

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

На правах рукописи

Бутрым Александр Юрьевич

УДК 537.87

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ
В ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

01.04.03 – РАДИОФИЗИКА

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
Колчигин Николай Николаевич
доктор физ.-мат. наук, профессор

Харьков – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
РАЗДЕЛ 1. Обзор литературы и выбор направления исследования	24
1.1. Введение	24
1.2. Модовые методы	28
1.3. Аналитические методы во временной области	30
1.4. Численные методы во временной области	38
1.5. Модовый базис в закрытых резонаторах. Нестационарные и диспергирующие среды	41
Выводы к разделу 1	55
РАЗДЕЛ 2. Метод модового базиса в закрытых цилиндрических волноводах ...	56
2.1. Введение	56
2.2. Получение задачи на модовый базис и системы эволюционных волноводных уравнений	59
2.3. Применение численной схемы и численный анализ сходимости на примере плоскопараллельного волновода с диэлектрическим слоем.	82
2.4. Построение модового базиса для цилиндрического волновода с диэлектрическим стержнем. Двухмодовый анализ дисперсионных характеристик в частотной области	95
2.5. Пример применения вычислительной схемы для волноводов сложного сечения на примере экранированной микрополосковой линии.	103
Выводы к разделу 2	106
РАЗДЕЛ 3. Метод модового базиса в конических волноводах	108
3.1. Введение	108
3.2. Получение задачи на модовый базис и системы эволюционных волноводных уравнений	109
3.3. Построение модового базиса для биконического волновода	124

3.4. Пример решения задачи об излучении кольца с током методом модового базиса, сравнение с точным решением.....	125
3.5. Анализ излучения нестационарного диполя. Оператор распространения.	129
Выводы к разделу 3	131
РАЗДЕЛ 4. Метод модового базиса в открытых диэлектрических волноводах	133
4.1. Введение	133
4.2. Описание волновых пучков в свободном пространстве в виде разложения по бесселевым модам	135
4.2.1. Представление пучков	136
4.2.2. Анализ распространения импульсного волнового пучка. Амплитудный и временной центры пучка.	139
4.3. Построение модового базиса для открытого диэлектрического волновода.....	143
4.4. Дискретизация интегро-дифференциальной СЭВУ и ее численное решение	158
4.5. Физические особенности модового базиса в открытых диэлектрических структурах с дискретным и непрерывным спектром	164
4.6. Решение задачи на основе метода BOR-FDTD с сопровождающим окном.....	180
4.7. Анализ распространения импульсного сигнала в диэлектрическом волноводе. Импульсная поверхностная волна.	185
Выводы к разделу 4	187
РАЗДЕЛ 5. Решение широкополосных задач дифракции	195
5.1. Введение	195
5.2. Метод операторов дифракции в одно-модовых задачах	195
5.2.1. Дифракция на границе раздела магнето-диэлектриков в цилиндрическом волноводе	196

5.2.2. Дифракция на границе проводящей среды в цилиндрическом волноводе. Осцилляции поверхностного заряда и волна объемного заряда при дифракции Е-волны.....	208
5.2.3. Излучение нестационарного диполя из центра диэлектрического шара.....	225
5.3. Метод согласования мод во временной области.....	230
5.3.1. Общая схема метода.....	231
5.3.2. Дифракция на скачке в плоскопараллельном волноводе.....	238
5.3.3. Дифракция на сочленении коаксиального и круглого волноводов .	240
5.3.4. Излучение биконической антенны как дифракция на сочленении конического волновода и свободного пространства.	242
5.3.5. Излучение с конца стержневой антенны	246
5.4. Дифракция плоской волны на тонком проводящем цилиндре. Физический анализ аномального широкополосного поглощения.....	252
Выводы к разделу 5	266
РАЗДЕЛ 6. Собственные моды в задачах пространственной фильтрации в мультисенсорных системах	269
6.1. Введение.....	269
6.2. Оптимизация параметров решётки датчиков	274
6.3. Пространственная фильтрация. Тейлоровские моды и метод собственных ортогональных мод.....	280
6.4. Временная фильтрация в многоканальной системе с разными уровнями шумов.....	292
Выводы к разделу 6	296
ВЫВОДЫ	298
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	308

СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

ВО	временная область
ДС	дисперсионные соотношения
ИВП	импульсный волновой пучок
ИПВ	импульсная поверхностная волна
КК	соотношения Крамерса-Кронига
ЛМ	метод Левенберга-Марквардта
МКА	метод комплексных амплитуд
МКГ	магнитокардиография, магнитокардиограмма
ММБ	метод модового базиса
ПРГ	программно реализуемых градиометров
СЛАУ	система линейных алгебраических уравнений
СШП	сверхширокополосный
СЭВУ	система эволюционных волноводных уравнений
ЧО	частотная область
ЭКГ	электрокардиография, электрокардиограмма
ЭМИ	электромагнитный импульс
FDTD	Finite-Difference Time Domain – Метод конечных разностей во временной области
PML	perfectly matched layer – идеально согласованный слой
PoM	Pencil of Matrix метод пучка матриц
SQUID	superconducting quantum interference device – сверхпроводящий квантовый интерферометр
STFT	Short Time Fourier Transform – оконное преобразование Фурье
SVD	Singular Value Decomposition – Сингулярное разложение матрицы

ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию круга вопросов, объединённых концепцией разложения электромагнитных полей в суперпозицию пространственных конфигураций – «мод», причём рассмотрение проводится во временной области, что позволяет эффективно рассматривать широкополосные процессы.

Создано новое научное направление исследования волноводных систем с поперечно-неоднородным заполнением в различных конфигурациях путём построения модовых разложений во временной области на основе общего подхода частичного разделения переменных в уравнениях Максвелла. Изучаются процессы возбуждения и распространения импульсных сигналов в различных регулярных волноведущих структурах, дифракции на сочленениях таких структур. Поля представляются в виде разложения по модам, с амплитудами, которые являются функциями времени и продольной координаты. Модовые амплитуды удовлетворяют системе связанных эволюционных уравнений, позволяющей определить изменение временной формы модовых сигналов при распространении вдоль структуры. Построенный метод позволяет рассматривать структуры с поперечно неоднородным заполнением волновода, когда моды в частотной области являются частотно зависимыми и не допускают прямого переноса во временную область с сохранением факторизованного разложения на моды и амплитуды. Это достигается за счёт введения в рассмотрение операторов дифференцирования по поперечным координатам, в которые входит неоднородность распределения электромагнитных свойств среды в поперечном сечении. Операторы оказываются самосопряжёнными в специально определённом функциональном пространстве, что позволяет рассматривать для них задачу на собственные значения и использовать их собственные функции (моды) в качестве базиса для разложения искомых полей. Вводимые «моды» являются связанными, возбуждение одной моды приводит к возникновению других мод

при распространении. Численные эксперименты показали, что для сигналов с ограниченным спектром достаточно учитывать конечное количество связанных мод, высшие моды возбуждаются с экспоненциально малыми амплитудами.

Описанный подход применён в диссертации для рассмотрения полей в цилиндрических закрытых волноводах произвольного многосвязного сечения, в конических волноводах, в свободном пространстве: в сферической (волны от сосредоточенного источника) и цилиндрической (волновые пучки) геометриях, в открытом диэлектрическом волноводе. Получен ряд аналитических результатов, разработаны численные схемы для решения более общих задач.

Решено несколько задач о дифракции, которые могут быть сформулированы как дифракция на стыке регулярных волноводов. Для этого известный в ЧО метод согласования мод сформулирован и применён непосредственно во временной области. На основе такого подхода рассмотрена, например, задача об излучении биконической антенны, как задача о дифракции на сопряжении конического волновода (антенны), в котором возбуждается волна, и свободного пространства, рассматриваемого тоже как конический волновод.

С помощью разработанных методов проведено численное моделирование, физический анализ и интерпретация полученных результатов для нескольких нестационарных волновых процессов. Проанализировано возбуждение колебаний поверхностного и объёмного заряда при падении Е-волны на границу проводящей среды в волноводе. При рассмотрении импульсного возбуждения открытого диэлектрического волновода выявлена и проанализирована структура волны-предвестника. Показано, что возникающая импульсная поверхностная волна формирует структуру в виде конических фронтов, распространяющихся под критическим углом к поверхности диэлектрика. Механизм их возникновения схож с черенковским излучением: поверхностная волна, двигаясь вдоль границы диэлектрика со скоростью света в свободном пространстве, создает излучение вглубь диэлектрика, в котором скорость света ниже. Такая волновая структура двигается вдоль диэлектрического волновода со скоростью света в

свободном пространстве, причём скелет пространственной структуры в виде конусов практически не изменяется по ходу распространения.

Рассмотрена задача о пространственной фильтрации в мультисенсорных системах измерения магнитных полей: выделении слабого сигнала от локального источника магнитного поля на фоне сильных помеховых сигналов от удалённых источников с помощью системы магнетометров, разнесённых в пространстве в виде измерительной решётки. В магнитокардиографии необходимо выделить слабый магнитный сигнал от сердца пациента на очень сильном фоне, создаваемом удалёнными источниками шума. Используется метод «собственных ортогональных мод», основанный на использовании сингулярного разложения матриц сигналов. В результате получаются оценки матриц ковариации, описывающие ожидаемый полезный сигнал и шум от внешних источников. Используется разложение непрерывного поля по тейлоровским модам, при этом высшие пространственные производные от поля, создаваемого компактным источником, убывают с расстоянием от источника по степенному закону с показателем, соответствующим степени производной. Классы тейлоровских мод с разными степенями производных дискретизируются на решетке датчиков, позволяя ввести подпространства с различными законами убывания чувствительности с расстоянием до источника. Сравнивается эффективность таких подходов при использовании разного типа датчиков, включая неидеальные градиометры. Рассмотрена частотно-временная фильтрация на основе оконного преобразования Фурье. Зашумленность разных измерительных каналов, соответствующих одному физическому процессу, может существенно различаться: шумы в канале электрокардиограммы обычно на порядок ниже шумов в магнитокардиограмме, поэтому информацию об амплитудной части моментального спектра полезного сигнала ЭКГ можно использовать для фильтрации частотного содержания в зашумленных каналах МКГ.

Актуальность темы

Интерес к задачам возбуждения и распространения нестационарных сигналов в волноведущих структурах и в свободном пространстве возник еще со второй половины прошлого века в связи с проблематикой защиты радиоэлектронной аппаратуры от воздействия электромагнитного импульса (ЭМИ) ядерного взрыва. В дальнейшем импульсные и широкополосные сигналы научились генерировать и активно использовать в радиолокации, в основном на небольших расстояниях: подповерхностная локация для поиска труб, кабелей, мин, неразорвавшихся боеприпасов, археологического поиска, радары для локации сквозь стены, для обнаружения людей под завалами, локация сквозь листву и т.п. Преимущества использования таких сигналов в локации обусловлены значительным улучшением разрешающей способности по дальности, а также возможностью идентификации зондируемых объектов по их специфичным резонансам. Импульсные локаторы используются также для локации самолётов, при этом они обладают сверхразрешением по дальности, позволяющим наблюдать отдельные части самолёта, идентифицировать класс самолёта, а также обнаруживать самолёты-невидимки («стелсы»).

В 90-х годах прошлого века интересы в области генерации мощных импульсных сигналов сместились с защиты от электромагнитного импульса в сторону искусственного создания таких импульсов для воздействия на электронные средства в качестве «электромагнитного оружия», которое способно на большом удалении от антенны выводить из строя полупроводниковую аппаратуру с помощью электромагнитного импульса высокой напряженности, вызывающего пробой полупроводников за счет наведенных на элементах проводки напряжений. Кроме того, создаются также ЭМИ бомбы, которые доставляются поближе к противнику с помощью снарядов или ракет и генерируют ЭМИ в непосредственной близости от аппаратуры, на которую необходимо воздействовать.

С началом 21-го века значительно возрос интерес к коммерческому использованию систем связи на импульсных сигналах. Это обусловлено, в первую очередь, введением стандарта Американской комиссией по связи (FCC), которая разрешила свободное использование сверхширокополосных сигналов с заданным ограничением на спектральную плотность энергии излучаемых импульсов в полосе 0,5-10 ГГц. Другим стимулом стало создание адекватной элементной базы, в частности, генераторов импульсов, позволяющих синтезировать форму импульсов пикосекундной длительности. В результате широкополосные сигналы заняли прочное место в технике связи, где использование широкой полосы дает такие преимущества, как высокая скорость передачи данных, помехозащищенность, скрытая связь – т.е. эфирные каналы связи, которые трудно обнаружить из-за распределения энергии по широкой полосе и использования шумоподобных сигналов. Кроме того, импульсные системы связи не нарушают работу конвенциональных узкополосных систем, обеспечивают более высокую плотность радиоканалов, более приспособлены к передаче цифровых сигналов.

Важной задачей электродинамики нестационарных сигналов является изучение и расчет прохождения сверхкоротких импульсов в неоднородных средах, в частности в неоднородных волноводах. Эта задача непосредственно связана с вопросами воздействия мощных коротких импульсов на радиоэлектронную аппаратуру, так как радиотехнические устройства связаны с внешней средой через волноводные тракты с различными неоднородностями. Кроме того, самое широкое распространение нашли печатные устройства СВЧ, такие как микрополосковые линии, щелевые линии и т.п. Все они представляют собой квази-ТЕМ линии, в которых существует основная мода, не имеющая отсечки, и поэтому способная без существенных искажений передавать импульсные сигналы, в том числе имеющие спектральную составляющую вблизи нулевой частоты, например, гауссов импульс. Однако приставка квази- в названии подчеркивает, что свойства таких мод отличаются от ТЕМ-мод, не имеющих дисперсии.

Применение методов расчета, основанных на использовании преобразования Фурье, в данном случае приводит к значительным трудностям вычислительного характера, так как в линиях с неоднородным в поперечном сечении распределением диэлектрика (как это имеет место в печатных линиях) от частоты зависит не только постоянная распространения, но и модовая конфигурация электромагнитного поля. Поэтому в таком случае использование модового подхода, традиционно используемого в ЧО, требует решения задачи о собственных модах на каждой частоте спектральной полосы сигнала. Поэтому подобные задачи в настоящее время решаются с использованием методов во временной области. Так как точных аналитических решений для большинства практических задач не существует, приходится применять различные численные методы.

Наиболее распространенным и универсальным на сегодняшний день в этой области является метод конечных разностей во временной области (FDTD) и различные его модификации, такие как метод конечных объемов (FVTD), псевдоспектральный метод (PSTD) и т.п. Эти методы основаны на дискретизации уравнений Максвелла в дифференциальной (FDTD, PSTD) или интегральной (FVTD) форме на регулярной (FDTD, PSTD) или нерегулярной (FVTD, mapped PSTD, multi-domain Chebyshev PSTD) сетке. Однако применение этих методов для решения задач с резко неоднородными средами приводит к необходимости использовать достаточно густую сетку по координатам (15-20 точек на длину волны наиболее высокочастотной составляющей интересующей полосы частот в среде с наибольшей диэлектрической проницаемостью, или больше, если необходимо точно учесть мелкие неоднородности или сложные рёбра, углы). Наилучшие реализации этого метода (PSTD) требуют дискретизации 2-3 точки на длину волны в однородной среде. Однако в неоднородном волноводе импульсный сигнал приводит к возбуждению многих гармоник поля, а, следовательно, необходимо использовать достаточно густую сетку по поперечным координатам. А в случае псевдоспектральных методов наличие высококонтрастных границ является причиной плохой сходимости. Это значительно увеличивает требования к используемой памяти, приводит к накоплению ошибок и излишним вычислительным затратам, не позволяет производить качественный

анализ процессов, изучать общие механизмы явления в целом. Таким образом, эта область остаётся *недостаточно исследованной*.

В диссертации очерченный выше круг задач и сложности построения вычислительных методов для него предлагается преодолеть на основе принципиально нового подхода, условно называемого в дальнейшем Методом Модового Базиса (ММБ). Этот подход позволяет объединить преимущества модового рассмотрения в методах ЧО с широкополосным подходом за счет использования в моделировании импульсного возбуждения, присущим методам во ВО. ММБ является, по сути, методом неполного разделения координат в уравнениях Максвелла и позволяет рассматривать возбуждение и распространение импульсных сигналов (и, соответственно, широкополосные характеристики) в самых различных задачах, геометрия которых может быть описана в виде регулярного волнового канала (в какой-либо системе координат), в котором электромагнитные свойства среды описываются факторизованными функциями от поперечных координат и от продольной координаты и времени. Кроме того, из ЧО области перенесен во временную такой подход к решению задач дифракции на стыках волноводов, как метод согласования мод (mode matching), который применён в численной схеме для пошагового «сшивания» полей на общей апертуре модовых каналов в каждый момент времени при моделировании во ВО.

Предложенный ММБ позволяет также рассматривать нестационарные среды, которые в последнее время вызывают интерес в связи с возможными применениями в оптических волноводах и модуляторах систем связи.

По сравнению с предыдущими работами в рамках ММБ в предлагаемой диссертации проведено обобщение метода на широкий круг задач: рассмотрены задачи в цилиндрической системе координат (закрытые волноводы с многосвязной областью поперечного сечения и с поперечно-неоднородным заполнением диэлектриком, открытое пространство – распространение импульсных пучков, открытые диэлектрические волноводы) и в сферической системе координат (конические волноводы с многосвязной областью поперечного сечения и с азимутально-неоднородным заполнением, распространение сферических гар-

моник в свободном пространстве). Кроме того, впервые предложено использование метода согласования мод для решения задач многомодовой дифракции во ВО. Аналитически решен ряд новых задач одномодовой дифракции на границах сред в волноводах.

Помимо задач, связанных с распространением импульсов, рассмотрены также задачи пространственной фильтрации в мультисенсорных измерительных системах. Актуальность этого круга задач определяется необходимостью фильтрации сверхслабых сигналов от сердца на фоне сильных внешних помех в магнитометрических измерительных системах. Создание рассмотренных в диссертации алгоритмов фильтрации, основанных на разложении многомерного сигнала от решетки датчиков по «модам» -- конфигурациям полей (сигналов), которые соответствуют разным законам убывания чувствительности к точечным источникам магнитного поля с расстоянием, позволит создавать коммерческие МКГ системы на основе более дешёвых феррозондовых датчиков, имеющих достаточные для МКГ измерений шумовые характеристики и способных работать при комнатных температурах, в отличие от используемых в настоящий момент МКГ систем на основе низкотемпературных сверхпроводящих датчиках (SQUID). То есть разработанные в диссертации алгоритмы фильтрации позволят создавать более эффективные и дешёвые МКГ системы. Экспериментальная работа в этом направлении уже проводится в настоящее время на кафедре теоретической радиофизики Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Связь работы с научными программами, планами, темами

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина в рамках госбюджетных тем: «Трёхмерное моделирование рассеяния сверхширокополосных электромагнитных сигналов на объектах, которые расположены в неоднородных средах, с целью развития средств для исследования сложных сред» (номер госрегистрации 0104U000674), «Создание

новых моделей распространения импульсов в линиях передачи и разработка новых излучателей импульсных сигналов для систем зондирования и связи» (номер госрегистрации 0106U001546), «Разработка и моделирование новых средств формирования направленного излучения сверхкоротких импульсных сигналов» (номер госрегистрации 0107U000692), «Исследование распространения и излучения импульсов в открытых и конических волноводах с дисперсной средой» (номер госрегистрации 0109U000541), «Исследование нестационарного и резонансного излучения электрически малых ТЕМ антенн» (номер госрегистрации 0110U001426), «Исследование взаимодействия электромагнитных импульсных сигналов с диспергирующей средой» (номер госрегистрации 0112U000562), «Сверхширокополосные излучатели и поглотители на основе неоднородных ТЕМ-рупоров и резистивных структур» (номер госрегистрации 0112U005890).

Автор был ответственным исполнителем или руководителем названных выше работ.

Работа также частично связана с выполнением международного конкурсного проекта в рамках сотрудничества ХНУ с зарубежными партнерами, в котором автор был исполнителем: CRDF First Step to Market Award UK-B1-573-KH-04: “Development & Validation of Computational Tools for Quantification of Myocardial Ischemia”, 2004-2006 г., CardioMag Img., USA.

Цели и задачи исследования

Целью работы является развитие существующих и создание новых вычислительных и аналитических методов на основе модовых разложений во временной области, а также их применение для изучения физических закономерностей возбуждения, распространения и излучения импульсных сигналов в различных регулярных волноведущих структурах.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие *задачи*:

- Обобщить метод модового базиса на *цилиндрические* волноводы с *много-связной* областью поперечного сечения при факторизованной зависимости параметров среды от поперечных координат и от продольной координаты и

времени. Получить систему связанных эволюционных уравнений для модовых амплитуд. Изучить свойства матричных коэффициентов уравнений. Разработать численную схему решения полученных уравнений. Верифицировать решение, проведя численное моделирование и сравнивая с результатами FDTD. Изучить сходимость модового разложения для сигналов с ограниченным спектром.

- Обобщить метод модового базиса на *конические* волноводы с многосвязной областью поперечного сечения при факторизованной зависимости параметров среды от угловых координат и от радиальной координаты и времени. Получить систему связанных эволюционных уравнений для модовых амплитуд. Разработать численную схему решения полученных уравнений. Изучить свойства матричных коэффициентов уравнений. Изучить сходимость модового разложения для сигналов с ограниченным спектром.
- С помощью метода модового базиса промоделировать возбуждение и распространение импульсных волновых пучков, изучить характеристики кривизны и затухания нестационарного волнового фронта, их эволюцию при распространении.
- Обобщить метод модового базиса на открытые диэлектрические волноводы. Получить систему связанных интегро-дифференциальных эволюционных уравнений для модовых амплитуд. Разработать численную схему решения полученных уравнений. Верифицировать решение, проведя численное моделирование и сравнивая с результатами моделирования методом BOR-FDTD с сопровождающим окном.
- Выявить и исследовать физические эффекты и особенности поведения полей, возникающие при распространении импульсных сигналов в открытых диэлектрических волноводах.
- Разработать численную схему решения задач волноводной дифракции на основе применения метода модового базиса и метода согласования мод непосредственно во временной области. Провести верификацию полученной схемы сравнением с результатами FDTD моделирования на нескольких типич-

ных задачах дифракции на стыках волноводов в цилиндрической и конической геометрии, в частности для базовых конфигураций импульсных антенн.

- Получить аналитические решения в виде операторов дифракции во временной области для наиболее общей постановки задачи о дифракции импульсной волны на границе сред в волноводе. Изучить физические явления, происходящие при падении Е-волны на границу проводящей среды в волноводе.
- Исследовать физические механизмы процесса аномального широкополосного поглощения в тонких проводящих проволочках.
- Разработать методы пространственной и временной фильтрации для решения задачи выделения слабого сигнала от локального источника магнитного поля на фоне сильных помех от удаленных источников при магнитометрических измерениях. Провести численное моделирование и выявить оптимальные параметры измерительной системы и метода выделения полезного сигнала.

Объект исследования – процесс возбуждения, распространения, дифракции и излучения импульсных электромагнитных сигналов. **Предмет исследования** – характеристики нестационарного импульсного электромагнитного поля в различных волноведущих структурах и свободном пространстве, физические особенности исследуемых волновых процессов.

Методы исследования

Основным методом исследования является разработанный автором метод модового базиса, основанный на методе неполного разделения переменных. Для построения и обоснования полноты базиса использовались методы функционального анализа: самосопряжённые операторы, биортогональные базисы и т.п. Аналитические результаты для операторов дифракции получались с помощью метода преобразования Лапласа. Для верификации результатов использовался метод конечных разностей во временной области, в частности его модификация для осесимметричных структур с применением сопровождающего окна. Использовался также метод собственных мод в анализе пространства сигналов в мультисенсорных системах, основанный на сингулярном разложении матриц.

Научная новизна полученных результатов

В диссертационной работе были получены следующие новые результаты:

- Усовершенствован метод модового базиса для закрытых цилиндрических волноводов: модовое разложение обобщено на случай волноводов с многосвязной областью поперечного сечения и факторизованной зависимостью материальных параметров среды. Это позволило эффективно рассматривать распространение импульсов в актуальном классе линий передачи с квази-ТЕМ волнами (например, в экранированных микрополосковых и щелевых линиях на диэлектрической подложке). Разработана численная схема решения полученных эволюционных волноводных уравнений. Установлена быстрая сходимость модовых разложений для сигналов с ограниченной спектральной полосой.
- Впервые построен метод модового базиса для конических волноводов с многосвязной областью поперечного сечения и факторизованной зависимостью материальных параметров среды. Получена и проанализирована система эволюционных волноводных уравнений для этого случая.
- Впервые построен метод модового базиса для анализа возбуждения и распространения импульсных сигналов в открытых диэлектрических волноводах. Получена и проанализирована система интегро-дифференциальных эволюционных волноводных уравнений для этого случая. Разработана численная схема её решения, которая применена для анализа возбуждения и распространения импульсных сигналов в открытых диэлектрических волноводах.
- Впервые в результате численного моделирования во временной области процесса возбуждения и распространения импульсного сигнала в открытом диэлектрическом волноводе выявлено и проанализировано новое физическое явление в виде импульсной поверхностной волны-предвестника, которая распространяется вдоль волновода со скоростью света в свободном пространстве, сохраняя свою пространственную структуру при распространении.

- Впервые на основе анализа поведения кривизны импульсного волнового пучка, по аналогии с известным в частотной области понятием фазового центра, предложены понятия отдельных амплитудного и временного центра для адекватного описания поведения импульсных полей в промежуточной зоне импульсных антенн. С точки зрения предложенной модели определены особенности поведения импульсного волнового пучка, создаваемого токами на плоскости, которые заключаются в формировании амплитудного центра позади плоскости возбуждения, а временной центр устанавливается на расстоянии нескольких поперечных размеров пучка впереди плоскости возбуждения.
- Впервые получены в явном виде выражения во временной области для операторов дифракции на плоской границе раздела магнито-диэлектриков с проводимостью в волноводе.
- Впервые проанализированы физические эффекты, возникающие при падении импульсной Е-волны на границу проводящей среды в волноводе. Выявлены и объяснены колебания поверхностного и объемного зарядов вблизи границы, возникающие при этом процессе: по декременту затухания эти колебания были связаны с поверхностной волной, которая возбуждается на границе проводящей среды.
- Впервые предложен численно-аналитический метод решения задач волноводной дифракции на основе модовых переразложений непосредственно во временной области. На основе такого подхода проанализировано импульсное излучение нескольких базовых конфигураций импульсных антенн.
- Впервые проведен физический анализ аномального поглощения в тонких проводящих проволочках, когда сечение поглощения на несколько порядков превышает диаметр проволочки. В результате предложена и проанализирована адекватная физическая модель, объясняющая различные режимы процесса поглощения (резистивного, индуктивного взаимодействия, скин-эффекта). Получены асимптотики соответствующих зависимостей фактора поглощения от параметров задачи — длины волны, радиуса и проводимости проволочки.

- На основе разложений полей по тейлоровским модам предложены новые методы пространственной фильтрации для решения обратных задач магнитостатики при измерении полей от локальных источников с помощью решётки датчиков при наличии сильных удалённых источников помех. На основе численного моделирования впервые проведено сравнение и выявлены наиболее подходящие методы фильтрации и конфигурации магнитокардиографической измерительной системы с учетом неидеальности датчиков, сформулированы рекомендации по созданию соответствующей системы.
- Метод частотной фильтрации сигналов при условии наличия априорной оценки спектра сигнала был усовершенствован за счёт нестационарности фильтрации, когда спектр фильтра изменяется во времени и накладывается на оконное преобразование Фурье фильтруемого сигнала. Продемонстрирована эффективность такого подхода на примере кардиосигналов в магнитокардиографии.

Практическое значение полученных результатов

- Разработанное в данной диссертационной работе научное направление, основанное на методе модового базиса для поперечно-неоднородных волноводов в цилиндрической и конической геометриях, позволяет создавать эффективные численно-аналитические методы расчёта и анализа различных процессов возбуждения, распространения и дифракции/излучения импульсных сигналов в таких структурах.
- Выявленные при анализе распространения импульсной поверхностной волны в диэлектрическом волноводе эффекты могут быть применены для создания нового класса резонансных диэлектрических устройств на основе конических метало-диэлектрических структур, поддерживающих резонанс на поверхностной волне.
- Проведенный анализ поведения импульсного волнового фронта при распространении импульсного волнового пучка в свободном пространстве может

быть применён для компактного и при этом достаточно точного описания полей импульсных антенн в ближней и промежуточной зонах.

- Полученные в аналитическом виде во временной области операторы дифракции на границе сред в волноводе позволяют включить эту неоднородность в число базовых для использования в автоматизированных системах расчета волноводных узлов во временной области.
- Проведенный физический анализ аномального поглощения в тонких проводящих проволочках дает возможность более эффективно создавать поглощающие структуры на основе этого эффекта. Например, установленная зависимость поглощения от индуктивности предлагает использовать конфигурации из проволочек в виде винтовых линий или бифилярных винтовых линий для снижения индуктивности и усиления эффектов поглощения.
- Разработанные методы пространственной и временной фильтрации для магнитокардиографии позволяют создавать магнитокардиографические системы с использованием феррозондовых датчиков, которые в сравнении со сверхпроводящими интерференционными датчиками являются более дешёвыми, доступными и способными работать при комнатной температуре, что делает технологию МКГ диагностики более доступной для клинической практики.

Личный вклад соискателя

Основные теоретические положения и результаты диссертации были разработаны автором самостоятельно. Из работ, опубликованных в соавторстве, в диссертации использованы только те материалы, которые получены автором лично или в которых автор принимал непосредственное участие. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад автора состоит в следующем:

- В работах [1, 5, 6, 7, 8, 14, 15, 30, 33, 39, 45, 54, 67] автор предложил методы решения обратной задачи магнитостатики, методы пространственной фильтрации на основе выделения подпространств методом собственных мод и

методом тейлоровских мод, обсуждение результатов и формулирование выводов, часть моделирования и численных расчётов.

- В работах [3, 4, 28, 36] автором проведены расчёты, интерпретация процессов в резистивных нагрузках и импульсных характеристик антенн.
- В работах [20, 34, 60, 69] автором проведена теоретическая интерпретация процессов поглощения в тонких проволочках, часть моделирования, использованная для сравнения с результатами экспериментов.
- В работах [27, 35, 38, 46] автору принадлежит модель описания импульсного волнового фронта антенны в ближней и средней зоне, постановка задачи, часть численных расчётов, интерпретация результатов.
- В работах [13, 25, 50, 57] автором предложена модель материальных параметров среды и метод её численного моделирования, выбор параметров для моделирования дважды отрицательной среды, интерпретация результатов.
- В работах [2, 10, 11, 16, 23, 31, 40, 41, 43, 48, 49, 52, 55, 58, 62, 70] автором ставилась задача, получалась часть аналитических результатов и численных схем, проводилась интерпретация результатов и формулирование выводов.
- В работах [9, 12, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 32, 37, 42, 44, 47, 51, 53, 56, 59, 61, 63, 65, 66, 68, 72-77] автором ставились задачи, предложены были численные схемы, проведен физический анализ результатов моделирования, описание и интерпретация выявленных физических процессов.
- В работе [29] автору принадлежит идея выделения оператора для факторизованной зависимости параметров среды.

Апробация работы

Изложенные в данной диссертационной работе результаты были доложены и обсуждены на **17** международных конференциях и симпозиумах:

- 3rd International Conference on “Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals” (UWBUSIS’06), Sevastopol (Ukraine), September 18-22, 2006
- First European Conference on “Antennas and Propagation” (EuCAP’06), Nice (France), November 6-10, 2006

- 6th International Kharkov Symposium on “Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves” (MSMW'07), Kharkov (Ukraine), June 25-30, 2007
- 6th International Conference on “Antenna Theory and Techniques” (ICATT'07), Sevastopol (Ukraine), September 17-21, 2007
- 12th International Conference on “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory” (MMET'08), Odesa (Ukraine), June 29 - July 2, 2008.
- 4th International Conference on “Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals” (UWBUSIS'08), Sevastopol (Ukraine), September 15-19, 2008
- 2008 Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS'08). – Kiev (Ukraine), September 22-24, 2008.
- 3rd European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2009), Berlin (Germany), March 23-27, 2009.
- International Kharkov Symposium on “Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves” (MSMW'2010), Kharkov (Ukraine), June 21-26, 2010.
- International Conference on “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory” (MMET'2010), Kyiv (Ukraine), September 6-8, 2010.
- 5th International Conference on “Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals” (UWBUSIS'2010), Sevastopol (Ukraine), September 6-10, 2010.
- International Conference on “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory” (MMET'12), Kharkiv (Ukraine), August 28-30, 2012.
- 6th International Conference on “Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals” (UWBUSIS'12), Sevastopol (Ukraine), September 17-21, 2012.
- The Eighth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'2013) and Workshop on Terahertz Technologies (TERATECH'2013), Kharkov (Ukraine), June 23-28, 2013.
- IX International Conference on “Antenna Theory and Techniques” (ICATT'13), Odessa (Ukraine), September 16-20, 2013.

- 15th International Conference on “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory” (MMET’14), Dnipropetrovsk (Ukraine), August 26-28, 2014.
- 7th International Conference on “Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals” (UWBUSIS’14), Kharkiv (Ukraine), September 15-19, 2014.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 77 научных трудах, в том числе: в 26 основных статьях в специализированных журналах (из них 11 опубликованы в реферируемых зарубежных журналах, и еще 1 – раздел в монографии), в 8 дополнительных статьях в специализированных журналах, в 36 публикациях в реферируемых сборниках трудов международных конференций и в 7 публикациях в сборниках трудов украинских конференций.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести разделов, выводов и списка использованных источников. Общий объём диссертации — 347 страниц, из них основного текста — 303 страницы. Список использованных источников на 40 страницах насчитывает 425 наименования. Всего в диссертации 76 рисунков и 2 таблицы, из которых 15 рисунков на 8 страницах полностью занимают всю площадь страницы.

В диссертации принята сквозная нумерация формул, рисунков и таблиц в пределах каждого раздела, например, (1.2) означает, что это формула 2 из раздела 1.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность своему научному консультанту – проф. Н. Н. Колчигину, а также проф. О. А. Третьякову и проф. С. Н. Шульге за помощь и поддержку в ходе работы над диссертацией, к.ф.-м.н. М. Н. Лёгенькому, к.ф.-м.н. Б. А. Кочетову, к.ф.-м.н. Джин Юн, к.ф.-м.н. М. С. Антюфеевой за помощь в проведении совместных численных экспериментов и обсуждение результатов.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

В разделе кратко рассматривается история развития нестационарной электродинамики и использования модовых разложений в решении различных задач электродинамики. Обсуждается актуальность рассматриваемых задач нестационарной электродинамики на современном этапе развития радиофизики. Отдельно описана история развития метода модового базиса, который является основным инструментом решения задач, рассмотренных в диссертации.

Из сравнения различных методов частотной и временной области выделяются главные противоречия между ними, формируется научная проблема об адекватном переносе понятий, оказавшихся чрезвычайно полезными в частотной области, во временную область. Сформулированы сложности, возникающие на этом пути, и предлагаются способы их преодоления. Описываются ожидаемые преимущества.

Кроме того, в подразделе 1.5 представлены некоторые материалы по использованию метода модового базиса для анализа нестационарных процессов в диспергирующих средах.

Обзор литературы по более специфичным подтемам, рассмотренным в диссертации будет также приводиться в введениях к соответствующим подглавам.

1.1. Введение

Экспериментальная электродинамика началась фактически с опытов Герца в 1893 г., далее и А.С. Попов и Г. Маркони использовали широкополосные сигналы, создаваемые с помощью искрового разряда. В это время У. Крукс (1892 г) и независимо от него Н. Тесла (1893 г.) уже предложили использовать резонансные контуры в передатчике и приёмнике. Однако реализовалась эта

идея только после создания в 1913 г. А. Мейснером генератора незатухающих колебаний на основе вакуумного триода. Вся последующая история развития радиофизики в 20-м веке, фактически, оказалась посвящена использованию и исследованию именно гармонических сигналов [410]. Это связано с удобством их генерирования и детектирования, разделения каналов связи по частоте, фильтрации шумов, принципиальной простотой создания высокочастотных колебательных систем.

В 40-х -50-х годах XX столетия отношение к импульсным электромагнитным полям поменялось в связи с испытаниями атомного оружия, в ходе которых было выявлено, что одним из существенных поражающих факторов ядерного взрыва является создаваемый мощный электромагнитный импульс (ЭМИ). Такой импульс за счёт высокой напряжённости поля может вывести из строя полупроводниковую электронику на большом расстоянии от центра взрыва [411]. В связи с необходимостью проектирования различной военной техники (самолётов, РЛС, средств связи и пр.) устойчивыми к ЭМИ, стали создаваться имитаторы ЭМИ, для которых нужны были и генераторы коротких импульсов, и излучатели, и детекторы [412]. По сути это заложило фундамент последующих разработок в области сверхширокополосных (СШП) и импульсных сигналов.

В это же время появляется и первая волна теоретических исследований, связанных с прохождением импульсных сигналов в различных волноводах [399, 405, 403, 404, 400, 334, 401, 402, 287], описанием дифракции импульсов [413] и пр.

В дальнейшем в связи с развитием и теории и элементной базы, стали появляться и прикладные исследования с использованием СШП сигналов, напрямую не связанный с защитой от ЭМИ. Это стали, в первую очередь, системы радиолокации, подповерхностная локация, а также импульсное радио. Основным толчком для популяризации концепции использования несинусоидальных сигналов в различных прикладных задачах стали работы Harmuth H. F. [151, 152, 154, 155]. Потом немало для разработки концепции импульсного радио и

создания концепции исследования импульсных сигналов именно во временной области сделали G. F. Ross, K.W. Robbins, T. Barret, E. Rothwell и многие другие [178, 117, 118, 119]. Подробные обзоры по ранним этапам развития СШП техники и теории можно найти в обзорах Terrence W. Barret [158] и Астанина [389] а также в статьях [159, 160, 161].

В СССР и постсоветских государствах прикладные исследования в области СШП связаны с именами И. Иммореева [159], Л. Астанина, А. Костылева [390], А. Кардо-Сысоева [422], В. Крымского [196, 164, 197], С. Масалова, Г. Почанина, Н. Колчигина, Б. Левитаса, М. Финкельштейна [421] и многих других.

Важной особенностью импульсных сигналов является то, что энергия импульса распределена по очень широкой полосе частот. Поэтому возможно функционирование импульсных систем в присутствии обычных узкополосных систем без взаимного влияния [162, 158]. Среди других важных для связи особенностей сверхширокополосных сигналов следует отметить помехоустойчивость, скрытность передачи благодаря низкой спектральной плотности, трудность расшифровки сигнала при прослушивании [162].

СШП сигналы находят также применение в навигации благодаря высокой разрешающей способности по дальности (порядка сантиметров на расстоянии в несколько километров), высокой устойчивости к помехам и малой мощности аппаратуры (милливатты) [163]. Причем, благодаря малым размерам аппаратуры (не больше пейджера), эти системы навигации могут использоваться как для управления самолетами в зоне посадки, так и для контроля перемещения автотранспорта или людей (например, в полиции или армии для контроля перемещения солдат на поле боя).

Следует упомянуть также применение мощных коротких импульсов для воздействия на материалы [164], измерения параметров материалов и неразрушающего контроля [165].

Интересное применение импульсные сигналы нашли в антенных измерениях [160], где они позволяют проводить измерения характеристик антенн сразу

в широком спектре частот без необходимости использования безэховой камеры. При одном импульсном измерении с помощью преобразования Фурье можно получить данные сразу на нескольких частотах, а использование временного окна позволяет устранить сигналы, отраженные от окружающих предметов.

Импульсные сигналы используются также в медицине для контроля состояния пациентов [166], для обнаружения раковых опухолей [167].

Широко применяются СШП сигналы также в георадарах для локации подповерхностных объектов, таких как трубы, кабеля, противопехотные мины и пр. [168, 169, 170, 171, 172]. При этом георадары позволяют не только обнаруживать подповерхностные объекты с большим разрешением по глубине, но еще и идентифицировать тип объекта по его характерным резонансам. Первой статьей по импульсным георадарам, где описывается их успешное коммерческое применение, является работа Морея [173], вышедшая в 1974 году. С тех пор импульсные георадары постоянно развивались. Уже классическими в этой области считаются обзоры Даниелса [174, 175, 176]. Кроме зондирования почвы подобные системы также используются для поиска людей под завалами и для радаров, позволяющих обнаруживать объекты (людей) за стеной [177].

Кроме подповерхностной локации СШП сигналы используются и для локации воздушных целей [159]. Важной особенностью при этом является высокая разрешающая способность по дальности, которая позволяет различать отдельные элементы воздушных целей [178] и, таким образом, определять класс цели. Кроме того, СШП сигналы позволяют обнаруживать самолеты-невидимки («стелсы») [179].

В 1990-х годах в связи с развитием возможностей генерации мощных ЭМИ интересы исследователей сместились от создания имитаторов ЭМИ ядерного взрыва к созданию собственно электромагнитного оружия, способного создать достаточно мощный ЭМИ для вывода из строя электроники. В рамках этого направления создается, так называемое, «несмертельное оружие». Примером такого оружия может служить артиллерийский снаряд, который доставляет к объекту генератор мощного короткого импульса. При подлете снаряд распадается

ся и из него выпадает антенна в форме парашюта и генератор, антенна нацеливается на объект, и короткий мощный электромагнитный импульс выводит из строя радиоэлектронную аппаратуру в зоне поражения [181]. Другим примером систем электромагнитного оружия является сверхмощная импульсная антенная система JOLT [182], позволяющая создавать сверхмощные импульсные поля, достаточные для выведения из строя электроники незранированных самолетов и прочих воздушных объектов. Эти исследования в первую очередь связаны с именем С.Е. Baum, E.G. Farr, D.Giri [414, 415, 416, 182]. В России подобные исследования связаны с фамилиями Ефремова А.М. и Кошелева В.И. [417]. Можно отметить также книгу А. Б. Прищепенко о взрывных генераторах ЭМИ [418]. В Украине также занимаются разработками по созданию систем излучения мощных импульсных сигналов, следует отметить работы И.И. Магды [419, 420].

Современный всплеск исследований по СШП сигналам и импульсной технике связан с активным развитием технологий связи, особенно после введения стандартов, позволяющих достаточно свободно (без лицензирования) использовать СШП системы, удовлетворяющие определенным требованиям на плотность спектральной энергии, излучаемой в полосе частот до 10.6 ГГц при спектральной плотности излучаемой мощности менее $-41,25$ дБм/МГц относительно изотропного источника [156, 157].

С современным состоянием СШП технологий можно ознакомиться по информации в книгах [120, 121, 116].

1.2. Модовые методы

Использование разложения полей по некоторой полной ортогональной системе функций (мод) резонатора или волновода начали активно использовать еще в 1940-х годах: уже в книге Stratton, изданной в 1941 г. на английском [393] и в 1948 г на русском [394], используются подобные разложения. В этот период выходят работы Мандельштама [395], Самарского и Тихонова [397, 398], Кисунько [334, 396].

Вскоре после этого, в 1950-е годы прошла и первая волна исследований по импульсным сигналам в различных пустых волноводах [399, 405, 403, 404, 400, 334, 401, 402, 287].

В дальнейшем идеология модовых разложений использовалась практически повсеместно, и сейчас она излагается в любом университетском курсе по технической электродинамике. Среди известных книг по этой тематике можно порекомендовать книги [373, 372, 267, 263, 266]. В частности, в книге [373] приведено также подробное описание метода согласования мод, который используется для решения задач дифракции на диафрагмах и стыках волноводов. Современные исследования по этой теме проведены в работах Петрусенко и Сиренко [89, 90, 91], в которых исследованы вопросы сходимости метода переразложений (метода сшивания полей).

Для конических структур также широко используются модовые разложения [350, 351, 86, 213].

Главным недостатком модовых методов с точки зрения временной области является то, что в поперечно неоднородных структурах моды оказываются зависящими от частоты [263, 266], а это означает, что использовать модовое разложение в факторизованном виде можно только для пустых волноводов [334, 285]. В связи с чем возникает **противоречие**: с одной стороны модовые разложения успешно используются для анализа пустых волноводов как в частотной области, так и во временной, однако использование модовых разложений для поперечно-неоднородных волноводов возможно лишь в частотной области. Таким образом, **нерешённой задачей** является изучение возможностей разложения по ортогональным модам во временной области для поперечно неоднородных структур.

Следует отметить, что модовые разложения используются и для открытых структур, причём вопросы дискретного спектра в таких структурах представляют собой особый интерес [94].

1.3. Аналитические методы во временной области

В этом подразделе будут рассмотрены методы анализа распространения СШП импульсных сигналов в линиях передачи. Наиболее подходящими для передачи импульсных сигналов являются ТЕМ-линии, примером которых служит коаксиальный волновод. В таких линиях в идеальном случае распространение импульсных сигналов происходит без искажения их формы. В реальных линиях искажение происходит за счет наличия потерь в линии, дисперсности заполняющей коаксиальный кабель среды (если это не вакуум) и пр. При распространении на небольшие расстояния этими факторами можно пренебречь. Для существования ТЕМ-волны необходимо наличие двух и более проводников в однородной среде (с однородным коэффициентом преломления).

Следующим классом линий, подходящих для передачи импульсных сигналов, являются квазиТЕМ-линии. От ТЕМ-линий они отличаются неоднородностью среды, в которой расположены проводники. Эта неоднородность приводит к частотной дисперсии характеристик линии передачи (импеданса и задержки). Примером квазиТЕМ-линии могут служить различные полосковые линии, в которых проводники расположены на диэлектрической подложке. Конечность размеров диэлектрика приводит к тому, что часть энергии волны распространяется в диэлектрике с одной скоростью, а часть — в свободном пространстве с другой. Это приводит к возникновению продольных компонент поля. Распространение импульсных сигналов в подобных линиях передачи обобщается, например, в статьях [253, 254, 255, 256, 257].

Прочие линии передачи обладают гораздо большей дисперсией и значительно искажают сверхкороткий импульс при распространении, хотя короткие волновые пакеты могут распространяться в таких системах без значительного изменения огибающей. Примеры рассмотрения поведения различных волновых пакетов в пустом закрытом волноводе можно найти в работе Сиренко [251]. Экспериментальное исследование распространения сверхкороткого импульса в пустом волноводе приведено в статье [258]. Неоднократно в литературе обсуждался также вопрос об интересных свойствах пустых волноводов при распро-

странении в них волновых пакетов на предельных частотах. При этом наблюдается такое явление, как распространение амплитудного центра волнового пакета со сверхсветовой скоростью. Одно из последних обсуждений этой темы можно найти в статье [259].

Кроме пустых волноводов, следует также отметить оптические волноводы, которые широко используются для передачи информации с высокой скоростью. Исследования в этом направлении направлены на дальнейшее повышение скорости передачи данных, для чего перспективно использование солитоноподобных сигналов. Такие сигналы могут существовать только в случае, если оптоволокно обладает нелинейными свойствами. Подобные задачи о распространении импульсных сигналов в диэлектрических волноводах для случая нестационарных/нелинейных сред исследуются в работах Неруха А. Г. [100, 260, 98, 99, 260, 105, 103, 102, 104, 101, 97] и его учеников [261, 262, 107, 108]. Работы этой школы связаны преимущественно с изучением поведения импульсных полей в нестационарных средах, основным аналитическим методом является метод интегральных уравнений Вольтерра [102].

