Задача 1.

Тіло масою M = 10 кг, яке закріплене на горизонтальній пружині, лежить на абсолютно гладкому столі. В тіло потрапляє та застрягає в ньому куля масою m = 10 г, яка рухалася зі швидкістю v = 500 м/с. Внаслідок цього тіло разом із кулею починає коливатися. Знайдіть амплітуду коливань, якщо період коливань дорівнює T = 1,26 с.

Дано:
M = 10 кг
m = 10 г = 0,01 кг
υ = 500 м/с
T = 1,26 с

A - ?

Розв'язання.

Внаслідок абсолютно непружного зіткнення тіло разом з кулею набуває кінетичної енергії. При цьому пружина стискається, отже кінетична енергія тіла, згідно із законом збереження механічної енергії, переходить у потенціальну енергію пружної деформації:

$$\frac{(M+m)u^2}{2}=\frac{kA^2}{2},$$

де u – швидкість тіла разом з кулею після зіткнення; A – амплітуда коливань, k – жорсткість пружини. Звідси:

$$A=u\sqrt{\frac{M+m}{k}}. \quad (1)$$

Швидкість u можна знайти, використавши закон збереження імпульсу системи куля – тіло:

$$m\upsilon=(M+m)u.$$

Звідси

$$u=\frac{m\upsilon}{M+m}.$$

Жорсткість пружини k знайдемо, скориставшись співвідношенням для періоду коливань пружинного маятника:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

Звідси:

$$k=\frac{4\pi^2(M+m)}{T^2}.$$

Шукану амплітуду знайдемо, підставивши отримані співвідношення до формули (1):

$$A=\frac{m\upsilon}{M+m}\sqrt{\frac{(M+m)T^2}{4\pi^2(M+m)}}=\frac{m\upsilon T}{2\pi(M+m)}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[м]=\frac{кг\cdot\frac{м}{с}\cdot с}{(кг+кг)}=[м].$$

Підставимо числові значення і отримаємо остаточно:

$$A = \frac{0{,}01 \cdot 500 \cdot 1{,}26}{2 \cdot 3{,}14(10 + 0{,}01)} = 0{,}1 \text{ м.}$$

Відповідь: 10 см.

Задача 2.

Ідеальний газ масою m знаходиться у лівій половині циліндра з поршнем і пружиною, показаного на малюнку.

Праворуч від поршня – вакуум. За відсутності газу поршень розташований впритул у лівому торці циліндра, а пружина в цьому положенні не деформована. Бічні стінки циліндра і поршень теплоізольовані. Тертям можна знехтувати. Газ нагрівають через лівий торець циліндра. При цьому його температура підвищується на ΔT, а внутрішня енергія на ΔU. Знайти теплоємність газу у цьому випадку. Молярна маса газу μ.

Розв'язання.

Теплота ΔQ, яка передається у газ через лівий торець циліндра, витрачається на збільшення внутрішньої енергії газу та на роботу газу при розширенні:

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V .$$

Тут P – тиск газу, ΔV – зміна його об'єму. Теплоємність газу дорівнює

$$c = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + P\frac{\Delta V}{\Delta T} .$$

Відношення

$$c_V = \frac{\Delta U}{\Delta T}$$

має назву теплоємності при фіксованому об'ємі.

Позначимо через k жорсткість пружини. Якщо x – її деформація, то в процесі розширення газу має виконуватися рівність:

$$kx = PS, \qquad (1)$$

тут S – площа перерізу поршня. Ця рівність означає, що в кожен момент часу сила, з якою газ тисне на поршень, врівноважена силою пружності пружини. За умовою задачі $xS = V$ – об'єм газу. Отже, помножуючи рівність (1) на S, отримуємо

$$kV = PS^2 . \qquad (2)$$

Тиск, який входить сюди, виразимо через об'єм і температуру T за допомогою рівняння стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT .$$

Отримаємо квадрат об'єму

$$V^2 = \frac{mRS^2}{k\mu} T . \qquad (3)$$

Отримаємо малий приріст цієї величини при зміні температури газу на ΔT та його об'єму на ΔV. Відомо, що

$$\Delta V^2 = 2V\Delta V .$$

Отже, з (3) отримуємо

$$2V\Delta V = \frac{mRS^2}{k\mu} \Delta T .$$

Враховуючи (2), перепишемо цю рівність так:

$$2V \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{mRV}{\mu P} .$$

Звідси знаходимо

$$P \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{2} \frac{m}{\mu} R .$$

В результаті теплоємність газу в даному процесі нагрівання дорівнює

$$c = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{1}{2} \frac{m}{\mu} R .$$

$$[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} + \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

Відповідь: $c = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{1}{2} \frac{m}{\mu} R .$

Задача 3.

