

Задача 1.

Дві кульки однакового об'єму, але різної маси, прикріплені на нитках до кінців невагомому стрижня довжини L . Якщо стрижень підвісити на відстані $b = L/3$ від однієї з кульок, він буде знаходитись в горизонтальному положенні. Кульки занурюють у рідину, густина якої вдвічі менша за густину більш легкої кульки. Визначити, на яку відстань треба пересунути точку підвісу стрижня, щоб він залишався горизонтальним?

Розв'язання

Дано:

L

$$V_1 = V_2 = V$$

$$b = L/3$$

$$\rho_p = \rho_2 / 2$$

x - ?

На стрижень діють дві сили натягу ниток:

$$T_1 = m_1 g = \rho_1 V g \text{ та } T_2 = m_2 g = \rho_2 V g .$$

Оскільки у стані рівноваги стрижень знаходиться в горизонтальному положенні, то сумарний момент цих сил відносно точки підвісу дорівнює нулю:

$$T_1 L / 3 - T_2 2L / 3 = 0;$$

$$\rho_1 V g L / 3 - 2 \rho_2 V g L / 3 = 0 .$$

Звідси $\rho_1 = 2 \rho_2$.

Після занурення кульок у рідину аналогічне рівняння має вигляд:

$$T_3 (L / 3 - x) - T_4 (2L / 3 + x) = 0 .$$

Тепер $T_3 = m_1 g - F_A = \rho_1 V g - \rho_p g V$ та $T_4 = m_2 g - F_A = \rho_2 V g - \rho_p g V$ (сила Архімеда однакова для обох кульок, оскільки вони мають рівні об'єми).

За умовою задачі $\rho_p = \rho_2 / 2$. Тоді

$$\left(2 \rho_2 - \frac{\rho_2}{2} \right) V g \left(\frac{L}{3} - x \right) - \left(\rho_2 - \frac{\rho_2}{2} \right) V g \left(\frac{2L}{3} + x \right) = 0 ,$$

Звідки отримуємо

$$\frac{3 \rho_2}{2} \left(\frac{L}{3} - x \right) = \frac{\rho_2}{2} \left(\frac{2L}{3} + x \right) .$$

Розв'язком цього рівняння є

$$x = \frac{L}{12}.$$

Відповідь: $x = \frac{L}{12}.$

Задача 2.

Під ковпаком повітряного насоса знаходиться вода маси 40 г при температурі 0 градусів Цельсія. Повітря з-під ковпака швидко відкачується. Завдяки інтенсивному випаровуванню води відбувається замерзання частини води, що залишилась. Знайти масу льоду, який утворився в результаті, якщо його температура також 0 градусів Цельсія.

Розв'язання

Позначимо масу води $m = 40$ г, а m_1 – шукану масу льоду, що утворився. Маса води, яка випарувалася, дорівнює $m - m_1$. Для її випаровування необхідно витратити кількість теплоти $Q_1 = (m - m_1)r$, де теплота плавлення льоду $r = 0.33$ МДж / кг. При швидкому відкачуванні повітря теплообмін з навколишнім середовищем практично відсутній. Таким чином, процес можна вважати адіабатичним. Тому кількість теплоти $Q_2 = \lambda m_1$ ($\lambda = 2.3$ МДж / кг – питома теплота пароутворення води), що виділяється при кристалізації маси води, витрачається на випаровування решти води. Отже, рівняння теплового балансу $Q_1 = Q_2$ має вигляд

$$(m - m_1)r = \lambda m_1.$$

Звідси отримуємо

$$m_1 = \frac{mr}{\lambda + r} = 0.035 \text{ кг.}$$

Відповідь: $m_1 = \frac{mr}{\lambda + r} = 0.035 \text{ кг.}$

Задача 3.