Наконец, рассмотрим волноводы с неоднородным заполнением. Они занимают промежуточное положение между пустыми волноводами и диэлектрическими (оптическими) волноводами. Такие линии передачи имеют сложную дисперсионную зависимость, распространение импульса в них носит существенно многомодовый характер. В предельном случае, когда стенки волновода далеко отстоят от диэлектрического ядра, подобные волноводы можно использовать для приближенного анализа диэлектрических (оптических) волноводов. Модовый состав таких волноводов, как отмечалось выше, довольно сложен. Конфигурация мод зависит от частоты. Кроме того, в неоднородных волноводах существуют такие интересные режимы, как комплексные волны [263], в которых часть потока энергии внутри диэлектрического ядра течет в одном направлении, а другая часть, распространяющаяся в пустой части волновода, течет в противоположном, так что результирующий поток мощности оказывается равным нулю. Другой интересной особенностью неоднородных волново-

дов является возможность распространения в них квазиТЕМ-волн. Эта ситуация реализуется, когда слой диэлектрика возле Е-стенок волновода преобразует граничные условия Е-типа в условия Н-типа, при этом в средней пустой части волновода поле имеет вид ТЕМ-волны [264]. Конечно, такое поведение возможно только в ограниченном диапазоне частот. Идеализированные волноводы с «мягкими» и «жесткими» граничными условиями, описывающими такое поведение, рассмотрены в работе Kildal [265].

Как отмечалось выше, волноводы с существенной дисперсией характеристик не подходят для передачи импульсных сигналов без искажений, хотя такая возможность для многомодовых волноводов со сложной дисперсионной зависимостью и не исследовалась ранее. Однако такие волноводы зачастую используются для связи антенных систем с обрабатывающей частью радиотехнической аппаратуры. Поэтому в задачах электромагнитной совместимости для анализа воздействия коротких импульсных сигналов на узкополосные системы необходимо иметь средства анализа распространения импульсных сигналов в таких трактах передачи.

В следующих подразделах мы рассмотрим различные методы анализа неоднородных волноводов как в частотной, так и во временной области.

1.3.1. Методы в частотной области. Существует огромное множество различных структур, построенных на неоднородных волноводах, которые используются в СВЧ технике [263, 266, 267, 268, 269]. Для анализа таких структур использовались различные методы в ЧО. Суть всех этих методов заключается в том, что зависимость полей от времени предполагается гармонической $e^{i\omega t}$ (рассмотрение в ЧО), зависимость от продольной координаты также предполагается гармонической $e^{-i\beta z}$, в результате уравнения Максвелла сводятся к граничной задаче для определения модового распределения полей в поперечном сечении и постоянной распространения β (для заданной частоты ω) [270]. Эту граничную задачу необходимо решать для каждой интересующей частоты. В некоторых простых случаях можно получить дисперсионное соотношение в аналитиче-

ском виде в форме трансцендентного уравнения [266, 267, 271, 272, 273, 274, 275]. В более общем случае необходимо применять различные численные методы (метод моментов, конечных элементов и пр.) [276, 277, 278, 279, 281].

Основным недостатком описанного выше подхода является необходимость решать довольно сложную граничную задачу для каждой частоты. Для анализа распространения СШП сигнала требуется значительный объем вычислений. Для устранения этих трудностей в последнее время было предложено несколько методов быстрого прохода по частоте («Fast frequency sweeping») [148, 149, 150, 282, 283]. Эти методы основаны на матричной формулировке граничной задачи, используя разложение полей по модам волновода, взятым в нескольких точках на дисперсионной зависимости. Получаемая таким образом матрица достаточно просто зависит от частоты, и нахождение дисперсионных характеристик оказывается несложным. Единственной трудностью является выбор точек на дисперсионной зависимости, которые следует использовать в качестве базиса. Наиболее естественным выбором является использование конфигураций мод на критических частотах, однако такой выбор не обеспечивает достаточной точности в окрестности этих точек. Кроме того, для того чтобы найти базис в данном случае необходимо заранее знать приблизительный вид дисперсионной зависимости, для получения которого, следовательно, необходимо использовать другой метод.

1.3.2. Методы во временной области. Другим вариантом анализа непосредственно распространения импульсного сигнала и дисперсионных свойств неоднородного волновода являются методы во временной области. К числу таких методов относятся метод конечных разностей во временной области (Yee) (FDTD) [144] и его разновидность — псевдоспектральный метод во временной области (Liu) (PSTD) [147], метод интегрального уравнения Вольтера (Нерух) [260, 99, 102, 97], метод модового базиса (метод эволюционных волноводных уравнений) (Третьяков) [284]. Обзор различных методов нестационарной электродинамики можно найти в книгах Сиренко [251] и Rao [145].

Отметим также книгу Борисова [285] по нестационарным полям в волноводах. Нестационарные поля в пустых волноводах изучались аналитически и другими авторами [286, 287, 288].

Нестационарные задачи для продольно неоднородного волновода рассмотрены в работах по методу расщепления волн [289, 290].

Сравнивая различные методы анализа, отметим, что для анализа неоднородных волноводов непосредственно подходит только метод FDTD, благодаря его универсальности. Однако, во-первых, он требует дискретизации четырехмерного пространства-времени, что обуславливает значительные требования к памяти для вычислений и ограничивает точность решения, во-вторых, он не позволяет физически интерпретировать получаемые результаты.

Метод модового базиса.

В методе модового базиса (ММБ) в постановке [284] также возможен анализ неоднородных волноводов. Однако, если продольно неоднородные волноводы достаточно просто можно анализировать в одномодовом режиме, то для поперечно неоднородных волноводов возникают определенные трудности. Поперечная неоднородность в ММБ [284] рассматривается с помощью вторичных источников поля, которые раскладываются по системе мод пустого волновода и описывают преобразования мод пустого волновода за счет наличия диэлектрика. Но подобный подход требует учета очень большого количества мод, особенно если распределение диэлектрической проницаемости в поперечном сечении сильно неоднородно и содержит резкие скачки. Это обусловлено эффектом Гиббса, так как разрывную функцию приходится аппроксимировать гладкими функциями (для случая прямоугольного волновода, например, это будет тригонометрический ряд).

Вкратце опишем историю и основные идеи ММБ. В 1983 г. проф. Третьяков О. А. предложил метод модового базиса для решения нестационарных задач возбуждения резонаторов [291, 292]. Метод, который позднее назывался также методом эволюционных уравнений и эволюционным подходом к электродинамике [284, 293, 294, 295], основывается на модовом разложении полей в

резонаторе. При этом вместо того, чтобы вначале использовать преобразование Фурье, как это делается в методе комплексных амплитуд при решении задачи в ЧО, а затем решать граничную задачу для пространственных зависимостей поля, в ММБ используется вначале разложение по пространственным модам резонатора, а затем решается задача для зависящих от времени модовых амплитуд. Временная зависимость полей и источников не предполагается гармонической. Использование подобного подхода позволяет избежать ряда ограничений, налагаемых на параметры среды в традиционном методе комплексных амплитуд (стационарность и линейность). Методически, ММБ строится на основе выделения из уравнений Максвелла оператора дифференцирования по координатам, вводится пространство 6-компонентных векторов, составленных из компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, доказываемая самосопряженность введенного оператора в этом пространстве (с использованием энергетической L_2 метрики). Из самосопряженности оператора следует ортогональность его собственных векторов. Отдельно доказывается, что система собственных векторов этого оператора образует базис в пространстве решений. Искомые поля раскладываются по этому базису, а проецированием исходных уравнений на базис получается задача из обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения (модовых амплитуд).

ММБ применялся для анализа резонатора с нестационарной средой [296], была также разработана модификация ММБ, подходящая для анализа неоднородных резонаторов (Назыров, Шматько) [297]. В этой модификации параметры среды, заполняющей резонатор, были включены в оператор дифференцирования по координатам. В результате собственные векторы такого оператора в явном виде учитывали скачок поля на границе раздела сред.

ММБ был применен также для анализа волноводов [284]. При этом из уравнений Максвелла выделяются два оператора дифференцирования по поперечным координатам, вводится пространство четырехмерных векторов (из поперечных компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$), доказываемая самосопряженность операторов в этом пространстве, на основе их собственных векторов вводится базис, по которому

раскладываются поля в волноводе. Коэффициенты такого разложения являются уже функциями продольной координаты и времени и удовлетворяют дифференциальному уравнению Клейна-Гордона (для продольно однородного волновода). Однако в этом варианте поперечная неоднородность волновода не учитывается.

Следует также отметить альтернативные реализации этого метода Адониной [298, 299], в которых рассматривались также и анизотропные среды.

ММБ был применен и к изучению нестационарных полей в свободном пространстве в работах А. Думина [300, 301, 78]. Свободное пространство рассматривалось как предельный случай круглого волновода бесконечного диаметра. При этом спектр оператора дифференцирования по поперечным координатам становится непрерывным, и модовое разложение полей представляется не суммой, а интегралом.

Обзор применений ММБ к резонаторным задачам можно найти в работе М. Антюфеевой [81]. Её диссертация посвящена исследованию нестационарных процессов в резонаторах, заполненных нестационарной или диспергирующей средой. Более подробно этот материал будет освещён в подразделе 1.5.

Основным недостатком метода модового базиса в формулировке проф. О.А. Третьякова [284] является то, что для разложения полей используется система функций пустого волновода. Это означает, что если волновод заполнен неоднородным в поперечном сечении диэлектриком, то каждая из мод по отдельности не удовлетворяет граничным условиям на границе диэлектрика, а следовательно решение обязано представляться бесконечным рядом по модам, эти моды будут взаимодействовать при распространении, что учитывается введением токов поляризации, которые определяются суммарным полем и также раскладываются по системе функций пустого волновода. В результате получается довольно медленная сходимость. Примером реализации такого подхода к анализу неоднородных волноводов (каналов Флоке для периодических структур), только в частотной области является метод строгого анализа связанных мод (Rigorous Coupled Wave Analysis, RCWA) [423]. В этой же статье можно найти и обсуждение причин и способов борьбы с медленной сходимостью в таком случае.

Рассмотренный недостаток был преодолен автором в работах, которые вошли в кандидатскую диссертацию [79], с помощью включения поперечной зависимости параметров среды в постановку граничных задач на базисные функции. Основная задача здесь состояла в том, чтобы ввести самосопряженный оператор, собственные функции которого давали бы необходимый базис для разложения полей. Однако, рассмотрение в [79] было проведено только для простейшего случая цилиндрического волновода с одноствязной областью поперечного сечения, что не позволяло рассматривать, например, квази-ТЕМ линии. Кроме того численная схема для полученных эволюционных волноводных уравнений не была построена, а обоснование достоверности проводилось путём построения дисперсионных характеристик прямоугольного волновода с продольным слоем на основе предложенного метода и стандартным методом продольных волн в частотной области [263]. Кроме того, была также рассмотрена простейшая задача дифракции импульсной волны на границе двух диэлектриков в волноводе. В результате получен в аналитическом виде оператор типа свёртки для описания изменения волновой формы сигнала при отражении/прохождении через границу.

Предложенный метод был в дальнейшем усовершенствован в течение 2006-2014 гг., и результаты этой работы составляют материал настоящей диссертации. По ходу работы автор руководил диссертационными работами аспирантов по этой тематике, в которых были рассмотрены некоторые задачи на этом длинном пути. Так, в диссертации Джин Юна [80], были изложены результаты по моделированию распространения импульсных волновых пучков, а также дифракция на границе раздела двух магнито-диэлектриков в волноводе. В дальнейшем автором в продолжение этого исследования были получены более общие выражения для дифракции на границе раздела двух магнито-диэлектриков с проводимостью. На основе полученных операторов дифракции в дальнейшем под руководством автора в кандидатской диссертации М. Легенького [83] была рассмотрена физическая задача о возбуждении колебаний поверхностного заряда и волны объёмного заряда при падении Е-волны в волноводе на границу диэлектрика с проводимостью. Кроме того, в работе [83] была также построена и апро-

бирована схема анализа открытых диэлектрических волноводов. При изучении импульсного возбуждения круглого диэлектрического волновода было выявлено явление распространения импульсной поверхностной волны. После защиты диссертации [83] работы по анализу этого явления продолжались и новые результаты вошли в настоящую работу (см. раздел 4.6 и работы автора [22, 65]). Кроме того, под руководством автора в кандидатской диссертации Б. Кочетова [82] было проведено обобщение метода модового базиса для цилиндрических волноводов на случай многосвязной области поперечного сечения, построены соответствующие численные схемы для решения эволюционных уравнений, получены численные решения для простейших случаев плоскопараллельного волновода с продольным слоем, изучена сходимость решений. Кроме того, в этой работе также строился метод модового базиса для конических волноводов со средой, имеющей зависимость параметров от угловых координат.

1.4. Численные методы во временной области

Анализ диэлектрических волноводов. Существует множество методов для анализа диэлектрических волноводов в частотной области. В частности для анализа однородных вдоль продольной оси диэлектрических волноводов наиболее удобными являются методы, основанные на модовых разложениях.

Спектр мод круглого диэлектрического волновода в частотной области хорошо известен [391]. При этом необходимо отметить, что сп имеет сложный характер: на фиксированной частоте в нем присутствует конечное число дискретных мод и бесконечное число мод непрерывного спектра.

Разделение спектра в частотной области на различные типы волн рассмотрено в работах Носича [424]. Эффективный метод нахождения мод диэлектрического волновода с помощью интегральных уравнений представлен в [425].

Механизм возникновения непрерывного спектра мод в частотной области, разделение спектра на дискретную и непрерывную части рассмотрено в работах Плещинского [144]. Нахождение спектра (в том числе и непрерывного) мод диэлектрического волновода представлено в работах Шевченко [180].

Необходимо отметить, что в круглых диэлектрических волноводах могут существовать комплексные моды, то есть моды, энергия которых не распространяется вдоль волновода, а осциллирует в поперечном сечении. Данный вопрос рассматривается в работах Раевского [263] и других иностранных авторов [280].

Также в оптических волноводах присутствуют и вытекающие моды, отвечающие за излучение энергии из волновода в свободное пространство. В работе [122] проанализирован весь спектр мод, в том числе и вытекающие моды, плоского оптического волновода. Для случая круглого диэлектрического волновода вытекающие волны могут быть проанализированы методом Давиденко [151]. Общие свойства волноводных мод для открытых структур вблизи частот отсечки проанализированы в работе [118].

Собственные моды сложных открытых структур также могут быть найдены численно методом конечных разностей [132] или с помощью псевдоспектрального метода [145].

Существуют также другие численные методы нахождения мод оптических волноводов. Наиболее популярным является метод конечных элементов. Формулировка метода конечных элементов для нахождения мод диэлектрических волноводов, основанная на вариационной форме уравнений Максвелла, представлена в работах [116].

Еще один вариант анализа открытых диэлектрических волноводов, основанный на использовании метода конечных элементов для расчета поля внутри диэлектрика и на применении метода интегральных уравнений для определения поля снаружи диэлектрика, предложен в [185].

Метод конечных элементов, основанный на решении уравнений относительно тангенциальных компонент поля, для анализа поля в диэлектрических волноводах рассмотрен в [131]. В [189] предложен метод конечных элементов относительно векторов поля, при этом используются неоднородные элементы в области нахождения диэлектрических неоднородностей. Еще один вариант метода конечных элементов рассмотрен в [180].

В [155] предложен метод коллокаций для анализа распространения волн в оптических волноведущих структурах со слабо изменяющимся в пространстве показателем преломления. При этом решение дифференциального волнового уравнения ищется в виде линейного разложения по полиномиальным или другим функциям. Коэффициенты разложения получаются с помощью введения условий, которым должны удовлетворять поля в некоторых дискретных точках или на некоторой оси (плоскости).

Метод для расчета изгибов неоднородностей, основанный на приближении физической оптики, рассмотрен в статье [254].

Также для расчета распространения поля в открытых диэлектрических структурах может использоваться Beam Propagation Method (BPM). Основная идея обычного BPM метода состоит в том, что электромагнитное поле представляется в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся в однородных средах. Распространение волны в неоднородных средах моделируется, как интеграл от этих плоских волн в спектральной области, при этом неоднородность среды учитывается как фазовая коррекция в пространственной области на каждом шаге распространения. Для связи между пространственной и спектральной областями используется быстрое преобразование Фурье. BPM в соединении с методом линий рассмотрен в [251], а в работе [158] представлена вариация метода BPM, основанная на применении метода конечных разностей.

Анализ поля в диэлектрических волноводах может осуществляться и с помощью метода интегральных уравнений [160].

Для расчета временных зависимостей полей могут использоваться методы, основанные на преобразовании Фурье [121] и другие спектральные методы для задач во временной области [169].

Однако из-за скоротечности процессов, происходящих в современных оптических системах, импульсного характера используемых сигналов и необходимости моделирования нелинейных и нестационарных во времени сред использование методов частотной области для решения подобных задач является нецелесообразным [41].

1.6. Модовый базис в закрытых резонаторах. Нестационарные и диспергирующие среды.

Применение метода модового базиса к анализу процессов в резонаторах с диспергирующей средой.

Метод модового базиса был вначале предложен О. А. Третьяковым для анализа нестационарных процессов в закрытых резонаторах [292]. Методика ММБ базировалась на схеме разделения переменных, предложенной еще в работе Кисунько [334], к ней было добавлено теоретическое обоснование полноты базиса на основе теоремы из работы Weyl [333]. Кроме того, в работе Назырова и Шматько [297] было рассмотрено более сложное построение, когда резонатор заполнен неоднородной нестационарной средой. В этом случае базис строился с учётом включения функции распределения диэлектрической проницаемости в граничную задачу на собственные значения, получалась система связанных колебаний с межмодовыми преобразованиями за счёт нестационарности среды. Наконец, в работе [81] М. С. Антюфеева провела дальнейшее обобщение ММБ для резонаторов. Часть этой работы была опубликована в совместных с автором работах [13, 50, 57]. Антюфеевой были изучены резонаторы с нестационарной средой и с диспергирующей средой. Рассмотрены однородно заполненные резонаторы, в этом случае межмодовых преобразований не происходит и каждая мода ведёт себя по сути как 1-2 мерная колебательная система. Введения диспергирующей среды добавляет системе степеней свободы: происходит взаимодействие объёмных колебаний электромагнитного поля, обусловленных переотражениями между границами, и колебаний молекул среды, которые также имеют собственные частоты. Особенно интересное взаимодействие происходит при моделировании среды, имеющей участок с аномальной дисперсией (так называемые среды с отрицательным показателем преломления). Именно этот случай рассмотрен в совместных с автором работах [13, 50, 57]. При этом в резонаторе может возбуждаться резонанс на одной моде (пространственной конфигурации поля) на нескольких частотах, причём частоты резонансов могут вести себя аномально с изменением размеров резонатора,

что связано с отрицательным показателем преломления в определённой полосе частот. На рис. 1.1. приведён пример рассчитанного отклика резонатора с диспергирующей средой на внешнее возбуждение. Как видно из рисунка, здесь имеется «запрещённая» полоса частот, в которой резонансы не возникают ни при каких размерах резонатора.

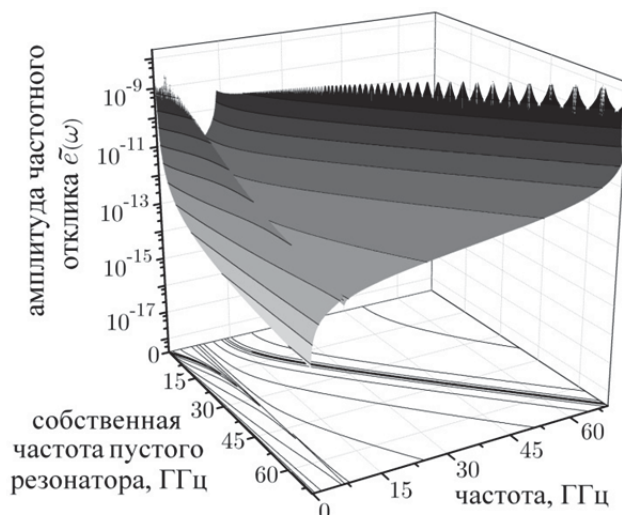


Рис. 1.1. Амплитуды возбуждения резонатора с дисперсной средой, имеющей диапазон отрицательных значений показателя преломления как функция частоты возбуждения и размеров резонатора.

Построение полюсных моделей проводимости для моделирования реальных дисперсных веществ во временной области.

В рассмотренном выше методе диспергирующая среда описывается полюсной моделью. В этом случае зависимость от частоты диэлектрической проницаемости можно представить в виде дробно-рациональной функции. Тогда соответствующую зависимость между поляризацией диэлектрика и электрическим полем можно записать во временной области либо в виде свёртки с затухающими синусоидами и экспонентами, либо же в виде дифференциального уравнения, которое дополняет систему эволюционных уравнений связью модовых амплитуд токов поляризации с модовыми амплитудами электрического поля. Таким образом, для возможности моделирования реальных диспергирующих сред важно уметь строить полюсные модели исходя из измеренных частотных зависимостей диэлектрической проницаемости в ограниченной полосе частот. Эта задача рассмотрена в работе автора [25].

Измерение отражения от материала и/или прохождения через него, в совокупности со знанием его физических размеров дает информацию для определения диэлектрической и магнитной проницаемости материала. Имея характеристики падающей, отраженной и преломленной от диэлектрического образца волны мы получаем набор значений для показателя преломления и показателя поглощения на частотах, которые определяются используемым в эксперименте генератором. Но для многих практических приложений, при создании искусственных сред, метаматериалов со специфическими свойствами, антенн, и других элементов современной электроники, например на основе слоистых структур, необходим предварительный расчет электромагнитных полей, требующий известных электродинамических характеристик материала в любой точке рабочего диапазона (а не только в выбранных при измерении), а, зачастую, и аналитической аппроксимации дисперсионной зависимости в расширенном диапазоне частот. Это характерно не только для аналитических методов, таких как интегральные методы или метод модового базиса, но и для численных методов, например, для метода конечных разностей во временной области (FDTD) необходима модель дисперсии, допускающая представление во временной области. Кроме того, нельзя не отметить, что многие материалы по своим диэлектрическим свойствам не вписываются только в одну из классических моделей Дебая, Друде, Лоренца, а, как правило, отвечают некоторой совокупности этих моделей. Данная статья предлагает алгоритм создания обобщенной полюсной модели, включающей указанные выше модели в качестве частных случаев.

Рассматриваться будет немагнитный диэлектрик. В этом случае действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости связаны с показателем преломления и показателем поглощения:

$$\varepsilon' = n^2 - k^2, \quad \varepsilon'' = 2nk \quad (1.1)$$

Таким образом экспериментально измеренные частотные зависимости n и k пересчитываются в комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(f_i)$ на наборе частот f_i .

Постановка задачи. Рассматриваемая задача заключается в построении аппроксимации измеренных данных частотной зависимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon(f)$ в следующем виде:

$$\varepsilon_{PM}(f) = \varepsilon_\infty + \sum_k \frac{r_k}{if - s_k} = \varepsilon_\infty + \sum_k \frac{a_k + ib_k}{if - (\alpha_k + i\omega_k)} \quad (1.2)$$

где ε , $r_k = a_k + ib_k$ и $s_k = \alpha_k + i\omega_k$ – комплексные величины, i – мнимая единица. Параметрами модели являются ε_∞ , r_k , s_k . Поскольку r_k и s_k – комплексные числа, каждое слагаемое в (1.2), соответствующее одному индексу суммирования, учитывается дважды, включая комплексно сопряженную пару:

$$\frac{r_k}{if - s_k} + \frac{r_k^*}{if - s_k^*} \quad (1.3)$$

Обозначим эту модель как полюсную модель (ПМ). Она удовлетворяет соотношениям Крамерса-Кронига (КК) и включает как частные случаи модели Дебая, Друде и Лоренца [125].

Модель Дебая соответствует простому действительному полюсу, когда r и s оба действительные числа.

$$\varepsilon_{Debye}(f) = 1 + \frac{A}{if - \alpha}, \quad A, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Модель Лоренца соответствует комплексному s и чисто мнимому r .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Lorentz}(f) &= 1 + \frac{iB}{if + (\alpha - i\omega)} - \frac{iB}{if + (\alpha + i\omega)} = \\ &= 1 + \frac{2B\omega}{f^2 - (\alpha^2 + \omega^2) - i2\alpha f}, \quad \alpha, \omega, B \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Модель Друде (используемая для описания дисперсии в металлах в инфракрасном диапазоне длин волн) соответствует комбинации полюса проводимости (при $s = 0$) и модели Дебая с общей амплитудой:

$$\varepsilon_{Drude}(f) = 1 + \frac{A}{if(if + \alpha)} = 1 + \frac{A/\alpha}{if} - \frac{A/\alpha}{if + \alpha}, \quad \alpha, A \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

Таким образом, задача заключается в следующем: по данным измерений в определенной полосе частот дисперсионных зависимостей диэлектрической

проницаемости ($\varepsilon_j(f_j)$, $f_{low} < f_j < f_{high}$) определить параметры модели ε_∞ , r_k , S_k которые обеспечивают минимальную невязку между моделью (1.2) и измеренными данными $\varepsilon_j(f_j)$. В качестве функции невязки возьмем сумму квадратов модулей разностей между измеренными и вычисленными значениями:

$$\chi^2(\varepsilon_\infty, r_k, S_k) = \sum_j |\varepsilon_j(f_j) - \varepsilon_{PM}(f_j; \varepsilon_\infty, r_k, S_k)|^2. \quad (1.7)$$

Особенностью используемого в нашем случае метода наименьших квадратов является комплексность аппроксимируемых данных.

Схема решения. Существует несколько алгоритмов аппроксимации по методу наименьших квадратов. Для нелинейной зависимости модели от параметров наиболее эффективным и удобным является метод Левенберга-Марквардта (ЛМ), поскольку в рассматриваемом случае очень просто вычислить производные модели по параметрам. Этот метод, как правило, приводит к очень быстрой сходимости при условии, что начальные приближения параметров не слишком далеки от оптимальных значений. Основным недостатком ЛМ, как и любого аналогичного градиентного метода локальной оптимизации, является зависимость от начального приближения: ЛМ находит минимум χ^2 , ближайший к стартовой точке. Рассматриваемая задача является нелинейной, а измеренные данные могут содержать шум (конечная точность измерений). Все это приводит к тому, что существует много минимумов функции невязки, и чтобы получить лучшее соответствие, нужно обеспечить хорошее начальное приближение. Для преодоления этой проблемы будем использовать метод пучка матриц, называемый в зарубежной литературе Pencil of Matrix (PoM) [318, 319], при нахождении начального приближения для нелинейных параметров модели S_k . Полезной особенностью метода PoM является то, что он позволяет оценить достаточное количество полюсов, необходимых для описания сигнала. Однако, так как PoM работает с временными рядами, необходимо преобразовать входные частотные данные во временную область. Это может быть сделано с помощью преобразования Фурье, но для этого необходимо иметь

равномерную выборку данных в частотном диапазоне от нуля до верхней частоты, определяющей временной шаг. Для получения этих данных мы будем использовать экстраполяцию степенными рядами, основанную на применении интегрального соотношения Крамерса-Кронига. После экстраполяции данных, мы используем интерполяцию кубическим сплайном внутри известного частотного диапазона и найденную экстраполяцию степенными рядами для вычисления дисперсионной зависимости в равномерно распределенных точках $f_j = j \cdot \Delta f$. К этим данным применяется быстрое преобразование Фурье (Fast Fourier Transform (FFT)). К полученному временному ряду применяется PoM для получения комплексных частот полюсов S_k и оценки необходимого количества полюсов модели. После того как найдены нелинейные параметры модели S_k , задача нахождения линейных параметров модели r_k методом наименьших квадратов может быть легко решена широко известным методом сингулярного разложения матрицы (Singular Value Decomposition (SVD)). В результате мы приходим к хорошему начальному приближению для полюсной модели, которое используется для дальнейшего уточнения с помощью нелинейной подгонки по методу ЛМ. Обобщенная схема алгоритма и взаимодействия данных на разных этапах представлена на рис. 1.2.

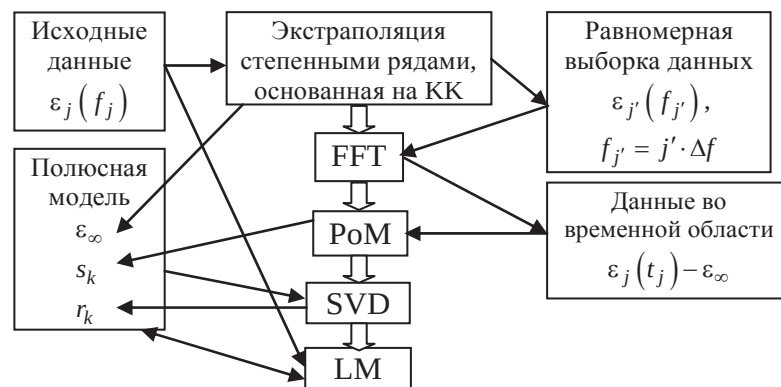


Рис. 1.2. Алгоритм построения полюсной модели

Экстраполяция степенными рядами на основе соотношений Крамерса-Кронига. В первую очередь для конвертации данных во временную область необходимо получить дисперсионные зависимости на равномерных отсчетах от нулевой частоты до некоторого высокочастотного предела. Поскольку экспе-

риментальные данные измерены только в конечной полосе от некоторого f_{low} до f_{high} , то необходимо как-то экстраполировать эту зависимость. В данном случае важна не столько точность, сколько «физичность» экстраполяции. Мы используем аппроксимацию степенными рядами для «хвостов», основанную на четной/нечетной симметрии данных, исходя из того, что мы имеем дело со спектром некоторой реальной функции (временной отклик поляризации). Таким образом, мы представляем ε' как сумму одночленов четной степени, а ε'' как сумму одночленов нечетной степени:

$$\varepsilon'(f) = \begin{cases} f < f_{low}, & a_0 + a_1 f^2 + a_2 f^4 + \dots \\ f_{low} < f < f_{high}, & \varepsilon'_{measured} \\ f > f_{high}, & \varepsilon_{\infty} + b_1 f^{-2} + b_2 f^{-4} + \dots \end{cases} ;$$

$$\varepsilon''(f) = \begin{cases} f < f_{low}, & \tilde{\sigma} f^{-1} + c_1 f + c_2 f^3 + \dots \\ f_{low} < f < f_{high}, & \varepsilon''_{measured} \\ f > f_{high}, & \tilde{\sigma} f^{-1} + b_1 f^{-3} + b_2 f^{-5} + \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_i , b_i , c_i , $\tilde{\sigma}$, и ε_{∞} воспользуемся соотношениями Крамерса-Кронига, связывающими действительную и мнимую части комплексной ε :

$$\varepsilon'(f) = \varepsilon_{\infty} - \frac{2}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \frac{\varphi \cdot \varepsilon''(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi,$$

$$\varepsilon''(f) = \frac{2f}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi - \frac{\sigma_0 / 2\pi\varepsilon_0}{f}. \quad (1.9)$$

Сингулярные интегралы вычисляются в смысле главных значений. Подставляя (1.8) в (1.9) получаем следующие функциональные равенства для указанных поддиапазонов частот:

$$f < f_{low} : \tilde{\sigma} f^{-1} + c_1 f + c_2 f^3 + \dots + c_n f^{2n-1} =$$

$$= \frac{2f}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\varepsilon'_{measured}(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi + \varepsilon_{\infty} f \cdot F_0^h(f) + f [a_n F_n'(f) + a_0 F_0'(f) + b_n F_n^h(f)] + \frac{\tilde{\sigma}}{f} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}
f > f_{high} : \quad & \tilde{\sigma} f^{-1} + b_1 f^{-3} + b_2 f^{-5} + \dots + b_n f^{-2n-1} = \\
& = \frac{2f}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\varepsilon'_{measured}(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi + \varepsilon_{\infty} f \cdot F_0^h(f) + f [a_n F_n^l(f) + a_0 F_0^l(f) + b_n F_n^h(f)] + \frac{\tilde{\sigma}}{f} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f < f_{low} : \quad & a_0 + a_1 f^2 + a_2 f^4 + \dots + a_n f^{2n} = \\
& = \varepsilon_{\infty} - \frac{2}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\varphi \varepsilon''_{measured}(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi - [c_n F_n^l(f) + \tilde{\sigma} (F_0^l(f) + F_0^h(f)) + d_n F_n^h(f)] \quad (1.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f > f_{high} : \quad & \varepsilon_{\infty} + b_1 f^{-2} + b_2 f^{-4} + \dots + b_n f^{-2n} = \\
& = \varepsilon_{\infty} - \frac{2}{\pi} P.V. \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\varphi \varepsilon''_{measured}(\varphi)}{\varphi^2 - f^2} d\varphi - [c_n F_n^l(f) + \tilde{\sigma} (F_0^l(f) + F_0^h(f)) + d_n F_n^h(f)] \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Функции F_n^l , F_n^h соответствуют интегралам от степенных функций по нижним/верхним частотам:

$$F_n^l(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{f_{low}} \frac{\varphi^{2n}}{\varphi^2 - f^2} d\varphi; \quad F_n^h(f) = \frac{2}{\pi} \int_{f_{high}}^{\infty} \frac{\varphi^{-2n}}{\varphi^2 - f^2} d\varphi \quad (1.14)$$

Эти функции могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}
F_n^l(f) &= \frac{1}{2n-1} f_{low}^{2n-1} + f^2 F_{n-1}^l(f); n = 1, 2, \dots \quad F_0^l(f) = \frac{1}{\pi f} \ln \left| \frac{f - f_{low}}{f + f_{low}} \right| \\
F_n^h(f) &= \frac{1}{f^2} \left(F_{n-1}^h(f) - \frac{1}{(2n-1) f_{high}^{2n-1}} \right); n = 1, 2, \dots \quad F_0^h(f) = \frac{1}{\pi f} \ln \left| \frac{f_{high} + f}{f_{high} - f} \right| \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Система уравнений включает неизвестные параметры линейно, что дает нам систему линейных функциональных уравнений. Для численного определения параметров система функциональных уравнений сводится к переопределенной системе линейных уравнений методом коллокации. Таким образом, мы берем несколько точек коллокации за пределами измеряемого интервала, в которых требуем выполнения равенств. Мы ограничиваем суммы двумя слагаемыми для низких частот и тремя слагаемыми для высоких частот (не учитывая слагаемые с $\tilde{\sigma}$ и ε_{∞}). В результате получается $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12$ параметров. Численное моделирование показало, что большее число параметров может привести к неправильной экстраполяции. Для ситуации с 12 параметрами численный эксперимент показал, что система (1.10)–(1.13) лучше всего обусловлена,

когда вне известного интервала берется 20 точек: 10 для низкочастотного диапазона, от $0.1f_{low}$ до $f_{low} - \Delta f$ и 10 точек для высокочастотного диапазона, в пределах $f_{high} + 2\Delta f \dots 1.2f_{high}$, где Δf – средний шаг между известными точками. В результате получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая состоит из 20 уравнений с 12 неизвестными. Эта система решается в смысле наименьших квадратов с помощью SVD. Найденные параметры используются в аппроксимации хвостов. Проиллюстрируем вышесказанное численными результатами, описав диэлектрик полюсной моделью с $\varepsilon_{\infty} = 2$, проводимостью $\tilde{\sigma} = 0.05$, и двумя парами полюсов Лоренца с параметрами $r_1 = -0.5i/2\pi$, $s_1 = (-0.2 + 3i)/2\pi$ и $r_2 = -0.1i/2\pi$, $s_2 = (-0.1 + 2i)/2\pi$

$$\varepsilon(f) = 2 + \frac{r_1}{if - s_1} + \frac{r_1^*}{if - s_1^*} + \frac{r_2}{if - s_2} + \frac{r_2^*}{if - s_2^*} - i \frac{\tilde{\sigma}}{f} \quad (1.16)$$

Эта дисперсионная зависимость «измеряется» в 200-х нерегулярно расположенных точках в интервале частот от 0.2 до 0.595, к расчетным данным добавим случайный шум с равномерным распределением по амплитудам в диапазоне $\pm 1\%$ от максимума соответствующей кривой. Результаты приведены на рис. 1.3.

Результаты расчета интегралов КК по сплайн-интерполированным измеренным данным в пределах частотного диапазона измерений (интеграл от измеренных данных в) приведены на рис. 1.4. Из графика видно, что КК интегралы зашумлены в среднем диапазоне частот и ведут себя довольно гладко вне этого диапазона. Это связано с особенностью в ядре интеграла КК – если точка находится внутри зашумленного диапазона, шум в окрестности этой точки будет существенно влиять на результат интегрирования, но если точка находится вне интервала интегрирования, тогда интегрирование усредняет шумы и результатом является гладкая кривая.

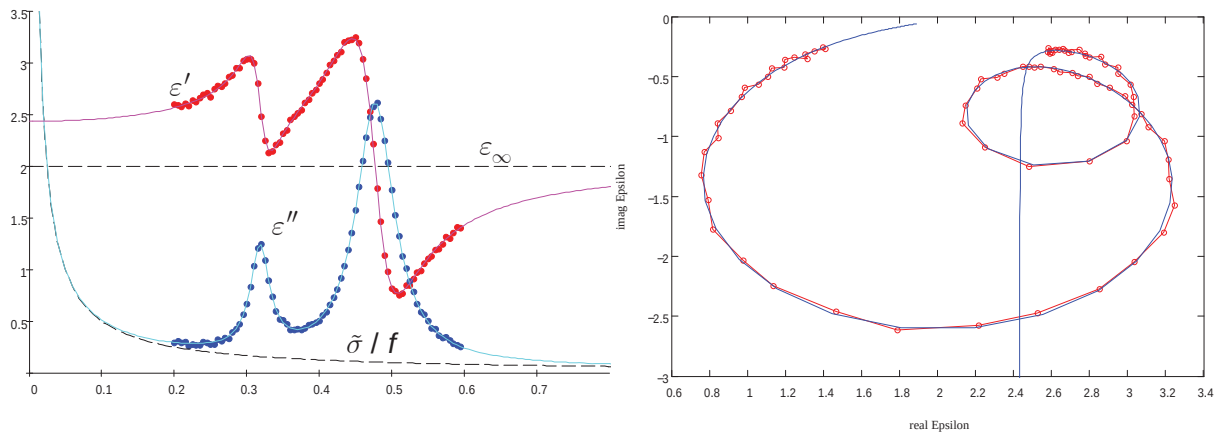


Рис. 1.3. Моделирование исходной диэлектрической проницаемости (сплошная линия – модель, точки – симуляция данных, измеренных на нерегулярной сетке частот и с добавлением шума)

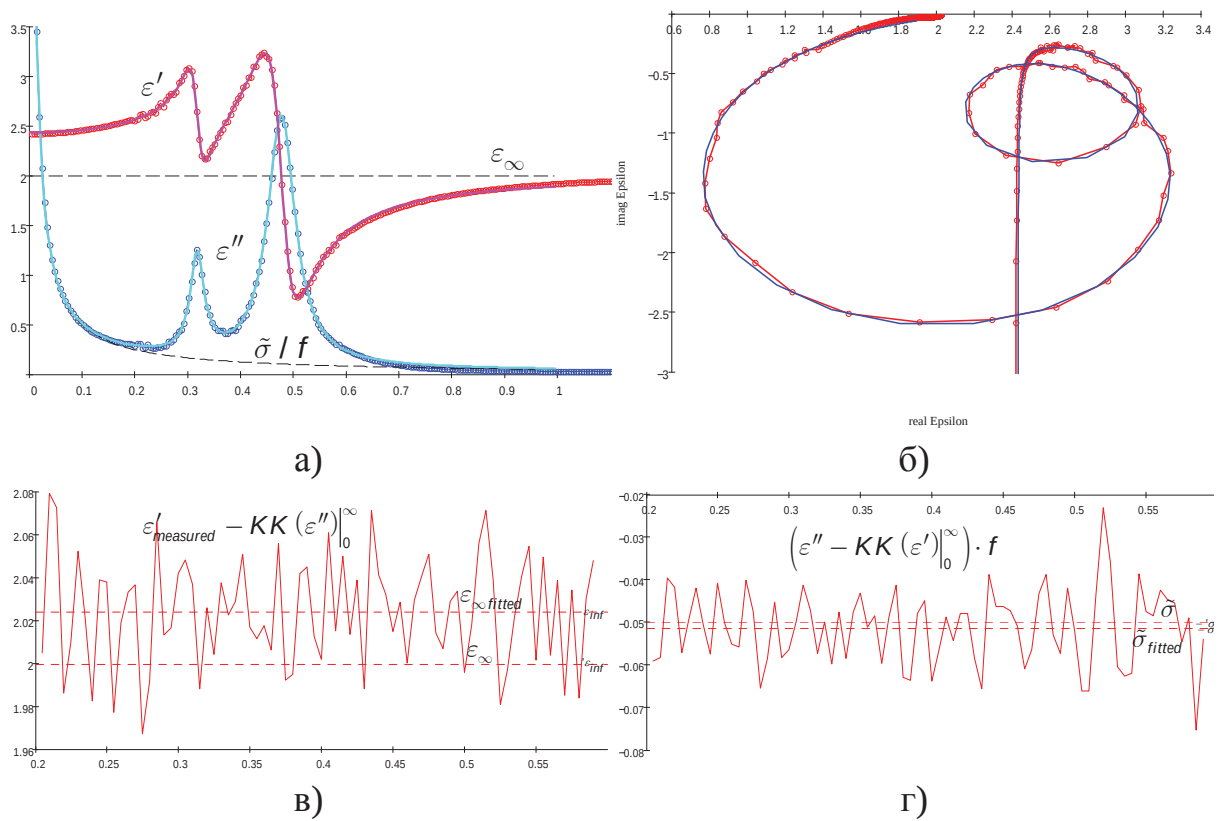


Рис. 1.4. Результат экстраполяции данных с применением соотношений Крамерса-Кронига. а) частотная зависимость действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости, б) те же данные в виде диаграммы Cole-Cole (сплошная линия – исходная модель, точки – экстраполированная дисперсионная зависимость включая симуляцию измеренных данных). На нижних графиках приведены ошибки восстановления статической части диэлектрической проницаемости (в) и проводимости (г).

Решение системы (1.10)–(1.13) на выбранных точках коллокации с помощью SVD дает следующие аппроксимированные значения $\varepsilon_{\infty fitted} = 2.024$, $\tilde{\sigma}_{fitted} = 0.0509$ (точные значения были определены как $\varepsilon_{\infty} = 2$, $\tilde{\sigma} = 0.05$). Результат экстраполяции представлен на рис. 1.4(а-б). Полученные данные аппроксимируют «хвосты» не точно, но достаточно хорошо, учитывая присутствующий шум. Теперь, когда имеется аппроксимация для ε' и ε'' во всем частотном диапазоне мы можем применить соотношения КК в форме (1.9). Параметр ε_{∞} находится как разность $\varepsilon' - KK(\varepsilon'')|_0^{\infty}$. Соответствующий график представлен на рис. 1.4 в. По этим результатам можно не только определить ε_{∞} как среднеквадратичное значение, но и оценить зашумленность данных и ошибку оценки ε_{∞} , как стандартное отклонение по измеренному диапазону значений. Здесь же можно исключить ε_{∞} из параметров подгонки: если $|\varepsilon_{\infty} - 1|$ существенно меньше полученной оценки стандартного отклонения, то можно полагать $\varepsilon_{\infty} = 1$ и подгонять данные снова, исключив ε_{∞} из системы (1.10)–(1.13). Аналогичную проверку можно выполнить и по параметру «проводимости» $\tilde{\sigma}$, используя второе соотношение КК. Результат для $(\varepsilon'' - KK(\varepsilon')|_0^{\infty}) \cdot f$ представлен на рис. 1.4 г. Если окажется, что $\tilde{\sigma}$ меньше вычисленного стандартного отклонения, то можно положить $\tilde{\sigma} = 0$ и повторить решение системы (1.10)–(1.13) с нулевым $\tilde{\sigma}$.

Преобразование Фурье. После экстраполяции «хвостов» и получения оценки параметров $\tilde{\sigma}$ и ε_{∞} можно использовать соотношение (1.9) для пересчета аппроксимируемой зависимости на равномерной сетке частот, что необходимо для дальнейшего применения преобразования Фурье. Функция диэлектрической проницаемости была дискретизирована в полосе частот от 0 до $4 \cdot f_{high}$ с равномерным шагом, близким к среднему шагу исходных данных, и обеспечивающему общее количество точек, кратное 8 (что необходимо для применения эффективного алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT)).

Подготовленный таким образом временной ряд передается для дальнейшей обработки методом РоМ.

Метод пучка матриц (РоМ). Метод пучка матриц (Pencil of Matrix, РоМ) является передовым методом анализа временных рядов, он служит для построения модели дискретного сигнала в виде суммы затухающих гармонических функций:

$$y_j = y(j\Delta t) = \sum_{i=1}^M A_i \exp(s_i j \Delta t) = \sum_{i=1}^M A_i z_i^j, \quad z_i = \exp(s_i j \Delta t). \quad (1.17)$$

Здесь Δt – временной шаг выборки. Необходимо отметить, что комплексные экспоненты во временной области соответствуют комплексным полюсам (1.2) в частотной области. Математическое описание метода можно найти в [318, 319], модификация метода, изложенная в [319], позволяет значительно ускорить вычисления. Дополнительными особенностями метода РоМ являются определенная устойчивость к шумам и возможность оценить требуемое количество полюсов (слагаемых в модели) без какой-либо априорной информации.

Дробно-рациональная функция и простейшие дроби. Полюсная модель (1.2) представляет собой сумму элементарных дробей. Эквивалентное представление этой модели – дробно-рациональная функция, то есть, отношение двух полиномов:

$$\varepsilon(f) = \varepsilon_\infty + \sum_k \frac{r_k}{if - s_k} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k (if)^k}{\sum_{k=0}^M b_k (if)^k} \quad (1.18)$$

Здесь параметры модели – действительнзначные коэффициенты полиномов a_k и b_k . Без нарушения общности можно считать $b_M = 1$, тогда $a_M = \varepsilon_\infty$. Параметры s_k могут быть найдены как корни знаменателя, вычеты r_k и коэффициенты числителя связаны более сложным соотношением. Можно использовать оба представления, переходя от одного к другому по достаточно простому вычислительному алгоритму, когда это необходимо. Мы используем дробно-рациональную функцию в качестве промежуточного представления модели для оптимизации, потому что производные по параметрам a_k, b_k ведут себя гораздо

лучше, чем производные по параметрам s_k . Благодаря этому процедура оптимизации (ЛМ) имеет меньше шансов сделать большой скачок из-за присутствия сингулярности в Гессиане функции невязки, определенному для параметров s_k .