В середину горизонтального повітряного конденсатору з площею обкладок S = 10 см^2 і відстанню між ними d = 1 мм, який заряджений до напруги U = 100 В, поміщають заряджену краплю масою m = 1 г. Крапля починає падати з прискоренням вдвічі меншим за прискорення вільного падіння. Визначити, якою буде напруга у конденсаторі після того, як крапля досягне нижньої пластини. Верхня пластина є заземленою, опором повітря можна нехтувати.

Дано:
S = 10 см^2 = 10^{-3} м^2
m = 1 г = 10^{-3} кг
U = 100 В
d = 1 мм = 10^{-3} м
a = g/2 м/с^2

U_1 - ?

Коли крапля досягне нижньої пластини конденсатора, заряд пластини збільшиться на величину, що дорівнює заряду краплі. В результаті в конденсаторі встановиться напруга

$$U_1 = U + \frac{q}{C} ,$$

де q – заряд краплі; C – електроємність конденсатора.

Електроємність повітряного конденсатора визначається співвідношенням:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Заряд краплі визначмо з рівняння руху краплі у просторі між пластинами конденсатора. Під дією протилежно спрямованих сили тяжіння та кулонівської сили крапля рухається з прискоренням g/2. Отже

$$ma = m\frac{g}{2} = mg - qE.$$

Тут E – напруженість електричного поля конденсатора. В нашому випадку $E = \frac{U}{d}$.
Звідси заряд краплі

$$q = \frac{mgd}{2U}.$$

Остаточно

$$U_1 = U + \frac{mgd^2}{2\varepsilon_0 US}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[B] = [B] + \frac{кг \cdot \frac{м}{с^2} \cdot м^2}{\frac{Ф}{м} \cdot B \cdot м^2} = [B] + \frac{H \cdot м}{\frac{Кл}{B} \cdot B} = [B].$$

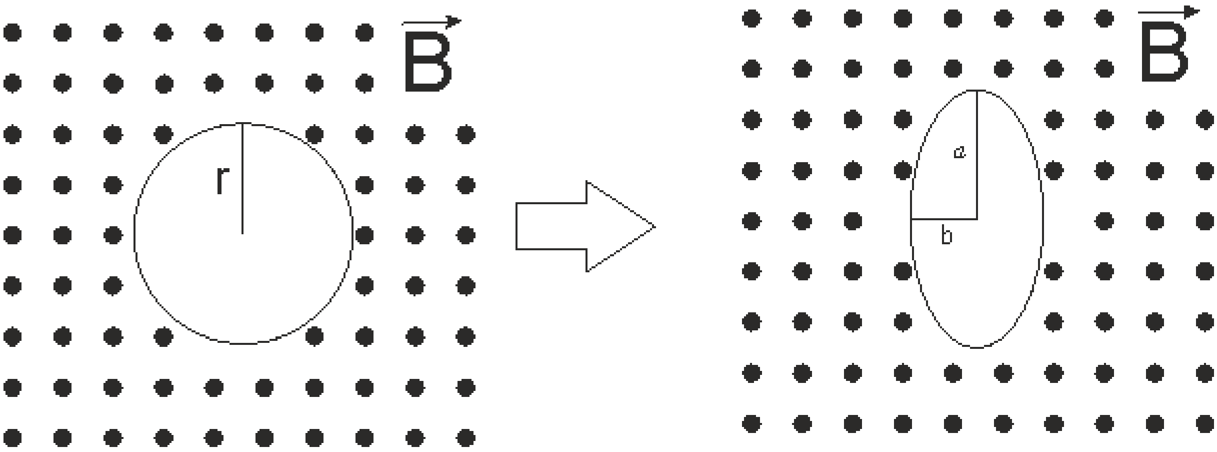
Підставимо числові значення і отримаємо остаточно:

$$U_1 = 100 + \frac{10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-3}} = 5637 \text{ В}.$$

Відповідь: 5637 В. Такі високі значення напруги пов’язані з занадто великою масою зарядженої краплі.

Задача 4.

З провідної проволоки зробили рамку у вигляді кола з радіусом $r = 18.6\,см$ та помістили в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 140\,мкТл$, силові лінії якого направлені перпендикулярно до площини рамки. Потім рамку деформували, розтягуючи за діаметром так, що отримали еліпс, у якого більша піввісь у 2 рази більша за меншу піввісь. Визначити опір проволоки, якщо в результаті такої деформації по рамці пройшов заряд $q = 3.2\,мкКл$.