Дві заряджені металеві кульки відштовхуються одна від одної з деякою силою. Після того, як кожній кульці, не змінюючи відстань між ними, надали додатковий заряд Δq , кульки знов відштовхувались з тією самою силою. Потім кульки зіштовхнулись і відштовхнулись одна від одної на таку саму відстань. Відштовхуюча сила знову

дорівнювала початковій. Знайдіть початкові заряди кульок. Форма і розмір кульок однакові, радіус кульки значно менший за відстань між ними.

Розв'язання

У початковий момент кульки відштовхуються з силою Кулона

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{R^2}.$$

Після того, як кожній кульки надали додатковий заряд Δq , сила не змінилась і дорівнювала

$$F = k \frac{|q_1 + \Delta q| |q_2 + \Delta q|}{R^2}.$$

Після того, як кульки зіштовхнулись і відштовхнулись, заряди на кульках стали дорівнювати середньому арифметичному зарядів кульок до цього, а сила між ними не змінилась і тепер запишеться так:

$$F = k \frac{\left| \frac{q_1 + q_2}{2} + \Delta q \right|^2}{R^2}.$$

Отримаємо систему із 2 рівнянь відносно 2 невідомих зарядів:

$$\begin{cases} |q_1 q_2| = |q_1 + \Delta q| |q_2 + \Delta q|; \\ |q_1 q_2| = \left| \frac{q_1 + q_2}{2} + \Delta q \right|^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо її:

$$\begin{cases} q_1 q_2 = q_1 q_2 + \Delta q (q_1 + q_2) + \Delta q^2; \\ q_1 q_2 = \frac{q_1^2 + q_2^2}{4} + \Delta q (q_1 + q_2) + \Delta q^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta q = -\frac{q_1 + q_2}{2}; \\ q_1 q_2 = \frac{q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_2^2}{4} - \frac{q_1 + q_2}{2} (q_1 + q_2) + \frac{q_1 + q_2}{2}^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta q = -\frac{q_1 + q_2}{2}; \\ q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2 = 0. \end{cases}$$

Із другого рівняння маємо $(q_1 - q_2)^2 = 0$, отже початкові заряди кульок були однакові $q_1 = q_2 = q$, а із першого рівняння знайдемо значення цього заряду $q = -\frac{\Delta q}{2}$.

Відповідь: $q_1 = q_2 = -\frac{\Delta q}{2}$.

Задача 4.

Соленоїд виготовляється шляхом намотування двох шарів мідного дроту, що має діаметр 0.163 см та погонний опір 0.010 Ом/м, на циліндричну форму діаметром 8 см. У кожному шарі щільність намотки дроту - чотири обороти на сантиметр, а довжина соленоїда становить 32 см. Якою буде магнітна індукція магнітного поля в центрі соленоїда в гаусах ($1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$), і якою буде потужність розсіювання у ватах, якщо соленоїд підключено до генератора з напругою 50 В?

Розв'язання

Оскільки у нас на соленоїді два шари, усереднений діаметр витків котушки складає

$$(8 + 2 \cdot 0,163) \text{ см} \approx 8.3 \text{ см}.$$

Повна довжина дроту:

$$L = \left(\pi \cdot 8.3 \frac{\text{см}}{\text{виток}} \right) \left(4 \frac{\text{витка}}{\text{см}} \right) \left(32 \frac{\text{см}}{\text{шар}} \right) (2 \text{ шари}) \approx 6700 \text{ см} = 67 \text{ м}.$$

Опір соленоїда дорівнює

$$R = L \cdot \rho = (67 \text{ м}) \cdot (0.01 \text{ Ом} / \text{м}) = 0.67 \text{ Ом},$$

тому силу струму можна визначити так:

$$I = V / R = (50 \text{ В}) / (0.67 \text{ Ом}) = 75 \text{ А}.$$

Потужність розсіювання, відповідно, дорівнює

$$P = I \cdot V = (75 \text{ А}) (50 \text{ В}) = 3750 \text{ Дж} / \text{с}.$$

Магнітна індукція в центрі соленоїда можна знайти за формулою

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I,$$

де n – кількість витків, а I – сила струму. Для нашої задачі $n = 8 \text{ витків} / \text{см} = 800 \text{ витків} / \text{м}$, а $I = 75 \text{ А}$. Отримуємо:

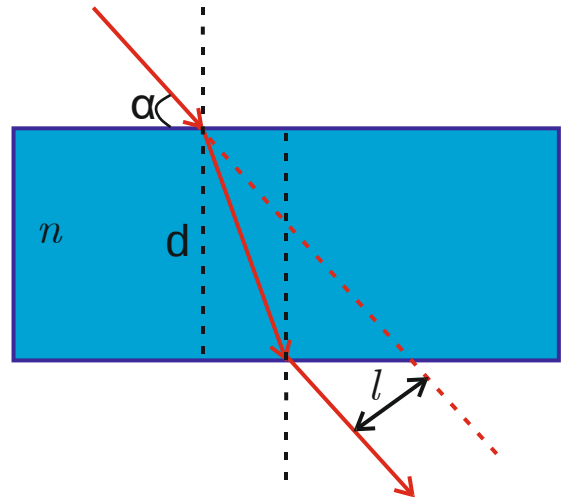
$$B = \left(4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{Кл}^2} \right) (800 \text{ м}^{-1}) (75 \text{ А}) = 0.0754 \text{ Т}.$$

Магнітну індукцію потрібно виразити в гаусах: $B = 754 \text{ Гс}$.

Відповідь: $B = 754 \text{ Гс}$, $P = 3,75 \text{ кДж/с}$.

Задача 5.

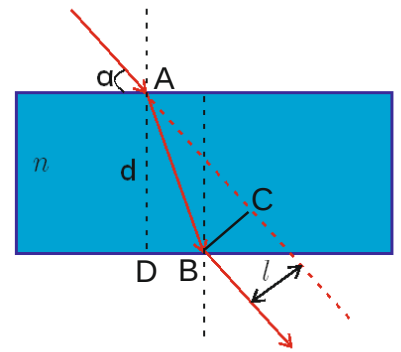
Промінь світла падає з повітря на скляну плоскопаралельну пластинку товщиною 5 см під кутом $\alpha = 60^\circ$ відносно площини пластинки. Показник заломлення скла $n = 1.5$. Знайти відстань між променем, що пройшов крізь пластинку, та променем, який би існував, якби пластинки не було.



Розв'язання

Кут падіння рахується відносно нормалі до поверхні, отже дорівнює $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Згідно із законом заломлення синус кута падіння відноситься до синуса кута заломлення як коефіцієнт заломлення:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin \angle DAB} = n.$$



У трикутнику ABC кут C – прямий. $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha - \angle DAB$. Катет BC – шукана за умовою відстань.

$$BC = AB \cdot \sin \angle BAC = AB \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \angle DAB\right) = AB \cdot \cos \alpha + \angle DAB \quad (1)$$

Із трикутника ABD (кут D – прямий)

$$AB = \frac{AD}{\cos \angle DAB} = \frac{d}{\cos \angle DAB}.$$

Підставимо значення AB до рівняння (1) та розпишемо косинус суми:

$$\begin{aligned} BC &= \frac{d}{\cos \angle DAB} \cdot \cos \alpha \cos \angle DAB - \sin \alpha \sin \angle DAB = \\ &= d \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \tan \angle DAB. \end{aligned}$$

Із закону заломлення маємо:

$$\sin \angle DAB = \frac{\cos \alpha}{n};$$

$$\cos \angle DAB = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{n^2}};$$

$$\tan \angle DAB = \frac{\sin \angle DAB}{\cos \angle DAB} = \frac{\cos \alpha}{n \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{n^2}}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}.$$

$$\text{Отже, } BC = d \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}} \right).$$

Розмірність, очевидно, збігається. Підставляємо числові значення:

$$BC = 5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{1.5^2 - \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \right)}} \right) \approx 1(\text{см}).$$

Відповідь: 1 см.