SVD для подгонки линейных параметров. Метод РоМ позволяет оценить не только комплексные частоты s_k , но и вычеты r_k , но на получаемую оценку для их амплитуд влияют ошибки, внесенные при экстраполяции измеренных данных и вычислении FFT. Поэтому вычеты значительно лучше вычислять непосредственно в частотной области, используя исходные данные. Это так же обусловлено простотой и однозначностью задачи, поскольку r_k – линейные параметры. Эту линейную часть задачи удобнее решать для представления в форме (1.18), решается система N линейных уравнений с неизвестными a_k ($N > M$):

$$\frac{\sum_{k=0}^M a_k (if_j)^k}{\sum_{k=0}^M b_k (if_j)^k} = \varepsilon_j = \varepsilon(f_j), \quad j = 0 \dots N-1 \quad (1.19)$$

Знаменатель известен (b_k рассчитываются как коэффициенты полинома, корни которого s_k оценены на предыдущем этапе методом РоМ). Обе стороны умножаются на знаменатель, а затем слева разделяются реальная и мнимая части (первая содержит только четные степени одночленов, в то время как вторая содержит только нечетные степени коэффициентов). Приравнявая отдельно действительную и мнимую части, получаем систему $2N$ действительных линейных уравнений, решаемых методом SVD в смысле наименьших квадратов [312, р. 676].

В результате мы получаем рациональную функцию, которая соответствует исходным данным и может служить хорошим начальным приближением для дальнейшего применения ЛМ, варьирующего не только линейные параметры r_k , но и нелинейные параметры s_k для достижения наилучшего результата.

Нелинейная аппроксимация методом наименьших квадратов с использованием алгоритма Левенберга-Марквардта. Алгоритм ЛМ подробно

изложен в [312, Глава 15.5]. В рассматриваемом случае алгоритм должен быть модифицирован с учетом комплексности аппроксимирующей функции. В исходном варианте ЛМ используется для минимизации квадратичной невязки:

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_j (y_j - Y(x_j; \mathbf{p}))^2, \quad \mathbf{p} = \{p_k\} - \text{model parameters} \quad (1.20)$$

Когда данные являются комплексными, мы используем сумму квадратов модулей отклонений:

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_j |y_j - Y(x_j; \mathbf{p})|^2 = \sum_j (y_j - Y(x_j; \mathbf{p})) \cdot (y_j - Y(x_j; \mathbf{p}))^* \quad (1.21)$$

При этом производные от χ^2 по параметрам могут быть найдены как (ср. с [312, eq. (15.5.6)]):

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial p_k} = - \sum_j \left((y_j - Y(x_j; \mathbf{p})) \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})^*}{\partial p_k} + (y_j - Y(x_j; \mathbf{p}))^* \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_k} \right) \quad (1.22)$$

И, наконец, Гессиян может быть аппроксимирован как (ср. с [312, eq. (15.5.7)]):

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_k \partial p_l} = \sum_j \left(\frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_k} \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})^*}{\partial p_l} + \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})^*}{\partial p_k} \frac{\partial Y(x_j; \mathbf{p})}{\partial p_l} \right) \quad (1.23)$$

Как уже отмечалось выше, применять ЛМ удобнее к модели в форме (1.18). В ЛМ варьируются как линейные a_k , так и нелинейные b_k параметры модели. После подгонки параметров осуществляется переход от представления (1.18) к исходной полюсной модели (1.2). В результате исходные параметры модели были восстановлены с высокой точностью, соответствующей уровню шума.

Выводы к разделу 1

В разделе рассмотрена история развития и текущее состояние нестационарной электродинамики, теории и техники использования СШП и импульсных сигналов. Рассмотрены модовые методы анализа полей в волноводах. Выявлено и сформулировано основное **противоречие**: хотя моды пустого волновода могут быть перенесены во временную область и соответствующие аналитические методы во временной области получили надлежащее развитие, но при рассмотрении поперечно-неоднородных структур моды, вводимые в частотной области, оказываются частотно-зависимыми, и следовательно не могут быть напрямую перенесены во временную область. Таким образом **проблемой**, которая решается в диссертации является перенос понятий и методов, разработанных в частотной области для поперечно-неоднородных структур, во временную область и применение такого подхода к различным геометриям волноводов, которые включают закрытые цилиндрические и конические волноводы, а также открытые диэлектрические волноводы и импульсные пучки в свободном пространстве.

Кроме того, описан алгоритм построения полюсной модели диэлектрической проницаемости материала по результатам измерения показателя преломления и показателя поглощения. Основным методом подгонки модели является модифицированный для применения к комплексным величинам метод наименьших квадратов на основе алгоритма Левенберга-Марквардта. Его основной недостаток – для адекватной аппроксимации требуется хороший набор начальных значений для искомых параметров. Именно получению начального приближения и посвящена большая часть статьи. В частности, на основе использования соотношения Крамерса-Кронига продемонстрирована экстраполяция дисперсионной зависимости вне диапазона измерения. Этот этап проиллюстрирован численно, для приведенного примера получена достаточно хорошая экстраполяция «хвостов», и получены весьма точные начальные оценки значений параметров. Так для использованного в примере шума в 1% статическая диэлектрическая проницаемость и проводимость также были восстановлены с относительной ошибкой около 1%.

РАЗДЕЛ 2

МЕТОД МОДОВОГО БАЗИСА В ЗАКРЫТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Раздел посвящен получению системы эволюционных уравнений, описывающих возбуждение и распространение нестационарных электромагнитных волн в неоднородном волноводе с факторизованной зависимостью материальных параметров среды от поперечных координат и от продольной и временной координаты и с многосвязной областью поперечного сечения. Исходная система уравнений Максвелла сводится к системе матричных уравнений относительно четырехмерных поперечных векторов электромагнитного поля. После доказательства симметричности полученных матричных операторов, находятся их собственные числа и собственные функции, образующие базис в пространстве решений. Поля раскладываются по этому базису, из исходных уравнений Максвелла получаются уравнения для коэффициентов разложения – модовых амплитуд. Для верификации полученной системы уравнений она применена для расчёта распространения импульсных волн в плоскопараллельном волноводе с продольным диэлектрическим слоем, результаты моделирования разработанным методом сравнивались с результатами расчёта методом FDTD. Проанализирована сходимость модовых разложений, обсуждаются преимущества предложенного подхода по сравнению с методами частотной и временной области. Рассмотрен модовый анализ дисперсионных характеристик круглого волновода с диэлектрическим стержнем. Показан пример применения метода к более сложным реалистичным задачам анализа распространения импульса в экранированной микрополосковой линии.

Основные результаты, относящиеся к данному разделу, изложены в статьях [10, 11, 27, 28] и докладывались на конференциях [40, 42, 44, 47, 48, 49].

2.1. Введение

Все разнообразие электромагнитных явлений описывается уравнениями Максвелла, дополненными материальными уравнениями. Существует несколько

ко методов решения этих уравнений.

С начала XX века, благодаря работам Хэвисайда и других ученых, научились решать достаточно сложные задачи излучения, распространения и рассеяния электромагнитных волн, используя метод комплексных амплитуд (МКА). Этот метод заключается в том, что искомое поле раскладывается по базису собственных функций оператора дифференцирования по времени $\partial / \partial t$, входящего в уравнения Максвелла. Эти собственные функции суть $e^{i\omega t}$ и соответствующее разложение по этому базису представляет собой преобразование Фурье. В результате такого разложения из уравнений Максвелла исключается зависимость от времени, и получается система уравнений для коэффициентов разложения — так называемых комплексных амплитуд поля, которая включает в себя операторы пространственного дифференцирования и граничные условия для комплексных амплитуд на границах раздела сред и на бесконечности.

Применяя преобразование Фурье к уравнениям Максвелла, мы должны применить их и к материальным уравнениям. При этом на вид материальных уравнений накладываются определенные ограничения. Обязательным условием для применимости метода комплексных амплитуд является линейность и стационарность среды. Правда, в рамках МКА удастся достаточно просто учесть дисперсию среды.

Итак, при использовании МКА мы приходим к граничной задаче для заданной частоты, являющейся параметром задачи. Для неоднородных волноводов это будет двумерная граничная задача на собственные значения, которая будет включать параметры диэлектрика и частоту. Результатом решения этой задачи для каждой фиксированной частоты будет набор волноводных мод и соответствующих им постоянных распространения. Для каждой частоты граничную задачу нужно решать отдельно. Рассчитать распространение импульсного сигнала с помощью обратного преобразования Фурье таким методом очень сложно.

Альтернативой МКА является предложенный О.А. Третьяковым метод модового базиса (метод эволюционных волноводных уравнений, эволюционный подход к электродинамике), основанный на выделении из уравнений Максвелла самосопряженного оператора дифференцирования по поперечным координатам

[284]. В предыдущих работах автора [355] метод модового базиса был доработан, путём включения в операторы поперечного дифференцирования функций неоднородности распределения материальных параметров в сечении волновода. Было введено специальным образом функциональное пространство, в котором была доказана самосопряжённость введённых операторов. Это позволило строить частотно-независимый базис для волноводов с поперечно-неоднородным распределением диэлектрика в поперечном сечении. Однако рассмотрение в [355] было проведено только для простейшего случая закрытого волновода с односвязной областью поперечного сечения. В этом разделе для полноты будут повторены основные этапы построения метода из [355], однако рассмотрение будет вестись для волновода с произвольной многосвязной областью поперечного сечения, что позволяет рассматривать наиболее часто используемые для передачи СШП сигналов классы квази-ТЕМ линий, такие как, например, микрополосковые или щелевые линии. Кроме того, в работе [355] верификация метода была проведена только сравнением рассчитываемых ММБ дисперсионных кривых с дисперсионными кривыми, получаемыми в ЧО. Здесь же мы построим численную схему решения связанных эволюционных уравнений на основе конечных разностей, проведём расчёт распространения импульсной волны в плоскопараллельном волноводе, результаты расчёта сравним с полноволновым расчётом обычным (в данном случае двумерным) методом FDTD. Сравнение непосредственно временных зависимостей полей позволило ещё раз подтвердить достоверность метода, и, помимо прочего, позволило исследовать скорость сходимости модовых разложений. Так как эволюционные уравнения оказались связанными, то распространение импульсной волны описывается только суперпозицией ряда по всем модам, однако численный эксперимент показал, что для сигнала с ограниченным спектром учёт в расчёте высших мод даёт экспоненциально малый вклад, что подтверждает спектральную точность метода в рассматриваемом случае. Это означает, что для анализа распространения в конкретных структурах импульсных сигналов с ограниченной спектральной полосой достаточно учитывать лишь конечное количество связанных мод для получения высокой точности (с экспоненциально малой ошибкой).

2.2. Получение задачи на модовый базис и системы эволюционных волноводных уравнений

Постановка задачи.

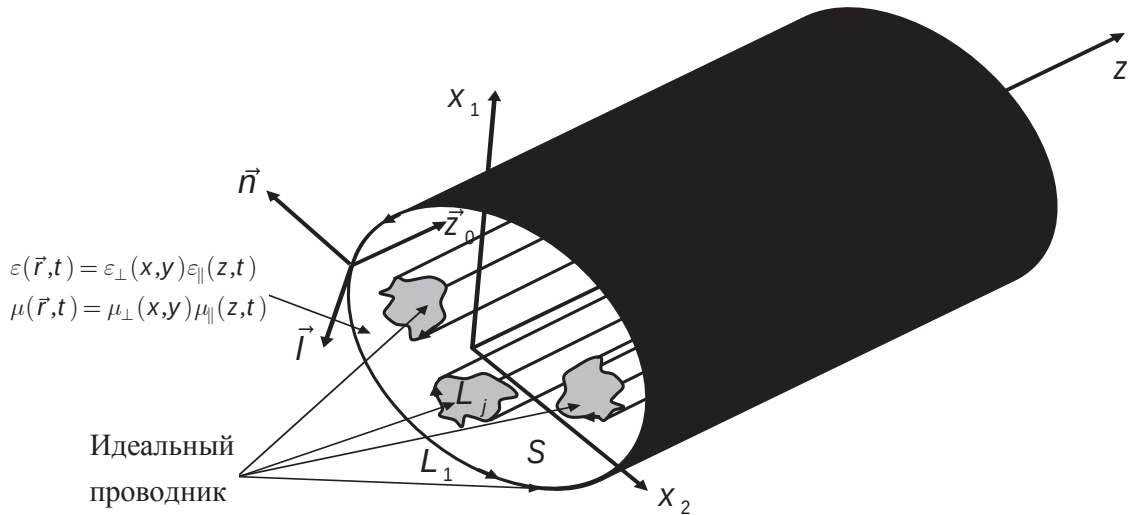


Рис. 2.1. Постановка задачи: регулярный закрытый волновод с многосвязной областью поперечного сечения, ограниченной контурами L_j , отделяющими область распространения волн от области, заполненной идеальным проводником.

Рассмотрим цилиндрическую линию передачи с произвольной многосвязной областью поперечного сечения (удовлетворяющей стандартным требованиям к границе, необходимым для разрешимости эллиптической граничной задачи на такой области), ограниченной идеально проводящими стенками, с неоднородным и нестационарным магнитоэлектрическим заполнением (рис. 2.1). Рассматриваются только геометрически регулярные вдоль продольной оси Oz линии, т.е. область сечения волновода не изменяется вдоль Z . Электромагнитные поля в рассматриваемой структуре описываются системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathcal{H}} &= \partial_t \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{J}}_{\sigma} + \vec{\mathcal{J}}_0, & \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} &= \rho_{\sigma} + \rho_0, \\ -\nabla \times \vec{\mathcal{E}} &= \partial_t \vec{\mathcal{B}}, & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Через $\vec{\mathcal{J}}_{\sigma}$ и $\vec{\mathcal{J}}_0$ здесь обозначены плотности токов проводимости и сторонних токов соответственно, а через ρ_{σ} и ρ_0 соответственно обозначены плотности зарядов проводимости и сторонних зарядов. Система уравнений Максвелла в

виде (2.1) должна быть дополнена материальными уравнениями, которые устанавливают связь между измеряемыми силовыми полями E, B и вспомогательными полями D, H . Мы будем в дальнейшем использовать материальные уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{\mathcal{E}}) &= \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}(\vec{\mathcal{E}}) = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}), \\ \vec{B}(\vec{\mathcal{H}}) &= \mu_0 (\vec{\mathcal{H}} + \vec{M}(\vec{\mathcal{H}})) = \mu_0 \mu \vec{\mathcal{H}} + \mu_0 \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}), \\ \vec{P}(\vec{\mathcal{E}}) &= \varepsilon_0 \alpha \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}), \quad \varepsilon = 1 + \alpha, \\ \vec{M}(\vec{\mathcal{H}}) &= \chi \vec{\mathcal{H}} + \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}}), \quad \mu = 1 + \chi.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь ε_0 и μ_0 соответственно электрическая и магнитная постоянные. В материальных уравнениях (2.2) явно выделены линейные части диэлектрической и магнитной проницаемостей заполняющей среды, причём, мы требуем, чтобы они могли быть представлены в следующем факторизованном виде как произведение функции поперечных координат на функцию продольной координаты и времени:

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \varepsilon_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) \varepsilon_{\parallel}(z, t), \quad \mu(\vec{r}, t) = \mu_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) \mu_{\parallel}(z, t).\tag{2.3}$$

Где под $\vec{r}_{\perp} = \{x, y\}$ понимаются поперечные координаты. Значки $\perp, \parallel$ связаны с зависимостью от поперечных или продольной координаты, не следует путать их с иногда используемыми аналогичными обозначениями для компонент тензора в случае анизотропной среды. Дополнительно потребуем строгой положительности множителей, соответствующих поперечной части зависимости $\varepsilon_{\perp} > 0, \mu_{\perp} > 0$ — это необходимо, чтобы можно было использовать эти функции в качестве весовых при определении скалярного произведения в функциональном пространстве. Нефакторизуемая неоднородность среды, т.е. неоднородность, которая не может быть описана с помощью соотношений (2.3), а также нелинейность, учитываются в виде индуцированных токов, зависящих от полного поля (в (2.2) это вектора поляризации и намагниченности со штрихами $\vec{P}'(\vec{\mathcal{E}}), \vec{M}'(\vec{\mathcal{H}})$).

Подставив материальные уравнения (2.2) с учетом соотношений (2.3) в уравнения (2.1) получаем систему уравнений Максвелла в следующем виде:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{\mathcal{E}}) + \vec{\mathcal{J}}, \quad (2.4)$$

$$-\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\hat{\mathcal{J}}}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{\mathcal{E}}) = \rho, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{\mathcal{H}}) = \hat{\rho}. \quad (2.7)$$

Здесь $\vec{\mathcal{J}}$ и $\vec{\hat{\mathcal{J}}}$ обозначают плотности полных токов, соответственно электрического и магнитного, а ρ и $\hat{\rho}$ обозначают плотности, соответственно электрических и магнитных, полных зарядов. Введенные полные токи и заряды определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}} &= \partial_t \vec{\mathcal{P}}'(\vec{\mathcal{E}}) + \vec{\mathcal{J}}_{\sigma} + \vec{\mathcal{J}}_0, & \vec{\hat{\mathcal{J}}} &= \mu_0 \partial_t \vec{\mathcal{M}}'(\vec{\mathcal{H}}), \\ \rho &= \rho_{\sigma} + \rho_0 - \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}'(\vec{\mathcal{E}}), & \hat{\rho} &= -\mu_0 \nabla \cdot \vec{\mathcal{M}}'(\vec{\mathcal{H}}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Все токи и заряды удовлетворяют соответствующим уравнениям непрерывности:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} + \partial_t \rho = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\hat{\mathcal{J}}} + \partial_t \hat{\rho} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\sigma} + \partial_t \rho_{\sigma} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}_0 + \partial_t \rho_0 = 0.$$

Граничные условия на идеально проводящих стеках линии имеют вид:

$$\vec{l} \cdot \vec{\mathcal{E}}|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}|_L = 0, \quad \vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}|_L = 0. \quad (2.9)$$

Где $L = \bigcup_{j=1}^N L_j$ – многосвязный контур в поперечном сечении линии S ; $\vec{l}$ – касательный орт к контуру L ; $\vec{n}$ – нормаль к контуру L ; $\vec{z}_0$ – орт продольной оси структуры Oz (см. рис. 2.1).

Нормально-тангенциальная форма уравнений Максвелла.

При дальнейшем рассмотрении будем использовать разложение любого трехмерного вектора, в том числе и символьного оператора ∇ , на двухмерную поперечную составляющую, лежащую в поперечном сечении структуры S , и

одномерную продольную составляющую вдоль оси структуры Oz . Для этого вводятся следующие обозначения:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{z}_0 E_z, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H} + \vec{z}_0 H_z, \quad \dots \quad \nabla = \nabla_{\perp} + \vec{z}_0 \partial_z. \quad (2.10)$$

Используя обычные правила векторного анализа и разложения (2.10) легко устанавливается, что для произвольного вектора $\vec{\mathcal{A}} = \vec{A} + \vec{z}_0 A_z$ дивергенция этого вектора в нормально-тангенциальной форме равна:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} = \nabla_{\perp} \cdot \vec{A} + \partial_z A_z. \quad (2.11)$$

Аналогично получаем формулу для ротора вектора $\vec{\mathcal{A}}$:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{A}} = [\nabla_{\perp} \times \vec{A}] + [\nabla_{\perp} A_z \times \vec{z}_0] + [\vec{z}_0 \times \partial_z \vec{A}]. \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что проекция $\nabla \times \vec{\mathcal{A}}$ на поперечное сечение S равна $(\nabla \times \vec{\mathcal{A}})_{\perp} = [\nabla_{\perp} A_z \times \vec{z}_0] + [\vec{z}_0 \times \partial_z \vec{A}]$, а проекция на ось z равна $(\nabla \times \vec{\mathcal{A}})_{\parallel} = \vec{z}_0 \cdot [\nabla_{\perp} \times \vec{A}]$.

Воспользовавшись формулой (2.11), запишем дивергентное уравнение (2.6) в нормально-тангенциальной форме:

$$\partial_z (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} E_z) = -\nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{E}) + \varepsilon_0^{-1} \rho. \quad (2.13)$$

Аналогично переписывается второе дивергентное уравнение (2.7):

$$\partial_z (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} H_z) = -\nabla_{\perp} \cdot (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{H}) + \mu_0^{-1} \hat{\rho}. \quad (2.14)$$

По формуле (2.12) находим проекции роторных уравнений (2.4)-(2.5) на ось z :

$$\partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} E_z) = -[\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} - J_z, \quad (2.15)$$

$$\partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} H_z) = [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{E} - \hat{J}_z. \quad (2.16)$$

Согласно формуле (2.12) проекции роторных уравнений (2.4)-(2.5) на поперечное сечение S равны:

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] H_z + \partial_z [\vec{z}_0 \times \vec{H}] = \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{E}) + \vec{J}, \quad (2.17)$$

$$[\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] E_z + \partial_z [\vec{z}_0 \times \vec{E}] = -\partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{H}) - \vec{\hat{J}}. \quad (2.18)$$

Исключая из уравнения (2.17) продольную компоненту напряженности магнитного поля H_z используя сначала только уравнение (2.14), а затем только (2.16) получаем следующие два уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} [\vec{z}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H} = \mu_{\parallel}^{-1} \partial_z \mu_{\parallel} \{ \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \vec{E}) + \partial_z \varepsilon_{\perp}^{-1} [\vec{H} \times \vec{z}_0] \} + \\ + \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \{ \partial_z \mu_{\parallel} \vec{J} + [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \mu_0^{-1} \hat{\rho}] \}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E} = -\partial_t \mu_{\parallel} \{ \mu_0 \partial_z \vec{H} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \vec{E}]) \} - \\ - \{ \mu_0 \partial_t \mu_{\parallel} [\vec{z}_0 \times \vec{J}] + \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \hat{J}_z \}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Исключив из уравнения (2.18) продольную компоненту напряженности электрического поля E_z используя сначала только уравнение (2.13), а затем только (2.15) получаем еще два уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E} = \varepsilon_{\parallel}^{-1} \partial_z \varepsilon_{\parallel} \{ \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \vec{H}) + \partial_z \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] \} + \\ + \mu_{\perp}^{-1} \varepsilon_{\parallel}^{-1} \{ \partial_z \varepsilon_{\parallel} \vec{J} + [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1} \rho \times \vec{z}_0] \}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} = -\partial_t \varepsilon_{\parallel} \{ \varepsilon_0 \partial_z \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{z}_0]) \} - \\ - \{ \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} J_z + \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon_{\parallel} [\vec{J} \times \vec{z}_0] \}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из первых двух уравнений в (2.9) получаются следующие два уравнения для поперечных компонент векторов поля на границе структуры:

$$\vec{l} \cdot \vec{E} \Big|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} \Big|_L = 0. \quad (2.23)$$

Последнее уравнение в (2.9) приводит еще к двум условиям на границе:

$$\nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_{\perp} \vec{E}) \Big|_L = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{z}_0] \Big|_L = 0. \quad (2.24)$$

Первое условие в (2.24) получено из уравнения (2.13) в предположении, что $\rho \Big|_L = 0$. Второе условие в (2.24) получено из уравнения (2.15) в предположении, что $J_z \Big|_L = 0$. То есть мы требуем, чтобы на поверхности идеального проводника плотность **стороннего** электрического заряда и продольная компонента плотности **стороннего** электрического тока равнялись нулю. Это необходимо для однородности граничных условий, чтобы можно было использовать их в

определении функционального пространства, что необходимо в дальнейшем для доказательства самосопряжённости вводимых ниже операторов.

Выделение линейных операторов для постановки граничных задач.

Источники, находящиеся в правых частях уравнений (2.19)-(2.22), в общем случае возбуждают поперечные компоненты как электрического, так и магнитного полей. Что касается продольных компонент поля, то источники в (2.19)-(2.20) возбуждают только продольную компоненту магнитного поля, а источники, стоящие в уравнениях (2.21)-(2.22), напротив, возбуждают только продольную компоненту электрического поля. Это обстоятельство, а также тот факт, что уравнения (2.21)-(2.22) могут быть получены из уравнений (2.19)-(2.20) заменой $\vec{E} \rightleftharpoons -\vec{H}$, $\rho \rightleftharpoons \hat{\rho}$, $\vec{J} \rightleftharpoons \hat{\vec{J}}$, $J_z \rightleftharpoons \hat{J}_z$, $\varepsilon_{\parallel} \rightleftharpoons \mu_{\parallel}$, $\varepsilon_{\perp} \rightleftharpoons \mu_{\perp}$ и $\varepsilon_0 \rightleftharpoons -\mu_0$ пока что лишь интуитивно наводят на мысль, что уравнения (2.19)-(2.20) вместе описывают поперечные компоненты H -волн, а уравнения (2.21)-(2.22) описывают поперечные компоненты E -волн. В дальнейшем это будет обосновано более строго. Для удобства объединим уравнения (2.19)-(2.20) в одно матричное уравнение:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_H X = & \\ = & \begin{pmatrix} \mu_{\parallel}^{-1} \partial_z \mu_{\parallel} \left\{ \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \vec{E}) + \partial_z \varepsilon_{\perp}^{-1} [\vec{H} \times \vec{z}_0] \right\} + \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \left\{ \partial_z \mu_{\parallel} \vec{J} + [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \mu_0^{-1} \hat{\rho}] \right\} \\ - \partial_t \mu_{\parallel} \left\{ \mu_0 \partial_z \vec{H} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \vec{E}]) \right\} - \left\{ \mu_0 \partial_t \mu_{\parallel} [\vec{z}_0 \times \vec{J}] + \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \hat{J}_z \right\} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Уравнения (2.21)-(2.22) аналогично дадут:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_E X = & \\ = & \begin{pmatrix} -\partial_t \varepsilon_{\parallel} \left\{ \varepsilon_0 \partial_z \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{z}_0]) \right\} - \left\{ \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} J_z + \varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} [\vec{J} \times \vec{z}_0]) \right\} \\ \varepsilon_{\parallel}^{-1} \partial_z \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \vec{H}) + \partial_z \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] \right\} + \mu_{\perp}^{-1} \varepsilon_{\parallel}^{-1} \left\{ \partial_z \varepsilon_{\parallel} \vec{J} + [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1} \rho \times \vec{z}_0] \right\} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для краткой записи левых частей уравнений (2.19)-(2.22) в (2.25)-(2.26) введен четырехмерный вектор $X = \text{col}(\vec{E}, \vec{H})$, составленный из поперечных компонент электрического и магнитного полей, и два линейных матричных дифференциальных оператора $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$, действующие по обычным правилам матричной алгебры и векторного анализа:

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_H X &= \begin{pmatrix} 0 & [\vec{z}_0 \times \varepsilon_\perp^{-1} \nabla_\perp \mu_\perp^{-1}] \nabla_\perp \cdot \mu_\perp \\ \nabla_\perp \mu_\perp^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp] \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} [\vec{z}_0 \times \varepsilon_\perp^{-1} \nabla_\perp \mu_\perp^{-1}] \nabla_\perp \cdot \mu_\perp \vec{H} \\ \nabla_\perp \mu_\perp^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp] \cdot \vec{E} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_E X &= \begin{pmatrix} 0 & \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} [\nabla_\perp \times \vec{z}_0] \cdot \\ [\mu_\perp^{-1} \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_\perp \cdot \varepsilon_\perp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} [\nabla_\perp \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} \\ [\mu_\perp^{-1} \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_\perp \cdot \varepsilon_\perp \vec{E} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.28)$$

Для корректного определения операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$ введем функциональное гильбертово пространство $L_2^4(S, \gamma)$ четырехмерных вещественных квадратично суммируемых с весом $\gamma = \{\varepsilon_\perp, \mu_\perp\}$ функций $X = \text{col}(\vec{E}, \vec{H})$, таких, что каждая из двумерных компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют граничным условиям (2.23)-(2.24). Скалярное произведение в $L_2^4(S, \gamma)$ определим следующим образом:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{S} \int_S (\varepsilon_\perp \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \mu_\perp \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) dS. \quad (2.29)$$

Из формулы (2.29) видно, что введённое функциональное пространство можно представить в виде декартова произведения двумерных функциональных гильбертовых пространств $L_2^4(S, \gamma) = L_2^2(S, \varepsilon_\perp) \times L_2^2(S, \mu_\perp)$ для «электрических» и «магнитных» векторных функций. При этом в $L_2^2(S, \varepsilon_\perp)$ скалярное произведение будет задаваться выражением:

$$\langle E_1, E_2 \rangle_e = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_\perp \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dS. \quad (2.30)$$

и векторные функции из $L_2^2(S, \varepsilon_\perp)$ должны удовлетворять условиям (2.23), (2.24) для векторов $\vec{E}$.

В $L_2^2(S, \mu_\perp)$ скалярное произведение будет определено как:

$$\langle H_1, H_2 \rangle_h = \frac{1}{S} \int_S \mu_\perp \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dS. \quad (2.31)$$

и соответственно элементы этого пространства должны удовлетворять условиям (2.23), (2.24) для векторов $\vec{H}$.

Теперь корректно определим линейные операторы $\mathbb{W}_H$:

$$\mathbb{W}_H : D(\mathbb{W}_H) \rightarrow L_2^4(S, \gamma); \quad D(\mathbb{W}_H) = \{X \in L_2^4(S, \gamma) : \mathbb{W}_H X \in L_2^4(S, \gamma)\}$$

$$\mathbb{W}_H = \begin{pmatrix} 0 & [\vec{z}_0 \times \varepsilon_\perp^{-1} \nabla_\perp \mu_\perp^{-1}] \nabla_\perp \cdot \mu_\perp \\ \nabla_\perp \mu_\perp^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp] \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

и $\mathbb{W}_E$:

$$\mathbb{W}_E : D(\mathbb{W}_E) \rightarrow L_2^4(S, \gamma); \quad D(\mathbb{W}_E) = \{X \in L_2^4(S, \gamma) : \mathbb{W}_E X \in L_2^4(S, \gamma)\}$$

$$\mathbb{W}_E = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} [\nabla_\perp \times \vec{z}_0] \cdot \\ [\mu_\perp^{-1} \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_\perp \cdot \varepsilon_\perp & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Здесь $D(\mathbb{W})$ обозначает область определения оператора. Мы ограничиваем область определения оператора так, чтобы результат применения оператора снова попадал в рабочее функциональное пространство квадратично интегрируемых функций. При этом результат применения операторов автоматически удовлетворяет граничным условиям, включённым в определение $L_2^4(S, \gamma)$ в силу геометрической структуры операторов.

Заметим, что теперь, когда определены операторы $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$, уравнения (2.19)-(2.22) вместе с граничными условиями (2.23)-(2.24) эквивалентны операторным уравнениям (2.25)-(2.26).

С помощью аналога формулы Грина с весовой функцией f

$$\int_S (\vec{A} \cdot \nabla_\perp f \nabla_\perp \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla_\perp f \nabla_\perp \cdot \vec{A}) dS = \oint_L [(\vec{n} \cdot \vec{A})(\nabla_\perp \cdot \vec{B}) - (\vec{n} \cdot \vec{B})(\nabla_\perp \cdot \vec{A})] f dl$$

можно доказать симметричность операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$. Это означает, что $\forall X_1, X_2 \in D(\mathbb{W}_H)$ и $\forall X_1, X_2 \in D(\mathbb{W}_E)$ выполнены, соответственно, следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{W}_H X_1, X_2 \rangle &= \langle X_1, \mathbb{W}_H X_2 \rangle, \\ \langle \mathbb{W}_E X_1, X_2 \rangle &= \langle X_1, \mathbb{W}_E X_2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.34)$$

Далее обоснуем возможность разложить пространство $L_2^4(S, \gamma)$ в прямую сумму трех ортогональных подпространств $L_2^4(S, \gamma) = L^H \oplus L^E \oplus L^T$ и построим базис в каждом из этих подпространств. Приводимые ниже рассуждения не могут вполне считаться с точки зрения математика полным и строгим доказательством, но обосновывают возможность проведения такого доказательства и иллюстративно показывают справедливость такого разложения и его физического смысла.

Прежде всего, заметим, что $\forall X \in L_2^4(S, \gamma)$ несложно показать, что выполняется:

$$\mathbb{W}_H \mathbb{W}_E X = \mathbb{W}_E \mathbb{W}_H X = \mathbf{0}, \quad (2.35)$$

где $\mathbf{0} = \text{col}(0, 0, 0, 0)$ – нулевой элемент пространства $L_2^4(S, \gamma)$. Из чего следует, что образ одного оператора лежит в ядре другого.

Иллюстрацией приведённых ниже рассуждений служит рис. 2.2.

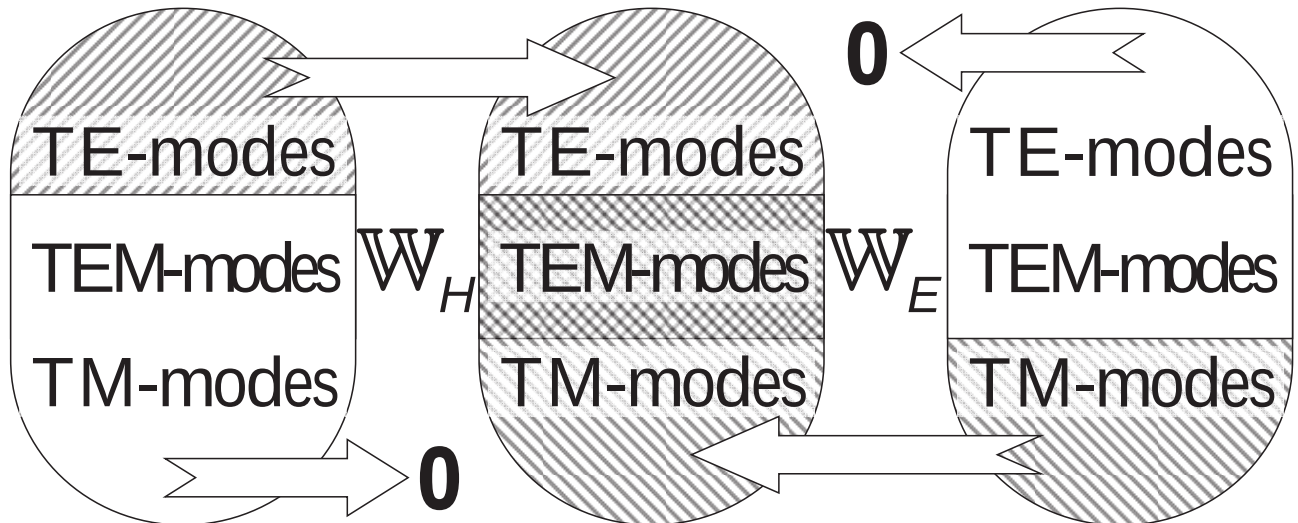


Рис. 2.2. Структура функционального пространства, создаваемая операторами $\mathbb{W}_H, \mathbb{W}_E$.

Итак, пусть $L^H = R(\mathbb{W}_H)$ – область значений оператора $\mathbb{W}_H$. Тогда ортогональным дополнением к линейному подпространству L^H в пространстве

$L_2^4(S, \gamma)$ будет ядро оператора $\mathbb{W}_H$, т.е. $(L^H)^\perp = \text{Ker } \mathbb{W}_H$. Таким образом, получаем разложение $L_2^4(S, \gamma) = L^H \oplus \text{Ker } \mathbb{W}_H$. Аналогично и для оператора $\mathbb{W}_E$. Пусть $L^E = R(\mathbb{W}_E)$ – область значений оператора $\mathbb{W}_E$, тогда получаем $L_2^4(S, \gamma) = L^E \oplus \text{Ker } \mathbb{W}_E$. Причем, как следует из (2.35) $L^H \subset \text{Ker } \mathbb{W}_E$ и $L^E \subset \text{Ker } \mathbb{W}_H$. Обозначим через L^T пересечение ядер операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$, т.е. $L^T = \text{Ker } \mathbb{W}_H \cap \text{Ker } \mathbb{W}_E$. Тогда с учетом этого определения и приведенных вложений следует, что пространство $L_2^4(S, \gamma)$ может быть разложено в прямую сумму трех ортогональных подпространств: $L_2^4(S, \gamma) = L^H \oplus L^E \oplus L^T$. В дальнейшем будет показано, что введенные подпространства L^H , L^E и L^T соответствуют полям волн H -, E - и T -типа соответственно. Также будет показано, что подпространство L^T пусто когда контур L односвязный и $L^T \neq \emptyset$ когда контур L многосвязный. Для полноты доказательства необходимо показать, что множества $D(\mathbb{W}_H)$ и $D(\mathbb{W}_E)$, определённые в (2.32), (2.33), плотны в $L_2^4(S, \gamma)$. Симметричность (2.34) операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$ означает, что их спектр является вещественным. Ограничивая область определения операторов так, чтоб она совпадала с их областью значений, т.е. требуя, чтобы выполнялось:

$$D(\mathbb{W}_H) = L^H, \quad D(\mathbb{W}_E) = L^E, \quad (2.36)$$

мы получим самосопряжённые операторы, их собственные функции образуют базис в их областях определения/значения, т.е. собственные функции $\mathbb{W}_H$, соответствующие ненулевым собственным числам, образуют базис в пространстве L_H , собственные функции оператора $\mathbb{W}_E$, соответствующие ненулевым собственным числам, образуют базис в пространстве L_E . Кроме того, необходимо построить базис в пересечении ядер этих операторов, т.е. в L_T . Тогда из полноты областей определения операторов в $L_2^4(S, \gamma)$ будет следовать полнота полученного базиса в пространстве решений $L_2^4(S, \gamma)$.

Построение базиса.

Использование свойств самосопряженных линейных операторов (2.32)-(2.33) позволяет построить базис в каждом из подпространств L^H , L^E и L^T . В результате мы можем построить базис во всем гильбертовом пространстве $L_2^4(S, \gamma)$, которое будем называть пространством решений, так как поперечные компоненты всех существующих в волноводе электромагнитных полей (удовлетворяющих уравнениям Максвелла (2.1) и граничным условиям (2.9)) по определению принадлежат $L_2^4(S, \gamma)$. Построим модовый базис в L^H подпространстве.

Построение модового базиса в L^H подпространстве. Из самосопряженности оператора $\mathbb{W}_H$ следует, что его спектр вещественный, а его собственные функции будут образовывать базис в области его определения, т.е. в подпространстве L^H . Кроме этого спектр оператора $\mathbb{W}_H$ будет симметричным относительно нуля из-за его блочной структуры с нулями на главной диагонали. Это означает, что если p_m^2 является собственным значением, соответствующее собственному вектору $X_m = \text{col}(\vec{E}_m, \vec{H}_m)$, то и $-p_m^2$ будет собственным значением, отвечающее собственному вектору $X_{-m} = \text{col}(\vec{E}_m, -\vec{H}_m)$. Так как в конечном итоге будет интересовать разложение полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по модам, а собственные функции для $\vec{E}$ и $\vec{H}$, соответствующие положительной и отрицательной части спектра линейно зависимы, что очевидно, то можно ограничиться рассмотрением только положительной части спектра. В связи с этим и используется для собственных значений запись в виде квадрата p_m^2 .

Задача на собственные значения для оператора $\mathbb{W}_H$:

$$\mathbb{W}_H X_m^H = p_m^2 X_m^H, \quad X_m^H = \begin{pmatrix} \vec{E}_m^H \\ \vec{H}_m^H \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

где X_m^H – собственная функция оператора $\mathbb{W}_H$, а p_m^2 – соответствующее ей собственное число. В векторном виде задача (2.37) выглядит следующим обра-

ЗОМ:

$$\begin{cases} [\vec{Z}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_m^H = p_m^2 \vec{E}_m^H \\ \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{Z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_m^H = p_m^2 \vec{H}_m^H \\ \vec{l} \cdot \vec{E}_m^H|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_m^H|_L = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Эту векторную задачу можно свести к скалярной, введя два скалярных потенциала $\Phi_m^H(\vec{r}_{\perp})$ и $\Psi_m^H(\vec{r}_{\perp})$ по следующим формулам:

$$\vec{E}_m^H = p_m^{-1} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \Phi_m^H \times \vec{Z}_0], \quad \vec{H}_m^H = p_m^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_m^H. \quad (2.39)$$

Подстановка (2.39) в (2.38) сводит исходную векторную задачу к следующей скалярной задаче на собственные значения с однородными граничными условиями Неймана на контуре L .

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \nabla_{\perp} \Psi_m^H + p_m^2 \mu_{\perp} \Phi_m^H = 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Phi_m^H + p_m^2 \mu_{\perp} \Psi_m^H = 0 \\ \frac{\partial \Phi_m^H}{\partial \vec{n}} \Big|_L = 0, \quad \frac{\partial \Psi_m^H}{\partial \vec{n}} \Big|_L = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Из симметричности оператора $\mathbb{W}_H$ следует, что его собственные функции, соответствующие разным собственным числам ортогональны относительно скалярного произведения (2.29), а из блочной структуры оператора $\mathbb{W}_H$ следует, что относительно скалярного произведения (2.30) ортогональны между собой собственные функции $\vec{E}_m^H$, а относительно скалярного произведения (2.31) ортогональны собственные функции $\vec{H}_m^H$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{m_1}^H, \vec{E}_{m_2}^H \rangle_e &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{m_1}^H \cdot \vec{E}_{m_2}^H dS = \delta_{m_1 m_2}, \\ \langle \vec{H}_{m_1}^H, \vec{H}_{m_2}^H \rangle_h &= \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \vec{H}_{m_1}^H \cdot \vec{H}_{m_2}^H dS = \delta_{m_1 m_2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Здесь и далее через δ_{mn} обозначен символ Кронекера. Подставив во второе условие ортогональности в (2.41) выражение векторных базисных функций через скалярные потенциалы (2.39), получим условие биортогональности для скалярных потенциалов:

$$\langle \Psi_{m_1}^H, \Phi_{m_2}^H \rangle_h = \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \Psi_{m_1}^H \Phi_{m_2}^H dS = \delta_{m_1 m_2}. \quad (2.42)$$

Здесь мы фактически вводим новое гильбертово функциональное пространство $L_2^1(S, \mu_{\perp})$ одномерных (скалярных) квадратично интегрируемых с весом $\mu_{\perp}(\vec{r}_{\perp})$ функций, удовлетворяющих условиям Неймана $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_L = 0$.

Подставив выражения для векторных собственных функций через скалярные потенциалы (2.39) в уравнения (2.13)-(2.16) можно убедиться, что для поля с поперечными компонентами $\vec{E}_m^H, \vec{H}_m^H$ продольная компонента электрического поля в отсутствие источников оказывается нулевой $E_z^H \equiv 0$. Таким образом, мы наконец-то можем уже полностью обоснованно считать поперечные компоненты полей из L^H поперечными компонентами неких H -волн.

Построение модового базиса в L^E подпространстве. Относительно спектра и собственных векторов самосопряженного оператора $\mathbb{W}_E$ можно сделать замечания, аналогичные тем которые делались по поводу спектра и собственных функций оператора $\mathbb{W}_H$. Поэтому построение базиса в L^E подпространстве осуществляется аналогично тому, как это было сделано в L^H подпространстве.

Задача на собственные значения для оператора $\mathbb{W}_E$ имеет вид:

$$\mathbb{W}_E X_n^E = q_n^2 X_n^E, \quad X_n^E = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^E \\ \vec{H}_n^E \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

В векторном виде эта задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{Z}_0] \cdot \vec{H}_n^E = q_n^2 \vec{E}_n^E \\ [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{Z}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E}_n^E = q_n^2 \vec{H}_n^E \\ \nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_{\perp} \vec{E}_n^E)|_L = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H}_n^E \times \vec{Z}_0]|_L = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Векторная задача (2.44) может быть скаляризована посредством введения двух скалярных потенциалов $\Phi_n^E(\vec{r}_{\perp})$ и $\Psi_n^E(\vec{r}_{\perp})$ по следующим формулам:

$$\vec{E}_n^E = q_n^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_n^E, \quad \vec{H}_n^E = q_n^{-1} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \Phi_n^E]. \quad (2.45)$$

Подставив (2.45) в (2.44) получим вместо исходной векторной задачи следующую скалярную задачу на собственные значения с однородными граничными условиями Дирихле на контуре L :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Phi_n^E + q_n^2 \varepsilon_{\perp} \Psi_n^E = 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \Psi_n^E + q_n^2 \mu_{\perp} \Phi_n^E = 0 \\ \Psi_n^E|_L = 0, \quad \Phi_n^E|_L = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Из симметричности оператора $\mathbb{W}_E$ следует, что его собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям ортогональны относительно скалярного произведения (2.29), а из блочной структуры оператора $\mathbb{W}_E$ следует, что условиям ортогональности удовлетворяют и собственные функции $\vec{E}_n^E$ и $\vec{H}_n^E$ по отдельности:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{n_1}^E, \vec{E}_{n_2}^E \rangle_e &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{n_1}^E \cdot \vec{E}_{n_2}^E dS = \delta_{n_1 n_2}, \\ \langle \vec{H}_{n_1}^E, \vec{H}_{n_2}^E \rangle_h &= \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \vec{H}_{n_1}^E \cdot \vec{H}_{n_2}^E dS = \delta_{n_1 n_2}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Подставив в первое условие ортогональности в (2.47) выражение векторных базисных функций через скалярные потенциалы (2.45), получим условие биортогональности для скалярных потенциалов:

$$\langle \Psi_{n_1}^E, \Phi_{n_2}^E \rangle_e = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \Psi_{n_1}^E \Phi_{n_2}^E dS = \delta_{n_1 n_2}. \quad (2.48)$$

Здесь мы фактически вводим новое гильбертово функциональное пространство $L_2^1(S, \varepsilon_{\perp})$ одномерных (скалярных) квадратично интегрируемых с весом $\varepsilon_{\perp}(\vec{r}_{\perp})$ функций, удовлетворяющих условиям Дирихле $\Phi|_L = 0$.

Подставив выражения для векторных собственных функций через скалярные потенциалы (2.45) в уравнения (2.13)-(2.16) можно убедиться, что для поля с поперечными компонентами $\vec{E}_n^E, \vec{H}_n^E$ продольная компонента магнитного поля в отсутствие источников оказывается нулевой $H_z^E \equiv 0$. Таким образом,

мы наконец-то можем уже полностью обоснованно считать поперечные компоненты полей из L^E поперечными компонентами неких E -волн.

