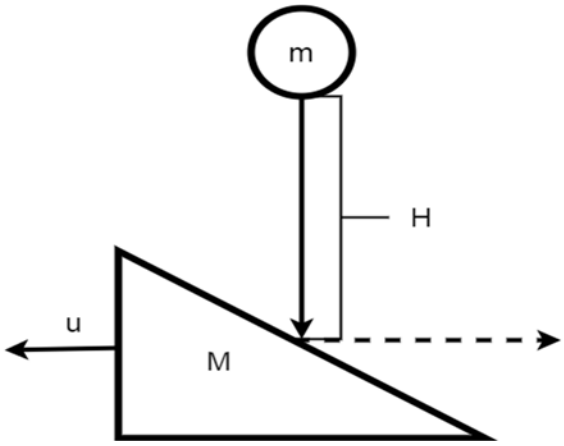
Задача 1



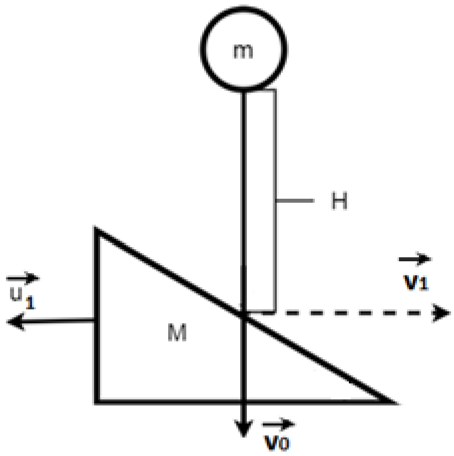
Зверху на клин з масою M, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, з висоти H падає кулька масою m. Після пружного удару об клин кулька відскочила по горизонталі, а клин почав рухатись поступально. Знайти швидкість руху клину. Тертям знехтувати.

Дано:

M, α, H, m

$u_1 - ?$

Розв'язання



Знайдемо швидкість кульки в момент удару із закону збереження енергії. Як нульовий рівень потенціальної енергії оберемо горизонтальну площину, проведену через точку удару.

Тоді

$$mgH = m\frac{v_0^2}{2},$$

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Тут v_0 – швидкість кульки в момент удару.

Розглянемо систему «кулька-клин». Запишемо закон збереження імпульсу у векторній формі:

$$m\vec{v}_0 + M\vec{u}_0 = m\vec{v}_1 + M\vec{u}_1,$$

$\vec{u}_0$ – швидкість клину в момент удару.

Спроектуємо векторне рівняння на горизонтальну вісь, враховуючи, що клин до удару не рухався ($\vec{u}_0 = 0$):

$$mv_1 - Mu_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{Mu_1}{m}.$$

Тепер для обраної системи запишемо закон збереження енергії, також враховуючи, що клин до удару не рухався ($\vec{u}_0 = 0$):

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{v_1^2}{2} + M\frac{u_1^2}{2}.$$

Підставляємо вираз для v_1 до цього рівняння. Маємо:

$$mv_0^2 = Mu_1^2(1 + \frac{M}{m}).$$

Тепер отримаємо вираз для u_1, враховуючи, що $v_0 = \sqrt{2gH}$:

$$u_1 = m\sqrt{\frac{2gH}{M(m+M)}}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[u_1] = \text{кг}\sqrt{\frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $u_1 = m\sqrt{\frac{2gH}{M(m+M)}}$.

Задача 2

α-частинка влітає в магнітне поле з індукцією 1 Тл перпендикулярно до напрямку вектора магнітної індукції. Через який час вектор її швидкості буде спрямований у зворотний бік? Заряд α-частинки q = $3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл, маса m = $6{,}65\cdot10^{-27}$ кг.

Дано:

$m = 6{,}65\cdot10^{-27}\,кг$

$q = 3{,}2\cdot10^{-19}\,Кл$

$B = 1\,Тл$

$\vec{v} \perp \vec{B}$

$\vec{v}' = -\vec{v}$

Δt -?

Розв'язання

На частинку із зарядом q, що рухається в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, діє сила Лоренца $\vec{F}_л$. Модуль цієї сили дорівнює

$$F_л = qvB\sin\varphi,$$

де φ – кут між напрямками векторів $\vec{v}$ та $\vec{B}$. За умовою задачі $\varphi = 90^\circ$, тобто $F_л = qvB$.