Розв’язання

Внаслідок розтягування круглої рамки до еліптичної змінився потік вектору магнітної індукції $\vec{\boldsymbol{B}}$ через провідну проволоку:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Магнітний потік можна обчислити за формулою $\Phi = BS\cos\alpha$, де α – кут між вектором магнітної індукції та нормаллю до площини рамки, $\alpha = 0$. Тому

$$\Delta\Phi = B(S_2 - S_1),$$

S_1 – площа круга, $S_1 = \pi r^2$, S_2 – площа еліпсу, $S_2 = \pi ab = 2\pi b^2$. Довжину еліпса можна визначити наближено $L \approx 4\frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b}$. Враховуючи, що $a = 2b$, маємо $L \approx 4\frac{2\pi b^2 + b^2}{3b} = \frac{4}{3}b\left(2\pi+1\right)$. Довжина проволоки не змінилась, а отже $2\pi r = \frac{4}{3}\left(2\pi+1\right)b$, $b = \frac{3\pi r}{2\left(2\pi+1\right)}$ і площа еліпсу тоді $S_2 = \frac{9\pi^3 r^2}{2\left(2\pi+1\right)^2}$. Магнітний потік:

$$\Delta\Phi = B\left(\frac{9\pi^3 r^2}{2\left(2\pi+1\right)^2} - \pi r^2\right) = B\pi r^2\left(\frac{9\pi^2}{2\left(2\pi+1\right)^2} - 1\right)$$

Згідно із законом електромагнітної індукції, під час деформації рамки виникає ЕРС індукції

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\pi r^2\left(\frac{9\pi^2}{2\left(2\pi+1\right)^2} - 1\right)}{\Delta t},$$

яку, з іншого боку, можна виразити через закон Ома для замкнутого кола

$$\varepsilon = IR.$$

За визначенням сила струму – це швидкість протікання заряду через поперечний переріз провідника:

$$I = \frac{q}{\Delta t}.$$

Далі, прирівняємо праві частини виразів для ЕРС:

$$-\frac{B\pi r^2\left(\frac{9\pi^2}{2\left(2\pi+1\right)^2} - 1\right)}{\Delta t} = \frac{q}{\Delta t}R,$$

Звідки легко бачити, що

$$R = \frac{B\pi r^2\left(1 - \frac{9\pi^2}{2(2\pi+1)^2}\right)}{q}.$$

Перевірка на розмірність:

$$[Ом] = \left[\frac{Тл \cdot м^2}{Кл}\right] = \left\{Тл = \frac{B \cdot c}{м^2}\right\} = \left[\frac{B \cdot c}{Кл}\right] = \left\{B = A \cdot Ом, A = \frac{Кл}{c}\right\} = [Ом].$$

Числовий розрахунок:

$$R \approx 0.77\ Ом.$$

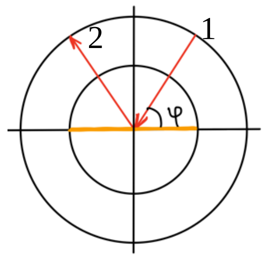
Відповідь: $R \approx 0.77\ Ом.$

Примітка: максимальна похибка формули для визначення довжини еліпсу 0.63%. При цьому розрахований опір буде відрізнятись не більше, ніж на 3.23%.

Задача 5.

Плоске дзеркало обертається з постійною кутовою швидкістю, роблячи n = 0,5 обороту на секунду. З якою швидкістю світлова пляма рухатиметься по сферичному екрану радіусом 10 метрів, якщо дзеркало знаходиться у центрі кривизни екрану?

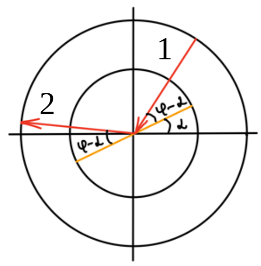
Розв'язання:



Розглянемо промінь 1, напрям розповсюдження якого складає кут φ з поверхнею плоского дзеркала та відбитий від нього промінь 2. Кут між ними дорівнює θ_1.

$$\theta_1 = \pi - 2\varphi.$$

Знайдемо кут між променями θ_2 після повороту дзеркала на кут α:



$$\theta_2 = \pi - 2(\varphi - \alpha) = (\pi - 2\varphi) + 2\alpha.$$

Таким чином, після повороту дзеркала на кут α кут відбиття променя зросте на 2α.

Кутова швидкість дзеркала $\omega_{дз}$ дорівнює куту, на який повертається дзеркало за 1 секунду. Якщо її виразити через частоту n, то вона дорівнюватиме $\omega_{дз} = 2\pi n$.

Зміна кута між падаючим та відбитим променями вдвічі більша за кут, на який повернеться дзеркало, отже і кутова швидкість світлової плями буде вдвічі більшою: $\omega = 2 \cdot \omega_{дз} = 4\pi n$.

Тоді лінійна швидкість, з якою світлова пляма рухається по сферичному екрану, дорівнює $v = \omega R = 4\pi n R$. Обчислимо її:

$v = 4\pi \cdot 0.5c^{-1} \cdot 10\ \text{м} = 2\pi \cdot 10\ \text{м/с} \approx 62.8\ \text{м/с}.$

Відповідь: світлова пляма рухатиметься по сферичному екрану зі швидкістю 62.8 м/с.