Построение модового базиса в L^T подпространстве. Чтобы построить базис в L^T подпространстве необходимо совместно рассмотреть задачи (2.37), (2.43) при нулевых собственных значениях (соответствующие ядрам операторов). Это приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} \mathbb{W}_H X_k^T = 0 \\ \mathbb{W}_E X_k^T = 0 \end{cases}, \quad X_k^T = \begin{pmatrix} \vec{E}_k^T \\ \vec{H}_k^T \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

В векторном виде система (2.49) распадается на следующие две подсистемы:

$$\begin{cases} [\vec{z}_0 \times \varepsilon_\perp^{-1} \nabla_\perp \mu_\perp^{-1}] \nabla_\perp \cdot \mu_\perp \vec{H}_k^T = 0 \\ \nabla_\perp \mu_\perp^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp] \cdot \vec{E}_k^T = 0 \\ \vec{l} \cdot \vec{E}_k^T|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_k^T|_L = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\begin{cases} \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} [\nabla_\perp \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_k^T = 0 \\ [\mu_\perp^{-1} \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_\perp \cdot \varepsilon_\perp \vec{E}_k^T = 0 \\ \nabla_\perp \cdot (\varepsilon_\perp \vec{E}_k^T)|_L = 0, \quad \nabla_\perp \cdot [\vec{H}_k^T \times \vec{z}_0]|_L = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

которые необходимо решать совместно. Аналогично изложенному в [284] можно показать, что имеется ровно $N - 1$ линейно независимых решений задачи (2.50)-(2.51), где N – количество контуров, ограничивающих S (связность контура L). Таким образом, вопрос о построении базиса в подпространстве L^T свелся к совместному решению задач (2.50)-(2.51). Сведем эту векторную задачу к скалярной: введём скалярные потенциалы $\Psi_k^T(\vec{r}_\perp)$ и $\Phi_k^T(\vec{r}_\perp)$ следующими формулами:

$$\vec{E}_k^T = \nabla_\perp \Phi_k^T, \quad \vec{H}_k^T = [\vec{z}_0 \times \mu_\perp^{-1} \nabla_\perp \Psi_k^T]. \quad (2.52)$$

Подставив (2.52) в уравнения и граничные условия (2.50)-(2.51) получим две задачи с неоднородные краевыми условиями Дирихле на контуре L :

$$\begin{cases} \nabla_\perp \cdot \varepsilon_\perp \nabla_\perp \Phi_k^T = 0 \\ \Phi_k^T|_{L_j} = c_k^j \end{cases}, \quad \begin{cases} \nabla_\perp \cdot \mu_\perp^{-1} \nabla_\perp \Psi_k^T = 0 \\ \Psi_k^T|_{L_j} = d_k^j \end{cases} \quad (2.53)$$

где c_k^j и d_k^j – произвольные константы на j -ом простом контуре L_j . Для получения $N - 1$ линейно независимых решений удобно взять $c_k^N = 0$, $c_k^j = \delta_{kj}$ для $k, j = \overline{1, N-1}$ и аналогично для d_k^j .

Множество линейно независимых решений задачи (2.50)-(2.51) образует базис в подпространстве L^T . Если найденный базис не является ортогональным, то его всегда можно ортогонализировать по стандартной процедуре Грама-Шмидта. Базисные функции нормируются так, чтобы в результате выполнялись следующие условия ортонормированности:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{k_1}^T, \vec{E}_{k_2}^T \rangle_e &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{k_1}^T \cdot \vec{E}_{k_2}^T dS = \delta_{k_1 k_2}, \\ \langle \vec{H}_{k_1}^T, \vec{H}_{k_2}^T \rangle_h &= \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \vec{H}_{k_1}^T \cdot \vec{H}_{k_2}^T dS = \delta_{k_1 k_2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Подставив выражения для поперечных компонент поля (2.52) в уравнения (2.13)-(2.16) с учетом (2.53) несложно убедиться, что полученные базисные функции подпространства L^T соответствуют, в отсутствие источников, нулевым продольным компонентам полей и поэтому могут быть отождествлены с T -волнами, а также с электростатическим и магнитостатическим решениями для рассматриваемого волновода с многосвязным сечением (статические решения могут быть представлены суперпозицией встречных T -волн).

Условия ортогональности. Выше было показано, что векторные базисные функции – решения задач (2.38), (2.44) и (2.50)-(2.51) удовлетворяют условиям ортогональности (2.41), (2.47) и (2.54). Кроме этого, с использованием соотношений (2.35) можно также установить условия взаимной ортогональности мод разных типов. В силу того, что они соответствуют разным собственным числам (если условно сопоставить ядру оператора нулевое собственное число):

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E}_m^H, \vec{E}_n^E \rangle_e &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_\perp \vec{E}_m^H \cdot \vec{E}_n^E dS = 0 \\
\langle \vec{E}_m^H, \vec{E}_k^T \rangle_e &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_\perp \vec{E}_m^H \cdot \vec{E}_k^T dS = 0 \\
\langle \vec{E}_n^E, \vec{E}_k^T \rangle_e &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_\perp \vec{E}_n^E \cdot \vec{E}_k^T dS = 0 \\
\langle \vec{H}_m^H, \vec{H}_n^E \rangle_h &= \frac{1}{S} \int_S \mu_\perp \vec{H}_m^H \cdot \vec{H}_n^E dS = 0 \\
\langle \vec{H}_m^H, \vec{H}_k^T \rangle_h &= \frac{1}{S} \int_S \mu_\perp \vec{H}_m^H \cdot \vec{H}_k^T dS = 0 \\
\langle \vec{H}_n^E, \vec{H}_k^T \rangle_h &= \frac{1}{S} \int_S \mu_\perp \vec{H}_n^E \cdot \vec{H}_k^T dS = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Все условия ортогональности (2.41), (2.47), (2.54) и (2.55) кратко можно записать с использованием следующего условного обозначения:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E}_m^A, \vec{E}_n^B \rangle_e &= \delta_{mn} \delta_{AB}, \\
\langle \vec{H}_m^A, \vec{H}_n^B \rangle_h &= \delta_{mn} \delta_{AB},
\end{aligned} \quad A, B \in \{H, E, T\}. \tag{2.56}$$

В дальнейшем будем использовать сокращенные записи аналогичные (2.56).

Разложение искоемых полей, источников поля и начальных условий по модовому базису.

Разложение поперечных и продольных компонент поля. Построив базисы в каждом из подпространств L^H , L^E и L^T , тем самым построили базис во всем пространстве решений $L_2^4(S, \gamma)$, которому принадлежат поперечные компоненты искоемых полей, функции источников и начальных условий. Поперечные компоненты электрического и магнитного полей можно представить в виде следующих разложений:

$$\varepsilon_0^{1/2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m v_m^h(z, t) \vec{E}_m^h(\vec{r}_\perp) + \sum_n v_n^e(z, t) \vec{E}_n^e(\vec{r}_\perp) + \sum_k v_k^t(z, t) \vec{E}_k^t(\vec{r}_\perp), \tag{2.57}$$

$$\mu_0^{1/2} \vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_m i_m^h(z, t) \vec{H}_m^h(\vec{r}_\perp) + \sum_n i_n^e(z, t) \vec{H}_n^e(\vec{r}_\perp) + \sum_k i_k^h(z, t) \vec{H}_k^t(\vec{r}_\perp). \tag{2.58}$$

Продольная компонента напряженности электрического поля E_z является скалярной функцией и удовлетворяет, в силу последнего граничного условия в (2.9), однородному граничному условию Дирихле на контуре L . Следовательно-

но, для ее разложения необходимо располагать системой скалярных базисных функций, которые на контуре L удовлетворяют тем же граничным условиям, что и E_z . Можно показать, что такую систему функций, обладающую полнотой в пространстве $L_2^1(S, \varepsilon_\perp)$, образуют скалярные потенциалы Φ_n^E и Ψ_n^E , определенные как решения задачи (2.46). Кроме этого, в силу условия биортогональности (2.48), для E_z имеют место следующие равенства:

$$E_z = \langle E_z, \Phi_n^E \rangle_e \Psi_n^E = \langle E_z, \Psi_n^E \rangle_e \Phi_n^E. \quad (2.59)$$

Разложим продольную компоненту электрического поля по системе функций $\{\Phi_n^E\}$. Это разложение имеет вид:

$$\varepsilon_0^{1/2} E_z(\vec{r}, t) = \sum_n e_n(z, t) q_n \Phi_n^E(\vec{r}_\perp). \quad (2.60)$$

Собственные числа q_n введены в качестве коэффициентов для дальнейшего удобства.

Действуя аналогичным образом, можно получить разложения для продольной компоненты магнитного поля H_z . Для этого потребуется система скалярных базисных функций, которые на контуре L удовлетворяют, как и H_z , однородным граничным условиям Неймана. Можно показать, что такой системой функций, обладающей полнотой в пространстве $L_2^1(S, \mu_\perp)$, являются скалярные потенциалы Φ_m^H и Ψ_m^H , которые определяются как решения задачи (2.40). В силу условия биортогональности (2.42) для H_z имеют место равенства:

$$H_z = \langle H_z, \Phi_m^H \rangle_h \Psi_m^H = \langle H_z, \Psi_m^H \rangle_h \Phi_m^H. \quad (2.61)$$

Поэтому для разложения продольной компоненты магнитного поля можно использовать систему функций $\{\Phi_m^H\}$, тогда ее разложение имеет вид:

$$\mu_0^{1/2} H_z(\vec{r}, t) = \sum_m h_m(z, t) p_m \Phi_m^H(\vec{r}_\perp). \quad (2.62)$$

В модовых разложениях полей (2.57), (2.58), (2.60) и (2.62) коэффициенты разложений $v_m^h, v_n^e, v_k^t, i_m^h, i_n^e, i_k^t, e_n$ и h_m являются функциями продольной координаты z и времени t . Они описывают эволюцию волноводных мод (электромагнитного поля) при их распространении. В дальнейшем, для краткости, будем их называть модовыми амплитудами, поперечными или продольными, соответственно.

Разложение начальных условий. Исходная система уравнений Максвелла (2.1), описывающая рассматриваемую волноводную задачу, должна быть дополнена начальными условиями $\vec{\mathcal{E}}|_{t=0} = \vec{\mathcal{E}}_0(\vec{r}), \vec{\mathcal{H}}|_{t=0} = \vec{\mathcal{H}}_0(\vec{r})$. Спроецировав эти условия на модовый базис, получим начальные условия для модовых амплитуд. Для этого, вначале представляем начальные условия в виде модовых разложений (2.57), (2.58), (2.60) и (2.62), а затем проецируем эти разложения для начальных условий на элементы базиса, используя условия биортогональности (2.42), (2.48) и условия ортогональности (2.56). В результате получаем следующие выражения для модовых амплитуд в момент времени $t = 0$:

$$\begin{aligned} v_m^A(z, 0) &= \varepsilon_0^{1/2} \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \vec{E}_0(\vec{r}, 0) \cdot \vec{E}_m^A(\vec{r}_{\perp}) dS \\ i_m^A(z, 0) &= \mu_0^{1/2} \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \vec{H}_0(\vec{r}, 0) \cdot \vec{H}_m^A(\vec{r}_{\perp}) dS \\ e_n(z, 0) &= \varepsilon_0^{1/2} q_n^{-1} \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} E_{0_z}(\vec{r}, 0) \Psi_n^E(\vec{r}_{\perp}) dS \\ h_m(z, 0) &= \mu_0^{1/2} p_m^{-1} \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} H_{0_z}(\vec{r}, 0) \Psi_m^H(\vec{r}_{\perp}) dS \end{aligned} \quad A \in \{h, e, t\} \quad (2.63)$$

По формулам, аналогичным (2.63) могут быть найдены коэффициенты разложения произвольной векторной функции. Например, для векторной функции $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \vec{z} J_z(\vec{r}, t)$ коэффициенты разложения его поперечной компоненты по базису $\{\vec{E}_m^A\}, A \in \{h, e, t\}$ равны:

$$j_m^A(z, t) = \varepsilon_0^{1/2} \left(\vec{J}(\vec{r}_{\perp}, z, t), \vec{E}_m^A(\vec{r}_{\perp}) \right)_e, \quad A \in \{h, e, t\}$$

При разложении функцию $\vec{J}(\vec{r}, t)$ по базису $\{\vec{H}_m^A\}, A \in \{H, E, T\}$ коэффициенты этого разложения примут следующий вид:

$$j_m^A(z, t) = \mu_0^{1/2} \left(\vec{J}(\vec{r}_\perp, z, t), \vec{H}_m^A(\vec{r}_\perp) \right)_h, \quad A \in \{h, e, t\}.$$

Раскладывая продольную компоненту вектора $J_z(\vec{r}, t)$ по базису $\{\Phi_m^H\}$ найдем, что коэффициенты этого разложения равны:

$$j_m^z(z, t) = \mu_0^{1/2} p_m^{-1} \left(J_z(\vec{r}_\perp, z, t), \Psi_m^H(\vec{r}_\perp) \right)_h.$$

А коэффициенты разложения этой же функции по базису $\{\Phi_n^E\}$ имеют вид:

$$j_n^z(z, t) = \varepsilon_0^{1/2} q_n^{-1} \left(J_z(\vec{r}_\perp, z, t), \Psi_n^E(\vec{r}_\perp) \right)_e.$$

Подставив разложения полей (2.57), (2.58), (2.60) и (2.62) в нормально-тангенциальную систему уравнений Максвелла (2.13)-(2.16), (2.19)-(2.22) и спроецировав полученные соотношения на элементы базиса, получим систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют модовые амплитуды так называемую систему эволюционных волноводных уравнений.

Система эволюционных волноводных уравнений (СЭВУ).

Чтобы получить СЭВУ подставим разложения поперечных компонент искомых полей (2.57)-(2.58) в уравнения (2.19)-(2.22). Полученные уравнения проецируем на элементы базиса в соответствующем скалярном произведении (2.30) или (2.31), используя при этом условия ортогональности (2.56). В результате получаем следующую бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно поперечных модовых амплитуд:

$$\begin{aligned} \partial_z \mu_{||} \left\{ \partial_\tau (\varepsilon_{||} v_m^h) + \sum_{m'} L_{mm'}^{hh} \partial_z i_{m'}^h + \sum_{m'} L_{mm'}^{he} \partial_z i_{m'}^e + \sum_{m'} L_{mm'}^{ht} \partial_z i_{m'}^t \right\} - \\ - \mu_{||} p_m^2 i_m^h = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_m^h dS \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \partial_z \varepsilon_{||} \left\{ \partial_\tau (\mu_{||} i_n^e) + \sum_{n'} L_{n'n}^{he} \partial_z v_{n'}^h + \sum_{n'} L_{n'n}^{ee} \partial_z v_{n'}^e + \sum_{n'} L_{n'n}^{te} \partial_z v_{n'}^t \right\} - \\ - \varepsilon_{||} q_n^2 v_n^e = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_2(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_n^e dS \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mu_{\parallel} \left\{ \partial_z i_m^h + \sum_{m'} K_{m'm}^{hh} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} v_{m'}^h) + \sum_{m'} K_{m'm}^{eh} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} v_{m'}^e) + \sum_{m'} K_{m'm}^{th} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} v_{m'}^t) \right\} + \\ + p_m^2 v_m^h = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_3(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_m^h dS \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_z v_n^e + \sum_{n'} K_{nn'}^{eh} \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_{n'}^h) + \sum_{n'} K_{nn'}^{ee} \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_{n'}^e) + \sum_{n'} K_{nn'}^{et} \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_{n'}^t) \right\} + \\ + q_n^2 i_n^e = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_4(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_n^e dS \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\partial_z \mu_{\parallel} \left\{ \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} v_k^t) + \sum_{k'} L_{kk'}^{th} \partial_z i_{k'}^h + \sum_{k'} L_{kk'}^{te} \partial_z i_{k'}^e + \sum_{k'} L_{kk'}^{tt} \partial_z i_{k'}^t \right\} = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_k^t dS \quad (2.68)$$

$$\partial_z \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_k^t) + \sum_{k'} L_{k'k}^{ht} \partial_z v_{k'}^t + \sum_{k'} L_{k'k}^{et} \partial_z v_{k'}^e + \sum_{k'} L_{k'k}^{tt} \partial_z v_{k'}^t \right\} = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_2(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_k^t dS \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mu_{\parallel} \left\{ \partial_z i_k^t + \sum_{k'} K_{k'k}^{ht} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} v_{k'}^h) + \sum_{k'} K_{k'k}^{et} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} v_{k'}^e) + \sum_{k'} K_{k'k}^{tt} \partial_\tau (\varepsilon_{\parallel} v_{k'}^t) \right\} = \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_3(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_k^t dS \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_z v_k^t + \sum_{k'} K_{kk'}^{th} \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_{k'}^h) + \sum_{k'} K_{kk'}^{te} \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_{k'}^e) + \sum_{k'} K_{kk'}^{tt} \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_{k'}^t) \right\} = \\ = \frac{1}{S} \int_S \vec{f}_4(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}_k^t dS \end{aligned} \quad (2.71)$$

Далее воспользуемся уравнениями (2.13)-(2.16). Исключив из них продольные компоненты полей, получим два скалярных дифференциальных уравнения. Подставим в них разложения полей (2.57)-(2.58). В полученных уравнениях, выражаем векторные базисные функции через скалярные потенциалы, используя формулы (2.39), (2.45) и (2.52). Проецируя полученные уравнения на те же скалярные потенциалы, воспользовавшись условиями биортогональности (2.42) и (2.48), получим еще четыре эволюционных уравнения для нахождения поперечных модовых амплитуд:

$$\sum_{m'} L_{m'm}^{hh} \partial_z v_{m'}^h + \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_m^h) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_0^{1/2} \vec{J}) p_m^{-1} \Psi_m^h dS \quad (2.72)$$

$$\partial_z v_m^h + \sum_{m'} K_{mm'}^{hh} \partial_\tau (\mu_{\parallel} i_{m'}^h) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_0^{1/2} \vec{J}) p_m^{-1} \Phi_m^h dS \quad (2.73)$$

$$\sum_{n'} L_{nn'}^{ee} \partial_z i_{n'}^e + \partial_\tau (\varepsilon_{||} v_n^e) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_\perp \cdot \mu_0^{1/2} \vec{J}) q_n^{-1} \Psi_n^e dS \quad (2.74)$$

$$\partial_z i_n^e + \sum_{n'} K_{n'n}^{ee} \partial_\tau (\varepsilon_{||} v_{n'}^e) = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_\perp \cdot \mu_0^{1/2} \vec{J}) q_n^{-1} \Phi_n^e dS \quad (2.75)$$

где c – скорость света в вакууме, $\tau = ct$. Функции источников в правых частях уравнений определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(\vec{r}, t) &= [\nabla_\perp \mu_\perp^{-1} \mu_0^{-1/2} \hat{\rho} \times \vec{z}_0] - \partial_z (\mu_{||} \mu_0^{1/2} \vec{J}), \\ \vec{f}_2(\vec{r}, t) &= [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \rho] - \partial_z (\varepsilon_{||} \varepsilon_0^{1/2} \vec{J}), \\ \vec{f}_3(\vec{r}, t) &= \partial_\tau (\mu_{||} \mu_\perp [\mu_0^{1/2} \vec{J} \times \vec{z}_0]) - \mu_\perp \nabla_\perp \mu_\perp^{-1} \varepsilon_0^{1/2} \hat{J}_z, \\ \vec{f}_4(\vec{r}, t) &= \partial_\tau (\varepsilon_{||} \varepsilon_\perp [\vec{z}_0 \times \varepsilon_0^{1/2} \vec{J}]) - \varepsilon_\perp \nabla_\perp \varepsilon_\perp^{-1} \mu_0^{1/2} J_z. \end{aligned}$$

В СЭВУ в качестве коэффициентов входят бесконечные постоянные матрицы L_{mn}^{AB} и K_{mn}^{AB} , описывающие межмодовую связь. Они вычисляются через базисные функции по следующим формулам:

$$\begin{aligned} L_{mn}^{AB} &= \frac{1}{S} \int_S \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}_m^A \times \vec{H}_n^B] dS \\ K_{mn}^{AB} &= \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_\perp \mu_\perp \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}_m^A \times \vec{H}_n^B] dS \end{aligned} \quad A, B \in \{h, e, t\}. \quad (2.76)$$

Для дальнейшего сокращения записи сумм введем сокращенную матричную запись:

$$\mathbf{L}^{he} \partial_z \mathbf{i}^e = \sum_{m'} L_{mm'}^{he} \partial_z i_{m'}^e, \quad (\mathbf{L}^{ht})^T \partial_z \mathbf{v}^h = \sum_{k'} L_{k'k}^{ht} \partial_z v_{k'}^h. \quad (2.77)$$

$()^T$ над матрицей в таких формулах обозначает транспонирование.

Выразив в формулах (2.76) векторные базисные функции через скалярные потенциалы по формулам (2.39), (2.45) и (2.52) получим формулы для вычисления матриц $\mathbf{L}^{AB}$ и $\mathbf{K}^{AB}$ $A, B \in \{h, e, t\}$ непосредственно через скалярные потенциалы. Причем для некоторых из них представление через скалярные потенциалы оказывается проще изначального. Так для следующих четырех матриц получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
L_{mm'}^{hh} &= \frac{\rho_m}{\rho_{m'}} \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \Psi_m^h \Psi_{m'}^h dS, & K_{mm'}^{hh} &= \frac{\rho_{m'}}{\rho_m} \frac{1}{S} \int_S \mu_{\perp} \Phi_m^h \Phi_{m'}^h dS, \\
L_{nn'}^{ee} &= \frac{q_n}{q_{n'}} \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \Psi_n^e \Psi_{n'}^e dS, & K_{nn'}^{ee} &= \frac{q_{n'}}{q_n} \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \Phi_n^e \Phi_{n'}^e dS.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Для следующих шести матриц оказывается, что они нулевые:

$$\mathbf{L}^{et} = \mathbf{L}^{th} = \mathbf{L}^{eh} = \mathbf{K}^{te} = \mathbf{K}^{ht} = \mathbf{K}^{he} = \mathbf{0}. \tag{2.79}$$

Таким образом, оказывается, что 6 матриц из 18 возможных оказываются нулевыми. Кроме этого можно доказать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sum_A \mathbf{K}^{BA} (\mathbf{L}^{CA})^T &= \sum_A (\mathbf{L}^{AB})^T \mathbf{K}^{AC} = \sum_A (\mathbf{K}^{AB})^T \mathbf{L}^{AC} = \sum_A \mathbf{L}^{BA} (\mathbf{K}^{CA})^T = \\
&= \begin{cases} \mathbf{0}, B \neq C \\ \mathbf{I}, B = C \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Здесь $A, B, C \in \{h, e, t\}$; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица, $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Суммирование по A в (2.80) означает, что A последовательно принимает значения h , e и t при фиксированных B и C . Из (2.80) с учетом (2.79) следуют:

$$\mathbf{L}^{AA} (\mathbf{K}^{AA})^T = \mathbf{K}^{AA} (\mathbf{L}^{AA})^T = (\mathbf{K}^{AA})^T \mathbf{L}^{AA} = (\mathbf{L}^{AA})^T \mathbf{K}^{AA} = \mathbf{I}, \quad A \in \{h, e, t\}. \tag{2.81}$$

Использование матричных свойств (2.79)-(2.81) при решении конкретных задач оказывается полезным, так как позволяет упростить СЭВУ, выразить в явном виде (т.е. с коэффициентом $\mathbf{I}$) какой-либо член через остальные.

Полученная система уравнений (2.64)-(2.75) для определения поперечных модовых амплитуд является переопределенной, так как для нахождения 6 неизвестных векторов имеется 12 векторных уравнений. Это не приводит к противоречию, так как все уравнения совместны, а часть из них линейно зависимы. Например, используя свойства (2.81) можно показать, что уравнения (2.72) и (2.73) совпадают. То же самое относится и к уравнениям (2.74) и (2.75). Таким образом, переопределенность СЭВУ (2.64)-(2.75) не только не приводит к противоречию при ее решении, а напротив упрощает процесс нахождения поперечных модовых амплитуд, так как позволяет выбирать те из эволюционных уравнений, которые наиболее удобно решать.

Получим систему уравнений для нахождения продольных модовых амплитуд. Для этого подставим в уравнения (2.13)-(2.16) разложения как поперечных компонент поля (2.57)-(2.58), так и продольных (2.60), (2.62). После чего, все векторные базисные функции по формулам (2.39), (2.45) и (2.52) выражаем через скалярные потенциалы. Спроецировав полученные соотношения на те же скалярные потенциалы, с учетом условий биортогональности (2.42), (2.48) и формул (2.78) получим следующие эволюционные уравнения:

$$\begin{aligned}\partial_z(\varepsilon_{||}e_n) &= \varepsilon_{||}v_n^e + \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_0^{-1/2} \rho q_n^{-1} \Psi_n^e dS \\ \partial_z(\mu_{||}h_m) &= \mu_{||}i_m^h + \frac{1}{S} \int_S \mu_0^{-1/2} \hat{\rho} p_m^{-1} \Psi_m^h dS\end{aligned}\tag{2.82}$$

$$\begin{aligned}\partial_\tau(\varepsilon_{||}e_n) &= -\sum_{n'} L_{nn'}^{ee} i_{n'}^e - \frac{1}{S} \int_S \mu_0^{1/2} J_z q_n^{-1} \Psi_n^e dS \\ \partial_\tau(\mu_{||}h_m) &= -\sum_{m'} L_{m'm}^{hh} v_{m'}^h - \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_0^{1/2} \hat{J}_z p_m^{-1} \Psi_m^h dS\end{aligned}\tag{2.83}$$

Проинтегрировав уравнения (2.82) или (2.83), или иную их линейно независимую пару можно по известным поперечным модовым амплитудам найти продольные модовые амплитуды. Таким образом, СЭВУ удобно решать относительно поперечных модовых амплитуд v, i , определив которые уже легко найти продольные амплитуды e, h , интегрируя (2.82) или (2.83) (в зависимости от того, какое из них удобнее по постановке задачи).

2.3. Применение численной схемы и численный анализ сходимости на примере плоскопараллельного волновода с диэлектрическим слоем.

Применим разработанную модификацию ММБ для расчета распространения нестационарной волны в плоскопараллельном волноводе с плоским диэлектрическим слоем. Такой волновод представляет собой две параллельные идеально проводящие металлические плоскости. На одну из которых нанесен плоский слой толщиной θ идеального диэлектрика с постоянной диэлектрической проницаемостью ε (рис. 2.3а). Металлические плоскости расположены на

расстоянии $d = \eta + \theta$. Для удобства, в дальнейшем используются только безразмерные величины, нормированные на d . Чтобы не вводить новых обозначений, положим $d = 1$, $\theta + \eta = 1$ и $x \in [0, 1]$.

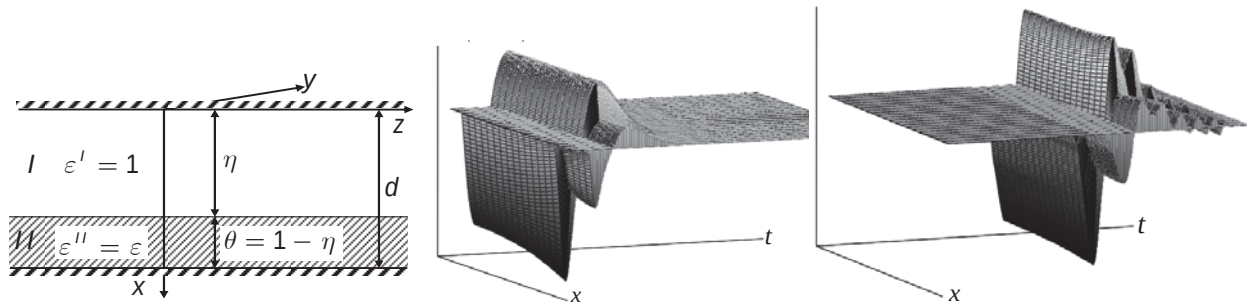


Рис. 2.3. Геометрия задачи, распространение импульса

Выберем декартову систему координат так, чтобы одна из металлических пластин (для определенности без диэлектрика) совпадала с координатной плоскостью $x = 0$. Тогда вторая пластина и граница раздела вакуум-диэлектрик будут лежать в плоскостях $x = 1$ и $x = \eta$, соответственно. В качестве продольной координаты возьмем координату z , тогда поперечными координатами будут являться декартовы координаты x и y . Отметим, что рассматриваемая структура является неоднородной в поперечном сечении, причем неоднородна она только вдоль координаты x . По координате y , равно как и по z , структура однородна.

Рассматриваемый волновод будет возбуждаться нестационарными однородно распределенными в плоскости $z = 0$ электрическими токами, текущими вдоль оси x .

Построение модового базиса. Решение поставленной задачи ММБ следует начинать с нахождения решений граничных задач (2.40), (2.46) и (2.53). Так как задача решается в декартовой системе координат и структура однородна вдоль координаты y , то поперечная часть оператора ∇ равна $\nabla_{\perp} = \vec{x}_0 \partial_x$. С учетом этого и того, что среда, заполняющая волновод немагнитная ($\mu_{\perp} = 1$), задача (2.40) сводится к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Psi_m^H}{dx^2} + p_m^2 \Phi_m^H = 0 \\ \frac{d^2 \Phi_m^H}{dx^2} - \frac{1}{\varepsilon_\perp} \frac{d\varepsilon_\perp}{dx} \frac{d\Phi_m^H}{dx} + p_m^2 \varepsilon_\perp \Psi_m^H = 0 \\ \left. \frac{d\Phi_m^H}{dx} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{d\Phi_m^H}{dx} \right|_{x=1} = 0, \left. \frac{d\Psi_m^H}{dx} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{d\Psi_m^H}{dx} \right|_{x=1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.84)$$

Для рассматриваемого случая поперечная диэлектрическая проницаемость является кусочно-постоянной функцией и определена следующим образом:

$$\varepsilon_\perp(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \eta] \\ \varepsilon, & x \in (\eta, 1] \end{cases} \quad (2.85)$$

В этом случае задачу (2.84) удобно решать методом частичных областей. В дальнейшем все величины, относящиеся к первой области, не заполненной диэлектриком, будем обозначать надстрочным индексом I , а все величины, которые относятся ко второй области, заполненной диэлектриком, обозначаются надстрочным индексом II . Решение задачи (2.84) в подобластях выражается через тригонометрические и гиперболические функции и имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_m^{H^I} &= A_{1,m} \cos[p_m x] + A_{2,m} \operatorname{ch}[p_m x], \\ \Psi_m^{H^{II}} &= B_{1,m} \cos[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] + B_{2,m} \operatorname{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)], \\ \Phi_m^{H^I} &= A_{1,m} \cos[p_m x] - A_{2,m} \operatorname{ch}[p_m x], \\ \Phi_m^{H^{II}} &= B_{1,m} \varepsilon^{1/2} \cos[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] - B_{2,m} \varepsilon^{1/2} \operatorname{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Зная скалярные потенциалы Ψ_m^H и Φ_m^H по формулам (2.39) находим векторные базисные функции в L^H подпространстве:

$$\begin{aligned} \vec{E}_m^{H^I} &= \vec{y}_0 \{A_{1,m} \sin[p_m x] + A_{2,m} \operatorname{sh}[p_m x]\}, \\ \vec{E}_m^{H^{II}} &= \vec{y}_0 \varepsilon^{-1/4} \{B_{1,m} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] + B_{2,m} \operatorname{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)]\}, \\ \vec{H}_m^{H^I} &= \vec{x}_0 \{-A_{1,m} \sin[p_m x] + A_{2,m} \operatorname{sh}[p_m x]\}, \\ \vec{H}_m^{H^{II}} &= \vec{x}_0 \varepsilon^{1/4} \{-B_{1,m} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] + B_{2,m} \operatorname{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)]\}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Здесь $\vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$ орты соответствующих осей. Неизвестные константы $A_{1,m}$, $A_{2,m}$, $B_{1,m}$ и $B_{2,m}$ в (2.86)-(2.87) определяются из четырех условий непрерывности для

величин Φ_m^H , $\varepsilon_{\perp}^{-1} \partial_x \Phi_m^H$, Ψ_m^H и $\partial_x \Psi_m^H$ на границе раздела сред, которые следуют из граничных условий для компонент полей на границе раздела диэлектриков и формул (2.39). Эти условия непрерывности приводят к следующей однородной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} \cos[p_m \eta] & \text{ch}[p_m \eta] & -\cos[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & -\text{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \cos[p_m \eta] & -\text{ch}[p_m \eta] & -\varepsilon^{1/2} \cos[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & \varepsilon^{1/2} \text{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \\ -\sin[p_m \eta] & \text{sh}[p_m \eta] & -\varepsilon^{1/4} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & \varepsilon^{1/4} \text{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \\ -\sin[p_m \eta] & -\text{sh}[p_m \eta] & -\varepsilon^{-1/4} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & -\varepsilon^{-1/4} \text{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,m} \\ A_{2,m} \\ B_{1,m} \\ B_{2,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Собственные числа p_m задачи (2.84) находятся из условия существования нетривиального решения системы (2.88) и имеют физический смысл частот отсечки для волноводных мод H -типа. Константы $A_{1,m}$, $A_{2,m}$, $B_{1,m}$ и $B_{2,m}$ являются нетривиальным решением однородной СЛАУ (2.88), которые затем нормируются в соответствии с условиями нормировки для векторных базисных функций (2.41) или условием биортогональности скалярных потенциалов (2.42).

Аналогичным образом построим модовый базис в L^E подпространстве. Задача на собственные значения (2.46) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Phi_n^E}{dx^2} + q_n^2 \varepsilon_{\perp} \Psi_n^E = 0 \\ \frac{d^2 \Psi_n^E}{dx^2} + \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx} \frac{d\Psi_n^E}{dx} + q_n^2 \Phi_n^E = 0 \\ \Psi_n^E|_{x=0} = 0, \Psi_n^E|_{x=1} = 0, \Phi_n^E|_{x=0} = 0, \Phi_n^E|_{x=1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.89)$$

Решая задачу (2.89), как и в предыдущем случае, методом частичных областей найдем выражения для скалярных потенциалов Ψ_n^E и Φ_n^E :

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{E'} &= A_{3,n} \sin[q_n x] - A_{4,n} \operatorname{sh}[q_n x], \\
\Psi_n^{E''} &= B_{3,n} \varepsilon^{-1/2} \sin[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] - B_{4,n} \varepsilon^{-1/2} \operatorname{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)], \\
\Phi_n^{E'} &= A_{3,n} \sin[q_n x] + A_{4,n} \operatorname{sh}[q_n x], \\
\Phi_n^{E''} &= B_{3,n} \sin[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] + B_{4,n} \operatorname{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)].
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Подставив (2.90) в формулы (2.45), находим соответствующие векторные базисные функции:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_n^{E'} &= \vec{x}_0 \{A_{3,n} \cos[q_n x] - A_{4,n} \operatorname{ch}[q_n x]\}, \\
\vec{E}_n^{E''} &= \vec{x}_0 \varepsilon^{-1/4} \{B_{3,n} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] - B_{4,n} \operatorname{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)]\}, \\
\vec{H}_n^{E'} &= \vec{y}_0 \{A_{3,n} \cos[q_n x] + A_{4,n} \operatorname{ch}[q_n x]\}, \\
\vec{H}_n^{E''} &= \vec{y}_0 \varepsilon^{1/4} \{B_{3,n} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] + B_{4,n} \operatorname{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)]\}.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Неизвестные константы $A_{3,n}$, $A_{4,n}$, $B_{3,n}$ и $B_{4,n}$ в (2.90)-(2.91) определяются из четырех условий непрерывности для величин Φ_n^E , $\partial_x \Phi_n^E$, Ψ_n^E и $\varepsilon_\perp \partial_x \Psi_n^E$ на границе раздела сред, которые следуют из граничных условий для компонент полей на границе раздела диэлектриков. Эти условия непрерывности приводят к следующей однородной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} \sin[q_n \eta] & -\operatorname{sh}[q_n \eta] & \varepsilon^{-1/2} \sin[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & -\varepsilon^{-1/2} \operatorname{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \sin[q_n \eta] & \operatorname{sh}[q_n \eta] & \sin[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & \operatorname{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \cos[q_n \eta] & -\operatorname{ch}[q_n \eta] & -\varepsilon^{3/4} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & \varepsilon^{3/4} \operatorname{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \cos[q_n \eta] & \operatorname{ch}[q_n \eta] & -\varepsilon^{1/4} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & -\varepsilon^{1/4} \operatorname{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{3,n} \\ A_{4,n} \\ B_{3,n} \\ B_{4,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.92}$$

Собственные значения задачи (2.89) q_n определяются из условия существования нетривиального решения системы (2.92) и соответствуют критическим частотам для мод E -типа. Константы $A_{3,n}$, $A_{4,n}$, $B_{3,n}$ и $B_{4,n}$ являются нетривиальным решением однородной СЛАУ (2.92), которые затем нормируются в соответствии с условиями нормировки для векторных базисных функций (2.47) или условием биортогональности скалярных потенциалов (2.48).

Построим модовый базис в L^T подпространстве. Для чего решим задачи (2.53), которые для рассматриваемого случая упростятся и примут следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Psi^T}{dx^2} = 0 \\ \Psi^T|_{x=0} = 0, \Psi^T|_{x=1} = \psi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^2\Phi^T}{dx^2} + \frac{1}{\varepsilon_\perp} \frac{d\varepsilon_\perp}{dx} \frac{d\Phi^T}{dx} = 0 \\ \Phi^T|_{x=0} = 0, \Phi^T|_{x=1} = \varphi \end{cases} \quad (2.93)$$

Здесь ψ и φ некоторые константы, которые выбираются таким образом, чтобы не нарушались граничные условия для компонент поля на границе раздела двух диэлектриков и удовлетворялись условия нормировки (2.54) для векторных базисных функций из L^T подпространства. Решив задачи (2.93) методом частных областей, вычислив по найденным скалярным потенциалам Ψ^T и Φ^T с помощью формул (2.52) векторные базисные функции и пронормировав их в соответствии с (2.54) в результате получим нормированные скалярные потенциалы и векторные базисные функции L^T подпространства:

$$\begin{aligned} \Psi^T &= \Psi^{T'} = \Psi^{T''} = \chi, \\ \Phi^{T'} &= \chi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon\eta - \eta + 1}}, \quad \Phi^{T''} = \frac{\varepsilon\eta - \eta + \chi}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon\eta - \eta + 1)}}, \\ \vec{E}^{T'} &= \vec{x}_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon\eta - \eta + 1}}, \quad \vec{E}^{T''} = \vec{x}_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon\eta - \eta + 1)}}, \\ \vec{H}^T &= \vec{H}^{T'} = \vec{H}^{T''} = \vec{y}_0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Система эволюционных волноводных уравнений. Построив модовый базис, рассчитываем матрицы (2.76), входящие в СЭВУ. Подставив базисные функции (2.87), (2.91) и (2.94) в (2.76) получим, что помимо матриц (2.79) нулевыми оказываются также следующие матрицы:

$$\mathbf{L}^{HE} = \mathbf{L}^{HT} = \mathbf{K}^{EH} = \mathbf{K}^{TH} = \mathbf{0}. \quad (2.95)$$

Это означает, что в рассматриваемой структуре нет межмодового преобразования между H - модами и E -, T - модами. Следствием этого будет то, что СЭВУ расщепится на две более простые подсистемы, одна из которых будет описывать эволюцию во времени только H - волн, а вторая – совместную эволюцию

E - и T - волн. Получим СЭВУ для рассматриваемой структуры из общих уравнений (2.64)-(2.75), (2.82)-(2.83) с учетом матричных свойств (2.79), (2.95) и того, что $\varepsilon_{\parallel} = \mu_{\parallel} = \mu_{\perp} = 1$. Также ограничимся случаем когда отсутствуют магнитные токи и заряды, т.е. положим, что $\vec{\hat{J}} = 0$ и $\hat{\rho} = 0$. Сначала получим подсистему для H - волн. Подставив уравнение (2.72) в (2.66) получим уравнение для определения модовой амплитуды v_m^h :

$$\sum_{m'} K_{m'm}^{hh} \partial_{\tau\tau} v_{m'}^h - \sum_{m'} L_{m'm}^{hh} \partial_{zz} v_{m'}^h + p_m^2 v_m^h = \frac{1}{S} \int_S \left[\partial_{\tau} (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \times \vec{z}_0 \right] \cdot \vec{H}_m^h dS \quad (2.96)$$

Аналогично подставив (2.73) в (2.64) получим уравнение относительно i_m^h :

$$\sum_{m'} K_{mm'}^{hh} \partial_{\tau\tau} i_{m'}^h - \sum_{m'} L_{mm'}^{hh} \partial_{zz} i_{m'}^h + p_m^2 i_m^h = \frac{1}{S} \int_S \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \cdot \vec{E}_m^h dS. \quad (2.97)$$

Теперь получим подсистему для E - и T - мод. Используя уравнения (2.65), (2.75) и (2.69), (2.70) получим следующую систему для определения модовых амплитуд v_n^e и v^t :

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} K_{n'n}^{ee} \partial_{\tau\tau} v_{n'}^e - \sum_{n'} L_{n'n}^{ee} \partial_{zz} v_{n'}^e + q_n^2 v_n^e - L_n^{te} \partial_{zz} v^t = \\ & = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \partial_{\tau} (\mu_0^{1/2} \vec{J})) q_n^{-1} \Phi_n^e dS + \frac{1}{S} \int_S [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \rho \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_n^e dS, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} & K^{tt} \partial_{\tau\tau} v^t - L^{tt} \partial_{zz} v^t + \sum_{n'} K_{n'}^{et} \partial_{\tau\tau} v_{n'}^e = \\ & = \frac{1}{S} \int_S [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \rho \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}^t dS - \frac{1}{S} \int_S [\vec{z}_0 \times \partial_{\tau} (\mu_0^{1/2} \vec{J})] \cdot \vec{H}^t dS. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Аналогично из уравнений (2.67), (2.74) и (2.68), (2.71) получаем следующую систему относительно модовых амплитуд i_n^e и i^t :

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} K_{nn'}^{ee} \partial_{\tau\tau} i_{n'}^e - \sum_{n'} L_{nn'}^{ee} \partial_{zz} i_{n'}^e + q_n^2 i_n^e + K_n^{et} \partial_{\tau\tau} i^t = \\ & = -\frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J})) q_n^{-1} \Psi_n^e dS - \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_0^{1/2} J_z \cdot \vec{E}_n^e dS, \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$K^{tt} \partial_{\tau\tau} i^t - L^{tt} \partial_{zz} i^t - \sum_{n'} L_{n'}^{te} \partial_{zz} i_{n'}^e = \frac{1}{S} \int_S \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \cdot \vec{E}^t dS - \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_0^{1/2} J_z \cdot \vec{E}^t dS \quad (2.101)$$

Следует отметить, что ввиду переопределённости исходной СЭВУ (2.64)-(2.75), (2.82)-(2.83), эволюционные уравнения описывающие поперечные модовые амплитуды в исследуемой структуре могут быть записаны в другом, отличном от уравнений (2.96)-(2.101), виде. Например, вместо независимых уравнений (2.96) и (2.97) для v_m^h и i_m^h амплитуд H - мод можно получить систему связанных уравнений:

$$\sum_{m'} K_{m'm}^{hh} \partial_{\tau\tau} v_{m'}^h - \sum_{m'} L_{m'm}^{hh} \partial_{zz} v_{m'}^h + p_m^2 v_m^h = -\partial_{\tau} \frac{1}{S} \int_S [\vec{z}_0 \times \mu_0^{1/2} \vec{J}] \cdot \vec{H}_m^h dS,$$

$$\partial_{\tau} i_m^h = -\sum_{m'} L_{m'm}^{hh} \partial_z v_{m'}^h.$$

Такого же рода замечания можно сделать и относительно остальных уравнений (2.98)-(2.101).

Эволюционные уравнения для вычисления продольных модовых амплитуд e_n , h_m также упрощаются. Для их расчета можно воспользоваться, например, следующими уравнениями, которые следуют из (2.83):

$$\partial_{\tau} e_n = -\sum_{n'} L_{nn'}^{ee} i_{n'}^e - \frac{1}{S} \int_S \mu_0^{1/2} J_z q_n^{-1} \Psi_n^e dS, \quad (2.102)$$

$$\partial_{\tau} h_m = -\sum_{m'} L_{m'm}^{hh} v_{m'}^h. \quad (2.103)$$

Таким образом, единая СЭВУ описывающая эволюцию полей во времени в плоскопараллельном волноводе с диэлектрическим слоем расщепилась на две подсистемы. Первая, состоящая из уравнений (2.96), (2.97) и (2.103), описывает только H - волны, а вторая, состоящая из уравнений (2.98)-(2.102), описывает совместную эволюцию E - и T - волн.