Сила Лоренца діє у напрямку, перпендикулярному до площини, в якій лежать вектори $\vec{v}$ та $\vec{B}$, і є доцентровою силою. В нашому випадку ($\varphi = 90^\circ$) траєкторією руху частинки в магнітному полі буде коло радіусу R. Зрозуміло, що вектор швидкості α-частинки матиме протилежний до початкового напрямок через проміжок часу, що дорівнює половині періоду обертання частинки.

Період обертання частинки можна знайти із співвідношення

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Запишемо рівняння руху частинки у магнітному полі (другий закон Ньютона). Сила Лоренца надає частинці доцентрове прискорення $a_д = \frac{v^2}{R}$. Тоді рівняння руху матиме вигляд

$$ma_д = F_л,$$

$$m\frac{v^2}{R} = qvB \;\Rightarrow\; m\frac{v}{R} = qB.$$

Звідси знайдемо відношення $\frac{R}{\upsilon}$:

$$\frac{R}{\upsilon}=\frac{m}{qB}.$$

Тоді

$$T=\frac{2\pi m}{qB},$$

а шуканий проміжок часу

$$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{\pi m}{qB}.$$

Перевіримо розмірність

$$[c]=\left[\frac{\text{кг}}{\text{Кл}\cdot\text{Тл}}\right]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}}\right]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}\right]=[c].$$

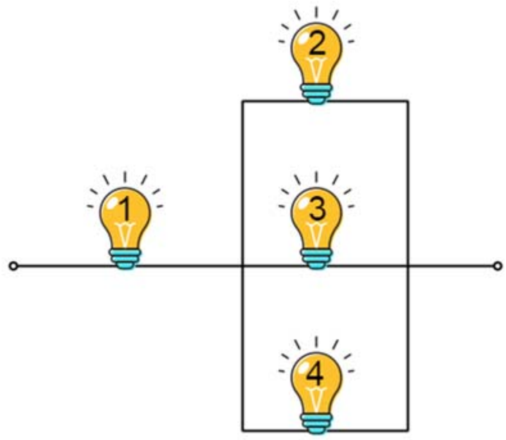
Підставимо числові значення

$$\Delta t=\frac{3{,}14\cdot 6{,}65\cdot 10^{-27}}{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 1}=6{,}5\cdot 10^{-8}\,(c)=65\,(\text{нс}).$$

Відповідь: $\Delta t=65$ *нс*.

Задача 3

Лампочки з двома різними опорами з’єднано, як показано на рисунку. Коло підключили до джерела живлення, і потужність, яка утворюється на кожній із ламп, виявилась однаковою (залежністю опору лампи від сили струму в ній можна знехтувати). Потім лампи під номерами 1 і 2 поміняли місцями. Знайти відношення загальних потужностей, які виділяються в колі до і після заміни ламп.



Дано:

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

Знайти

$\dfrac{P}{P'} - ?$

Розв’язання

Як відомо, потужність струму визначається за формулою $P = IU$, а закон Ома для ділянки кола має вигляд $I = U/R$.

Нехай напруга на клемах $U = U_1 + U_2$, де U_1 – падіння напруги на першій лампі, а U_2 – на ділянці з паралельним з’єднанням ламп (при паралельному з’єднанні напруги на лампах 2,3,4 будуть однакові). Отже для кожної з ламп 2,3,4 потужність дорівнюватиме $P_{2,3,4} = U_2^{\,2}/R_{2,3,4}$. Виходячи з умови рівності потужностей на всіх лампах, опори цих ламп є однаковими: $R_2 = R_3 = R_4$, а опір першої лампи буде іншим. При послідовному з’єднанні згідно з першим законом Кірхгофа $I_1 = I_2 + I_3 + I_4$. Лампи 2, 3 та 4 є однаковими, тому $I_2 = I_3 = I_4$, отже $I_1 = 3I_2$. Із рівності потужностей на першій і другій лампах отримуємо

$$I_1U_1 = I_2U_2 \Rightarrow I_1^{\,2}R_1 = I_2^{\,2}R_2 \Rightarrow 9I_2^{\,2}R_1 = I_2^{\,2}R_2 \Rightarrow R_1 = R_2/9\,.$$

