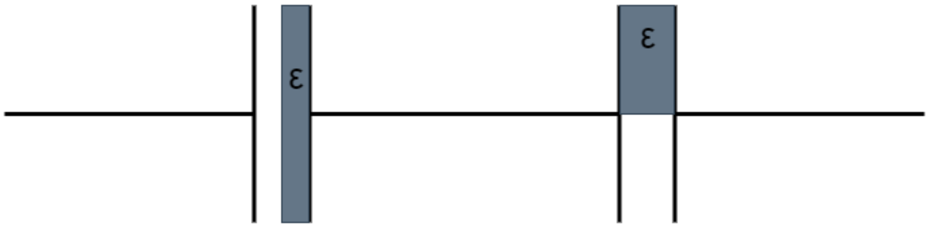
Підставимо числа та проведемо розрахунки:

$$L = (80+10)\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 500}{10}} = 90\cdot 10 = 900 \text{ м.}$$

Відповідь: вантаж потрібно скидати на відстані 900 м між кораблем та літаком по горизонталі.

Примітка. Можна також вважати, що відстань між кораблем і літаком – це відстань у просторі (а не по горизонталі), у цьому випадку $L = \sqrt{900^2 + 500^2} \approx 1030$ (м).

Задача 5



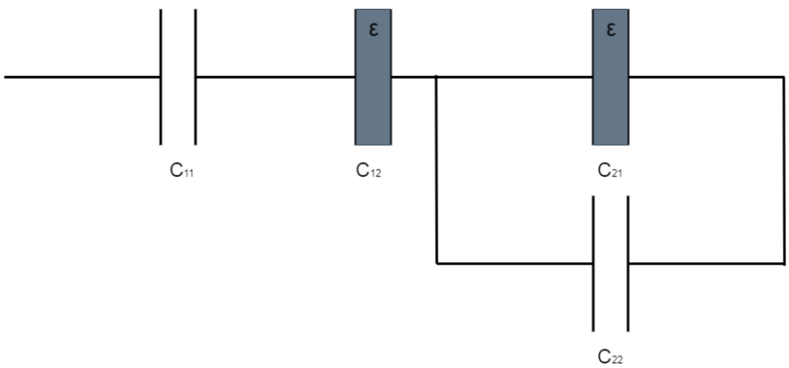
До двох однакових послідовно з'єднаних конденсаторів ємністю C_0 вставили діелектричні стрижні з проникністю ε, як показано на рисунку. Кожен зі стрижнів займає половину об'єму конденсатора. Знайти сумарну ємність двох отриманих конденсаторів, з'єднаних послідовно.

Дано:
C_0
ε

$C - ?$

Розв'язання

Як відомо, ємність плоского конденсатора визначається за формулою $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$, де S - площа обкладинок конденсатора, d - відстань між обкладинками, ε – діелектрична проникність простору між обкладинками, ε_0 - електрична стала. Зрозуміло, що $C_0 = \varepsilon_0 S/d$.



Розглянемо перший конденсатор C_1. Його можна представити як послідовне з'єднання двох конденсаторів C_{11} та C_{12} з вдвічі меншою відстанню між пластинами $d/2$, C_{12} заповнено діелектриком з проникністю ε. Отже, маємо $C_{11} = 2\varepsilon_0 S/d = 2C_0$, $C_{12} = 2\varepsilon\varepsilon_0 S/d = 2\varepsilon C_0$. Для послідовного з'єднання конденсаторів C_{11} та C_{12} отримаємо

$$C_1 = \left(\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{12}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2C_0} + \frac{1}{2\varepsilon C_0}\right)^{-1} = \frac{2\varepsilon C_0}{\varepsilon + 1}.$$

Другий конденсатор C_2 можна представити як паралельне з'єднання конденсаторів C_{21} та C_{22} з вдвічі меншою площею обкладинок $S/2$, C_{21} заповнено діелектриком з проникністю ε. Отже, маємо $C_{21} = \varepsilon\varepsilon_0 S/2d = \varepsilon C_0/2$, $C_{22} = \varepsilon_0 S/2d = C_0/2$. Для паралельного з'єднання конденсаторів C_{21} та C_{22} отримаємо

$$C_2 = C_{21} + C_{22} = \frac{\varepsilon C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = \frac{C_0\left(\varepsilon+1\right)}{2}.$$

Конденсатори C_1 та C_2 з'єднано послідовно, отже їх сумарна ємність дорівнює

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon C_0} + \frac{2}{C_0\left(\varepsilon+1\right)}\right)^{-1} = C_0\,\frac{2\varepsilon\left(\varepsilon+1\right)}{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}.$$

Відповідь: $C = C_0\,\dfrac{2\varepsilon\left(\varepsilon+1\right)}{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}$.