Возбудим в рассматриваемой структуре нестационарную волну электрическими токами следующего вида:

$$\vec{J} = \vec{x}_0 \delta(z) f(t) \quad (2.104)$$

где $\delta(z)$ – дельта функция Дирака, $f(t)$ – произвольная функция времени, которая далее будет конкретизирована в численном примере. Продольная компонента стороннего тока и объемная плотность сторонних зарядов равны нулю

$J_z = 0$ и $\rho = 0$. Подставив ток (2.104) в эволюционные уравнения (2.96)-(2.103), видим, что все эти уравнения за исключением только уравнений (2.99) и (2.101) являются однородными. Это означает, что при возбуждении структуры током (2.104) возникает только T -волна, которая за счет имеющейся связи между модовыми амплитудами возбудит также E -волны. H -волны при таком возбуждении не возникают, так как в рассматриваемой структуре отсутствует межмодовое взаимодействие H -волн с E - и T -волнами, поэтому дальнейший анализ связан с решением только уравнений (2.98)-(2.102). Используя матричные свойства (2.80) и (2.81), эти уравнения можно записать в разрешенном относительно производных по времени виде:

$$\begin{aligned}\partial_{\tau\tau}\mathbf{v}^e &= \mathbf{L}^{ee}(\mathbf{L}^{ee})^T \partial_{zz}\mathbf{v}^e - \mathbf{L}^{ee}\mathbf{q}^2\mathbf{v}^e + \mathbf{L}^{ee}(\mathbf{L}^{te})^T \partial_{zz}\mathbf{v}^t \\ \partial_{\tau\tau}\mathbf{v}^t &= L^{tt}\left[L^{tt} - (\mathbf{K}^{et})^T \mathbf{L}^{ee}(\mathbf{L}^{te})^T\right] \partial_{zz}\mathbf{v}^t - \\ &\quad - L^{tt}(\mathbf{K}^{et})^T \mathbf{L}^{ee}\left[(\mathbf{L}^{ee})^T \partial_{zz}\mathbf{v}^e - \mathbf{q}^2\mathbf{v}^e\right] - L^{tt}J^h\end{aligned}\quad (2.105)$$

$$\begin{aligned}\partial_{\tau\tau}\mathbf{i}^e &= (\mathbf{L}^{ee})^T \left[\mathbf{L}^{ee} - \mathbf{K}^{et}L^{tt}\mathbf{L}^{te}\right] \partial_{zz}\mathbf{i}^e - (\mathbf{L}^{ee})^T \mathbf{q}^2\mathbf{i}^e - \\ &\quad - (\mathbf{L}^{ee})^T \mathbf{K}^{et}L^{tt}\left[L^{tt}\partial_{zz}i^t + J^e\right]\end{aligned}\quad (2.106)$$

$$\begin{aligned}\partial_{\tau\tau}i^t &= L^{tt}L^{tt}\partial_{zz}i^t + L^{tt}\mathbf{L}^{te}\partial_{zz}\mathbf{i}^e + L^{tt}J^e \\ \partial_\tau\mathbf{e} &= -\mathbf{L}^{ee}\mathbf{i}^e\end{aligned}\quad (2.107)$$

Уравнения (2.105)-(2.107) записаны в более удобной матричной форме, определенной формулами (2.77). Здесь также введены следующие обозначения: $\mathbf{q}^2$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа задачи (2.89);

$$\begin{aligned}J^h(z,t) &= \frac{1}{S} \int_S \left[\vec{z}_0 \times \partial_\tau (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \right] \cdot \vec{H}^t dS \quad \text{и} \quad J^e(z,t) = \\ &= \frac{1}{S} \int_S \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \cdot \vec{E}^t dS - \text{заданные функции источников.}\end{aligned}$$

Распространение нестационарной T -волны. СЭВУ (2.105)-(2.107) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. При этом каждая из неизвестных функций является функцией двух переменных. Та-

кую систему можно решить с помощью метода конечных разностей [5-8]. Каждое из уравнений в СЭВУ (2.105)-(2.107) разрешено относительно производной по времени. Это обстоятельство позволяет получить явную конечно-разностную схему [8]. Согласно методу конечных разностей искомые функции двух переменных $u(z, \tau)$ (под u понимается любая из неизвестных модовых амплитуд $v_n^e, v^t, i_n^e, i^t, e_n$) дискретизируют на равномерной сетке. Значения функции в узлах сетки задаются в виде $u|_i^j = u(i \Delta z, j \Delta \tau); i, j \in \mathbb{Z}$. Производные от искомой функции приближенно определяются на той же сетке с помощью центральных конечных разностей: $\partial_{zz} u|_i^j \approx \Delta z^{-2} (u|_{i+1}^j - 2u|_i^j + u|_{i-1}^j)$, $\partial_\tau u|_i^j \approx \frac{1}{2} \Delta \tau^{-1} (u|_i^{j+1} - u|_i^{j-1})$, $\partial_{\tau\tau} u|_i^j \approx \Delta \tau^{-2} (u|_i^{j+1} - 2u|_i^j + u|_i^{j-1})$. Применяя описанный подход к СЭВУ (2.105)-(2.107) получим для нее следующую явную конечно-разностную схему для нахождения искомых функций в узлах сетки:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^e|_i^{j+1} &= a_1 (\mathbf{v}^e|_{i+1}^j + \mathbf{v}^e|_{i-1}^j) + a_2 \mathbf{v}^e|_i^j - \mathbf{v}^e|_i^{j-1} + a_3 (v^t|_{i+1}^j - 2v^t|_i^j + v^t|_{i-1}^j) \\ v^t|_i^{j+1} &= \alpha_1 (v^t|_{i+1}^j + v^t|_{i-1}^j) + \alpha_2 v^t|_i^j - v^t|_i^{j-1} + \alpha_3 (\mathbf{v}^e|_{i+1}^j + \mathbf{v}^e|_{i-1}^j) + \alpha_4 \mathbf{v}^e|_i^j + F|_i^j \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^e|_i^{j+1} &= b_1 (\mathbf{i}^e|_{i+1}^j + \mathbf{i}^e|_{i-1}^j) + b_2 \mathbf{i}^e|_i^j - \mathbf{i}^e|_i^{j-1} + b_3 (i^t|_{i+1}^j - 2i^t|_i^j + i^t|_{i-1}^j) + G_1|_i^j \\ i^t|_i^{j+1} &= \beta_1 (i^t|_{i+1}^j + i^t|_{i-1}^j) + \beta_2 i^t|_i^j - i^t|_i^{j-1} + \beta_3 (\mathbf{i}^e|_{i+1}^j - 2\mathbf{i}^e|_i^j + \mathbf{i}^e|_{i-1}^j) + G_2|_i^j \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{e}|_i^{j+1} = \mathbf{e}|_i^{j-1} - 2\Delta\tau \mathbf{L}^{ee} \mathbf{i}^e|_i^j \quad (2.110)$$

где введены коэффициенты численной схемы определены как:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 \mathbf{L}^{ee} (\mathbf{L}^{ee})^T, \quad a_3 = \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 \mathbf{L}^{ee} (\mathbf{L}^{te})^T \\ a_2 &= 2\mathbf{I} - 2 \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 \mathbf{L}^{ee} (\mathbf{L}^{ee})^T - \Delta\tau^2 \mathbf{L}^{ee} \mathbf{q}^2 \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 L^{tt} \left(L^{tt} - (\mathbf{K}^{et})^T \mathbf{L}^{ee} (\mathbf{L}^{te})^T \right) \\
\alpha_2 &= 2 - 2 \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 L^{tt} \left(L^{tt} - (\mathbf{K}^{et})^T \mathbf{L}^{ee} (\mathbf{L}^{te})^T \right) \\
\alpha_3 &= - \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 L^{tt} (\mathbf{K}^{et})^T \mathbf{L}^{ee} (\mathbf{L}^{ee})^T \\
\alpha_4 &= \Delta\tau^2 L^{tt} (\mathbf{K}^{et})^T \mathbf{L}^{ee} \left(\mathbf{q}^2 + \frac{2}{\Delta z^2} (\mathbf{L}^{ee})^T \right)
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 (\mathbf{L}^{ee})^T (\mathbf{L}^{ee} - \mathbf{K}^{et} L^{tt} \mathbf{L}^{te}), \quad b_3 = - \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 (\mathbf{L}^{ee})^T \mathbf{K}^{et} L^{tt} L^{tt} \\
b_2 &= 2\mathbf{I} - 2 \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 (\mathbf{L}^{ee})^T (\mathbf{L}^{ee} - \mathbf{K}^{et} L^{tt} \mathbf{L}^{te}) - \Delta\tau^2 (\mathbf{L}^{ee})^T \mathbf{q}^2
\end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 L^{tt} L^{tt}, \quad \beta_2 = 2 - 2 \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 L^{tt} L^{tt}, \quad \beta_3 = \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta z} \right)^2 L^{tt} \mathbf{L}^{te} \tag{2.114}$$

Правые части (функции источников) определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
F(z, \tau) &= -\Delta\tau^2 L^{tt} \sqrt{\mu_0} \partial_\tau f(\tau) \delta(z) \\
G_1(z, \tau) &= -\Delta\tau^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\eta - \eta + 1}{\varepsilon}} (\mathbf{L}^{ee})^T \mathbf{K}^{et} L^{tt} \sqrt{\mu_0} f(\tau) \delta'(z) \\
G_2(z, \tau) &= \Delta\tau^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\eta - \eta + 1}{\varepsilon}} L^{tt} \sqrt{\mu_0} f(\tau) \delta'(z)
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Неизвестные модовые амплитуды $\mathbf{v}^e$, $\mathbf{i}^e$ и $\mathbf{e}$ являются бесконечномерными векторами, поэтому бесконечная система конечно-разностных уравнений (2.108)-(2.110) при её решении должна быть редуцирована к конечной. При этом учитываются взаимодействия только нескольких первых мод. Это вносит в решение ошибку усечения, которая, как будет показано ниже, быстро убывает с увеличением количества учитываемых мод, что говорит о хорошей сходимости введенного модового разложения для искомых полей. Для иллюстрации этой сходимости рассчитаем для различного количества учитываемых модовых амплитуд распространение импульсной волны в рассматриваемой структуре

при возбуждении током (2.104) с временной зависимостью в виде лягеровского импульса:

$$f(t) = (t/T)^2 (1 - t/3T) \exp(-t/T). \quad (2.116)$$

Решение, полученное с помощью ММБ сравнивается с решением, которое получено с помощью метода FDTD по схеме Yee [144]. В конечно-разностной схеме использовался шаг сетки $\Delta z = \Delta x = 1/40$, шаг по времени $\Delta \tau = \Delta z/2$. В ММБ использовался такой же шаг по z и τ . Диэлектрическая проницаемость слоя $\varepsilon = 3$, толщина слоя $\theta = 0,25$, временная форма импульса возбуждения в виде (2.116) с параметром $T = 1$.

На рис. 2.3 показано распределение поперечной компоненты напряженности электрического поля в поперечном сечении волновода в зависимости от времени на разных расстояниях от источников, рассчитанное с помощью ММБ с использованием схемы (2.108). Поле рассчитано в пятимодовом приближении, т.е. в разложении (2.57) учитывалась только единственная T -волна и первые четыре E -волны. Как показано ниже, такого сравнительно малого числа модовых амплитуд уже достаточно, чтобы корректно описать поля в поперечно-неоднородном волноводе. Из рис. 2.3 видно, что вблизи от источников форма импульса подобна форме возбуждающего сигнала, по мере удаления от источников форма импульса меняется из-за преобразования T -волны в диспергирующие E -волны. Уже на расстоянии от источников в $10d$ форма импульса меняется существенным образом, а перед фронтом основного импульса появляется его предвестник.

На левой части рис. 2.4 показано сравнение точного решения, получаемого при моделировании методом FDTD, с решением, полученным по численной схеме ММБ с использованием 1 и 3 мод). Из приведенных графиков видно, что уже в трех-модовом приближении (учитывается T -мода и первые две E -моды) наблюдается совпадение решений. Более детально сходимость ММБ показана на правой части рис. 2.4. На нем приводится, в зависимости от времени, взятая по модулю разность между поперечными компонентами напряженности элек-

трического поля, которые вычислены с учетом $n + 1$ и n мод. Видно, что моды, начиная с пятой, вносят существенно меньший вклад в решение, чем первые четыре. Учет последующих мод даёт экспоненциально малые поправки. Такая быстрая сходимость, прежде всего, обусловлена тем, что при построении модового базиса учитываются все граничные условия в поперечном сечении волновода, т.е. не только суммы модовых разложений (2.57)-(2.58), (2.60) и (2.62), но и каждая базисная функция в отдельности (каждое слагаемое ряда) удовлетворяет граничным условиям в поперечном сечении волновода. Кроме этого необходимо отметить, что преобразование возбуждаемой моды в нераспространяющиеся моды очень мало, а в спектральной полосе, занимаемой импульсом возбуждения, распространяющимися являются только первые три-четыре моды (спектр лягеровского импульса убывает как f^{-3}).

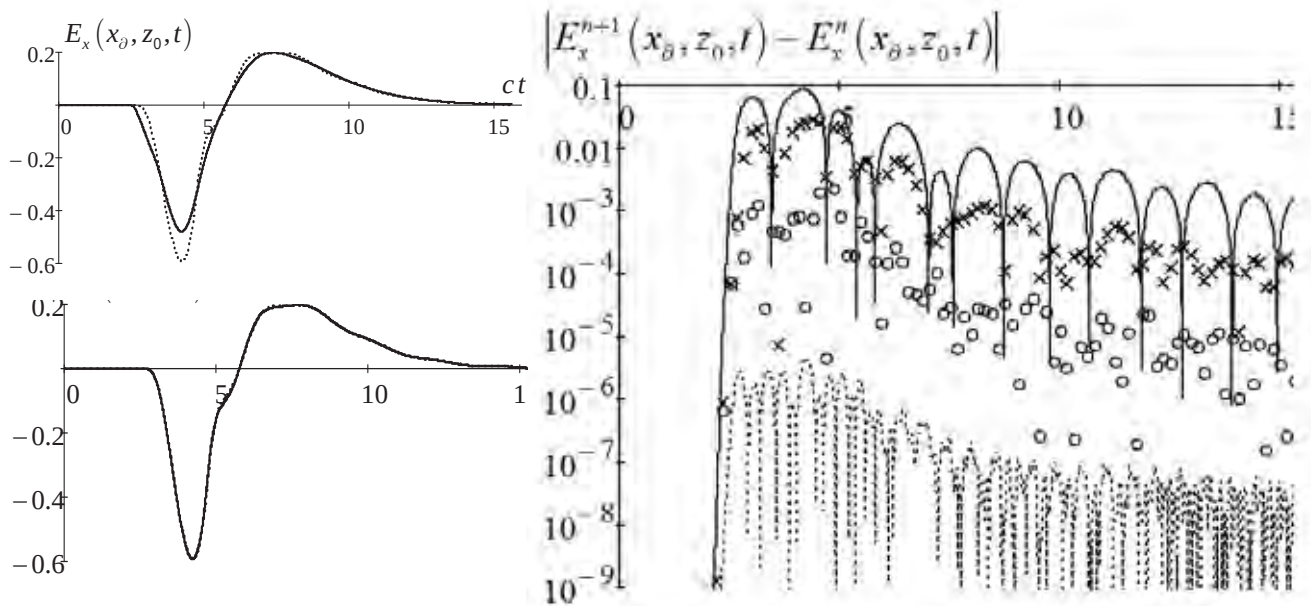


Рис. 2.4. Сравнение с FDTD, анализ сходимости. Слева: временная зависимость поля в некоторой точке пространства в области диэлектрика при моделировании методом FDTD (точки) и методом ММБ (сверху – одномодовое приближение, внизу – трёхмодовое). Справа: разность между последовательными приближениями методом ММБ с учётом n и $n + 1$ мод для

$$n = 1(-), 2(\times), 3(o), 4(\cdots).$$

2.4. Построение модового базиса для цилиндрического волновода с диэлектрическим стержнем. Двухмодовый анализ дисперсионных характеристик в частотной области.

Особенностью поперечно-неоднородных волноведущих структур является то, что волны в них являются гибридными (шестикомпонентными). Чтобы определить какой тип волны имеет место HE или EH осуществляют предельный переход от частично заполненного волновода к однородно заполненному. Если при таком переходе гибридная волна перешла в пятикомпонентную H - волну, то ее называют HE ; если в E - волну, то изначальная гибридная волна была EH типа. Кроме того, гибридным волнам в поперечно-неоднородных волноводах присущи некоторые особенности, которые отсутствуют у волн пустого (однородно заполненного) волновода. У таких гибридных волн наблюдается явление аномальной дисперсии, инверсия критических частот, образование встречных потоков мощности [263]. Кроме перечисленного, в некоторых поперечно-неоднородных структурах возможен так называемый режим комплексных волн, т.е. в волноводе, в котором отсутствуют потери, возникают затухающие волны с комплексными постоянными распространения. Такие волны принято называть комплексными. Что касается математической стороны, то этот факт легко объясняется тем, что краевая задача, описывающая процесс в частотной области, оказывается несамосопряженной, и поэтому её спектр не всегда является вещественным [263].

Подраздел посвящён применению ММБ к анализу структуры, в которой возможен режим комплексных волн. В качестве примера рассмотрим простейший поперечно-неоднородный волновод, при определенных условиях поддерживающий режим комплексных волн – круглый волновод с круглым диэлектрическим стержнем (рис. 2.5). В работе [263] режим комплексных волн в таком волноводе полностью изучен в ЧО. Здесь же мы попытаемся в двухмодовом приближении проанализировать процесс обмена E - H - условиями при пересечении дисперсионных кривых.

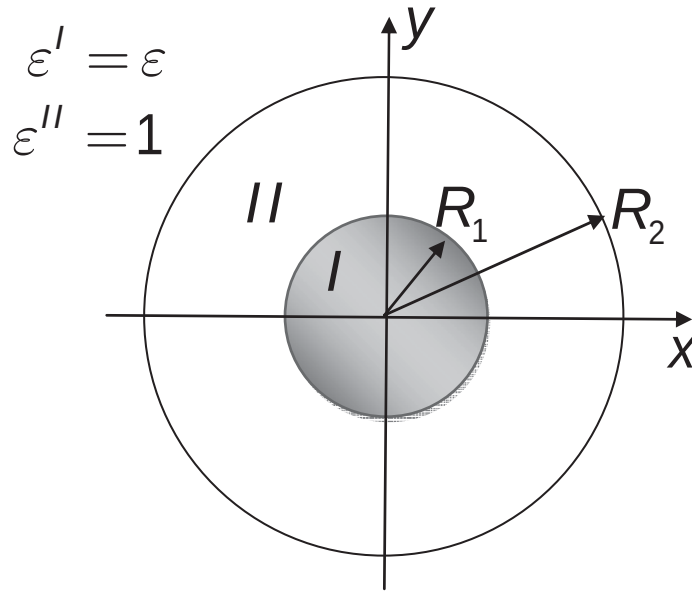


Рис. 2.5. Геометрия задачи: круглый волновод с круглым диэлектрическим стержнем на оси.

Анализ начинаем с построения модового базиса, т.е. с решения задач (2.40), (2.46) и (2.53). В данном случае $\mu_{\perp} = 1$, а поперечная диэлектрическая проницаемость является кусочно-постоянной функцией:

$$\varepsilon_{\perp}(\rho) = \begin{cases} \varepsilon, & \rho \in [0, R_1) \\ 1, & \rho \in [R_1, R_2) \end{cases} \quad (2.117)$$

Рассматриваемую задачу естественно решать в цилиндрической системе координат $\{\rho, \varphi, z\}$ в которой поперечный оператор набла определен следующим образом:

$$\nabla_{\perp} = \vec{\rho}_0 \partial_{\rho} + \vec{\varphi}_0 \rho^{-1} \partial_{\varphi}. \quad (2.118)$$

С учетом (2.117) и (2.118) задача (2.40) упрощается к следующей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi_m^H}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_m^H}{\partial \varphi^2} + p_m^2 \Phi_m^H(\rho, \varphi) = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \varepsilon_{\perp}^{-1} \frac{\partial \Phi_m^H}{\partial \rho} \right) + \frac{\varepsilon_{\perp}^{-1}}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_m^H}{\partial \varphi^2} + p_m^2 \Psi_m^H(\rho, \varphi) = 0 \\ \left| \frac{d\Phi_m^H}{d\rho} \right|_{\rho=0} < \infty, \left| \frac{d\Psi_m^H}{d\rho} \right|_{\rho=0} < \infty, \frac{d\Phi_m^H}{d\rho} \Big|_{\rho=R_2} = 0, \frac{d\Psi_m^H}{d\rho} \Big|_{\rho=R_2} = 0, \\ \Phi_m^H(\rho, \varphi) = \Phi_m^H(\rho, \varphi + 2\pi), \Psi_m^H(\rho, \varphi) = \Psi_m^H(\rho, \varphi + 2\pi) \end{array} \right. \quad (2.119)$$

Здесь учтено, что нормаль совпадает с ортом $\vec{\rho}_0$. Так как диэлектрическая проницаемость (2.117) является постоянной функцией в двух областях, то решать задачу (2.119) будем методом частичных областей. Первой областью будет множество внутренность стержня, второй остальная внешняя часть. В дальнейшем все величины, относящиеся к первой области, заполненной диэлектриком, будем обозначать надстрочным индексом I , а все величины, которые относятся ко второй области, не заполненной диэлектриком, обозначаются надстрочным индексом II (см. рис. 2.5). Из угловых гармоник будем использовать первую, т.е. в множителях $\cos(j\varphi)$ и $\sin(j\varphi)$ выберем $j=1$, причем в L^H подпространстве будем пользоваться только синусами, а в L^E подпространстве — только косинусами. Только такие моды оказываются связанными друг с другом (другие угловые индексы будут ортогональны к этим модам). Тогда с учетом сказанного решение задачи (2.119) в каждой их областей выражается через функции Бесселя и $\sin \varphi$ и имеет вид:

$$\begin{aligned}\Psi_m^{H^I} &= [A_{1,m}J_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon}\rho) + A_{3,m}I_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon}\rho)]\sin \varphi, \\ \Psi_m^{H^{II}} &= [B_{1,m}J_1(p_m\rho) + B_{2,m}Y_1(p_m\rho) + B_{3,m}I_1(p_m\rho) + B_{4,m}K_1(p_m\rho)]\sin \varphi, \\ \Phi_m^{H^I} &= \sqrt{\varepsilon}[A_{1,m}J_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon}\rho) - A_{3,m}I_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon}\rho)]\sin \varphi, \\ \Phi_m^{H^{II}} &= [B_{1,m}J_1(p_m\rho) + B_{2,m}Y_1(p_m\rho) - B_{3,m}I_1(p_m\rho) - B_{4,m}K_1(p_m\rho)]\sin \varphi.\end{aligned}\tag{2.120}$$

Здесь $J_s(\cdot)$ и $Y_s(\cdot)$ — функции Бесселя первого и второго рода s -го порядка, $I_s(\cdot)$ и $K_s(\cdot)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода s -го порядка. Воспользовавшись формулами (2.39), найдем векторные базисные функции:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_m^{h'} &= \vec{\rho}_0 \frac{\cos \varphi}{\rho p_m \varepsilon^{\frac{1}{2}}} \left[A_{1,m} J_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) - A_{3,m} I_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) \right] - \\
&- \vec{\varphi}_0 \frac{\sin \varphi}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \left[A_{1,m} \left(J_0(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) - \frac{J_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho)}{p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho} \right) - A_{3,m} \left(I_0(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) - \frac{I_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho)}{p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho} \right) \right] \\
\vec{E}_m^{h''} &= \vec{\rho}_0 \frac{\cos \varphi}{\rho p_m} \left[B_{1,m} J_1(p_m \rho) + B_{2,m} Y_1(p_m \rho) - B_{3,m} I_1(p_m \rho) - B_{4,m} K_1(p_m \rho) \right] - \\
&- \vec{\varphi}_0 \sin \varphi \left[B_{1,m} \left(J_0(p_m \rho) - \frac{J_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) + B_{2,m} \left(Y_0(p_m \rho) - \frac{Y_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) - \right. \\
&\quad \left. - B_{3,m} \left(I_0(p_m \rho) - \frac{I_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) + B_{4,m} \left(K_0(p_m \rho) + \frac{K_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) \right] \\
\vec{H}_m^{H'} &= \vec{\varphi}_0 \frac{\cos \varphi}{\rho p_m} \left[B_{1,m} J_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) + B_{3,m} I_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) \right] + \\
&+ \vec{\rho}_0 \frac{\sin \varphi}{\varepsilon^{-\frac{1}{4}}} \left[A_{1,m} \left(J_0(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) - \frac{J_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho)}{p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho} \right) + A_{3,m} \left(I_0(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho) - \frac{I_1(p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho)}{p_m \sqrt[4]{\varepsilon} \rho} \right) \right] \\
\vec{H}_m^{h''} &= \vec{\varphi}_0 \frac{\cos \varphi}{p_m \rho} \left[B_{1,m} J_1(p_m \rho) + B_{2,m} Y_1(p_m \rho) + B_{3,m} I_1(p_m \rho) + B_{4,m} K_1(p_m \rho) \right] \quad (2.121) \\
&+ \vec{\rho}_0 \sin \varphi \left[B_{1,m} \left(J_0(p_m \rho) - \frac{J_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) + B_{2,m} \left(Y_0(p_m \rho) - \frac{Y_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) + \right. \\
&\quad \left. + B_{3,m} \left(I_0(p_m \rho) - \frac{I_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) - B_{4,m} \left(K_0(p_m \rho) + \frac{K_1(p_m \rho)}{p_m \rho} \right) \right]
\end{aligned}$$

Неизвестные константы $A_{1,m}$, $A_{3,m}$, $B_{1,m}$, $B_{2,m}$, $B_{3,m}$ и $B_{4,m}$ в (2.120)-(2.121) определяются из двух неиспользованных граничных условий на $\rho = R_2$ и четырех условий непрерывности для величин Φ_m^h , $\varepsilon_{\perp}^{-1} \partial_{\rho} \Phi_m^h$, Ψ_m^h и $\partial_{\rho} \Psi_m^h$ на границе раздела диэлектриков при $\rho = R_1$, следующие из граничных условий для компонент полей на границе раздела диэлектриков и формул (2.39). Эти граничные условия приводят к следующей СЛАУ:

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon^{-\frac{1}{4}} J(\eta) & -\varepsilon^{-\frac{1}{4}} I(\eta) & -J(\theta) & -Y(\theta) & I(\theta) & -K_0(\theta) \\
\varepsilon^{\frac{1}{4}} J(\eta) & \varepsilon^{\frac{1}{4}} I(\eta) & -J(\theta) & -Y(\theta) & -I(\theta) & K(\theta) \\
\varepsilon^{\frac{1}{2}} J_1(\eta) & -\varepsilon^{\frac{1}{2}} I_1(\eta) & -J_1(\theta) & -Y_1(\theta) & I_1(\theta) & K_1(\theta) \\
J_1(\eta) & I_1(\eta) & -J_1(\theta) & -Y_1(\theta) & -I_1(\theta) & -K_1(\theta) \\
0 & 0 & J(\chi) & Y(\chi) & -I(\chi) & K(\chi) \\
0 & 0 & J(\chi) & Y(\chi) & I(\chi) & -K(\chi)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_{1,m} \\
A_{3,m} \\
B_{1,m} \\
B_{2,m} \\
B_{3,m} \\
B_{4,m}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix} \quad (2.122)$$

где $J(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}$, $Y(x) = Y_0(x) - \frac{Y_1(x)}{x}$, $I(x) = I_0(x) - \frac{I_1(x)}{x}$,

$K(x) = K_0(x) + \frac{K_1(x)}{x}$, $\eta = p_m \sqrt[4]{\varepsilon} R_1$, $\theta = p_m R_1$, $\chi = p_m R_2$. Собственные числа

p_m^2 задачи (2.119) находятся из условия существования нетривиального решения системы (2.122) и имеют физический смысл частот отсечки для мод H -типа. Константы $A_{1,m}$, $A_{3,m}$, $B_{1,m}$, $B_{2,m}$, $B_{3,m}$ и $B_{4,m}$ являются нетривиальным решением однородной СЛАУ (2.122), которое затем нормируется в соответствии с условиями нормировки для векторных базисных функций (2.41) или условием биортогональности (2.42) для скалярных потенциалов.

Задача (2.46) в рассматриваемом случае также упрощается и принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_n^e}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^e}{\partial \varphi^2} + q_n^2 \varepsilon_{\perp} \Psi_n^e(\rho, \varphi) = 0 \\
\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \Psi_n^e}{\partial \rho} \right) + \frac{\varepsilon_{\perp}}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_n^e}{\partial \varphi^2} + q_n^2 \varepsilon_{\perp} \Phi_n^e(\rho, \varphi) = 0 \\
|\Phi_n^E(0, \varphi)| < +\infty, |\Psi_n^e(0, \varphi)| < +\infty, \Phi_n^e(R_2, \varphi) = 0, \Psi_n^e(R_2, \varphi) = 0, \\
\Psi_n^e(\rho, \varphi) = \Psi_n^e(\rho, \varphi + 2\pi), \Phi_n^e(\rho, \varphi) = \Phi_n^e(\rho, \varphi + 2\pi)
\end{array} \right. \quad (2.123)$$

Решая задачу (2.123) методом частичных областей, находим решение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{E'} &= [C_{1,n}J_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) + C_{3,n}I_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)]\cos\varphi, \\
\Psi_n^{E''} &= [D_{1,n}J_1(q_n\rho) + D_{2,n}Y_1(q_n\rho) + D_{3,n}I_1(q_n\rho) + D_{4,n}K_1(q_n\rho)]\cos\varphi, \\
\Phi_n^{E'} &= \sqrt{\varepsilon}[C_{1,n}J_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) - C_{3,n}I_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)]\cos\varphi, \\
\Phi_n^{E''} &= [D_{1,n}J_1(q_n\rho) + D_{2,n}Y_1(q_n\rho) - D_{3,n}I_1(q_n\rho) - D_{4,n}K_1(q_n\rho)]\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Воспользовавшись формулами (2.45), находим по известным скалярным потенциалам (2.124) соответствующие векторные базисные функции:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_n^{E'} &= -\vec{\varphi}_0 \frac{\sin\varphi}{\rho q_n} [C_{1,n}J_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) + C_{3,n}I_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)] + \\
&+ \vec{\rho}_0 \frac{\cos\varphi}{\varepsilon^{-\frac{1}{4}}} \left[C_{1,n} \left(J_0(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) - \frac{J_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)}{q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho} \right) + C_{3,n} \left(I_0(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) - \frac{I_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)}{q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho} \right) \right] \\
\vec{E}_n^{E''} &= \vec{\rho}_0 \cos\varphi \left[D_{1,n} \left(J_0(q_n\rho) - \frac{J_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) + D_{2,n} \left(Y_0(q_n\rho) - \frac{Y_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) + \right. \\
&+ D_{3,n} \left(I_0(q_n\rho) - \frac{I_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) - D_{4,n} \left(K_0(q_n\rho) + \frac{K_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) \left. \right] - \\
&- \vec{\varphi}_0 \frac{\sin\varphi}{\rho q_n} [D_{1,n}J_1(q_n\rho) + D_{2,n}Y_1(q_n\rho) + C_{3,n}I_1(q_n\rho) + D_{4,n}K_1(q_n\rho)] \\
\vec{H}_n^{E'} &= \vec{\rho}_0 \frac{\sin\varphi}{q_n\rho\varepsilon^{\frac{1}{2}}} [C_{1,n}J_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) - C_{3,n}I_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)] + \\
&+ \vec{\varphi}_0 \frac{\cos\varphi}{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}} \left[C_{1,n} \left(J_0(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) - \frac{J_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)}{q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho} \right) - C_{3,n} \left(I_0(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho) - \frac{I_1(q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho)}{q_n\sqrt[4]{\varepsilon}\rho} \right) \right] \\
\vec{H}_n^{E''} &= \vec{\rho}_0 \frac{\sin\varphi}{q_n\rho} [D_{1,n}J_1(q_n\rho) + D_{2,n}Y_1(q_n\rho) - D_{3,n}I_1(q_n\rho) - D_{4,n}K_1(q_n\rho)] + \\
&+ \vec{\varphi}_0 \frac{\cos\varphi}{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}} \left[D_{1,n} \left(J_0(q_n\rho) - \frac{J_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) + D_{2,n} \left(Y_0(q_n\rho) - \frac{Y_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) - \right. \\
&- D_{3,n} \left(I_0(q_n\rho) - \frac{I_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) + D_{4,n} \left(K_0(q_n\rho) + \frac{K_1(q_n\rho)}{q_n\rho} \right) \left. \right]
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Неизвестные константы $C_{1,n}$, $C_{3,n}$, $D_{1,n}$, $D_{2,n}$, $D_{3,n}$ и $D_{4,n}$ в (2.124)-(2.125) определяются из двух неиспользованных граничных условий при $\rho = R_2$ и четырех условий непрерывности для величин Φ_n^e , $\partial_\rho \Phi_n^e$, Ψ_n^e и $\varepsilon_\perp \partial_\rho \Psi_n^e$ на грани-

це раздела сред $\rho = R_1$, следующие из граничных условий для компонент поля на границе раздела двух диэлектриков и формул (2.45). Эти условия приводят к следующей однородной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} J(h) & -\varepsilon^{\frac{3}{4}} I(h) & -J(\nu) & -Y(\nu) & I(\nu) & -K(\nu) \\ \varepsilon^{\frac{5}{4}} J(h) & \varepsilon^{\frac{5}{4}} I(h) & -J(\nu) & -Y(\nu) & -I(\nu) & K(\nu) \\ J_1(h) & I_1(h) & -J_1(\nu) & -Y_1(\nu) & -I_1(\nu) & -K_1(\nu) \\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} J_1(h) & -\varepsilon^{\frac{1}{2}} I_1(h) & -J_1(\nu) & -Y_1(\nu) & I_1(\nu) & K_1(\nu) \\ 0 & 0 & J_1(\gamma) & Y_1(\gamma) & I_1(\gamma) & K_1(\gamma) \\ 0 & 0 & J_1(\gamma) & Y_1(\gamma) & -I_1(\gamma) & -K_1(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,m} \\ A_{3,m} \\ B_{1,m} \\ B_{2,m} \\ B_{3,m} \\ B_{4,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.126)$$

где $h = q_n \sqrt[4]{\varepsilon} R_1$, $\nu = q_n R_1$, $\gamma = q_n R_2$. Собственные значения задачи (2.123) q_n^2 определяются из условия существования нетривиального решения системы (2.126) и соответствуют частотам отсечки для E -волн. Константы $C_{1,n}$, $C_{3,n}$, $D_{1,n}$, $D_{2,n}$, $D_{3,n}$ и $D_{4,n}$ являются нетривиальным решением однородной СЛАУ (2.126), которое затем нормируется в соответствии с условиями нормировки для векторных базисных функций (2.47) или условием биортогональности для скалярных потенциалов (2.48).

Задачи (2.53) имеют только тривиальные нулевые решения, что и следует ожидать, так как в круглом волноводе не могут существовать T -волны.

Теперь можем рассчитать матрицы (2.76). В рассматриваемом случае, как и в общем случае односвязного волновода, ненулевыми будут только шесть следующих матриц $\mathbf{L}^{hh}$, $\mathbf{L}^{ee}$, $\mathbf{L}^{he}$, $\mathbf{K}^{hh}$, $\mathbf{K}^{ee}$ и $\mathbf{K}^{eh}$, что проверяется непосредственным вычислением. Полагая в СЭВУ (2.64) – (2.75) гармоническую зависимость от времени в предположении, что $\varepsilon_{||} = \mu_{||} = 1$ получим ДС в следующем виде:

$$\det \begin{pmatrix} k^2 \mathbf{K}^{hh} - \beta^2 \mathbf{L}^{hh} - \mathbf{p}^2 & -\beta^2 \mathbf{L}^{he} \\ k^2 \mathbf{K}^{eh} & k^2 \mathbf{K}^{ee} - \beta^2 \mathbf{L}^{ee} - \mathbf{q}^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.127)$$

таким образом, чтобы в некоторой точке имело место касание двух дисперсионных кривых. Как известно [356] такие особые точки в ДС принято называть морсовскими.

Как уже отмечалось в начале этого подраздела, в работе [263] было выполнено полное исследование рассмотренного здесь волновода в частотной области. ДС получены в виде трансцендентных уравнений, содержащие функции Бесселя. Чтобы проанализировать режим комплексных волн в рамках МКА в работе [263] приходилось совместно решать трансцендентные уравнения. В рамках предложенной модификации ММБ дисперсионный анализ сводится к решению неявного относительно волнового числа и постоянной распространения полинома (2.127), что существенно упрощает анализ. Режим комплексных волн в рамках ММБ проявляется тем, что полином с вещественными коэффициентами (2.127) имеет комплексные корни.

Полученные в этом подразделе выражения для модовых функций закрытого круглого волновода с диэлектрическим стержнем окажутся полезными в последующих разделах (подраздел 4.3) при построении модового базиса открытого круглого диэлектрического волновода. Главное отличие будет в том, что вместо граничных условий на металлической стенке волновода, необходимо будет удовлетворить граничному условию на бесконечности. Это приведёт к непрерывности спектра допустимых значений параметра разделения p .

2.5. Пример применения вычислительной схемы для волноводов сложного сечения на примере экранированной микрополосковой линии.

В этом подразделе мы продемонстрируем возможность применения метода для более сложных реалистичных структур. В качестве такой структуры рассмотрим экранированную микрополосковую линию. В ней может распространяться квази-ТЕМ волна, не имеющая отсечки, поэтому такие линии часто используются для передачи сигналов, особенно цифровых.

В качестве такой линии передачи рассмотрим структуру, изображенную на рис. 2.7. Она представляет собой прямоугольный волновод с плоским слоем диэлектрика, на котором расположен прямоугольный проводник. Диэлектрик характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью ε . Вводимая в ЧО для такой структуры T -волна действительно не имеет частоты отсечки, однако пространственная конфигурация T -волны зависит от частоты (является квази T -волной), что приводит к дисперсии и расплыванию (искажению формы) импульса. Решить поставленную задачу в частотной области достаточно сложно, так как необходимо широкий спектр импульса разбить на дискретные частоты, на каждой частоте найти модовые распределения, постоянные распространения для них и использовать их для распространения этой частотной компоненты на требуемое расстояние. Далее необходимо просуммировать все частотные компоненты и получить временную зависимость в требуемой точке. Данная задача осложнена тем, что не только постоянные распространения, но и модовые функции зависят от частоты и задача их нахождения достаточно трудоёмка, так как требует обращения больших матриц, получаемых при формулировании этой задачи методом моментов или конечных элементов.

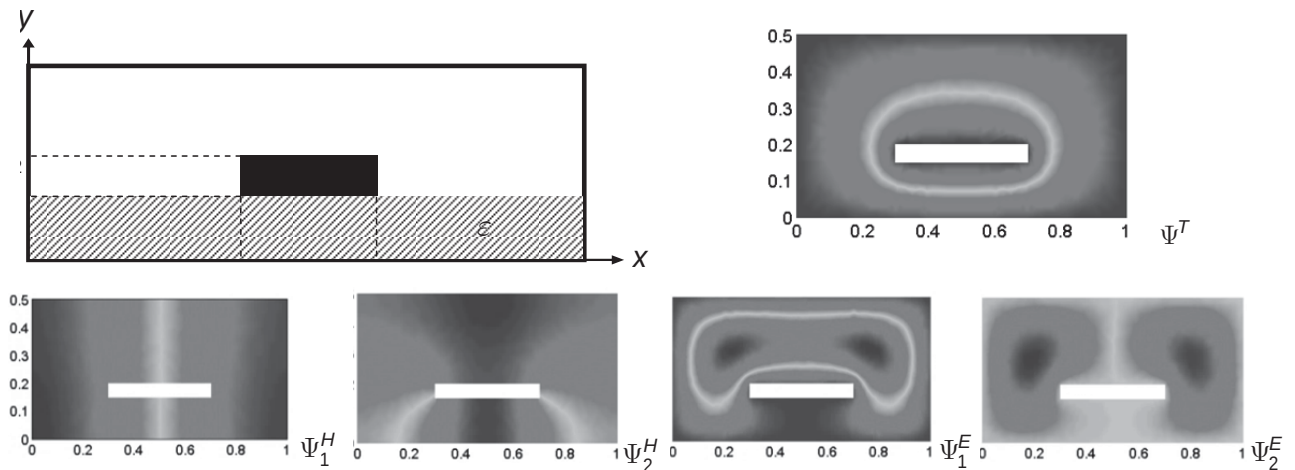


Рис. 2.7. Геометрия задачи и некоторые вычисленные скалярные модовые функции для экранированной микрополосковой линии.

В то же время, как было показано в предыдущих подразделах, введенные в построенной модификации ММБ моды, в том числе и T -, не зависят от частоты по построению. То есть модовые функции необходимо получить один раз.

Это можно сделать с помощью любого из множества достаточно хорошо отработанных методов решения задач на собственные значения эллиптического типа. Итак, нужно решить граничные эллиптические задачи (2.40), (2.46) и (2.53). Методом конечных элементов с помощью пакета Partial Differential Equation Toolbox входящего в систему MATLAB, были получены решения для нескольких первых мод. На рис. 2.7 представлены соответствующие распределения некоторых скалярных модовых функций, вычисленные при следующих значениях параметров, взятых достаточно произвольно: $a = 1$; $a_1 = 0,3$; $a_2 = 0,7$; $b = 0,5$; $b_1 = 0,15$; $b_2 = 0,2$ $\varepsilon = 3$. Стоит отметить, что при решении методом конечных элементов, структура разбивается на треугольники разных размеров (неструктурированная сетка), причём это происходит адаптивно так, чтобы в областях быстрого изменения поля (вблизи рёбер) сетка была гуще. В результате задача решается достаточно точно и эффективно. После получения решения, мы имеем значения функции в вершинах или центрах треугольников (в зависимости от типа используемых конечных элементов) и соответствующие им собственные значения. Этой информации достаточно, чтобы рассчитать значения интегралов (2.78) для матричных коэффициентов СЭВУ. После этого, по численной схеме наподобие (2.108)-(2.110) можно рассчитать модовые амплитуды для нескольких первых мод при распространении волны вдоль волновода. Результирующие временные зависимости полей в любых точках можно получить, суммируя ряды (2.57), (2.58), (2.60), (2.62), в которых модовые функции, заданные на треугольниках могут быть интерполированы в пределах конечных элементов.

В результате мы эффективно разделили исходную сложную задачу на две достаточно простые для расчёта подзадачи: эллиптическую задачу на собственные значения, которая решается методом конечных элементов с использованием широко распространённых солверов (в данном случае PDE Toolbox из MATLAB), и гиперболическую часть, соответствующую распространению волны, которая решается методом FDTD по явной численной схеме шагания во времени наподобие построенной для плоскопараллельного волновода схеме (2.108)-(2.110).

Выводы к разделу 2

Метод модового базиса для закрытых цилиндрических волноводов обобщен на случай волноводов с многосвязной областью поперечного сечения и факторизованной зависимостью материальных параметров среды. Для этого дополнительно сформулирована задача на собственные значения для ТЕМ-волн, обоснованно разделение функционального пространства решений на Е-, Н-, и Т- волны. Получена система эволюционных волноводных уравнений (СЭВУ), описывающая изменение временной формы модовых амплитуд при распространении волны вдоль волновода. СЭВУ, в частности, описывает межмодовые преобразования, происходящие между всеми типами волн. Этим преобразованиям соответствуют матрицы коэффициентов, часть из которых оказались тождественно нулевыми матрицами, для остальных были доказаны несколько соотношений, позволяющих выражать одни матрицы через другие. Доказанные свойства матричных коэффициентов были использованы при построении численной схемы решения СЭВУ. Получена схема явного вида, когда временная производная выражается через остальные слагаемые, что позволяет шагать во времени от начальных условий. Обобщение метода на волноводы с многосвязной областью сечения позволило эффективно рассматривать распространение импульсов в актуальном классе линий передачи с квази-ТЕМ волнами, например, в экранированных микрополосковых линиях на диэлектрической подложке.

По сравнению с традиционными методами предложенный метод имеет целый ряд преимуществ. Четырехмерная задача заменяется двумерной задачей на определение базиса и одномерной нестационарной задачей распространения для нескольких связанных волн. Когда такую задачу решают распространенными методами FDTD, FVTD или FEM, то дискретизировать нужно весь объем волновода (задача трехмерная в пространстве). Вместо этого в ММБ дискретизируются лишь несколько волновых каналов вдоль волновода (задача одномерная, векторная). Проведённые численные эксперименты установили быструю сходимость модовых разложений для сигналов с ограниченной спектральной

полосой. Сходимость решений при увеличении числа учитываемых мод становится экспоненциальной, как только учтены все моды (конечное число), распространяющиеся в полосе частот сигнала. То есть получено экспоненциальную сходимость вместо степенной сходимости в традиционных сеточных методах. Следует отметить, что традиционные модовые методы во временной области непригодны для анализа распространения импульсных сигналов, поскольку требуют решения сложной граничной задачи на каждой частоте спектра сигнала. Вместо этого, при использовании предложенного подхода модовые распределения не зависят от частоты и должны быть определены только один раз, что продемонстрировано на примере анализа распространения импульса в экранированной микрополосковой линии.

РАЗДЕЛ 3

МЕТОД МОДОВОГО БАЗИСА В КОНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Раздел посвящен построению модификации метода модового базиса во временной области для анализа процессов возбуждения и распространения нестационарных волн в неоднородных многосвязных конических линиях передачи, заполненных средой с факторизованной зависимостью параметров от угловых координат и от радиальной и временной координаты. Рассмотрена задача о построении модового базиса для биконического волновода, результаты которой будут использоваться в дальнейшем в подразделе 5.3.4 для расчёта излучения биконической антенны методом согласования мод. Кроме того, рассмотрена задача об излучении кольца с нестационарным током, решение проведено на основании точной формулы, полученной методом запаздывающих потенциалов, и на основе модового разложения. Изучена сходимость модового разложения для различных параметров задачи. Рассмотрен простейший случай возбуждения волны нестационарным электрическим диполем, приведены операторы распространения для дипольной моды, которые в дальнейшем будут использованы в подразделе 5.2.3 для анализа излучения диполя в диэлектрическом шаре.

Основные результаты данного раздела изложены в работах автора [16, 23, 31, 41, 43, 52, 55, 62, 68, 77].

3.1. Введение

В предыдущем разделе развит подход позволяющий проводить анализ распространения нестационарных волн в регулярных многосвязных поперечно-неоднородных цилиндрических линиях передачи непосредственно во ВО. Этот подход можно применить и к коническим линиям передачи, проведя аналогичное рассмотрение в сферической системе координат. Построение этой модификации ММБ проводится аналогично второму разделу. Отличие состоит в том, что здесь задача решается не в цилиндрической системе координат, а в сферической. Теперь аналогом продольной координаты будет радиальная пространственная переменная, а в качестве поперечных координат используются угловые переменные.

Для свободного пространства модовые разложения излучаемых волн по сферическим гармоникам были впервые предложены в работе Hansena в 1935 году [341]. В дальнейшем этот подход получил развитие в 1954 в работах Bouwkamp [342]. В 1956 в работе Bailin [343] рассмотрена более сложная постановка для сфер и конусов. Применительно к задачам во временной области такой подход, основанный на модовых разложениях, был использован в работах Борисова [344, 345], Coilin [346], Shlivinski [347], Nevels [348]. Стоит также отметить работы в частотной области для сложных конических структур Сологуба [349], Дорошенко [350, 351], Гошина [352]. В последнее время существенные результаты были получены также в работах Назарчука и Куриляка [85, 86]. В рамках ММБ радиально-неоднородное пространство рассматривалось также в работах Думина А. Н. [353, 354]. От перечисленных выше работ предложенный подход на основе ММБ отличается, во-первых, возможностью рассматривать сложное диэлектрическое заполнение с угловой неоднородностью, во-вторых, построение ведётся во временной области, а значит, задачи импульсного возбуждения и широкополосного анализа могут быть обчислены наиболее естественным способом.

3.2. Получение задачи на модовый базис и системы эволюционных волноводных уравнений

Материалы этого подраздела изложены главным образом в работе автора [16].

Постановка задачи. Геометрия задачи изображена на рис. 3.1. Структура геометрии привязана к центру, с которым мы свяжем сферическую систему координат, задаваемую координатами r, θ, φ . Пространство заполнено средой, которая описывается диэлектрической и магнитной проницаемостью, которые могут быть записаны в виде факторизованных функций от угловых координат и от радиальной координаты и времени следующего вида:

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \varepsilon_{\perp}(\theta, \varphi) \varepsilon_{\parallel}(r, t), \quad \mu(\vec{r}, t) = \mu_{\perp}(\theta, \varphi) \mu_{\parallel}(r, t). \quad (3.1)$$

Кроме среды из центра выходит ноль или несколько (конечное количество) конусов из идеального проводника, т.е. внутренность конусов считается заполненной идеальным проводником и не рассматривается в решении. Общая внешняя часть конусов и представляет собой коническую линию с многосвяз-

ной областью поперечного сечения, которая рассматривается в нашей задаче. На произвольной координатной сфере конусы вырезают области, ограниченные контурами L_j , в качестве положительного направления обхода примем то, при котором внешняя по отношению к конусу часть сферы остается слева. Общий многосвязный контур, образованный всеми контурами, обозначим $L = \bigcup_{j=1}^N L_j$, где N – количество конусов. Через S обозначим часть поверхности сферы, которую ограничивает контур L , – область поперечного сечения конусной линии, внешняя ко всем конусам. Кроме того, будем обозначать соответствующий S телесный угол через Ω .

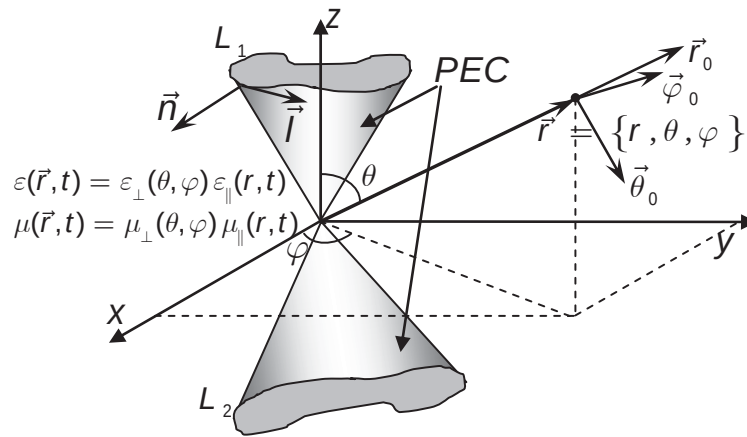


Рис. 3.1. Геометрия задачи: конический волновод, состоящий из нескольких (или ни одного) конусов из идеального проводника, ограниченных контурами L_j , пространство между ними заполнено средой с факторизованной зависимостью параметров от угловых координат и от продольной координаты и времени.