Для визначення опору R' трьох паралельно підключених лампочок скористаємось формулою

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} = \frac{3}{R_2} \Rightarrow R' = \frac{R_2}{3}.$$

Отже повний опір кола до заміни ламп буде дорівнювати

$$R = R_1 + R' = R_1 + R_2/3 = R_2/9 + R_2/3 = 4R_2/9\,.$$

Знайдемо опір на ділянці з паралельним з'єднанням після заміни ламп (зауважимо, що оскільки лампи 2, 3, 4 мають однаковий опір, то можемо поміняти місцями лампу 1 з будь-якою з них):

$$\frac{1}{R''}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=\frac{9}{R_2}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2}=\frac{11}{R_2}\Rightarrow R''=\frac{R_2}{11}.$$

Тоді повний опір після заміни ламп буде дорівнювати

$$\tilde{R}=R_2+R''=R_2+\frac{R_2}{11}=\frac{12R_2}{11}.$$

Після заміни ламп напруга на полюсах не змінюється, отже

$$\frac{P}{P'}=\frac{U^2\cdot\tilde{R}}{R\cdot U^2}=\frac{12R_2}{11\cdot\frac{4R_2}{9}}=\frac{3\cdot 9}{11}\approx 2.45.$$

Відповідь: $\frac{P}{P'}=\approx 2.45$.

Задача 4

Дано:

$r = 1см = 10^{-2}\,м$

$V = 1л = 10^{-3}\,м^3$

$C_{гл.} = 200\,Дж / К$

$\Delta T = 60\,К$

$C_{в.} = 4200\dfrac{Дж}{кг \cdot К}$

$C_{с.} = 250\dfrac{Дж}{кг \cdot К}$

$\eta = 0.3$

$\rho_{в.} = 1000\,кг / м^3$

$\rho_{с.} = 10500\,кг / м^3$

$\lambda = 43\dfrac{МДж}{кг}$

Знайти

$m_{г.} - ?$

Срібну кульку радіусом 1 см занурили в 1 л води, яка знаходиться у глечику з теплоємністю 200 Дж/К. Скільки знадобиться гасу, щоб нагріти кульку в глечику від 20°С до 80°С ? Питома теплоємність води 4200 Дж/кг·К , срібла – 250 Дж/кг·К . Питома теплота згорання гасу 43 МДж/кг. Коефіцієнт корисної дії гасової горілки дорівнює 30%, густина води – 1000 кг/м^3, срібла – 10500 кг/м^3.

Розв'язання

Запишемо рівняння теплового балансу з урахуванням ККД:

$$\eta Q_{г.} = Q_{гл.} + Q_{к.} + Q_{в.}\,.$$

Тут $Q_{г.}$ – теплота, що виділяється при згорянні гасу, $Q_{г.} = \lambda m_{г.}$; $Q_{к.}$ – теплота, яка необхідна для нагрівання кульки, $Q_{к.} = C_{с.} m_{к.} \Delta T$; $Q_{гл.}$ – теплота, яка необхідна для нагрівання глечика, $Q_{гл.} = C_{гл.} \Delta T$ (за умовою задачі задано теплоємність глечика, а не речовини, з якої його зроблено).

Маса кульки може бути визначена за формулою:

$$m_к = \rho_{с.} V = \frac{4}{3}\pi \rho_{с.} r^3\,.$$

Тут $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ – об'єм кульки, $\rho_{с.}$ – густина срібла.

Отже кількість теплоти, що необхідна для нагрівання кульки, дорівнює

$$Q_{к.} = \frac{4}{3}\pi \rho_{с.} r^3 C_{с.} \Delta T\,.$$

Кількість теплоти $Q_{в.}$, що необхідна для нагрівання води дорівнює

$$Q_{в.} = C_{в.} m_{в.} \Delta T\,.$$

Масу води знайдемо через її густину:

$$m_{в.} = \rho_{в.} V \ .$$

Підставимо всі величини до рівняння теплового балансу:

$$\eta\lambda m_{г.} = \left(C_{гл.}\Delta T + \frac{4}{3}\pi\rho_{c.} r^3 C_{c.}\Delta T + \rho_{в.} V C_{в.}\Delta T \right) = \left(C_{гл.} + \frac{4}{3}\pi\rho_{c.} r^3 C_{c.} + \rho_{в.} V C_{в.} \right)\Delta T \, ,$$