В соответствии с методологией ММБ, начнём с системы уравнений Максвелла (2.1), дополненной материальными уравнениями (2.2), в которых выделены линейные факторизованные части диэлектрической и магнитной проницаемостей вида (3.1). Используя материальные уравнения (2.2) с учетом (3.1) и обозначений для полных токов (2.8), система представится в виде:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \partial_t (\epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} \vec{\mathcal{E}}) + \vec{\mathcal{J}}, \quad (3.2)$$

$$-\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{J}}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{\mathcal{E}}) = \rho, \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{\mathcal{H}}) = \hat{\rho}. \quad (3.5)$$

Граничные условия на стенках идеально проводящих конусов:

$$\vec{l} \cdot \vec{\mathcal{E}} \Big|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}} \Big|_L = 0, \quad \vec{r}_0 \cdot \vec{\mathcal{E}} \Big|_L = 0. \quad (3.6)$$

где $\vec{l}$ – касательный орт в направлении положительного обхода контура L ; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности конуса; $\vec{r}_0$ – радиальный орт.

Радиально-угловая форма уравнений Максвелла. Для дальнейшего рассмотрения введем разложение для всех используемых векторов на угловую и радиальную составляющие:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{r}_0 E_r, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H} + \vec{r}_0 H_r, \quad \vec{\mathcal{J}} = \vec{J} + \vec{r}_0 J_r, \quad \vec{\mathcal{J}} = \vec{J} + \vec{r}_0 \hat{J}_r.$$

В дальнейших выкладках будет использован векторный оператор $\nabla_{\perp}$:

$$\nabla_{\perp} = \nabla - \vec{r}_0 \partial_r = \vec{\theta}_0 \partial_{\theta} + \frac{\vec{\varphi}_0}{\sin \theta} \partial_{\varphi}. \quad (3.7)$$

При его использовании следует помнить, что в сферической системе координат орты $\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$, $\vec{\varphi}_0$ сами являются функциями угловых переменных θ, φ .

Дивергентные уравнения (3.4)-(3.5) с использованием оператора (3.7) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} r^{-2} \partial_r (r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} E_r) + r^{-1} \nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{E}) &= \rho, \\ r^{-2} \partial_r (r^2 \mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} H_r) + r^{-1} \nabla_{\perp} \cdot (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{H}) &= \hat{\rho}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Радиальная проекция роторных уравнений (3.2)-(3.3) с использованием оператора (3.7) примет вид:

$$\begin{aligned} r^{-1} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{r}_0] &= \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} E_r) + J_r, \\ -r^{-1} \nabla_{\perp} \cdot [\vec{E} \times \vec{r}_0] &= \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} H_r) + \hat{J}_r. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Угловая часть роторных уравнений (3.2)-(3.3) представляется в виде:

$$\begin{aligned} -r^{-1} (\partial_r (r [\vec{H} \times \vec{r}_0]) + [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp} H_r]) &= \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{E}) + \vec{J}, \\ r^{-1} (\partial_r (r [\vec{E} \times \vec{r}_0]) + [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp} E_r]) &= \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \mu_{\perp} \vec{H}) + \vec{\hat{J}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используем уравнения (3.8)-(3.9) для исключения радиальных компонент полей в (3.10), в результате получим следующие уравнения второго порядка относительно уже только угловых компонент полей:

$$\begin{aligned} [\vec{r}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H} = r^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \partial_r r^3 \mu_{\parallel} \{ \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \vec{E}) + r^{-1} \varepsilon_{\perp}^{-1} \partial_r [r \vec{H} \times \vec{r}_0] \} + \\ + \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \{ r^{-1} \partial_r (r^3 \mu_{\parallel} \vec{J}) + r [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \mu_0^{-1} \hat{\rho}] \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{r}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E} = r^{-1} \varepsilon_{\parallel}^{-1} \partial_r r^3 \varepsilon_{\parallel} \{ \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \vec{H}) + r^{-1} \mu_{\perp}^{-1} \partial_r [\vec{r}_0 \times r \vec{E}] \} + \\ + \mu_{\perp}^{-1} \varepsilon_{\parallel}^{-1} \{ r^{-1} \partial_r (r^3 \varepsilon_{\parallel} \vec{J}) + r [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1} \rho \times \vec{r}_0] \} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E} = -\mu_0 r^2 \partial_t \mu_{\parallel} \{ r^{-1} \partial_r (r \vec{H}) + \varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} [\vec{r}_0 \times \vec{E}]) \} - \\ - r \{ \mu_0 r \partial_t \mu_{\parallel} [\vec{r}_0 \times \vec{J}] + \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \hat{J}_r \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{r}_0] \cdot \vec{H} = -r^2 \partial_t \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \{ r^{-1} \partial_r (r \vec{E}) + \mu_0 \partial_t (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{r}_0]) \} - \\ - r \{ \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \hat{J}_r + r \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon_{\parallel} [\vec{J} \times \vec{r}_0] \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Граничные условия (3.6) в радиально-угловой форме с учетом (3.8)-(3.9) приводят к условиям:

$$\begin{aligned} \vec{l} \cdot \vec{E} \Big|_L = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_{\perp} \vec{E}) \Big|_L = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{H} \Big|_L = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{r}_0] \Big|_L = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где, аналогично цилиндрическим волноводам, мы вынуждены ввести дополнительное ограничение отсутствия сторонних зарядов и сторонних радиальных электрических токов на поверхности конической линии. Это ограничение необходимо, чтобы два правых условия (3.15) получились однородными, что необходимо для доказательства самосопряженности получаемых в дальнейшем операторов.

Выделение линейных операторов для постановки граничных задач.

Введем Гильбертово пространство $L_2^4(\Omega, \gamma)$ четырехмерных векторных функций (состоящих из двух угловых векторов $\vec{E}, \vec{H}$, имеющих по две угловые компоненты – E_{θ}, E_{φ}), квадратично интегрируемых по телесному углу Ω с весом $\gamma = \{\varepsilon_{\perp}, \mu_{\perp}\}$. Элементами этого пространства являются вектора следующие-

го вида: $X = \text{col}(\vec{E}, \vec{H})$, каждая из компонент вектора X является угловой компонентой трехмерного вектора напряженности электрического или магнитного поля соответственно и удовлетворяет граничным условиям (3.15). Скалярное произведение в $L_2^4(\Omega, \gamma)$ определим следующим образом:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (\varepsilon_{\perp} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \mu_{\perp} \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) d\Omega. \quad (3.16)$$

Нормировочный коэффициент 4π равен полному телесному углу. Также введем гильбертово пространство $L_2^2(\Omega, \varepsilon_{\perp})$ «электрических» векторных функций, удовлетворяющих верхним двум граничным условиям (3.15) и со скалярным произведением:

$$\langle E_1, E_2 \rangle_e = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \varepsilon_{\perp} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\Omega. \quad (3.17)$$

Аналогично определим гильбертово пространство $L_2^2(\Omega, \mu_{\perp})$ «магнитных» векторных функций, удовлетворяющих нижним двум граничным условиям (3.15) и со скалярным произведением:

$$\langle H_1, H_2 \rangle_h = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mu_{\perp} \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 d\Omega \quad (3.18)$$

Уравнения (3.11)-(3.14) вместе с граничными условиями (3.15) можно записать в операторном виде. Для этого, используя уравнения (3.11) и (3.13), введем линейный оператор $\mathbb{W}_H : D(\mathbb{W}_H) \rightarrow L_2^4(\Omega, \gamma)$:

$$\mathbb{W}_H = \begin{pmatrix} 0 & [\vec{r}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \\ \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$D(\mathbb{W}_H) = \{X \in L_2^4(\Omega, \gamma) : \mathbb{W}_H X \in L_2^4(\Omega, \gamma)\}$$

Из уравнений (3.12) и (3.14) аналогично можно выделить следующий линейный оператор $\mathbb{W}_E : D(\mathbb{W}_E) \rightarrow L_2^4(\Omega, \gamma)$:

$$\mathbb{W}_E = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{r}_0] \cdot \\ [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{r}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$D(\mathbb{W}_E) = \{X \in L_2^4(\Omega, \gamma) : \mathbb{W}_E X \in L_2^4(\Omega, \gamma)\}$$

Введенные таким образом операторы дифференцирования по угловым переменным (3.19) и (3.20) действуют аналогично рассмотренным при анализе цилиндрических волноводов правилам (2.32)-(2.33). С их помощью задачу (3.11)-(3.15) можно записать в операторном виде следующим образом:

$$\mathbb{W}_H X = \begin{pmatrix} r^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \partial_r r^3 \mu_{\parallel} \left\{ \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \vec{E}) + r^{-1} \varepsilon_{\perp}^{-1} \partial_r [r \vec{H} \times \vec{r}_0] \right\} + \\ + \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_{\parallel}^{-1} \left\{ r^{-1} \partial_r (r^3 \mu_{\parallel} \vec{J}) + r [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \mu_0^{-1} \hat{\rho}] \right\} \\ - \mu_0 r^2 \partial_t \mu_{\parallel} \left\{ r^{-1} \partial_r (r \vec{H}) + \varepsilon_0 \partial_t (\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} [\vec{r}_0 \times \vec{E}]) \right\} - \\ - r \left\{ \mu_0 r \partial_t \mu_{\parallel} [\vec{r}_0 \times \vec{J}] + \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} \hat{J}_r \right\} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbb{W}_E X = \begin{pmatrix} -r^2 \partial_t \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \left\{ r^{-1} \partial_r (r \vec{E}) + \mu_0 \partial_t (\mu_{\parallel} \mu_{\perp} [\vec{H} \times \vec{r}_0]) \right\} - \\ - r \left\{ \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \hat{J}_r + r \varepsilon_0 \partial_t \varepsilon_{\parallel} [\vec{J} \times \vec{r}_0] \right\} \\ r^{-1} \varepsilon_{\parallel}^{-1} \partial_r r^3 \varepsilon_{\parallel} \left\{ \partial_t (\mu_0 \mu_{\parallel} \vec{H}) + r^{-1} \mu_{\perp}^{-1} \partial_r [\vec{r}_0 \times r \vec{E}] \right\} + \\ + \mu_{\perp}^{-1} \varepsilon_{\parallel}^{-1} \left\{ r^{-1} \partial_r (r^3 \varepsilon_{\parallel} \vec{J}) + r [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1} \rho \times \vec{r}_0] \right\} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Уравнения (3.11), (3.13) с левой парой граничных условий (3.15) эквивалентны операторному уравнению (3.21), а уравнения (3.12), (3.14) с правой парой граничных условий (3.15) эквивалентны операторному уравнению (3.22).

В [16] доказан аналог формулы Грина для рассматриваемой сферической поверхности S (вырезаемой телесным углом Ω на некоторой сфере) и ограничивающего её контура L :

$$\int_S (\vec{A} \cdot \nabla_{\perp} f \nabla_{\perp} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla_{\perp} f \nabla_{\perp} \cdot \vec{A}) dS = \oint_L [(\vec{n} \cdot \vec{A})(\nabla_{\perp} \cdot \vec{B}) - (\vec{n} \cdot \vec{B})(\nabla_{\perp} \cdot \vec{A})] f dl \quad (3.23)$$

С использованием этой формулы легко устанавливается симметричность введенных линейных операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$ в соответствующих функциональных пространствах (3.18) и (3.17), т.е. $\forall X_1, X_2 \in L_2^4(\Omega, \gamma)$ выполнены следующие равенства [16]:

$$\langle \mathbb{W}_H X_1, X_2 \rangle = \langle X_1, \mathbb{W}_H X_2 \rangle, \quad \langle \mathbb{W}_E X_1, X_2 \rangle = \langle X_1, \mathbb{W}_E X_2 \rangle. \quad (3.24)$$

Дальнейшие рассуждения направлены на построение базиса во всем пространстве $L_2^4(\Omega, \gamma)$. С физической точки зрения этому пространству принадле-

жат все угловые компоненты напряженностей электрического и магнитного полей, удовлетворяющие уравнениям Максвелла (3.2)-(3.5) и граничным условиям (3.6). Для введенных в этом разделе операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$ можно провести такие же рассуждения, как для операторов, введенных во втором разделе (см подраздел 2.2). С учетом обозначений введенных во втором разделе получим, что пространство $L_2^4(\Omega, \gamma)$ может быть разложено в прямую сумму трех ортогональных подпространств: $L_2^4(\Omega, \gamma) = L^H \oplus L^E \oplus L^T$. Теперь подпространство L^H является областью определения оператора $\mathbb{W}_H$, который определен соотношениями (3.19). Подпространство L^E есть область определения оператора $\mathbb{W}_E$, определенного (3.20). А подпространство L^T определено как пересечение ядер операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$, т.е. $L^T = \text{Ker } \mathbb{W}_H \cap \text{Ker } \mathbb{W}_E$. В дальнейшем будет показано, что введенные подпространства соответствуют полям волн H -, E - и T -типа соответственно. Также будет показано, что подпространство L^T пусто, когда контур L односвязный и содержит конечное количество линейно независимых функций, когда контур L многосвязный.

Использование свойств самосопряженных линейных операторов (3.19)-(3.20), как во втором разделе, позволяет построить базис в каждом из подпространств L^H , L^E и L^T , а, следовательно, и во всем пространстве решений $L_2^4(\Omega, \gamma)$. Построим модовый базис в L^H подпространстве.

Построение модового базиса в L^H подпространстве. Рассуждения которые были проведены относительно собственных значений и собственных функций операторов, введенных во втором разделе остаются справедливыми и для операторов, введенных в этом разделе по правилам (3.19)-(3.20). Напомним, что из самосопряженности оператора $\mathbb{W}_H$ следует, что его спектр вещественный, а его собственные функции будут образовывать базис в области его определения, т.е. в подпространстве L^H . Кроме этого, спектр оператора $\mathbb{W}_H$ будет симметричным относительно нуля из-за его блочной

структуры с полями на главной диагонали. Собственному значению оператора p_m^2 соответствует собственный вектор $X_m = \text{col}(\vec{E}_m, \vec{H}_m)$, а собственному значению $-p_m^2$ отвечает собственный вектор $X_{-m} = \text{col}(\vec{E}_m, -\vec{H}_m)$. В связи с тем, что разложение искомых полей ведется по $\vec{E}$ и $\vec{H}$ компонентам четырехмерного вектора X , а собственные функции для $\vec{E}$ и $\vec{H}$, соответствующие положительной и отрицательной части спектра линейно зависимы, что очевидно, то можно ограничиться рассмотрением только положительной части спектра. В связи с этим, как и во втором разделе, будем использовать запись собственных значений в виде квадрата p_m^2 , чтоб подчеркнуть их положительность.

Итак, задача на собственные значения для оператора $\mathbb{W}_H$ приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$\mathbb{W}_H X_m^H = p_m^2 X_m^H, \quad X_m^H = \begin{pmatrix} \vec{E}_m^H \\ \vec{H}_m^H \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

В векторном виде задача (3.25) имеет вид:

$$\begin{cases} [\vec{r}_0 \times \varepsilon_\perp^{-1} \nabla_\perp \mu_\perp^{-1}] \nabla_\perp \cdot \mu_\perp \vec{H}_m^H = p_m^2 \vec{E}_m^H \\ \nabla_\perp \mu_\perp^{-1} [\vec{r}_0 \times \nabla_\perp] \cdot \vec{E}_m^H = p_m^2 \vec{H}_m^H \\ \vec{l} \cdot \vec{E}_m^H|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_m^H|_L = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

где X_m^H — собственная функция оператора $\mathbb{W}_H$, а p_m^2 — соответствующее ей собственное число. Задачу можно скаляризовать, введя скалярные потенциалы $\Phi_m^H(\theta, \varphi)$, $\Psi_m^H(\theta, \varphi)$ следующим образом:

$$\vec{E}_m^H = p_m^{-1} \varepsilon_\perp^{-1} [\nabla_\perp \Phi_m^H \times \vec{r}_0], \quad \vec{H}_m^H = p_m^{-1} \nabla_\perp \Psi_m^H. \quad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в (3.26), исходную векторную задачу можно свести к следующей скалярной задаче на собственные значения с однородными граничными условиями Неймана на контуре L :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \nabla_{\perp} \Psi_m^H + p_m^2 \mu_{\perp} \Phi_m^H = 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Phi_m^H + p_m^2 \mu_{\perp} \Psi_m^H = 0 \\ \left. \frac{\partial \Phi_m^H}{\partial \vec{n}} \right|_L = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_m^H}{\partial \vec{n}} \right|_L = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Как следует из симметричности оператора $\mathbb{W}_H$, его собственные функции, соответствующие разным собственным числам, ортогональны относительно скалярного произведения (3.16), а из блочной структуры оператора $\mathbb{W}_H$ следует, что относительно скалярного произведения (3.17) ортогональны между собой собственные функции $\vec{E}_m^H$, а в скалярном произведении (3.18) ортогональны собственные функции $\vec{H}_m^H$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{m_1}^H, \vec{E}_{m_2}^H \rangle_e &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{m_1}^H \cdot \vec{E}_{m_2}^H d\Omega = \delta_{m_1 m_2} \\ \langle \vec{H}_{m_1}^H, \vec{H}_{m_2}^H \rangle_h &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mu_{\perp} \vec{H}_{m_1}^H \cdot \vec{H}_{m_2}^H d\Omega = \delta_{m_1 m_2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Подставив во второе условие ортогональности в (3.29) выражение векторных базисных функций через скалярные потенциалы (3.27), получим условие биортогональности для скалярных потенциалов:

$$\langle \Psi_{m_1}^H, \Phi_{m_2}^H \rangle_h = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mu_{\perp} \Psi_{m_1}^H \Phi_{m_2}^H d\Omega = \delta_{m_1 m_2} \quad (3.30)$$

Подставив выражения для собственных функций в виде (3.27) в (3.8) и (3.9), можно убедиться, что для поля с угловыми компонентами $\vec{E}_m^H$, $\vec{H}_m^H$ радиальная компонента электрического поля в отсутствие источников оказывается нулевой $E_r^H \equiv 0$. Таким образом, угловые компоненты полей из L^H подпространства следует отождествлять с H -волнами.

Построение модового базиса в L^E подпространстве. Построение модового базиса в L^E подпространстве осуществляется аналогично тому, как это было сделано в L^H подпространстве так как относительно спектра и собственных векторов самосопряженного оператора $\mathbb{W}_E$ можно сделать замечания, аналогичные тем которые делались относительно спек-

тра и собственных функций оператора $\mathbb{W}_H$.

Задача на собственные значения для оператора $\mathbb{W}_E$ имеет вид:

$$\mathbb{W}_E X_n^E = q_n^2 X_n^E, \quad X_n^E = \begin{pmatrix} \vec{E}_n^E \\ \vec{H}_n^E \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

В векторном представлении задача (3.31) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{r}_0] \cdot \vec{H}_n^E = q_n^2 \vec{E}_n^E \\ [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{r}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E}_n^E = q_n^2 \vec{H}_n^E \\ \nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_{\perp} \vec{E}_n^E)|_L = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H}_n^E \times \vec{r}_0]|_L = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Векторную задачу (3.32) можно свести к скалярной посредством введения двух скалярных потенциалов $\Phi_n^E(\theta, \varphi)$ и $\Psi_n^E(\theta, \varphi)$ по следующим формулам:

$$\vec{E}_n^E = q_n^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_n^E, \quad \vec{H}_n^E = q_n^{-1} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp} \Phi_n^E]. \quad (3.33)$$

Подставив (3.33) в (3.32) получим вместо исходной векторной задачи следующую скалярную задачу на собственные значения с однородными граничными условиями Дирихле на контуре L :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Phi_n^E + q_n^2 \varepsilon_{\perp} \Psi_n^E = 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \Psi_n^E + q_n^2 \mu_{\perp} \Phi_n^E = 0 \\ \Psi_n^E|_L = 0, \quad \Phi_n^E|_L = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Из симметричности оператора $\mathbb{W}_E$ следует, что его собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям ортогональны относительно скалярного произведения (3.16), а из блочной структуры оператора $\mathbb{W}_E$ следует, что условиям ортогональности, относительно скалярных произведений (3.17) и (3.18) по отдельности удовлетворяют соответственно собственные функции $\vec{E}_n^E$ и $\vec{H}_n^E$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{n_1}^E, \vec{E}_{n_2}^E \rangle_e &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{n_1}^E \cdot \vec{E}_{n_2}^E d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \\ \langle \vec{H}_{n_1}^E, \vec{H}_{n_2}^E \rangle_h &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mu_{\perp} \vec{H}_{n_1}^E \cdot \vec{H}_{n_2}^E d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Подставив в первое условие ортогональности в (3.35) выражение для векторных базисных функций через скалярные потенциалы (3.33), получим следующее условие биортогональности для скалярных потенциалов:

$$\langle \Psi_{n_1}^E, \Phi_{n_2}^E \rangle_e = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \varepsilon_{\perp} \Psi_{n_1}^E \Phi_{n_2}^E d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \quad (3.36)$$

Подставив выражения для векторных собственных функций через скалярные потенциалы (3.33) в уравнения (3.8) и (3.9) можно убедиться, что в электромагнитном поле с угловыми компонентами $\vec{E}_n^E$, $\vec{H}_n^E$ продольная компонента магнитного поля в отсутствие источников оказывается равной нулю $H_z^E \equiv 0$. Поэтому угловые компоненты полей из L^E подпространства следует отождествлять с E -волнами.

Построение модового базиса в L^T подпространстве. Для построения базиса в подпространстве L^T рассмотрим совместно задачи (3.25) и (3.31) при нулевых собственных значениях, что соответствует ядрам операторов. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} \mathbb{W}_H X_k^T = 0 \\ \mathbb{W}_E X_k^T = 0 \end{cases} \quad X_k^T = \begin{pmatrix} \vec{E}_k^T \\ \vec{H}_k^T \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

В векторном виде эта система распадается на следующие две подсистемы:

$$\begin{cases} [\vec{r}_0 \times \varepsilon_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1}] \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp} \vec{H}_k^T = 0 \\ \nabla_{\perp} \mu_{\perp}^{-1} [\vec{r}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}_k^T = 0 \\ \vec{l} \cdot \vec{E}_k^T|_L = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_k^T|_L = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{r}_0] \cdot \vec{H}_k^T = 0 \\ [\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \times \vec{r}_0] \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \vec{E}_k^T = 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot (\varepsilon_{\perp} \vec{E}_k^T)|_L = 0, \quad \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H}_k^T \times \vec{r}_0]|_L = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

которые необходимо решать совместно. Аналогично изложенному в [284] можно показать, что имеется ровно $N - 1$ линейно независимых решений задачи (3.38)-(3.39), где N – количество конусов, образующих линию передачи (связность контура L). Таким образом, вопрос о построении базиса в подпростран-

стве L^T свелся к совместному решению задач (3.38)-(3.39). Сведем эту векторную задачу к скалярной. Для чего введем скалярные потенциалы $\Psi_k^T(\theta, \varphi)$ и $\Phi_k^T(\theta, \varphi)$ по следующим формулам:

$$\vec{E}_k^T = \nabla_{\perp} \Phi_k^T, \quad \vec{H}_k^T = [\vec{r}_0 \times \mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_k^T]. \quad (3.40)$$

Подставив (3.40) в уравнения и граничные условия (3.38)-(3.39) в результате получим две задачи с неоднородными граничными условиями Дирихле на контуре L :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \Phi_k^T = 0 \\ \Phi_k^T|_{L_j} = c_k^j \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} \Psi_k^T = 0 \\ \Psi_k^T|_{L_j} = d_k^j \end{cases} \quad (3.41)$$

где c_k^j и d_k^j – произвольные константы на j -ом конусе L_j . Для получения $N - 1$ линейно независимых решений удобно взять $c_k^N = 0$, $c_k^j = \delta_{kj}$ для $k, j = \overline{1, N-1}$ и аналогично для констант d_k^j .

Множество линейно независимых решений задачи (3.38)-(3.39) образуют базис в подпространстве L^T . Если найденный базис не является ортогональным, то его всегда можно ортогонализировать, используя процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта, и затем пронормировать так, чтобы в результате выполнялись следующие условия ортогональности:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{k_1}^T, \vec{E}_{k_2}^T \rangle_e &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{k_1}^T \cdot \vec{E}_{k_2}^T d\Omega = \delta_{k_1 k_2} \\ \langle \vec{H}_{k_1}^T, \vec{H}_{k_2}^T \rangle_h &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mu_{\perp} \vec{H}_{k_1}^T \cdot \vec{H}_{k_2}^T d\Omega = \delta_{k_1 k_2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Подставив выражения для угловых компонент поля (3.40) в уравнения (3.8)-(3.9) с учетом (3.41) несложно убедиться, что базисные функции подпространства L^T соответствуют, в отсутствие источников, нулевым радиальным компонентам полей и поэтому могут быть отождествлены с T -волнами, а также с электростатическим и магнитостатическим решениями для рассматриваемой многосвязной линии передачи (статические решения могут быть представлены суперпозицией встречных T -волн).

Условия ортогональности. Используя свойство симметричности операторов $\mathbb{W}_H$ и $\mathbb{W}_E$, а также, что $\forall X \in L_2^4(\Omega, \gamma)$ справедливы равенства $\mathbb{W}_H \mathbb{W}_E X = \mathbb{W}_E \mathbb{W}_H X = \mathbf{0}$, можно установить, что векторные базисные функции удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_m^A, \vec{E}_n^B \rangle_e &= \delta_{mn} \delta_{AB} \\ \langle \vec{H}_m^A, \vec{H}_n^B \rangle_h &= \delta_{mn} \delta_{AB} \end{aligned} \quad A, B \in \{h, e, t\}. \quad (3.43)$$

Разложение угловых и радиальных компонент поля. Определив базис в каждом из подпространств L^H , L^E и L^T , тем самым нашли базис во всем пространстве $L_2^4(\Omega, \gamma)$, которому принадлежат угловые компоненты искомых полей, а также функции источников и начальных условий. Представим угловые компоненты напряженностей электрического и магнитного поля в виде следующих модовых разложений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{1/2} \vec{E}(r, \theta, \varphi, t) &= \\ &= r^{-1} \left(\sum_m v_m^h(r, t) \vec{E}_m^h(\theta, \varphi) + \sum_n v_n^e(r, t) \vec{E}_n^e(\theta, \varphi) + \sum_k v_k^t(r, t) \vec{E}_k^t(\theta, \varphi) \right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mu_0^{1/2} \vec{H}(r, \theta, \varphi, t) &= \\ &= r^{-1} \left(\sum_m i_m^h(r, t) \vec{H}_m^h(\theta, \varphi) + \sum_n i_n^e(r, t) \vec{H}_n^e(\theta, \varphi) + \sum_k i_k^t(r, t) \vec{H}_k^t(\theta, \varphi) \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Радиальная компонента напряженности электрического поля E_r является скалярной функцией, удовлетворяющей однородному граничному условию Дирихле на контуре L . Поэтому разложим ее по полной системе скалярных базисных функций, которые на контуре L удовлетворяют тем же граничным условиям. Такой системой функций в пространстве $L_2^1(\Omega, \varepsilon_\perp)$ являются скалярные потенциалы Φ_n^E и Ψ_n^E , определенные как решения задачи (3.34). Также в силу условия биортогональности (3.36) для E_r имеют место следующие равенства:

$$E_r = \langle E_r, \Phi_n^E \rangle_e \Psi_n^E = \langle E_r, \Psi_n^E \rangle_e \Phi_n^E.$$

Разложим радиальную компоненту электрического поля по системе функций $\{\Phi_n^E\}$. Это разложение имеет вид:

$$\varepsilon_0^{1/2} E_r(r, \theta, \varphi, t) = r^{-2} \sum_n e_n(r, t) q_n \Phi_n^e(\theta, \varphi). \quad (3.46)$$

Собственные числа q_n здесь, как и раньше, введены в качестве коэффициентов для удобства.

Радиальная компонента магнитного поля H_r является скалярной функцией, удовлетворяющей однородному условию Неймана на контуре L и, следовательно, принадлежит пространству $L_2^1(\Omega, \mu_\perp)$. Поэтому для её разложения можно использовать скалярные потенциалы Φ_m^H и Ψ_m^H , определенные как решения задачи (3.28) и обладающие, как можно показать, полнотой в пространстве $L_2^1(\Omega, \mu_\perp)$. В силу условия биортогональности (3.30) для H_r имеют место равенства:

$$H_r = \langle H_r, \Phi_m^H \rangle_h \Psi_m^H = \langle H_r, \Psi_m^H \rangle_h \Phi_m^H.$$

Разложим радиальную компоненту магнитного поля по системе функций $\{\Phi_m^H\}$. Это разложение имеет вид:

$$\mu_0^{1/2} H_r(r, \theta, \varphi, t) = r^{-2} \sum_m h_m(r, t) p_m \Phi_m^h(\theta, \varphi). \quad (3.47)$$

В разложениях полей по модовому базису (3.44)-(3.47) коэффициенты разложений $v_m^h, v_n^e, v_k^t, i_m^h, i_n^e, i_k^t, e_n$ и h_m являются функциями радиальной координаты r и времени t . Для краткости их будем называть модовыми амплитудами, угловыми или радиальными соответственно.

Разложение начальных условий. В постановку рассматриваемой здесь задачи входят начальные условия $\vec{\mathcal{E}}|_{t=0} = \vec{\mathcal{E}}_0(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{H}}|_{t=0} = \vec{\mathcal{H}}_0(\vec{r})$, которыми дополняются уравнения Максвелла (3.2)-(3.5). Разложив эти начальные условия по модовому базису (3.44)-(3.47) и спроецировав полученные разложения на элементы базиса получим значения модовых амплитуд в начальный момент времени:

$$\begin{aligned}
e_m^A(r, 0) &= \varepsilon_0^{1/2} \frac{r}{4\pi} \int_S \varepsilon_\perp \vec{E}(r, \theta, \varphi, 0) \cdot \vec{E}_m^A(\theta, \varphi) dS \\
h_m^A(r, 0) &= \mu_0^{1/2} \frac{r}{4\pi} \int_S \mu_\perp \vec{H}(r, \theta, \varphi, 0) \cdot \vec{H}_m^A(\theta, \varphi) dS \\
e_n^r(r, 0) &= \varepsilon_0^{1/2} \frac{r^2}{4\pi} q_n^{-1} \int_S \varepsilon_\perp E_r(r, \theta, \varphi, 0) \Psi_n^E(\theta, \varphi) dS \\
h_m^r(r, 0) &= \mu_0^{1/2} p_m^{-1} \frac{r^2}{4\pi} \int_S \mu_\perp H_r(r, \theta, \varphi, 0) \Psi_m^H(\theta, \varphi) dS
\end{aligned} \quad A \in \{h, e, t\} \quad (3.48)$$

Аналогично изложенному во втором разделе, могут быть найдены коэффициенты произвольной функции источника. Для примера ниже приводятся коэффициенты разложения тока $\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \vec{r}_0 J_r(\vec{r}, t)$. Коэффициенты разложения его угловой компоненты по базису $\{\vec{E}_m^A\}, A \in \{h, e, t\}$ равны:

$$j_m^A(r, t) = \varepsilon_0^{1/2} r \langle \vec{J}(r, \theta, \varphi, t), \vec{E}_m^A(\theta, \varphi) \rangle_e, \quad A \in \{h, e, t\}.$$

При разложении функции $\vec{J}(\vec{r}, t)$ по базису $\{\vec{H}_m^A\}, A \in \{h, e, t\}$ коэффициенты этого разложения имеют вид:

$$j_m^A(r, t) = \mu_0^{1/2} r \langle \vec{J}(r, \theta, \varphi, t), \vec{H}_m^A(\theta, \varphi) \rangle_h, \quad A \in \{h, e, t\}.$$

Коэффициенты разложения радиальной компоненты вектора $J_r(\vec{r}, t)$ по базису $\{\Phi_m^H\}$ определяются по следующей формуле:

$$j_m^r(r, t) = \mu_0^{1/2} p_m^{-1} r^2 \langle J_r(r, \theta, \varphi, t), \Psi_m^H(\theta, \varphi) \rangle_h.$$

А при разложении этой функции по базису $\{\Phi_n^E\}$ коэффициенты имеют вид:

$$j_n^r(r, t) = \varepsilon_0^{1/2} q_n^{-1} r^2 \langle J_r(r, \theta, \varphi, t), \Psi_n^E(\theta, \varphi) \rangle_e.$$

3.3. Построение модового базиса для биконического волновода

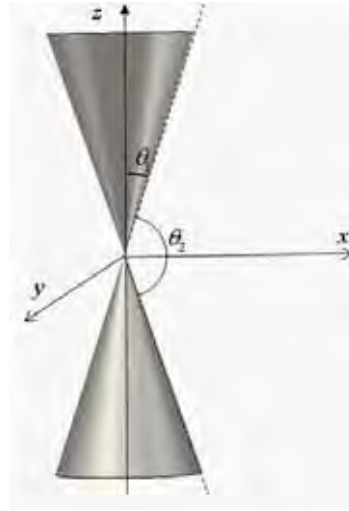


Рис. 3.2. Геометрия биконической линии.

Рассмотрим несимметричную биконическую линию (рис. 3.2) с различными углами θ_1 и θ_2 . Решение граничной задачи для этого случая выражается через функции Лежандра первого рода $P_{\mu_n}(\cdot)$ следующим образом [357, 43, 16]:

$$\Phi_n^e(\theta) = C_n \left[P_{\mu_n}(\cos(\theta)) - \frac{P_{\mu_n}(\cos(\theta_1))P_{\mu_n}(-\cos(\theta))}{P_{\mu_n}(-\cos(\theta_1))} \right], \quad (3.49)$$

здесь коэффициенты μ_n определяются из следующего дисперсионного соотношения:

$$\begin{vmatrix} P_{\mu_n}(\cos(\theta))|_{\theta=\theta_1} & P_{\mu_n}(-\cos(\theta))|_{\theta=\theta_1} \\ P_{\mu_n}(\cos(\theta))|_{\theta=\theta_2} & P_{\mu_n}(-\cos(\theta))|_{\theta=\theta_2} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.50)$$

$$\mu_n \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] \quad n \in \mathbb{N}$$

Собственные значения q_n задачи выражаются через коэффициенты μ_n следующим образом:

$$q_n^2 = \mu_n(\mu_n + 1). \quad (3.51)$$

Нормировочные константы C_n в (3.49) определяются из условия нормировки:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi_n^e(\theta) \Phi_{n'}^e(\theta) d\Omega = \delta_{nn'}. \quad (3.52)$$

Соответствующие векторные базисные функции могут быть найдены с использованием формул:

$$\vec{E}_n^e(\theta) = \vec{\theta}_0 q_n^{-1} \partial \Phi_n^e / \partial \theta, \quad \vec{H}_n^e(\theta) = \vec{\varphi}_0 q_n^{-1} \partial \Phi_n^e / \partial \theta. \quad (3.53)$$

Базисные функции для Т-мод определяются из решения граничной задачи:

$$\Phi^t(\theta) = C \ln \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^t(\theta) &= \vec{\theta}_0 \frac{C}{\sin \theta}, \\ \vec{H}^t(\theta) &= \vec{\varphi}_0 \frac{C}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

где нормировочная константа C определяется из условия:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\vec{E}^t(\theta)]^2 d\Omega = 1. \quad (3.56)$$

Полученные собственные функции Е- и Т- волн будут использованы в дальнейшем в подразделе 5.3.4 для анализа излучения биконической антенны методом согласования мод во временной области.

3.4. Пример решения задачи об излучении кольца с током методом модового базиса, сравнение с точным решением.

Для анализа сходимости модовых разложений в сферическом случае рассмотрим простейшую задачу излучения нестационарного кольцевого тока (рис. 3.3). Источник задаётся формулой:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{\varphi}_0 \delta(r - R) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) f(t). \quad (3.57)$$

То есть ток течёт в азимутальном направлении $\vec{\varphi}_0$, локализован в плоскости xOy на расстоянии R от центра системы координат. Временная форма тока $f(t)$ может быть произвольной. В численных расчётах ниже использовался импульс Лягера (2.116). Создаваемое таким током электрическое поле может быть рассчитано методом запаздывающих потенциалов по формуле:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\varphi}_0 \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t - c_0^{-1} \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta) \cos(\xi)})}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta) \cos(\xi)}} \cos(\xi) d\xi \quad (3.58)$$

Здесь θ – полярный угол, а r – радиальная координата точки наблюдения, ξ – угол, параметризующий элемент тока на кольце, штрих обозначает дифференцирование по аргументу (или, что в данном случае то же, по времени).

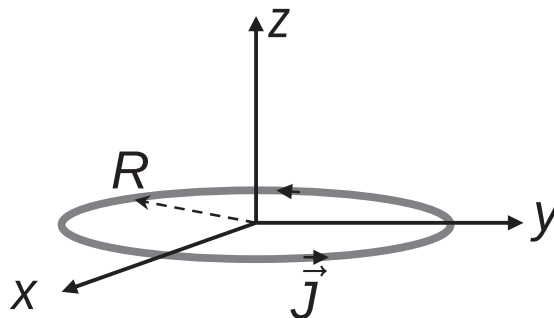


Рис. 3.3. Геометрия задачи

В данном случае источники выбраны таким образом, что они возбуждают только ТЕ-(Н-) волны. Так как пространство однородно, то решением задачи на моды будут обычные сферические гармоники. Для них скалярные базисные функции определены как:

$$\Phi_m^h(\theta) = \Psi_m^h(\theta) = \sqrt{2m+1} P_m(\cos(\theta)), \quad (3.59)$$

где $P_m(\cdot)$ – полиномы Лежандра. Соответствующие векторные базисные функции определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}_m^h(\theta) &= \vec{\varphi}_0 \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m+1}} \frac{P_{m-1}(\cos(\theta)) - P_{m+1}(\cos(\theta))}{\sin(\theta)}, \\ \vec{H}_m^h(\theta) &= \vec{\theta}_0 \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m+1}} \frac{P_{m+1}(\cos(\theta)) - P_{m-1}(\cos(\theta))}{\sin(\theta)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

а собственные значения будут $p_m^2 = m(m+1)$, $m = 1, 2, \dots$. В данном случае межмодовые преобразования отсутствуют, так как среда однородна. Поэтому распространение мод будет описываться независимыми уравнениями Клейна-Гордона-Фока:

$$\frac{\partial^2 v_m^h}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v_m^h}{\partial r^2} + \frac{m(m+1)}{r^2} v_m^h(r, \tau) = r \frac{\sqrt{\mu_0}}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial \tau} \times \vec{r}_0 \right] \cdot \vec{H}_m^h dS \quad (3.61)$$

Остальные модовые амплитуды вычисляются через модовую амплитуду для поперечного электрического поля v_m^h по формулам:

$$\frac{\partial j_m^h}{\partial \tau} = -\frac{\partial v_m^h}{\partial r}, \quad \frac{\partial h_m}{\partial \tau} = -v_m^h, \quad (3.62)$$

которые легко интегрируются. Применяя к системе уравнений (3.61)-(3.62) метод конечных разностей во временной области для аппроксимации полей на сетке $v|_i^j = v(r = i\Delta r, \tau = j\Delta \tau)$ с помощью конечных разностей второго порядка, получим следующую явную конечно-разностную схему для получения решения

$$\begin{aligned} v|_i^{j+1} &= A|_i v|_i^j + B(v|_{i+1}^j + v|_{i-1}^j) - v|_i^{j-1} + \Delta \tau^2 F(i\Delta r, j\Delta \tau) \\ i|_i^{j+1} &= i|_i^{j-1} - \frac{\Delta \tau}{\Delta r} (e_m^H|_{i+1}^j - e_m^H|_{i-1}^j) \\ h|_i^{j+1} &= h|_i^{j-1} - 2\Delta \tau v|_i^j \end{aligned} \quad , \quad (3.63)$$

где функция источников F соответствует правой части уравнения (3.61), коэффициенты схемы равны $A|_i = \left\{ 2 - 2\left(\frac{\Delta \tau}{\Delta r}\right)^2 - \left(\frac{\Delta \tau}{i\Delta r}\right)^2 m(m+1) \right\}$, $B = (\Delta \tau / \Delta r)^2$

Как только найдены модовые амплитуды v, i, h для нескольких (N) модовых каналов, результирующие поля можно найти, суммируя модовые амплитуды с соответствующими модовыми функциями (3.59)-(3.60):

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_0} \vec{E}(r, \theta, t) &= \frac{\vec{\varphi}_0}{r \sin(\theta)} \sum_{m=1}^N \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m+1}} v_m^h(r, t) [P_{m-1}(\cos(\theta)) - P_{m+1}(\cos(\theta))] \\ \sqrt{\mu_0} \vec{H}(r, \theta, t) &= \frac{\vec{\theta}_0}{r \sin(\theta)} \sum_{m=1}^N \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m+1}} i_m^h(r, t) [P_{m+1}(\cos(\theta)) - P_{m-1}(\cos(\theta))] \\ \sqrt{\mu_0} H_r(r, \theta, t) &= r^{-2} \sum_{m=1}^N \sqrt{m(m+1)(2m+1)} h_m(r, t) P_m(\cos(\theta)) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Для численных расчётов в качестве функции возбуждения брался длинный и короткий импульс Лягера (2.116) с временными константами соответственно $T = R/c_0$ и $T = R/4c_0$. Поле вычислялось на расстоянии $2R$ от центра в плоскости кольца. На рис. 3.4 показана сходимость решения для короткого и длинного импульсов. Видно, что для длинного импульса (с более узкой частотной полосой) учет трех гармоник уже практически совпадает с 10 модовым приближением, в то время как для короткого импульса (рис. 3.4б) 3-х модовое

приближение отличается существенно, и только 10 гармоник дают временную форму, которая достаточно хорошо совпадает с точным решением (рис. 3.4в). Это обусловлено тем, что количество мод, которые возбуждаются и участвуют в дальнейшем распространении, определяется верхней частотой спектра сигнала и радиусом, на котором происходит возбуждение гармоник. Для короткого сигнала количество возбуждаемых мод оказывается большим.

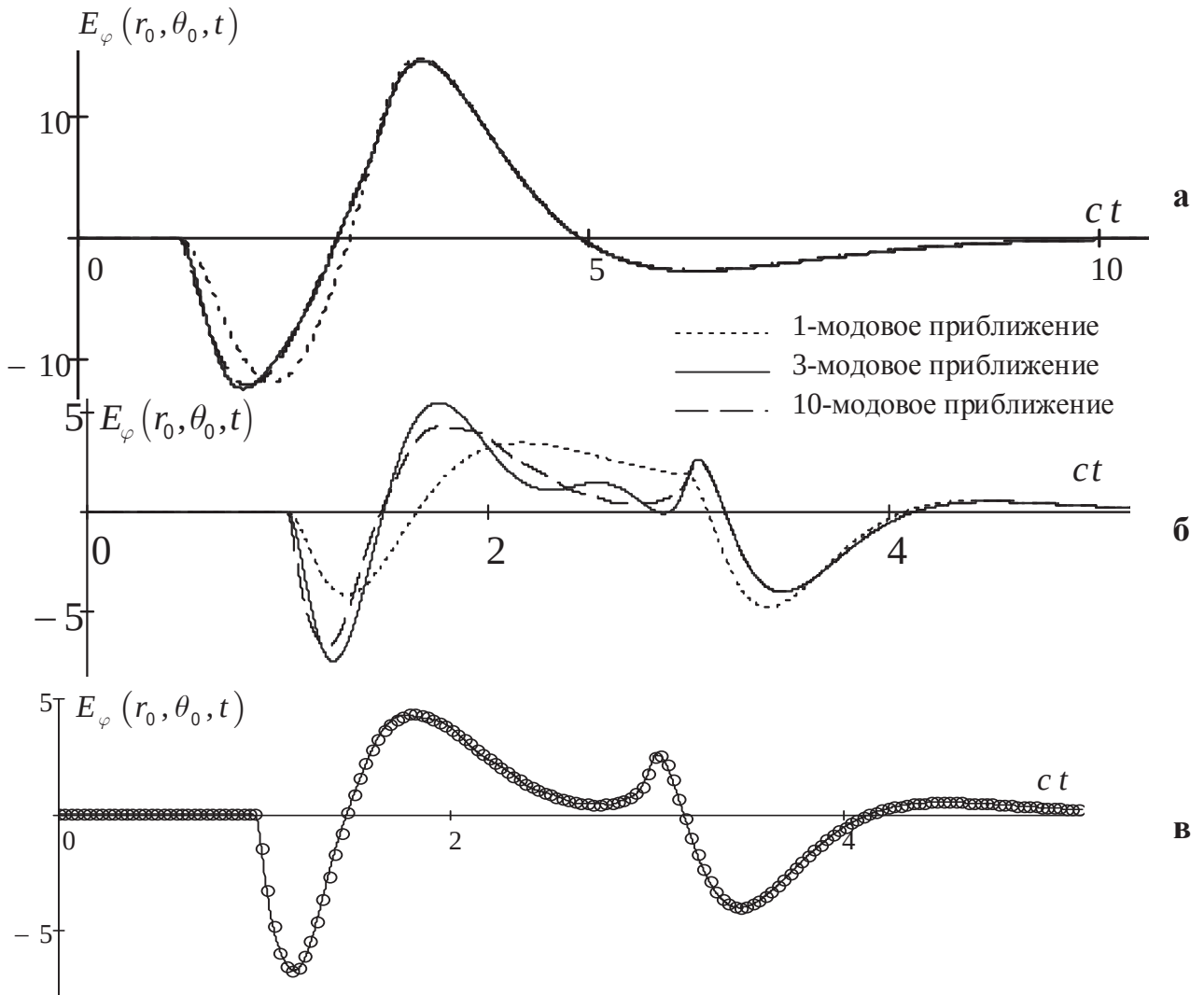


Рис. 3.4. Временные формы импульсов на расстоянии $2R$ в плоскости кольца при различном количестве учитываемых гармоник: (а) для длинного импульса с $T = R/c_0$; (б) для короткого импульса с $T = R/4c_0$; (в) – для короткого импульса сравнение решения при использовании 10 гармоник (линия) с точным решением по формуле запаздывающих потенциалов (круги).

Отсюда можно сделать вывод, что при использовании формализма связанных мод (т.е. когда параметры среды имеют угловую неоднородность) количество связанных мод должно выбираться исходя из количества мод, распро-

страняющихся на верхней частоте сигнала при максимальном радиусе, для которого проводится моделирование и имеются межмодовые преобразования. Поэтому, например, рассчитать распространение поля от диполя на границе раздела двух диэлектриков (в сферической системе полупространство является сферическим углом) можно только на конечное расстояние. С расстоянием от источника количество мод, которые могут возбуждаться при межмодовых взаимодействиях и нести волну самостоятельно, будет увеличиваться, поэтому потребуется учитывать все большее и большее количество мод. Это легко объяснимо и с физической точки зрения: волна на границе будет существовать в виде некоторой поверхностной структуры (см. более подробно подраздел 4.6), при этом если её поперечные размеры сохраняются, то угловые размеры, видимые из центра будут уменьшаться, а это как раз и требует большего количества угловых гармоник для описания. Тем не менее, для анализа, например, излучения ТЕМ рупора, заполненного диэлектриком, предложенный метод вполне подходит. Количество мод, требуемых для расчёта задачи будет определяться количеством распространяющихся мод на максимальной частоте диапазона на апертуре антенны (наиболее удалённой от центра точки, на которой ещё происходят межмодовые преобразования). В дальнейшем моды распространяются независимо одна от другой, и, если они имели малые амплитуды на апертуре, то при дальнейшем распространении в общей сумме они не будут создавать существенного вклада в излучённое поле. Расчёт дифракции мод на конце такой антенны как на стыке двух регулярных волноведущих структур может быть осуществлён методом согласования мод во временной области, описываемом ниже в подразделе 5.4.

3.5. Анализ излучения нестационарного диполя. Оператор распространения.

Рассмотрим простейший случай распространения импульсной волны, создаваемой электрическим диполем в свободном пространстве (что соответствует первой Е-моды в описанной выше терминологии).

Давайте начнём с простейшей задачи определения оператора распространения. Во временной области поперечные компоненты электрического поля могут быть найдены по формуле:

$$E_{\theta}(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{r^2 c} + \frac{[\ddot{p}]}{rc^2} \right) \sin \theta \quad (3.65)$$

где квадратные скобки обозначают временное запаздывание: $[f] = f(t - r/c)$, а точка обозначает дифференцирование по аргументу, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – скорость света. Это выражение позволяет вычислить временную зависимость компоненты поля на расстоянии r от диполя. Теперь предположим, что мы знаем временную зависимость при некотором радиусе r_1 и мы хотели бы использовать эту информацию для расчёта временной зависимости при другом радиусе r_2 . Это можно сделать с помощью свёртки с «оператором распространения»:

$$E_{\theta}(r_2, t) = L_{r_2, r_1}(t) \star E_{\theta}(r_1, t) \quad (3.66)$$

Здесь звёздочка обозначает операцию свёртки: $f \star g = \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$, где нижний предел взят равным 0 так как мы явно предполагаем выполнение принципа причинности, требуя, чтобы все рассматриваемые сигналы равнялись нулю при отрицательном времени, а эффекты запаздывания вынесены из оператора и неявно предполагается, что мы можем добавить их если есть необходимость рассматривать абсолютную шкалу времени. Для того, чтобы получить требуемое выражение во временной области для оператора распространения, мы выразим эту задачу в области Лапласа:

$$L_{r_1 r_2} = \frac{r_1^3 s^2 r_2^2 + s r_2 + 1}{r_2^3 s^2 r_1^2 + s r_1 + 1} \quad (3.67)$$

Это дробно-рациональная функция, и она легко может быть обращена во временную область, для этого представим её в виде суммы простейших дробей, каждая из которых легко может быть обращена в некоторую затухающую синусоиду. В нашем случае обратное преобразование Лапласа даёт:

$$L_{r_2,r_1}(t) = \frac{r_1}{r_2} \delta(t) + \frac{(r_1 - r_2)r_1}{r_2^2} \exp\left(-\frac{ct}{2r_1}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{\sqrt{3}ct}{2r_1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{2r_1} \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}ct}{2r_1}\right) \right) \quad (3.68)$$

Пример вычисления по этой формуле приведен на рис. 3.5 ниже. Здесь мы используем возбуждение в виде гауссоиды $p(t) = \exp(-(ct-3)^2)$. Временная зависимость $rE_\theta(r,t)$ была рассчитана при $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.9$ и $r_3 = 0.3$. Затем оператор свёртки был применён к $E_\theta(r_1,t)$ для того чтобы получить $r_2E_\theta(r_2,t)$ и $r_3E_\theta(r_3,t)$. На рисунке видно, что точки отлично легли на соответствующие кривые, что подтверждает корректность вывода оператора распространения и применимость его для вычисления как прямого, так и обратного во времени распространения. Последнее стало возможным благодаря вынесению эффекта запаздывания из оператора.

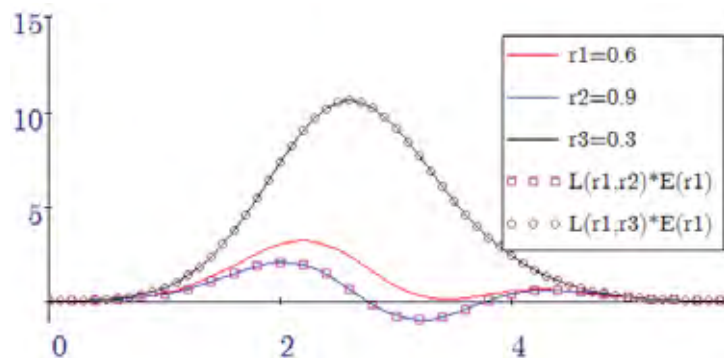


Рис. 3.5. Расчёт временной формы импульса при распространении вперед-назад во времени. Временная зависимость $rE_\theta(r,t)$ при нескольких радиусах. Точками обозначены данные, рассчитанные с использованием свёртки оператора распространения с $E_\theta(r_1,t)$ для большего и меньшего радиусов $r_3 < r_1 < r_2$. Задержка на распространение устранена (учитывается неявно) чтобы сравнить дисперсионные искажения сигнала.

Выводы к разделу 3

Построен метод модового базиса для конических волноводов с многосвязной областью поперечного сечения и факторизованной зависимостью матери-

альных параметров среды. Уравнения Максвелла представлены в операторном виде с отделенной угловой частью с угловыми зависимостями материальных параметров; введено функциональное пространство, которое обеспечивает самосопряжённость этого оператора. Доказано разложение функционального пространства решений на подпространства Е-, Н- и Т-волн, для каждого из них сформулированы граничные задачи на собственные значения для определения элементов базиса (мод). Получена и проанализирована система эволюционных волноводных уравнений, описывающая изменение временной формы модовых амплитуд с распространением вдоль радиального направления. В этом случае система выглядит как уравнение Клейна-Гордона-Фока с матричными коэффициентами и слагаемыми, описывающими межтиповые преобразования. Из анализа распространения импульса на простом примере излучения кольца с током установлено, что с увеличением радиуса количество распространяющихся мод увеличивается, и, из-за наличия межмодовой связи, их нужно учитывать в численной схеме решения. Таким образом, предлагаемая схема дает преимущества только для анализа распространения волн в окрестности центра возбуждения. Это может быть применено к анализу антенн с диэлектрическим заполнением, например, ТЕМ-рупоров с диэлектрическим заполнением. При этом количество мод, которые должны быть учтены в расчете, определяется количеством мод, распространяющихся при максимальном радиусе, где еще происходят межмодовые преобразования, то есть на апертуре антенны. Далее в свободном пространстве моды распространяются отдельно друг от друга, следовательно, если высшие моды не были возбуждены с заметной амплитудой на апертуре, то при дальнейшем распространении волны в дальнюю зону, они не внесут существенного вклада в излучаемое поле. Определение начальных амплитуд мод в свободном пространстве, возбуждаемых на апертуре антенны, может быть осуществлено описанным в этом разделе методом перерасложения (метод согласования мод).

РАЗДЕЛ 4

МЕТОД МОДОВОГО БАЗИСА В ОТКРЫТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

В этом разделе рассмотрен круг задач, связанных с разложением по модам полей электромагнитных волн в неограниченном пространстве. Вначале рассмотрено свободное пространство и распространение импульсных волновых пучков (ИВП) в нём. Предложена численная схема для расчёта возникающих интегралов на основе гауссовой квадратуры. Численно проанализировано распространение ИВП, создаваемых токами на плоскости. Введены характеристики для описания эволюции фронта пучка в промежуточной зоне, которые основываются на приближении полей вблизи оси сферическим фронтом, который характеризуется центром кривизны (временной центр) и точкой, от которой происходит затухание по обратному степенному закону (амплитудный центр). Далее рассмотрена задача о построении базиса в диэлектрическом волноводе. Рассматриваются две структуры: круглый диэлектрический волновод и прямоугольный волновод с продольным диэлектрическим слоем, в котором одна стенка удалена на бесконечность. Рассмотрены особенности построения модового базиса в этих структурах, получена система эволюционных волноводных уравнений, которая отличается от соответствующей системы для закрытого цилиндрического волновода тем, что суммы заменены интегралами по спектральному параметру, соответственно вместо матриц, представляющих межмодовые преобразования, введены интегральные операторы, ядра этих операторов играют ту же роль, что ранее играли матричные коэффициенты СЭВУ. Для решения интегро-дифференциальной СЭВУ предложен метод моментов, который позволяет свести её к системе с матричными коэффициентами, для которой используется такая же численная схема, как и для закрытых волноводов. Для проверки получаемых решений был также реализован традиционный метод FDTD. Для снижения размерности задачи, использовалась формулировка FDTD для тел

вращения (BOR- FDTD — body of revolution) с использованием сопровождающего окна, т.е. когда дискретизируемый вычислительный объём смещается вслед за распространяющейся волной. Это позволило проанализировать эффекты, возникающие при долговременном моделировании распространения волны вдоль диэлектрического волновода. Был выявлен и проанализирован эффект возникновения волновой структуры — импульсной поверхностной волны, которая распространяется в диэлектрическом волноводе в качестве предвестника со скоростью света в окружающем пространстве, сохраняя свою волновую структуру.

Основные результаты раздела описаны в работах автора [9, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 29, 32, 35, 38, 46, 53, 59, 63, 65, 66, 73, 74].

4.1. Введение

Метод модового базиса также может быть использован для анализа распространения импульсных полей в свободном пространстве. Эта задача в рамках ММБ была рассмотрена в работах А. Н. Думина [78]. Особенностью открытых структур является наличие непрерывного спектра, т.е. параметр разделения переменных, который определяется из решения граничной задачи на собственные значения, может принимать непрерывный спектр значений. Это приводит к тому, что модовое разложение представляется не суммами, а интегралами. Свободное пространство рассматривается как некоторый волновод в цилиндрической системе координат. Операторы $\mathbb{W}_E$ и $\mathbb{W}_H$ при этом определяются аналогично рассмотренному во втором разделе случаю. Главные отличия лишь в граничных условиях, которые теперь задаются не на контуре ограничивающего сечение идеального проводника, а на бесконечно удалённом контуре. При этом ставятся дополнительные условия ограниченности полей на бесконечности и конечности энергии (квадратичного интеграла от функции) в любой конечной подобласти бесконечного сечения. В результате вводится разложение полей по так называемым бесселевым модам, которые и ранее возникали в задачах оптики как пример «бездифракционных» пучков. Первой работой по бесселевым

модам принято считать статью 1987 года Durnin [335]. В дальнейшем рассматривались и многие другие аналитические пучки: пучки Бесселя-Гауса [336], пучки Эйри [337], пучки Бесселя-Эйри [338], гипергеометрические пучки [340, 339] и т.п., которые имеют интересные свойства, такие как отсутствие дифракционного расхождения, самолечение при затенении части фронта, «ускорение волнового центра», возможность «поворачивать за угол» и т.п. Среди подобных работ в Украине, следует упомянуть, например, диссертацию Д. Золотарёва под руководством А. Г. Неруха по этой тематике [107].

4.2. Описание волновых пучков в свободном пространстве в виде разложения по бесселевым модам

Основные результаты этого подраздела изложены в работах автора [35, 38, 46].

В этом подразделе рассмотрено возбуждение и распространение в ближней зоне импульсного волнового пучка (ИВП), создаваемого гауссовым распределением линейно поляризованных токов на плоскости. Используется метод модового базиса для свободного пространства, который основан на разложении полей во временной области по бесселевым модам с зависящими от времени и продольной координаты амплитудами. Эти моды характеризуются тем, что они не изменяют поперечной структуры при распространении в свободном пространстве. Распространение каждой такой моды описывается уравнением Клейна-Гордона. Для численного решения, интеграл по радиальному волновому числу представляется в виде суммы с использованием оптимальной гауссовой квадратурной формулы с весами и узлами, специально рассчитанными для гауссовой весовой функции на интервале $[0; \infty]$. В результате построен алгоритм, который позволяет вычислять с высокой точностью компоненты поля в ближней и средней зоне для произвольного импульсного возбуждения токов. На основе этого подхода были рассчитаны и проанализированы характеристики формирования сферической волны полями в ближней зоне.

4.2.1. Представление пучков

В плоскости $z = 0$ задано распределение токов $\vec{J}(t, \vec{r}_\perp)$. Здесь мы рассмотрим возбуждение линейно поляризованными токами с гауссовым распределением в радиальном направлении:

$$\vec{J}(z, t; \vec{r}_\perp) = \vec{y}_0 \delta(z) f(t) e^{-(\rho/R)^2} \quad (4.1)$$

Такому распределению токов соответствует также гауссов пространственный спектр:

$$j_1(z, t; \chi) = \sqrt{\mu_0 \mu \pi \chi} R^2 \frac{1}{2} e^{-(\chi R/2)^2} \delta(z) f(t) \quad (4.2)$$

В общем случае пространственный спектр рассчитывается по формуле:

$$j_m(z, t; \chi) = \sqrt{\mu_0 \mu} \int_S \vec{J}(z, t; \vec{r}_\perp) \cdot \nabla_\perp \psi_m(\vec{r}_\perp; \chi) dS \quad (4.3)$$

где пространственные гармоники (бесселевы моды) выглядят следующим образом:

$$\psi_m(\vec{r}_\perp; \chi) = \frac{1}{\sqrt{\pi \chi}} J_m(\chi \rho) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Для рассматриваемого случая линейно поляризованных токов используется только одна угловая гармоника (соответствующая $\cos(\varphi)$ в (4.4)). Рассматриваемое возбуждение (поперечными электрическими токами на плоскости) возбуждает только ТЕ-волну. Соответствующая амплитуда и ее производные в любой точке при $z > 0$ в любой момент времени $t > z/c$ могут быть рассчитаны с помощью операторов распространения:

$$\begin{aligned} h(z, t + z/c; \chi) &= \sqrt{\mu_0 \mu \pi \chi} R^2 \frac{1}{2} e^{-(\chi R/2)^2} Z_{z, \chi}^j(t) * f(t) \\ \partial_z h(z, t + z/c; \chi) &= \sqrt{\mu_0 \mu \pi \chi} R^2 \frac{1}{2} e^{-(\chi R/2)^2} \partial_z Z_{z, \chi}^j(t) * f(t) \\ \partial_{ct} h(z, t + z/c; \chi) &= \sqrt{\mu_0 \mu \pi \chi} R^2 \frac{1}{2} e^{-(\chi R/2)^2} \partial_{ct} Z_{z, \chi}^j(t) * f(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Звездочка обозначает свертку по времени: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$.

Операторы распространения имеют вид:

$$\begin{aligned}
Z_{z,\chi}^j(t) &= -\frac{1}{2}cJ_0\left(\chi c\sqrt{t^2 + 2tz/c}\right) \\
\partial_z Z_{z,\chi}^j(t) &= \frac{1}{2}\left[\delta(t) - \chi_2 c z \tilde{J}_1\left(\chi c\sqrt{t^2 + 2tz/c}\right)\right] \\
\partial_{ct} Z_{z,\chi}^j(t) &= -\frac{1}{2}\left[\delta(t) - (\chi c)^2(t + z/c)\tilde{J}_1\left(\chi c\sqrt{t^2 + 2tz/c}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\tilde{J}_1(x) = J_1(x)/x$; а $J_1(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя.

Компоненты полей выражаются через амплитуды следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_z^{TE} &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu}} \int_0^\infty h(z,t;\chi) \psi_1(\vec{r}_\perp;\chi) \chi^2 d\chi = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu}} \sum_j w_j h(z,t;\chi_j) \psi_1(\vec{r}_\perp;\chi_j) \chi_j^2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}^{TE} &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu}} \int_0^\infty \partial_z h(z,t;\chi) \nabla_\perp \psi_1(\vec{r}_\perp;\chi) d\chi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu}} \sum_j w_j \partial_z h(z,t;\chi_j) \nabla_\perp \psi_1(\vec{r}_\perp;\chi_j)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}^{TE} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}} \int_0^\infty \partial_{ct} h(z,t;\chi) [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp \psi_1(\vec{r}_\perp;\chi)] d\chi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}} \sum_j w_j \partial_{ct} h(z,t;\chi_j) [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp \psi_1(\vec{r}_\perp;\chi_j)]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь дополнительно выражены интегралы в виде сумм с помощью квадратурной формулы, которая определяется заданием узлов χ_j и весовых коэффициентов w_j . Из (4.5) видно, что спектр убывает по гауссовому закону, поэтому оптимальной квадратурой для рассматриваемого случая будет гауссова квадратурная формула, определенная для полубесконечного интервала и гауссовой весовой функции, при этом представление интеграла в виде:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x) \exp(-x^2) dx &= \sum_{j=1}^N w_j f(x_j) \Leftrightarrow \\
\int_0^\infty \tilde{f}(x) dx &= \sum_{j=1}^N \tilde{w}_j \tilde{f}(x_j); \quad \tilde{f}(x) = f(x) \exp(-x^2)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

будет точным для $f(x)$, представимых в форме полинома вплоть до степени $2N$. Построение соответствующей квадратурной формулы было выполнено на основе алгоритма, представленного в [312] с помощью промежуточного переразложения по полиномам Лягерра. Для примера, в таблице 4.1 приведены значения для узлов и весов квадратурной формулы при $N = 20$.

Таблица 4.1.

Узлы и веса гауссовой квадратурной формулы для интеграла (4.10) для $N = 20$

x_j	w_j	$\tilde{w}_j$
0.14279509699916748285e-1	0.36567921632008359498e-1	0.36575378752272120677e-1
0.74631300392191370660e-1	0.83317534401677622489e-1	0.83782893770933879494e-1
0.18086156305803827336	0.12395417854119236088	0.12807587662331372883
0.32943335606428831660	0.15102858000702281812	0.16834163000696865655
0.51605054306153028246	0.15641446700455091446	0.20414233820869743737
0.73625545758089084043	0.13699223495513453445	0.23556722845877169146
0.98587357503752715705	0.99529247247220048150e-1	0.26306423689735846260
1.2612890161027661601	0.58533770697906252377e-1	0.28727899359917723646
1.5595796452096599804	0.27135780375560486440e-1	0.30893837886370459353
1.8785619193029803503	0.96447336592154056968e-2	0.32878594510666406142
2.2167941653876453745	0.25517150915688126689e-2	0.34756166055566622495
2.5735778208262785150	0.48644899766090204418e-3	0.36601692729356830736
2.9489897467872328548	0.64351451799896233672e-4	0.38496204401536046197
3.3439813798616392289	0.56423914895260908275e-5	0.40535538999454733114
3.7605999329107743140	0.30908365223277049033e-6	0.42846680062035949856
4.2024426004211381561	0.97564110534209131967e-8	0.45620299034737093452
4.6756088477944769840	0.15760867173927210712e-9	0.49184688576576859400
5.1909016869750004293	0.10759457467372339930e-11	0.54206966485021326138
5.7699851655677557810	0.21698635462758469865e-14	0.62413830011896811600
6.4705583870645765820	0.53112230616773392555e-18	0.80963739990782378495

Таким образом, с помощью формул (4.5)-(4.6) можно рассчитать любую компоненту поля для произвольной возбуждающей функции $f(t)$. На самом деле точность ограничена длительностью импульса: чем короче длительность (по сравнению с поперечным размером апертуры R), тем выше точность.

Для примера было рассмотрено возбуждение лягерровским импульсом вида: $f(t) = (t/T)^2(1 - t/3T)\exp(-t/T)$. Такая форма возбуждающей функции была выбрана потому, что она не имеет постоянной составляющей (после завершения импульса не будет оставаться статических кулоновских полей), а также имеет нулевую первую производную в нуле.

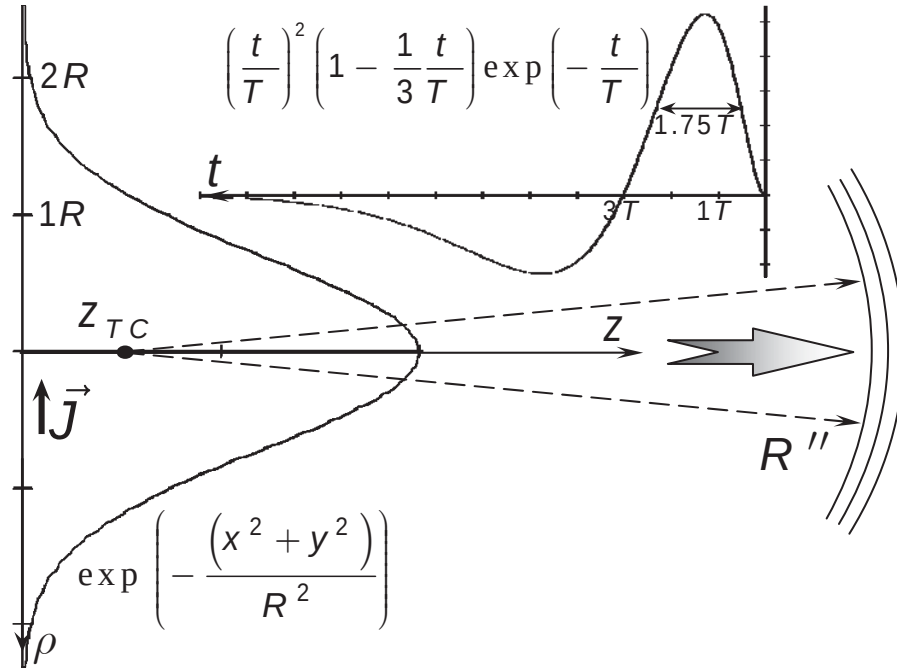


Рис. 4.1. Геометрия задачи: на плоскости $z = 0$ заданы линейно поляризованные токи с радиально-гауссовым амплитудным распределением, которые синхронно возбуждаются импульсом Лягерра. В результате возбуждается импульсный сферический фронт, который около оси может считаться локально сферическим и описываться центром кривизны Z_{TC} .

4.2.2. Анализ распространения импульсного волнового пучка. Амплитудный и временной центры пучка.

Были проанализированные некоторые характеристики излучаемого ИВП. В частности, исследовались поля в ближней зоне с целью выявления границы ближней зоны, т.е. на каких расстояниях от апертуры ИВП превращается в сферическую волну. Для этого были исследованы затухания амплитуды излучаемого импульса на апертуре ИВП. В дальней зоне амплитуда должна меняться как r^{-1} . Если аппроксимировать зависимость обратной амплитуды излучаемого

импульса $E^{-1}(r)$ от расстояния как прямой линией, то эта линия пересечет ось r в точке r_0 , от которой происходит затухание по закону $(r - r_0)^{-1}$. Эта точка называется амплитудным центром (или виртуальным источником) ИВП (рис. 4.2). Это понятие описывалось ранее в литературе, здесь же мы исследовали как положение этого центра изменяется с изменением продолжительности импульса возбуждения. Соответствующий график приведён на рис. 4.3.

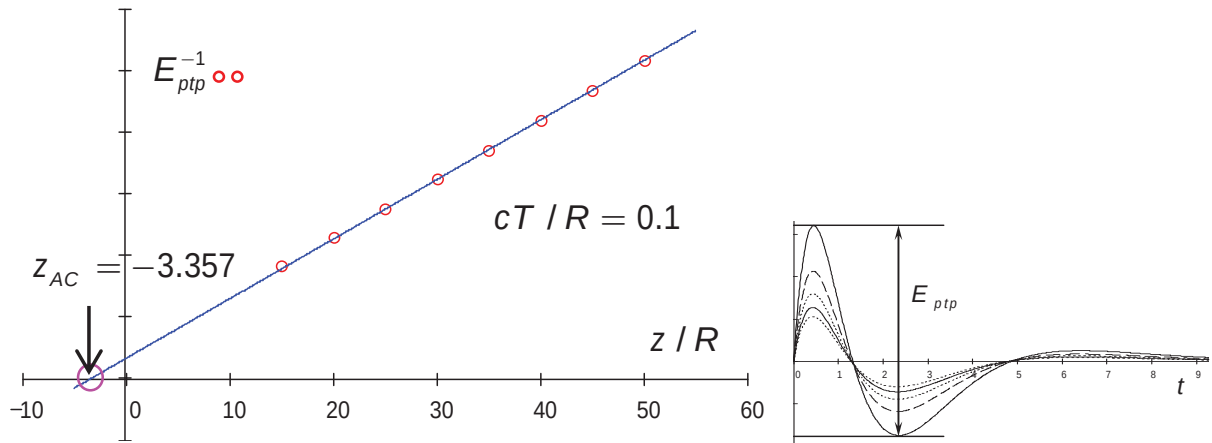


Рис. 4.2. Поведение амплитуды поля с расстоянием. Амплитудный центр.

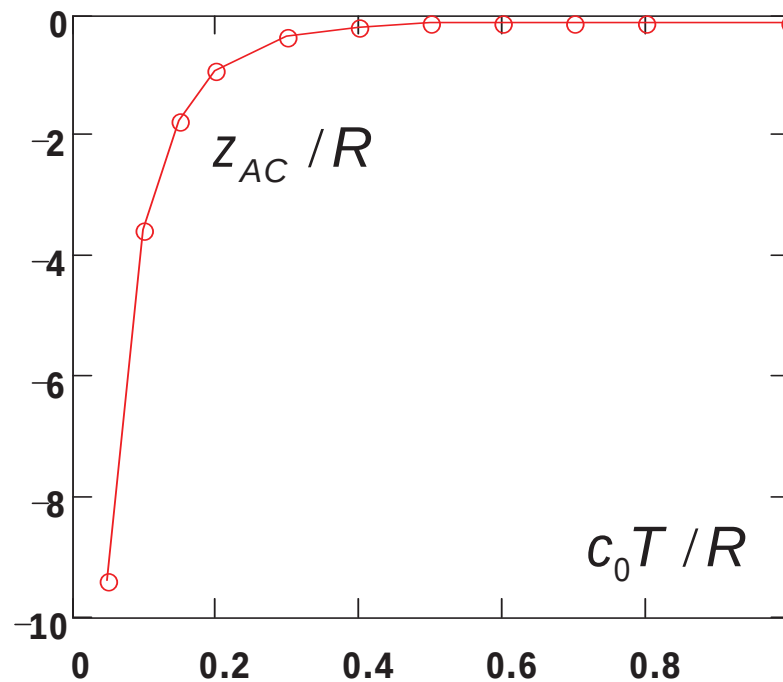


Рис. 4.3. Зависимость положения амплитудного центра от длительности импульса по сравнению с начальной шириной пучка

Как видно из графика, амплитудный центр всегда находится позади плоскости возбуждения. С увеличением длительности он придвигается к плоскости

возбуждения. Это обусловлено тем, что при большой длительности продольный размер пучка велик по сравнению с поперечным размером источников, поэтому источник выглядит как точечный, и естественно, что поле от него ведёт себя как поле от точечного источника, убывая от центра токов, его создавших.

Кроме того, было проанализировано изменение кривизны фронта ИВП во время распространения. Для этого на нескольких плоскостях параллельных апертуре вычислялась задержка прихода импульса как функция расстояния от оси пучка (задержка вычислялась по максимуму корреляции с сигналом на оси). Схема расчёта центра кривизны по распределению задержки показана на рис. 4.4.

Из анализа поведения центра кривизны фронта ИВП (рис. 4.5) выявлено, что он не совпадает с амплитудным центром, кроме того, его положение зависит от расстояния до апертуры вплоть до расстояний $\sim 200 \div 300R$ (для сравнения, амплитудная зависимость r^{-1} довольно хорошо выполняется уже на расстоянии $15R$). На коротких расстояниях центр кривизны лежит позади апертуры, на очень больших расстояниях он устанавливается на 6-7 поперечных размеров источника впереди апертуры.

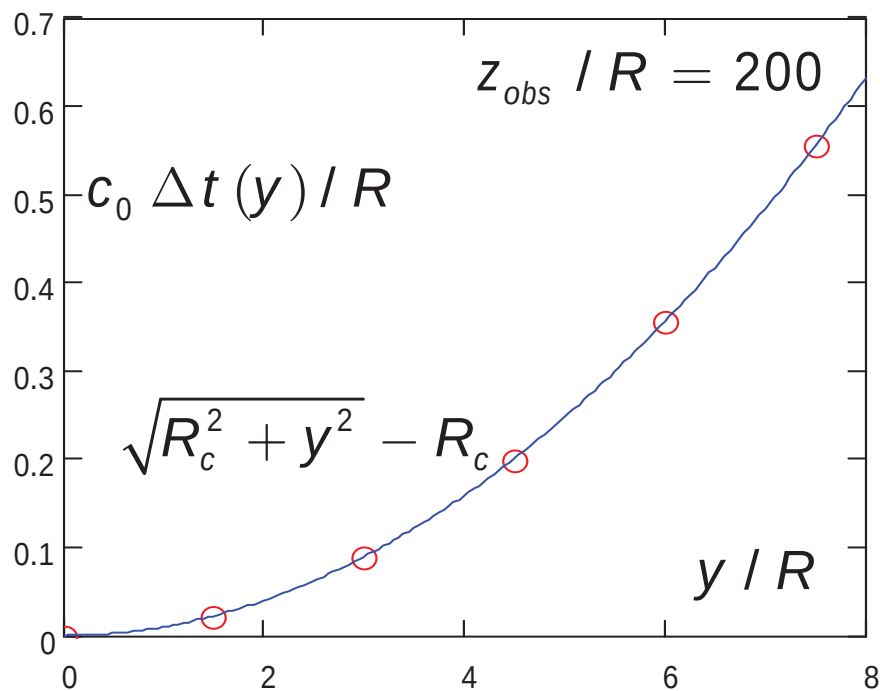


Рис. 4.4. К определению центра кривизны фронта по распределению времени задержки в радиальном направлении на поперечной плоскости.

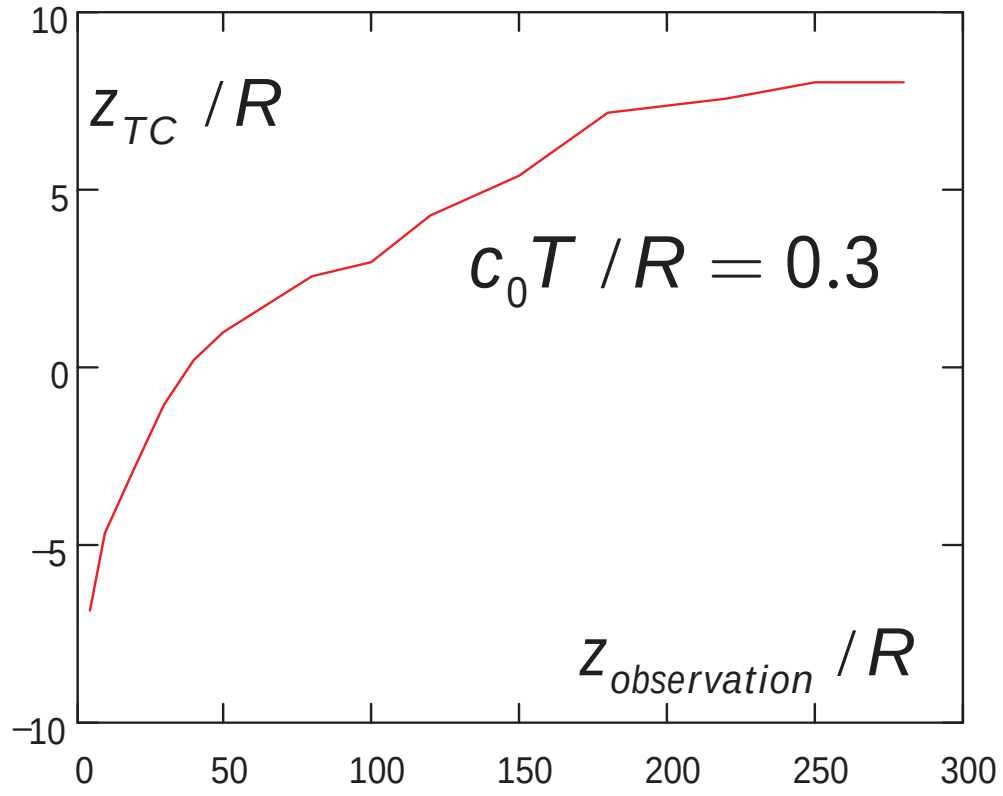


Рис. 4.5. Поведение центра кривизны с распространением пучка.

4.3. Построение модового базиса для открытого диэлектрического волновода

Рассмотрим круглый диэлектрический волновод радиуса a в свободном пространстве (см. рис. 4.6). Диэлектрическая проницаемость волновода может изменяться по произвольному закону $\varepsilon(\vec{r})$, а вне волновода равняется единице. Магнитные проницаемости волновода и свободного пространства считаются равными единице.

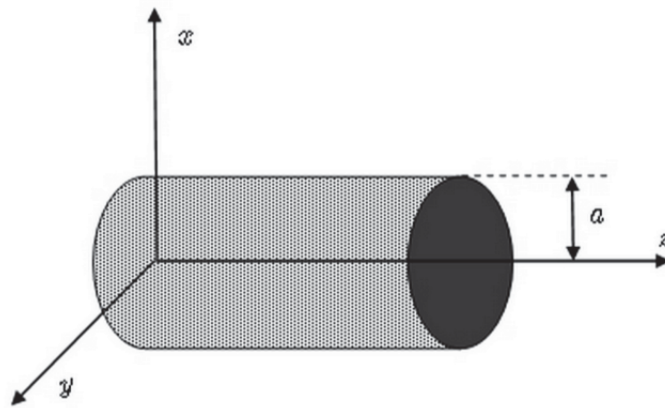


Рис. 4.6. Геометрия задачи для рассматриваемого круглого диэлектрического волновода.

Основные формулы для этого случая получены во втором разделе, в пункте, посвященном рассмотрению построения модового базиса для закрытого волновода с поперечно-неоднородным диэлектрическим заполнением. Отличие состоит только в постановке граничных условий для задач в поперечных координатах. Для диэлектрического волновода решение ищется на всей плоскости xu и должно удовлетворять условию ограниченности на бесконечности.

Для получения модового базиса для диэлектрического волновода необходимо решить системы (2.40) и (2.46) для Н- и Е- волн соответственно:

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon(\vec{r})^{-1} \nabla_{\perp} \Phi^h(\vec{r}, p) + p^2 \Psi^h(\vec{r}, p) = 0, \\ \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Psi^h(\vec{r}, p) + p^2 \Phi^h(\vec{r}, p) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Phi^e(\vec{r}, p) + p^2 \varepsilon(\vec{r}) \Psi^e(\vec{r}, p) = 0, \\ \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon(\vec{r}) \nabla_{\perp} \Psi^e(\vec{r}, p) + p^2 \varepsilon(\vec{r}) \Phi^e(\vec{r}, p) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Н-волны. Чтобы построить модовый базис для Н волн, нужно решить систему (4.11) в поперечных координатах. При этом необходимо заметить, что для цилиндрической системы координат поперечная компонента оператора Гамильтона это $\nabla_{\perp} = \vec{r}_0 \partial_r + \vec{\varphi}_0 r^{-1} \partial_{\varphi} = r^{-1} \partial_r r \vec{r}_0 + r^{-1} \partial_{\varphi} \vec{\varphi}_0$ (в цилиндрической системе координат орт $\vec{\varphi}_0$ не является константой). Пусть потенциалы имеют зависимость от угловой координаты в виде $\Phi^h(\vec{r}, p) = \Phi^h(r, p) \cos(m\varphi)$, $\Psi^h(\vec{r}, p) = \Psi^h(r, p) \cos(m\varphi)$ и диэлектрическая проницаемость не зависит от угловой переменной $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(r)$, тогда (4.11) может быть переписано в следующей форме

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Phi^h(r, p) - \frac{1}{\varepsilon(r)} \frac{d\varepsilon(r)}{dr} \frac{d}{dr} \Phi^h(r, p) - \\ & - \frac{m^2}{r^2} \Phi^h(r, p) + \varepsilon(r) p^2 \Psi^h(r, p) = 0, \\ & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Psi^h(r, p) - \frac{m^2}{r^2} \Psi^h(r, p) + p^2 \Phi^h(r, p) = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.13)$$

Для получения модового базиса мы используем подход, предложенный Шевченко В.В. в [358] для построения базиса для открытых структур в частотной области. В работе [358] сформулировано интегральное уравнение, где потенциальная функция (подобно Ψ^h или Φ^h в нашем случае) во всем бесконечном пространстве выражается через интеграл от потенциальной функции по диэлектрическому слою, занимающему конечную область (где $\varepsilon(r) \neq 1$).

В рассматриваемом случае для получения таких интегральных уравнений нужно записать следующее выражение относительно произвольной функции $Z(\rho, r)$ с помощью формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
& \int_0^r Z(\rho, r) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \right) \rho d\rho = \\
& = \int_0^r \left(\frac{d}{d\rho} + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) Z(\rho, r) (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) d\rho + \\
& \quad + Z(\rho, r) \rho \frac{d}{d\rho} (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \Big|_0^r - \\
& \quad - \frac{d}{d\rho} Z(\rho, r) \rho (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \Big|_0^r.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Перепишем соотношение (4.14) относительно произвольной функции $F(\rho, r)$, удовлетворяющей следующим условиям

$$F(\rho, r) \Big|_{\rho=r} = 0, dF(\rho, r)/d\rho \Big|_{\rho=r} = 1. \tag{4.15}$$

Тогда используя (4.13), формула (4.14) может быть трансформирована к виду

$$\begin{aligned}
& \int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p) \right) \rho d\rho + \\
& + \int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{m^2}{\rho^2} + p^2 \right) (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \rho d\rho = -r (\Phi^h(r, p) - \Psi^h(r, p)) \\
& + \int_0^r \left(\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho, r) \right) (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) d\rho + \\
& + \rho \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \Big|_{\rho=0}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

В соотношении (4.16) первый интеграл в области вне диэлектрического слоя (где $\varepsilon(r) = 1$) становится равным нулю. Таким образом, для получения интегрального уравнения, где комбинация потенциалов $r(\Phi^h(r, p) - \Psi^h(r, p))$ во всей бесконечной области $(0, \infty)$ выражается через интеграл по диэлектрическому слою, функция $F(\rho, r)$ должна удовлетворять модифицированному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho, r) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + p^2 \right) F(\rho, r) = 0. \tag{4.17}$$

Решение (4.17) с условиями (4.15) выражается через модифицированную функцию Бесселя $I_m(\cdot)$ и функцию Макдональда $K_m(\cdot)$ как [114]

$$F(\rho, r) = r(K_m(\rho r)I_m(\rho \rho) - I_m(\rho r)K_m(\rho \rho)). \quad (4.18)$$

Используя функцию (4.18), удовлетворяющую уравнению (4.17), соотношение (4.16) может быть переписано в следующем виде

$$\begin{aligned} & \int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, \rho) + \rho^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, \rho) \right) \rho d\rho \\ &= \rho \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, \rho) - \Psi^h(\rho, \rho)) \Big|_{\rho=0} - \\ & - r(\Phi^h(r, \rho) - \Psi^h(r, \rho)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Важно заметить, что здесь функции $F(\rho, r)$ и $dF(\rho, r)/d\rho$ при $\rho = 0$ могут быть сингулярными, но в выражении (4.19) в комбинации с $\rho(\Phi^h(\rho, \rho) - \Psi^h(\rho, \rho))$ они становятся регулярными. Таким образом, получено одно интегральное уравнение, в котором интеграл обращается в ноль вне диэлектрического слоя.

Выражение (4.14) может быть записано относительно суммы потенциалов $\Phi^h(r, \rho) + \Psi^h(r, \rho)$ и функции $G(\rho, r)$ удовлетворяющей следующим условиям $G(\rho, r)|_{\rho=r} = 0, dG(\rho, r)/d\rho|_{\rho=r} = -1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^r G(\rho, r) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) \right) \rho d\rho = \\ &= \int_0^r \left(\frac{d}{d\rho} + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) G(\rho, r) (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) d\rho + \\ &+ \rho \left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) \Big|_0^r + \\ &+ r(\Phi^h(r, \rho) + \Psi^h(r, \rho)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Используя систему (4.13), уравнения (4.20) может быть преобразовано к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned}
& \int_0^r G(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, \rho) + \rho^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, \rho) \right) \rho d\rho + \\
& + \int_0^r G(\rho, r) \left(\frac{m^2}{\rho^2} - \rho^2 \right) (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) \rho d\rho = \\
& = \int_0^r \left(\frac{d}{d\rho} + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) G(\rho, r) (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) d\rho + \\
& + \rho \left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) \Big|_{\rho=0} \\
& + r (\Phi^h(r, \rho) + \Psi^h(r, \rho)).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Подобно уравнению (4.16), в уравнении (4.21) первый член становится равным нулю в области вне диэлектрического слоя. Таким образом, для получения искомого интегрального уравнения функция $G(\rho, r)$ должна удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{d^2}{d\rho^2} G(\rho, r) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - \left(\frac{m^2}{\rho^2} - \rho^2 \right) G(\rho, r) = 0, \tag{4.22}$$

решение которого, выраженное через функции Бесселя $J_m(\cdot)$ и Неймана $Y_m(\cdot)$, имеет вид [359]

$$G(\rho, r) = -\frac{\pi r}{2} (Y_m(\rho r) J_m(\rho \rho) - J_m(\rho r) Y_m(\rho \rho)). \tag{4.23}$$

После подстановки (4.23) выражение (4.21) переходит в следующее интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
& \int_0^r G(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, \rho) + \rho^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, \rho) \right) \rho d\rho = \\
& = \rho \left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) \Big|_{\rho=0} + \\
& + r (\Phi^h(r, \rho) + \Psi^h(r, \rho)).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь также как и в соотношении (4.19) функции $G(\rho, r)$ и $dG(\rho, r)/d\rho$ при $\rho = 0$ могут быть сингулярными, но в комбинации с $\rho(\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p))$ они становятся регулярными.

Из интегральных уравнений (4.19) и (4.24) можно получить следующее интегральное уравнение для потенциала $\Psi^h(r, p)$, в котором интеграл становится равным нулю вне диэлектрического слоя

$$\begin{aligned} \Psi^h(r, p) = \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) + F(\rho, r)) & \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + \right. \\ & \left. + p^2(1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p) \right) \rho d\rho \\ - \frac{\rho}{2r} & \left[\left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p)) \right. \\ & \left. + \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \right] \Bigg|_{\rho=0} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Подобное выражения может быть записано и для другого потенциала $\Phi^h(r, p)$

$$\begin{aligned} \Phi^h(r, p) = \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) - F(\rho, r)) & \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + \right. \\ & \left. + p^2(1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p) \right) \rho d\rho \\ - \frac{\rho}{2r} & \left[\left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p)) \right. \\ & \left. - \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \right] \Bigg|_{\rho=0}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Е-волны. Исходная система для Е-поляризации приведена в (2.46). В цилиндрической системе координат потенциалы имеют угловую зависимость в виде $\Phi^e(\vec{r}, p) = \Phi^e(r, p) \sin(m\varphi)$, $\Psi^e(\vec{r}, p) = \Psi^e(r, p) \sin(m\varphi)$ и $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(r)$, $\mu = 1$, тогда из () можно получить следующие уравнения

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Phi^e(r, p) - \frac{m^2}{r^2} \Phi^e(r, p) + p^2 \varepsilon(r) \Psi^e(r, p) = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Psi^e(r, p) + \frac{1}{\varepsilon(r)} \frac{d\varepsilon(r)}{dr} \frac{d}{dr} \Psi^e(r, p) - \frac{m^2}{r^2} \Psi^e(r, p) + p^2 \Phi^e(r, p) = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Используя систему (4.27), соотношение (4.14) может быть переписано для $\Phi^e(\rho, p) - \Psi^e(\rho, p)$ и функции $F(\rho, r)$ из (4.18) как

$$r(\Phi^e(r, p) - \Psi^e(r, p)) = -\rho \left[F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \frac{d}{d\rho} F(\rho, r) \right] (\Phi^e(r, p) + \Psi^e(r, p)) \Big|_{\rho=0} - \int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Psi^e(\rho, p) + p^2(1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^e(\rho, p) \right) \rho d\rho, \quad (4.28)$$

Аналогичное соотношение для суммы потенциалов $\Phi^e(r, p) + \Psi^e(r, p)$ записывается как (здесь используются формулы (4.27) и (4.14), а также функция (4.23))

$$r(\Phi^e(r, p) + \Psi^e(r, p)) = \rho \left[G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \frac{d}{d\rho} G(\rho, r) \right] (\Phi^e(\rho, p) + \Psi^e(\rho, p)) \Big|_{\rho=0} + \int_0^r G(\rho, r) \left(-\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Psi^e(\rho, p) + p^2(1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^e(\rho, p) \right) \rho d\rho. \quad (4.29)$$

Из интегральных уравнений (4.28) и (4.29) можно получить следующие интегральные уравнения для потенциалов в случае Е поляризации

$$\Phi^e(r, p) = \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) - F(\rho, r)) \left(-\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Psi^e(\rho, p) + p^2(1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^e(\rho, p) \right) \rho d\rho - \frac{\rho}{2r} \left[\left[F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \frac{d}{d\rho} F(\rho, r) \right] (\Phi^e(\rho, p) - \Psi^e(\rho, p)) \right] \Big|_{\rho=0}, \quad (4.30)$$

$$\Psi^e(r, p) = \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) + F(\rho, r)) \left(-\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Psi^e(\rho, p) + p^2(1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^e(\rho, p) \right) \rho d\rho + \frac{\rho}{2r} \left[\left[F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \frac{d}{d\rho} F(\rho, r) \right] (\Phi^e(\rho, p) - \Psi^e(\rho, p)) \right] \Big|_{\rho=0} + \left[G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \frac{d}{d\rho} G(\rho, r) \right] (\Phi^e(\rho, p) + \Psi^e(\rho, p)) \Big|_{\rho=0}. \quad (4.31)$$

Полученные интегральные уравнения (4.25), (4.26), (4.30) и (4.31) позволяют просто выразить модовые функции вне диэлектрического слоя через модовые функции внутри диэлектрического слоя. Этот метод является более эффек-

тивным, чем стандартный метод, использующий граничные условия на границе диэлектрика, который приводит к системе линейных алгебраических уравнений 4×4 , так как позволяет избежать громоздкого решения этой системы [176].