звідки необхідна маса гасу визначається за формулою:

$$m_{г.} = \frac{1}{\eta\lambda}\left(C_{гл.} + \frac{4}{3}\pi\rho_{c.} r^3 C_{c.} + \rho_{в.} V C_{в.} \right)\Delta T.$$

Перевіримо розмірність отриманої формули:

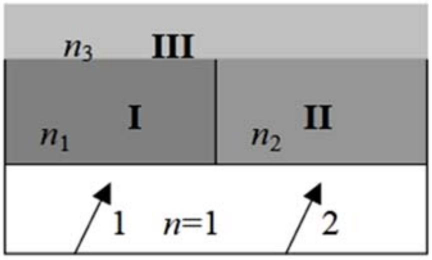
$$\left[m_{г.} \right] = \frac{К \cdot кг}{Дж}\left(\frac{Дж}{К} + \frac{кг}{м^3} м^3 \frac{Дж}{кг \cdot К} + \frac{кг}{м^3} м^3 \frac{Дж}{кг \cdot К} \right) = \frac{К \cdot кг}{Дж} \cdot \frac{Дж}{К} = кг.$$

Підставимо числові значення:

$$m_{г.} = \frac{60}{0.3 \cdot 43 \cdot 10^6}\left(200 + \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot 10500 \cdot 10^{-6} \cdot 250 + 1000 \cdot 10^{-3} \cdot 4200 \right) =$$
$$= 0.021(кг) = 21(г).$$

Відповідь: $m_{г.} = 21г.$

Задача 5



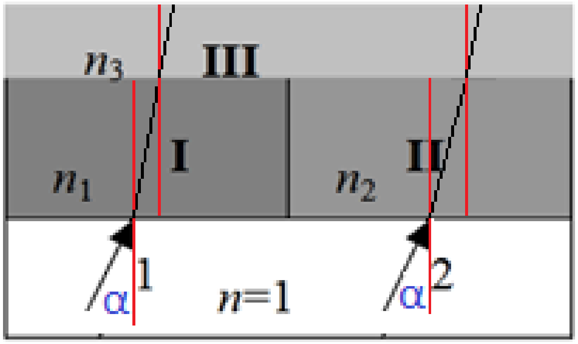
Три середовища з показниками заломлення n_1, n_2, n_3 ($n_1 > n_2 > n_3 > 1$) розташовані, як показано на рисунку. Два промені йдуть паралельно один до одного, при цьому промінь 1 йде лише крізь середовища I та III, а промінь 2 – крізь II та III. Яким буде кут між цими променями у середовищі III?

Дано:

$n_1 > n_2 > n_3 > 1$

$|\theta_2 - \theta_1| - ?$

Розв'язання:



Нехай початкові кути падіння дорівнюють α, кут заломлення першого променю у середовищі I – γ_1, кут заломлення другого променю у середовищі II – γ_2, кут заломлення першого променю у середовищі III – θ_1, другого – θ_2.

Запишемо закон заломлення при переході першого променю до середовища I:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} = n_1 \Rightarrow \sin\gamma_1 = \frac{\sin\alpha}{n_1}.$$

Аналогічно для переходу другого променю

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2} = n_2 \Rightarrow \sin\gamma_2 = \frac{\sin\alpha}{n_2}.$$

Формули переходу обох променів у середовище III:

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\theta_1} = \frac{n_3}{n_1} \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{n_1}{n_3}\sin\gamma_1 = \frac{n_1}{n_3}\frac{\sin\alpha}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{n_3},$$

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\theta_2} = \frac{n_3}{n_2} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_2}{n_3}\sin\gamma_2 = \frac{n_2}{n_3}\frac{\sin\alpha}{n_2} = \frac{\sin\alpha}{n_3}.$$

Отже, $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$. Кути заломлення змінюються від 0 до $\pi/2$, отже $\theta_1 = \theta_2$. Тобто, кут між променями у середовищі III дорівнює нулю.

Відповідь: $|\theta_2 - \theta_1| = 0$.