Базис для круглого диэлектрического волновода с постоянной диэлектрической проницаемостью. Рассмотрим круглый диэлектрический волновод с постоянной диэлектрической проницаемостью ε и радиусом a . Для этой структуры решение систем (4.13) и (4.27) внутри диэлектрического слоя может быть записано в следующей форме через неизвестные коэффициенты A^h, B^h, A^e и B^e [359]

$$\begin{aligned}\Psi_{in}^h(r, \rho) &= A^h(\rho) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r) + B^h(\rho) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r), \\ \Phi_{in}^h(r, \rho) &= \sqrt{\varepsilon} (A^h(\rho) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r) - B^h(\rho) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r)), \\ \Psi_{in}^e(r, \rho) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (A^e(\rho) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r) - B^e(\rho) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r)), \\ \Phi_{in}^e(r, \rho) &= A^e(\rho) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r) + B^e(\rho) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} \rho r).\end{aligned}\tag{4.32}$$

Из этих формул используя интегральные уравнения (4.25), (4.26), (4.30) и (4.31) можно получить модовые функции вне диэлектрического слоя. При этом используются асимптотические выражения для цилиндрических функций при малых значениях аргумента [360]

$$\begin{aligned}J_m(x) &\approx I_m(x) \approx (1/m!)(x/2)^m, \\ Y_m(x) &\approx -(\pi/2)K_m(x) \approx \begin{cases} (\pi/2)(\ln(x/2) + \gamma), & m = 0; \\ -((m-1)!/\pi)(2/x)^m, & m \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

С помощью этих формул второй член из (4.25) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\rho}{2r} \left\{ \left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, \rho) + \Psi^h(\rho, \rho)) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, \rho) - \Psi^h(\rho, \rho)) \right\} \bigg|_{\rho=0} = \\ &= \frac{1}{2r} \varepsilon^{m/4} J_m(\rho r) \begin{pmatrix} (\sqrt{\varepsilon} + 1) A^h(\rho) \\ -(\sqrt{\varepsilon} - 1) B^h(\rho) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Похожие выражения можно получить для таких же членов в формулах (4.26), (4.30) и (4.31).

В случае, когда диэлектрическая проницаемость имеет постоянное значение внутри волновода, интеграл от ее производной $d\varepsilon(\rho)/d\rho$ в выражении (4.25) с использованием граничного условия непрерывности для E_φ компоненты поля на границе диэлектрика может быть переписан как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) + F(\rho, r)) \frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) \rho d\rho = \\ & \eta(r-a) \frac{a}{r} (F(\rho, r) + G(\rho, r)) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{m}{r} J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} p a) - \sqrt[4]{\varepsilon} p J_{m+1}(\sqrt[4]{\varepsilon} p a) - \right. \\ & \left. - \frac{m}{r} I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} p a) - \sqrt[4]{\varepsilon} p I_{m+1}(\sqrt[4]{\varepsilon} p a) \right]. \end{aligned}$$

Используя похожий подход для формул (4.26), (4.30), (4.31) и подставляя выражение для потенциалов, введенное в (4.32) могут быть получены следующие соотношения для потенциалов внутри диэлектрического слоя через коэффициенты A^h , B^h , A^e и B^e

$$\begin{aligned} \Psi_{out}^h(r, p) &= d^h(p, A^h, B^h) J_m(pr) + b^h(p, A^h, B^h) Y_m(pr) + \\ &+ c^h(p, A^h, B^h) K_m(pr) + x^h(p, A^h, B^h) I_m(pr), \\ \Phi_{out}^h(r, p) &= d^h(p, A^h, B^h) J_m(pr) + b^h(p, A^h, B^h) Y_m(pr) - \\ &- c^h(p, A^h, B^h) K_m(pr) - x^h(p, A^h, B^h) I_m(pr), \\ \Psi_{out}^e(r, p) &= d^e(p, A^e, B^e) J_m(pr) + b^e(p, A^e, B^e) Y_m(pr) + \\ &+ c^e(p, A^e, B^e) K_m(pr) + x^e(p, A^e, B^e) I_m(pr), \\ \Phi_{out}^e(r, p) &= d^e(p, A^e, B^e) J_m(pr) + b^e(p, A^e, B^e) Y_m(pr) - \\ &- c^e(p, A^e, B^e) K_m(pr) - x^e(p, A^e, B^e) I_m(pr). \end{aligned}$$

Так как физическое решение должно удовлетворять условию ограниченности на бесконечности, коэффициенты при неограниченной на бесконечности

функции $I_m(pr)$ $x^h(p, A^h, B^h)$ и $x^e(p, A^e, B^e)$ должны равняться нулю для каждого значения спектрального параметра p :

$$\begin{cases} x^h(p, A^h, B^h) = 0, \\ x^e(p, A^e, B^e) = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Это условия существования непрерывного спектра значений p от нуля до бесконечности. Из условий (4.33) для каждого значения спектрального параметра p могут быть найдены соотношения между константами A^h и B^h (A^e и B^e). Для определенности предположим, что $A^h = A^e = 1$, тогда при использовании условий (4.33), потенциалы вне диэлектрического слоя выражаются как

$$\begin{aligned} \Psi_{out}^h(r, p) &= d^h(p)J_m(pr) + b^h(p)Y_m(pr) + c^h(p)K_m(pr), \\ \Psi_{out}^e(r, p) &= d^e(p)J_m(pr) + b^e(p)Y_m(pr) + c^e(p)K_m(pr), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где введены следующие коэффициенты

$$\begin{aligned} d^h(p) &= \frac{-\pi\sqrt{\varepsilon}}{4}(\zeta_+\Lambda(Y, J, -\varepsilon^{-1/4}, \zeta_-) + V^h(p)\zeta_-\Lambda(Y, I, -\varepsilon^{-1/4}, -\zeta_+)), \\ b^h(p) &= \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{4}(\zeta_+\Lambda(J, J, -\varepsilon^{-1/4}, \zeta_-) + V^h(p)\zeta_-\Lambda(J, I, -\varepsilon^{-1/4}, -\zeta_+)), \\ c^h(p) &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}(\zeta_-\Lambda(I, J, -\varepsilon^{-1/4}, \zeta_+) + V^h(p)\zeta_+\Lambda(I, I, -\varepsilon^{-1/4}, -\zeta_-)), \\ d^e(p) &= \frac{\pi}{4}(-\zeta_+\Lambda(Y, J, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_-) + V^e(p)\zeta_-\Lambda(Y, I, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_+)), \\ b^e(p) &= \frac{-\pi}{4}(-\zeta_+\Lambda(J, J, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_-) + V^e(p)\zeta_-\Lambda(J, I, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_+)), \\ c^e(p) &= \frac{1}{2}(-\zeta_-\Lambda(I, J, -\varepsilon^{3/4}, \sqrt{\varepsilon}\zeta_+) + V^e(p)\zeta_+\Lambda(I, I, -\varepsilon^{3/4}, \sqrt{\varepsilon}\zeta_-)), \\ \zeta_+ &= (1 + \sqrt{\varepsilon}) / \sqrt{\varepsilon}, \zeta_- = (1 - \sqrt{\varepsilon}) / \sqrt{\varepsilon}, \\ V^h(p) &= \frac{-\zeta_-\Lambda(J, K, \varepsilon^{-1/4}, -\zeta_+)}{\zeta_+\Lambda(I, K, \varepsilon^{-1/4}, \zeta_-)}, V^e(p) = \frac{\zeta_-\Lambda(J, K, \varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_+)}{\zeta_+\Lambda(I, K, \varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_-)}, \\ \Lambda(Z^{(1)}, Z^{(2)}, \eta, \chi) &= pa(Z_m^{(1)}(\sqrt[4]{\varepsilon}pa)Z_{m+1}^{(2)}(pa) + \eta Z_{m+1}^{(1)}(\sqrt[4]{\varepsilon}pa)Z_m^{(2)}(pa)) + \\ &+ \chi m Z_{m+1}^{(1)}(\sqrt[4]{\varepsilon}pa)Z_m^{(2)}(pa). \end{aligned}$$

Выражения для $\Phi_{out}^{h,e}$ имеют такой же вид, только перед коэффициентами $c^{h,e}$ появляется знак «-». Таким образом, мы получили модовый базис для диэлектрического волновода с постоянной диэлектрической проницаемостью: внутри диэлектрического стержня базисные функции выражаются формулами (4.32), вне диэлектрического стержня базисные функции могут быть записаны в виде (4.34). Проверено, что полученный этим методом базис удовлетворяет граничным условиям на поверхности диэлектрика. Векторные модовые базисные функции могут быть вычислены с помощью формул (2.45) и (2.39).

Нормировочные функции для построенного базиса могут быть рассчитаны аналитически

$$\begin{aligned}
 (N^h(p))^2 \delta(p-p') &= \int_S \Phi^h(\vec{r}, p) \Psi^h(\vec{r}, p') dS = \\
 &= \frac{\lambda_m \pi}{p} (d^h(p)^2 + b^h(p)^2) \delta(p-p'), \\
 (N^e(p))^2 \delta(p-p') &= \int_S \varepsilon(\vec{r}) \Phi^e(\vec{r}, p) \Psi^e(\vec{r}, p') dS = \\
 &= \frac{\lambda_m \pi}{p} (d^e(p)^2 + b^e(p)^2) \delta(p-p'), \\
 \lambda_m &= \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

При получении формул (4.35) используются пределы цилиндрических функций на бесконечности

$$\begin{aligned}
 J_m(x) &\sim \sqrt{2/\pi x} \cos(x - (2m+1)\pi/4), \\
 Y_m(x) &\sim \sqrt{2/\pi x} \sin(x - (2m+1)\pi/4), \\
 K_m(x) &\sim \sqrt{2/\pi x} e^{-x},
 \end{aligned}$$

и следующую формулу для интегрирования цилиндрических функций [360]:

$$\int Z_p(\alpha r) \mathfrak{F}_p(\beta r) r dr = \frac{\alpha r Z_{p+1}(\alpha r) \mathfrak{F}_p(\beta r) - \beta r Z_p(\alpha r) \mathfrak{F}_{p+1}(\beta r)}{\alpha^2 - \beta^2}. \tag{4.36}$$

Формула (4.36) справедлива для функций Бесселя $J_m(x)$, функций Неймана $Y_m(x)$ и функций Ханкеля первого $H^{(1)}(x)$ и второго $H^{(2)}(x)$ рода. Для модифицированных функций Бесселя формула (4.36) может быть трансформиро-

вана с использованием определений модифицированной функции Бесселя $I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$ и функции Макдональда $K_m(x) = (\pi/2) i^{m+1} H_m^{(1)}(ix)$. Также для получения нормировочных функций (4.35) используется следующее выражение для дельта-функции Дирака

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin(\kappa - \tilde{\kappa})R}{\kappa - \tilde{\kappa}} = \pi \delta(\kappa - \tilde{\kappa}).$$

Подобно соотношениям (4.35) можно записать условия ортогональности для векторных базисных функций, выражающихся через скалярные базисные функции с помощью формул

$$\begin{aligned} \int_S \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^h(\vec{r}, p') dS &= (N^h(p))^2 \delta(p - p'), \\ \int_S \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^h(\vec{r}, p') dS &= (N^h(p))^2 \delta(p - p'), \\ \int_S \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}^e(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^e(\vec{r}, p') dS &= (N^e(p))^2 \delta(p - p'), \\ \int_S \vec{H}^e(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^e(\vec{r}, p') dS &= (N^e(p))^2 \delta(p - p'). \end{aligned}$$

Также могут быть доказаны следующие перекрестные соотношения ортогональности

$$\begin{aligned} \int_S \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^e(\vec{r}, p') dS &= 0, \\ \int_S \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^e(\vec{r}, p') dS &= 0. \end{aligned}$$

Важно заметить, что каждая полученная мода отдельно не обязана удовлетворять условиям излучения на бесконечности, но разложение поля по этим модам должно удовлетворять этому условию.

Дальше в этой работе будут использоваться только нормированные модовые функции

$$\begin{aligned} \Phi^h(\vec{r}, p) &= \Phi^h(\vec{r}, p) / N^h(p), \\ \Psi^h(\vec{r}, p') &= \Psi^h(\vec{r}, p) / N^h(p), \\ \Phi^e(\vec{r}, p) &= \Phi^e(\vec{r}, p) / N^e(p), \\ \Psi^e(\vec{r}, p') &= \Psi^e(\vec{r}, p) / N^e(p). \end{aligned}$$

Система эволюционных уравнений для круглого диэлектрического волновода. Для получения системы эволюционных уравнений, описывающих изменение электромагнитной волны в продольном направлении и во времени, иско-
мые поля раскладываются в интегралы по модам как

$$\begin{aligned} H_z(z, t, \vec{r}) &= \mu_0^{-1/2} \int_p h(z, t; p) p \Phi^h(\vec{r}; p) dp, \\ E_z(z, t, \vec{r}) &= \varepsilon_0^{-1/2} \int_p e(z, t, p) p \Phi^e(\vec{r}, p) dp, \\ \vec{E}(z, t, \vec{r}) &= \varepsilon_0^{-1/2} \int_p \left(v^h(z, t; p) \vec{E}^h(\vec{r}; p) + v^e(z, t, p) \vec{E}^e(\vec{r}, p) \right) dp, \\ \vec{H}(z, t, \vec{r}) &= \mu_0^{-1/2} \int_p \left(i^h(z, t, p) \vec{H}^h(\vec{r}, p) + i^e(z, t, p) \vec{H}^e(\vec{r}, p) \right) dp. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Подставляя разложения (4.37) в уравнения Максвелла в нормально-тангенциальной форме и используя формулы, можно получить следующие уравнения для коэффициентов разложений, называемых модовыми амплитудами

$$\begin{aligned} \partial_\tau i^h(p) + \int L^{hh}(p', p) \partial_z v^h(p') dp' &= -J_{Hh}^m(p), \\ \int K^{hh}(p', p) \partial_\tau i^h(p') dp' + \partial_z v^h(p) &= -J_{Eh}^m(p), \\ \partial_\tau v^e(p) + \int L^{ee}(p, p') \partial_z i^e(p') dp' &= -J_{Ee}^e(p), \\ \int K^{ee}(p', p) \partial_\tau v^e(p') dp' + \partial_z i^e(p) &= -J_{He}^e(p), \\ \int (L^{he}(p', p) \partial_z^2 v^h(p') + L^{ee}(p', p) \partial_z^2 v^e(p')) dp' + \partial_{z\tau}^2 i^e(p) - \int p'^2 v^e(p') dp' &= \rho_\Psi^e(p) - \partial_z J_{He}^m(p), \\ \int (K^{eh}(p', p) \partial_\tau^2 i^h(p') + K^{ee}(p', p) \partial_\tau^2 i^e(p')) dp' + \partial_{z\tau}^2 v^e(p) + \int p'^2 i^e(p') dp' &= -J_\Phi^{ez}(p) - \partial_\tau J_{Ee}^m(p), \\ \int (L^{hh}(p, p') \partial_z^2 i^h(p') + L^{he}(p, p') \partial_z^2 i^e(p')) dp' + \partial_{\tau z}^2 v^h(p) - \int p'^2 i^h(p') dp' &= \rho_\Psi^m(p) - \partial_z J_{Eh}^e(p), \\ \int (K^{hh}(p', p) \partial_\tau v^h(p') + K^{eh}(p', p) \partial_\tau v^e(p')) dp' + \partial_{\tau z}^2 i^h(p) + \int p'^2 v^h(p') dp' &= -J_\Phi^{mz}(p) - \partial_\tau J_{Hh}^e(p), \\ v^h(p) &= -\int K^{hh}(p, p') \partial_\tau h_z(p') dp' - J_\Phi^{mz}(p), \\ v^e(p) &= \partial_z e^z(p) - \rho_\Phi^e(p), \\ i^h(p) &= \partial_z h^z(p) - \rho_\Psi^m(p), \\ i^e(p) &= -\int K^{ee}(p, p') \partial_\tau e_z(p') dp' - J_\Phi^{ez}(p). \end{aligned} \quad (4.38)$$

где введены следующие функции связи, представляющие собой проекции одних модовых функций на другие,

$$\begin{aligned}
L^{hh}(p, p') &= \int \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}^h(\vec{r}, p) \times \vec{H}^h(\vec{r}, p')] dS, \\
L^{ee}(p, p') &= \int \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}^e(\vec{r}, p) \times \vec{H}^e(\vec{r}, p')] dS, \\
L^{he}(p, p') &= \int \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}^h(\vec{r}, p) \times \vec{H}^e(\vec{r}, p')] dS, \\
K^{hh}(p, p') &= \int \varepsilon_{\perp} \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}^h(\vec{r}, p) \times \vec{H}^h(\vec{r}, p')] dS, \\
K^{ee}(p, p') &= \int \varepsilon_{\perp} \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}^e(\vec{r}, p) \times \vec{H}^e(\vec{r}, p')] dS, \\
K^{eh}(p, p') &= \int \varepsilon_{\perp} \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}^e(\vec{r}, p) \times \vec{H}^h(\vec{r}, p')] dS.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Для этих функций связи выполняются следующие условия симметрии

$$\int K^{hh}(p, p'') L^{hh}(p'', p') dp'' = \int K^{hh}(p'', p) L^{hh}(p', p'') dp'' = \delta(p - p'), \tag{4.40}$$

$$\int K^{ee}(p, p'') L^{ee}(p'', p') dp'' = \int K^{ee}(p'', p) L^{ee}(p', p'') dp'' = \delta(p - p'), \tag{4.41}$$

$$\int K^{hh}(p'', p) L^{he}(p', p'') dp'' = - \int K^{eh}(p'', p) L^{ee}(p', p'') dp'', \tag{4.42}$$

$$\int K^{ee}(p, p'') L^{he}(p'', p') dp'' = - \int K^{eh}(p, p'') L^{hh}(p'', p') dp'', \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
\int K^{ee}(p, p'') (p'')^2 dp'' &= \int (p'')^2 K^{ee}(p'', p) dp'', \\
\int K^{hh}(p, p'') (p'')^2 dp'' &= \int (p'')^2 K^{hh}(p'', p) dp''.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

В правых частях в уравнениях (4.38) стоят проекции источников на базис

$$\begin{aligned}
J_{Eh}^e(p) &= \int \sqrt{\mu_0} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^h(\vec{r}, p) dS, J_{Ee}^e(p) = \int \sqrt{\mu_0} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^e(\vec{r}, p) dS, \\
J_{Hh}^e(p) &= \int \sqrt{\mu_0} \vec{J}(\vec{r}) \cdot [\vec{H}^h(\vec{r}, p) \times \vec{z}_0] dS, J_{He}^e(p) = \int \sqrt{\mu_0} \vec{J}(\vec{r}) \cdot [\vec{H}^e(\vec{r}, p) \times \vec{z}_0] dS, \\
J_{Eh}^m(p) &= \int \sqrt{\varepsilon_0} \vec{\hat{J}}(\vec{r}) \cdot \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \vec{E}^h(\vec{r}, p)] dS, J_{Ee}^m(p) = \int \sqrt{\varepsilon_0} \vec{\hat{J}}(\vec{r}) \cdot \varepsilon_{\perp} [\vec{z}_0 \times \vec{E}^e(\vec{r}, p)] dS, \\
J_{Hh}^m(p) &= \int \sqrt{\mu_0} \vec{\hat{J}}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^h(\vec{r}, p) dS, J_{He}^m(p) = \int \sqrt{\mu_0} \vec{\hat{J}}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^e(\vec{r}, p) dS, \\
J_{\Phi}^{ez}(p) &= p \int \sqrt{\mu_0} J_z(\vec{r}) \Phi^e(\vec{r}, p) dS, J_{\Psi}^{ez}(p) = p \int \sqrt{\mu_0} J_z(\vec{r}) \Psi^e(\vec{r}, p) dS, \\
\rho_{\Phi}^e(p) &= p \int \sqrt{\varepsilon_0^{-1}} \rho(\vec{r}) \Phi^e(\vec{r}, p) dS, \rho_{\Psi}^e(p) = p \int \sqrt{\varepsilon_0^{-1}} \rho(\vec{r}) \Psi^e(\vec{r}, p) dS, \\
J_{\Phi}^{mz}(p) &= p \int \sqrt{\varepsilon_0} \hat{J}_z(\vec{r}) \Phi^h(\vec{r}, p) dS, J_{\Psi}^{mz}(p) = p \int \sqrt{\varepsilon_0} \hat{J}_z(\vec{r}) \Psi^h(\vec{r}, p) dS, \\
\rho_{\Phi}^m(p) &= p \int \sqrt{\mu_0^{-1}} \hat{\rho}(\vec{r}) \Phi^h(\vec{r}, p) dS, \rho_{\Psi}^m(p) = p \int \sqrt{\mu_0^{-1}} \hat{\rho}(\vec{r}) \Psi^h(\vec{r}, p) dS.
\end{aligned}$$

Таким образом, четырехмерная система уравнений Максвелла преобразована к двумерной системе эволюционных волноводных уравнений (4.38).

Сведение системы интегро-дифференциальных эволюционных уравнений к системе матричных дифференциальных уравнений. Система эволюционных уравнений (4.38) может быть преобразована к системе двух уравнений второго порядка относительно модовых амплитуд поперечной компоненты электрического поля (при этом предположим, что источник существует только в виде поперечных магнитных токов)

$$\begin{cases} \int (K^{hh}(p',p) \partial_\tau^2 - L^{hh}(p',p) \partial_z^2 + p'^2) v_h(z,t,p') dp' + \\ \quad + \int K^{eh}(p',p) \partial_\tau^2 v_e(z,t,p') dp' = \partial_z J_{Hh}^m(z,t,p), \\ \int (K^{ee}(p',p) \partial_\tau^2 - L^{ee}(p',p) \partial_z^2 + p'^2) v_e(z,t,p') dp' - \\ \quad - \int L^{he}(p',p) \partial_z^2 v_h(z,t,p') dp' = \partial_z J_{He}^m(z,t,p). \end{cases} \quad (4.45)$$

Для решения данной системы применим метод моментов: вместо модовых амплитуд $v_h(z,t,p)$ и $v_e(z,t,p)$ введем в рассмотрение вектора их проекций на некоторую систему ортогональных функций

$$v^{e,h}(p) = \sum_j v_j^{e,h} \psi_j(p), \quad \int_p \psi_j(p) \psi_i(p) dp = \delta_{i,j}. \quad (4.46)$$

Подставляя разложение (4.46) в систему (4.45), получаем следующую систему матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{hh} \cdot \partial_\tau^2 \mathbf{V}^h - \mathbf{L}^{hh} \cdot \partial_z^2 \mathbf{V}^h + \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{V}^h + \mathbf{K}^{eh} \cdot \partial_\tau^2 \mathbf{V}^e = \partial_z \mathbf{J}_{Hh}^m, \\ \mathbf{K}^{ee} \cdot \partial_\tau^2 \mathbf{V}^e - \mathbf{L}^{ee} \cdot \partial_z^2 \mathbf{V}^e + \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{V}^e - \mathbf{L}^{he} \cdot \partial_z^2 \mathbf{V}^h = \partial_z \mathbf{J}_{He}^m. \end{cases} \quad (4.47)$$

Здесь введены следующие матрицы, определяющие проекции функций связи

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{hh}_{i,j} &= \int \int K^{hh}(p',p) \psi_j(p') \psi_i(p) dp' dp, \quad \mathbf{L}^{hh}_{i,j} = \int \int L^{hh}(p',p) \psi_j(p') \psi_i(p) dp' dp, \\ \mathbf{K}^{eh}_{i,j} &= \int \int K^{eh}(p',p) \psi_j(p') \psi_i(p) dp' dp, \quad \mathbf{K}^{ee}_{i,j} = \int \int K^{ee}(q',q) \psi_j(q') \psi_i(q) dq' dq, \\ \mathbf{L}^{ee}_{i,j} &= \int \int L^{ee}(q',q) \psi_j(q') \psi_i(q) dq' dq, \quad \mathbf{L}^{he}_{i,j} = \int \int L^{he}(q',q) \psi_j(q') \psi_i(q) dq' dq, \\ \mathbf{P}^2_{i,j} &= \int \int p'^2 \psi_j(p') \psi_i(p) dp' dp, \quad \mathbf{Q}^2_{i,j} = \int \int q'^2 \psi_j(q') \psi_i(q) dq' dq, \end{aligned} \quad (4.48)$$

и проекции функций источников на базис

$$(\mathbf{J}_{\text{Hh}}^{\text{m}})_i = \int J_{\text{Hh}}^{\text{m}}(p) \psi_i(p) dp, (\mathbf{J}_{\text{He}}^{\text{m}})_i = \int J_{\text{He}}^{\text{m}}(p) \psi_i(p) dp. \quad (4.49)$$

Таким образом, система интегро-дифференциальных уравнений (4.45) сводится к системе матричных дифференциальных уравнений (4.47). В дальнейшем в данной работе в качестве ортогональных функций ψ_j используются прямоугольные импульсы.

Дальнейшее решение полученной уже матричной системы проводится аналогично рассмотренным во втором разделе задачам.

4.4. Дискретизация интегро-дифференциальной СЭВУ и ее численное решение

Для расчета распространения импульсного сигнала в линии передачи (или в свободном пространстве) с помощью предложенного метода необходимо решить систему эволюционных уравнений. Для простейших случаев это можно сделать аналитически, однако аналитическое решение выражается в виде свертки и поэтому является неудобным для численных расчетов, так как требует хранить всю предысторию сигнала. В данном пункте рассмотрен эффективный численный метод для решения различных типов систем эволюционных уравнений, основанный на методе конечных разностей.

Для случая однородного диэлектрического заполнения волновода все моды получаются независимыми. При этом Е- и Н- волны также оказываются взаимно-независимыми. Для Е-волн при этом система эволюционных уравнений может быть сведена к простому виду

$$\begin{cases} p^2 e^z = \partial_\tau i^e + \partial_z v^e, \\ i^e = -\partial_\tau e^z, \\ \partial_z i^e = -\partial_\tau v^e. \end{cases} \quad (4.50)$$

Рассмотрим численное решение системы (4.50). Используя конечно-разностную аппроксимацию производных в (4.50) можно получить следующую явную формулу обновления для модовых амплитуд (детали данного подхода могут быть найдены в:

$$\begin{aligned}
I_i^{k+1/2} &= i \left(i \Delta z, (k + 1/2) \Delta \tau / c \right), E_i^k = e^z \left(i \Delta z, k \Delta \tau / c \right), \\
V_{i+1/2}^k &= v \left((i + 1/2) \Delta z, k \Delta \tau / c \right), S = \Delta \tau / \Delta z, \\
\begin{cases} I_i^{k+1/2} = I_i^{k-1/2} + p^2 \Delta \tau E_i^k - S \left(V_{i+1/2}^k - V_{i-1/2}^k \right), \\ E_i^{k+1} = E_i^k - \Delta \tau I_i^{k+1/2}, \\ V_{i+1/2}^{k+1} = V_{i+1/2}^k - S \left(I_{i+1}^{k+1/2} - I_i^{k+1/2} \right). \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Решение этих конечно-разностных уравнений дает приближенное решение системы эволюционных уравнений. Ошибка при этом зависит от параметров сетки как $C_1(\Delta \tau)^{-2} + C_2(\Delta z)^{-2}$.

Известно, что для волнового уравнения решение конечно-разностного аналога приводит к точному решению при соответствующем выборе $\Delta \tau$ и Δz (на пределе критерия стабильности). В этом случае дисперсионное соотношение для конечно-разностных уравнений совпадает с дисперсионным соотношением аппроксимируемого уравнения. Похожая ситуация наблюдается и для уравнения Клейна-Гордона, хотя дисперсионные соотношения точно не совпадают, но разница между ними растет по закону ω^1 вместо $\omega^{3.5}$ (для $\omega \gg c\rho$), когда $\Delta \tau, \Delta z$ выбираются на пределе критерия стабильности, который для уравнения Клейна-Гордона записывается как:

$$\Delta \tau \leq \frac{2\Delta z}{\sqrt{\kappa^2 \Delta z^2 + 4}}. \tag{4.52}$$

При выборе временных шагов больше рассчитанных по формуле (4.52) полученная конечно-разностная схема приведет к нестабильному (возрастающему) решению. Выбор временного шага меньшим, чем предел стабильности, приводит к увеличению влияния численной дисперсии.

Решение матричной системы эволюционных уравнений. В предыдущих пунктах рассмотрено решение системы эволюционных уравнений для случая отсутствия связи между модами, при этом уравнения для каждой моды можно рассматривать независимо. В случае же наличия в рассматриваемом

волноводе поперечно-неоднородного диэлектрического заполнения моды становятся связанными, и при распространении импульса в линии передачи происходит преобразование одних пространственных мод в другие. При этом нельзя рассматривать распространение только одной моды независимо и приходится учитывать некоторое количество различных мод. Решается система вида (2.64). Эту систему для случая отсутствия источников можно преобразовать в систему из двух матричных уравнений второго порядка относительно модовых амплитуд поперечной компоненты электрического поля:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{hh} \cdot \partial_\tau^2 \mathbf{v}^h - \mathbf{L}^{hh} \cdot \partial_z^2 \mathbf{v}^h + \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{v}^h + \mathbf{K}^{eh} \cdot \partial_\tau^2 \mathbf{v}^e = 0, \\ \mathbf{K}^{ee} \cdot \partial_\tau^2 \mathbf{v}^e - \mathbf{L}^{ee} \cdot \partial_z^2 \mathbf{v}^e + \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{v}^e - \mathbf{L}^{he} \cdot \partial_z^2 \mathbf{v}^h = 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

Система записана в матричной форме, то есть все $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ здесь – матрицы связи между модами, $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{Q}^2$ – диагональные матрицы собственных значений для Н- и Е- мод соответственно, а $\mathbf{v}^h$ и $\mathbf{v}^e$ – векторы модовых амплитуд.

Используя для аппроксимации производных в системе (4.53) конечные разности можно получить следующий конечно-разностный аналог системы эволюционных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{v}^e|_n^{k+1} = \mathbf{A}^{ee} \cdot \mathbf{v}^e|_n^k + \mathbf{B}^{ee} \cdot (\mathbf{v}^e|_{n+1}^k + \mathbf{v}^e|_{n-1}^k) + \mathbf{C}^{he} \cdot (\mathbf{v}^h|_{n+1}^k - 2\mathbf{v}^h|_n^k + \mathbf{v}^h|_{n-1}^k) - \mathbf{v}^e|_n^{k-1}, \\ \mathbf{v}^h|_n^{k+1} = \mathbf{A}^{hh} \cdot \mathbf{v}^h|_n^k + \mathbf{B}^{hh} \cdot (\mathbf{v}^h|_{n+1}^k + \mathbf{v}^h|_{n-1}^k) - \mathbf{C}^{eh} \cdot (\mathbf{v}^e|_n^{k+1} - 2\mathbf{v}^e|_n^k + \mathbf{v}^e|_n^{k-1}) - \mathbf{v}^h|_n^{k-1}. \end{cases} \quad (4.54)$$

Здесь $S = c_0 dt / dz$ – матрица чисел Куранта для каждой моды (c_0 – скорость света в свободном пространстве), $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Введены следующие матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{ee} &= 2\mathbf{I} - 2\mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{L}^{ee} \cdot (\mathbf{L}^{ee})^T - dt^2 \mathbf{L}^{ee} \cdot \mathbf{Q}^2, & \mathbf{A}^{hh} &= 2\mathbf{I} - 2\mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{L}^{hh} \cdot (\mathbf{L}^{hh})^T - dt^2 \mathbf{L}^{hh} \cdot \mathbf{P}^2, \\ \mathbf{B}^{ee} &= \mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{L}^{ee} \cdot (\mathbf{L}^{ee})^T, & \mathbf{B}^{hh} &= \mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{L}^{hh} \cdot (\mathbf{L}^{hh})^T, \\ \mathbf{C}^{he} &= \mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{L}^{ee} \cdot (\mathbf{L}^{he})^T, & \mathbf{C}^{eh} &= \mathbf{L}^{hh} \cdot (\mathbf{K}^{eh})^T. \end{aligned}$$

При расчете по формулам обновления (4.54) вычисляются модовые амплитуды поперечных компонент электрического поля в нужных пространственных точках в различные моменты времени.

Методом конечных разностей можно решать и систему матричных эволюционных уравнений первого порядка. Рассмотрим следующую систему (система (2.64) может быть преобразована к данному виду)

$$\begin{aligned}\partial_\tau \mathbf{h}^z &= -(\mathbf{L}^{hh})^T \cdot \mathbf{v}^h, & \partial_\tau \mathbf{i}^h &= -(\mathbf{L}^{hh})^T \cdot \partial_z \mathbf{v}^h, \\ \partial_\tau \mathbf{v}^e &= -\mathbf{L}^{ee} \cdot \partial_z \mathbf{i}^e, & \partial_\tau \mathbf{e}^z &= -(\mathbf{L}^{ee})^T \cdot \mathbf{i}^e, \\ \partial_\tau \mathbf{v}^h &= \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{h}^z - \mathbf{L}^{hh} \cdot \partial_z \mathbf{i}^h - \mathbf{L}^{he} \cdot \partial_z \mathbf{i}^e, & \partial_\tau \mathbf{i}^e &= \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{e}^z - (\mathbf{L}^{ee})^T \cdot \partial_z \mathbf{v}^e - (\mathbf{L}^{he})^T \cdot \partial_z \mathbf{v}^h.\end{aligned}\quad (4.55)$$

Конечно-разностный аналог для данной системы выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{i+1/2}^{n+1/2} &= \mathbf{h}_{i+1/2}^{n-1/2} - d\tau (\mathbf{L}^{hh})^T \cdot \mathbf{v}_{i+1/2}^n, \\ \mathbf{v}_{i+1/2}^{e,n+1} &= \mathbf{v}_{i+1/2}^{e,n} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}^{ee} \cdot \left(\mathbf{i}_{i+1}^{n+1/2} - \mathbf{i}_i^{n+1/2} \right), \\ \mathbf{v}_{i+1/2}^{h,n+1} &= \mathbf{v}_{i+1/2}^{h,n} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}^{hh} \cdot \left(\mathbf{i}_{i+1}^{n+1/2} - \mathbf{i}_i^{n+1/2} \right) + \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{h}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}^{he} \cdot \left(\mathbf{i}_{i+1}^{n+1/2} - \mathbf{i}_i^{n+1/2} \right), \\ \mathbf{i}_i^{h,n+1/2} &= \mathbf{i}_i^{h,n-1/2} - (\mathbf{L}^{hh})^T \cdot \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{v}_{i+1/2}^n - \mathbf{v}_{i-1/2}^n \right), \\ \mathbf{e}_i^{n+1} &= \mathbf{e}_i^n - d\tau \mathbf{L}^{ee} \cdot \mathbf{i}_i^{n+1/2}, \\ \mathbf{i}_i^{e,n+1/2} &= \mathbf{i}_i^{e,n-1/2} - (\mathbf{L}^{ee})^T \cdot \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{v}_{i+1/2}^n - \mathbf{v}_{i-1/2}^n \right) + \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{e}_i^n - (\mathbf{L}^{he})^T \cdot \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{v}_{i+1/2}^n - \mathbf{v}_{i-1/2}^n \right).\end{aligned}\quad (4.56)$$

Таким образом, представлен метод для эффективного решения систем эволюционных уравнений.

Моделирование распространения импульсного сигнала в диэлектрическом волноводе. Рассмотрим возбуждение диэлектрического волновода кольцом с магнитными токами следующего вида:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{J}}(\vec{r}, z, t) &= \vec{\varphi}_0 e^{-\left(\frac{r-r_0}{0.12a}\right)^2} e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2} \cos(\varphi) \delta(z - z_0), \\ a &= 1.1, r_0 = 0.5a, T = a / (5c), t_0 = 5T.\end{aligned}\quad (4.57)$$

По времени и по радиальной координате функция источника распределена по гауссовому закону для получения ограниченного частотного и пространственного спектра.

Для моделирования подобного источника вместо однородной системы, конечно-разностная схема, для которой представлена в предыдущем пункте, необходимо решать неоднородную систему (4.47) с продольными производными от магнитных токов в правых частях уравнений. Моделирование данного возбуждения приводит к тому, что к конечно-разностным уравнениям добавляются слагаемые, моделирующие источник. Обозначим поперечное сечение, в котором расположен источник в виде кольца с магнитными токами, как $z = z_0$. Предположим, что на конечно-разностной схеме эта точка расположена посередине между пространственными узлами с номерами n_0 и $n_0 + 1$. Для моделирования возбуждения магнитными токами необходимой конфигурации нужно после каждого временного шага в моделировании конечно-разностной схемы (4.54) добавлять к модовым амплитудам следующие величины

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^e \Big|_{n+1}^k + &= \frac{1}{2} dz \mathbf{J}_{He}^m f(kdt), \quad \mathbf{V}^h \Big|_{n+1}^k + = \frac{1}{2} dz \mathbf{J}_{Hh}^m f(kdt), \\ \mathbf{V}^e \Big|_n^k - &= \frac{1}{2} dz \mathbf{J}_{He}^m f(kdt), \quad \mathbf{V}^h \Big|_n^k - = \frac{1}{2} dz \mathbf{J}_{Hh}^m f(kdt), \end{aligned} \quad (4.58)$$

где $f(kdt)$ временная форма функции источника в момент времени kdt .

Таким образом, на каждом временном шаге модовые амплитуды поперечной компоненты электрического поля обновляются по формулам (4.54) и с помощью добавок (4.58) моделируется источник вида (4.57). После данного моделирования получаются значения проекций модовых амплитуд поперечной компоненты электрического поля на систему тестовых функций (4.46) в различных пространственных точках в различные моменты времени. Используя разложение (4.46) можно получить модовые амплитуды во всех интересующих нас точках. Из системы эволюционных уравнений (4.38) могут быть рассчитаны модовые амплитуды других компонент поля. Из значений модовых амплитуд используя формулы (4.37) можно извлечь значения электромагнитных полей в различных точках, в различные моменты времени.

Анализ модового спектра. С помощью предложенного метода можно получить изменение модового спектра сигнала во время распространения в ди-

электрическом волноводе. Под модовым спектром подразумевается амплитуда разложения поля по базису (выделенная подчёркиванием функция в формуле для разложения продольной компоненты поля (4.59))

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_z(z,t,\vec{r}) = \int_p \underline{e(z,t,p)} p \Phi^e(\vec{r},p) dp. \quad (4.59)$$

Зависимость модового спектра от продольной координаты при распространении в диэлектрическом волноводе импульсного сигнала, созданного источником в виде кольца с магнитными токами (4.57), представлена на рис. 4.9.

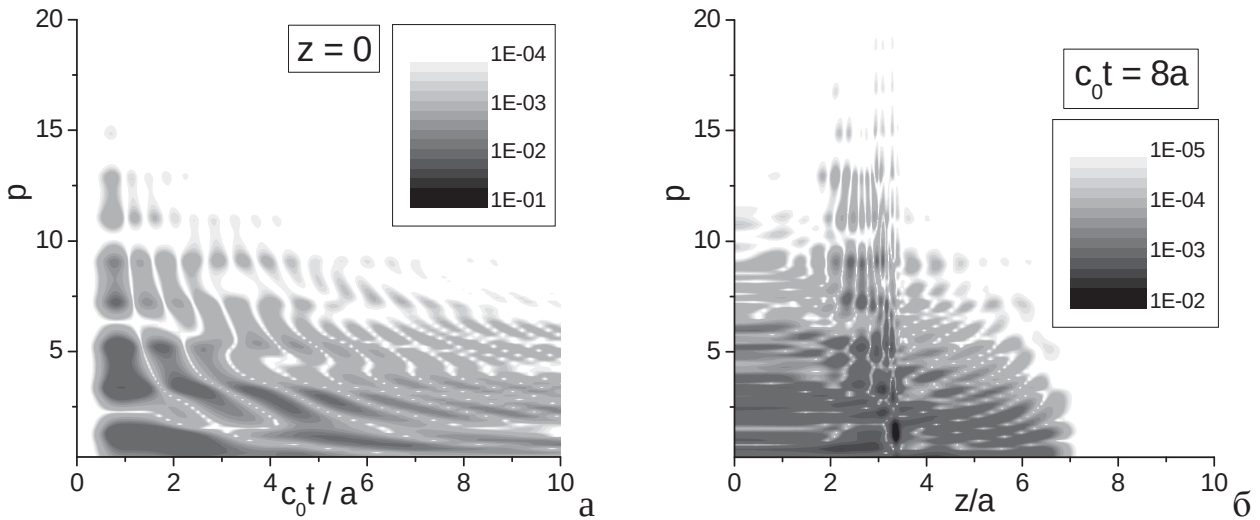


Рис. 4.9. Амплитуда модового спектра продольной компоненты электрического поля $e(z,t;p)$ для диэлектрического волновода с $\varepsilon = 5$

(а) как функция от времени в плоскости источника $z = 0$

(б) как функция продольной координаты в момент времени $c_0t = 8a$.

Из рисунка можно сделать вывод о том, что модовый спектр сигнала во время распространения в диэлектрическом волноводе является ограниченным во все моменты времени. При этом наиболее широким по спектральному параметру p спектр является в начальные моменты времени вблизи источника. Далее с течением времени сигнал распространяется на большее расстояние в линии передачи, и структура спектра изменяется.

4.5. Физические особенности модового базиса в открытых диэлектрических структурах с дискретным и непрерывным спектром

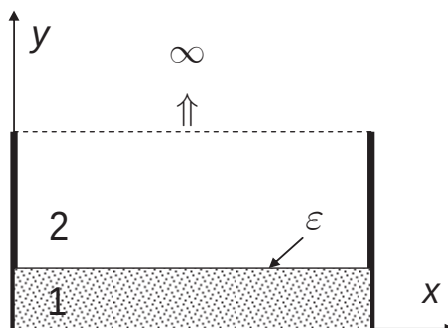


Рис. 4.10. Геометрия задачи.

Итак, мы изучили построение вычислительной схемы для расчёта возбуждения и распространения импульсного сигнала в открытом круглом диэлектрическом волноводе. При этом модовый базис, как оказалось, имеет непрерывный спектр, соответствующий значениям спектрального параметра в диапазоне $p \in (0, \infty)$. Однако в некоторых волноведущих структурах могут существовать и дискретный и непрерывный спектры одновременно. Рассмотрим прямоугольный волновод с диэлектрическим слоем и одной металлической стенкой удаленной на бесконечность (см. рис. 4.10). В этом волноводе существуют и дискретный и непрерывный спектр. В этом подразделе мы рассмотрим построение Н- и Е- мод для этого волновода, проведем численное моделирование распространения импульсной волны в структуре и обсудим некоторые особенности этого процесса основываясь на модовом представлении полей.

Заметим, что рассматриваемая структура топологически схожа с круглым диэлектрическим волноводом с металлическим стержнем в центре. Это так называемая линия Губо [361]. В этой структуре может возбуждаться поверхностная волна Губо, которая в последнее время находит некоторые интересные приложения в терагерцовой технике [362].

Н-моды. Рассмотрим задачу на собственные значения для Н-мод. Для рассматриваемой структуры задача может быть сведена к следующей граничной задаче на собственные значения (в координатах x, y , см. рис. 4.10) с условиями Неймана на металлических поверхностях. Векторные модовые функции определяются через скалярные функции Φ^h и Ψ^h по формулам (2.39). Эти скалярные функции удовлетворяют следующей системе дополненной граничными условиями Неймана на стенках (2.40)

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \nabla_{\perp} \Phi^h + p^2 \Psi^h = 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Psi^h + p^2 \Phi^h = 0 \end{cases} \quad \left. \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Phi^h, \Psi^h \right|_L = 0 \quad (4.60)$$

С использованием метода разделения переменных решение может быть представлено в виде $\Psi^h = \Psi^h(x) \Psi^h(y)$. Здесь x -зависимость имеет следующий вид: $\Psi^h(x) = \cos(\kappa_n x)$, $\kappa_n = \pi n / L_x$, $n = 0, 1, \dots$. Таким образом, задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями Неймана при $y = 0$:

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{\varepsilon(y)} \frac{d\varepsilon(y)}{dy} \frac{d}{dy} - \kappa^2 \right) \Phi^h(y, p) + \varepsilon(y) p^2 \Psi^h(y, p) = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dy^2} - \kappa^2 \right) \Psi^h(y, p) + p^2 \Phi^h(y, p) = 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Далее используется метод, предложенный В. Шевченко в [358] для построения базиса в открытых волноведущих структурах и применённый в предыдущем подразделе для анализа круглого диэлектрического волновода. В результате получаются интегральные уравнения для потенциалов Φ^h и Ψ^h

$$\begin{cases} \Phi^h(y, p) = 0.5 \left(\cosh(\chi_+ y) (\Phi^h(0, p) - \Psi^h(0, p)) + \cosh(\chi_- y) (\Phi^h(0, p) + \Psi^h(0, p)) \right) + \\ + \int_0^y \left(\frac{\sinh(\chi_+(y-u))}{2\chi_+} + \frac{\sinh(\chi_-(y-u))}{2\chi_-} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Phi^h(u, p) + (1 - \varepsilon(u)) p^2 \Psi^h(u, p) \right) du \\ \Psi^h(y, p) = 0.5 \left(\cosh(\chi_- y) (\Phi^h(0, p) + \Psi^h(0, p)) - \cosh(\chi_+ y) (\Phi^h(0, p) - \Psi^h(0, p)) \right) + \\ + \int_0^y \left(\frac{\sinh(\chi_-(y-u))}{2\chi_-} - \frac{\sinh(\chi_+(y-u))}{2\chi_+} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Phi^h(u, p) + (1 - \varepsilon(u)) p^2 \Psi^h(u, p) \right) du \end{cases} \quad (4.62)$$

Здесь введены обозначения: $\chi_{\pm} = \sqrt{\kappa^2 \pm p^2}$.

Вначале рассмотрим интервал $p \in (0, \kappa)$. В этом случае χ_- имеет действительное значение. Для $y > h$ уравнения преобразуются в прямые формулы, которые выражают потенциалы вне диэлектрического слоя через потенциалы внутри слоя:

$$\begin{aligned}\Phi^h(y, p) &= w_+^h(p)e^{\chi_- y} + w_-^h(p)e^{-\chi_- y} + v_+^h(p)e^{\chi_+ y} + v_-^h(p)e^{-\chi_+ y} \\ \Psi^h(y, p) &= w_+^h(p)e^{\chi_- y} + w_-^h(p)e^{-\chi_- y} - v_+^h(p)e^{\chi_+ y} - v_-^h(p)e^{-\chi_+ y}\end{aligned}\quad (4.63)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}w_{\pm}^h(p) &= \frac{1}{4}(\Phi^h(0, p) + \Psi^h(0, p)) \pm \\ &\pm \frac{1}{4\chi_-} \int_0^h e^{\mp \chi_- u} \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Phi^h(u, p) + (1 - \varepsilon(u)) p^2 \Psi^h(u, p) \right) du \\ v_{\pm}^h(p) &= \frac{1}{4}(\Phi^h(0, p) - \Psi^h(0, p)) \pm \\ &\pm \frac{1}{4\chi_+} \int_0^h e^{\mp \chi_+ u} \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Phi^h(u, p) + (1 - \varepsilon(u)) p^2 \Psi^h(u, p) \right) du\end{aligned}\quad (4.64)$$

Из условия ограниченности на бесконечности для $p < \kappa$ следует, что слагаемые с $e^{\chi_- y}$ и $e^{\chi_+ y}$ должны равняться нулю:

$$w_+^h(p) = 0, \quad v_+^h(p) = 0 \quad (4.65)$$

Эти условия удовлетворяются только в конечном числе дискретных точек $p_i \in (0, \kappa)$. Таким образом, получается дискретный спектр. Решение вне диэлектрического слоя (4.63) в этом случае имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\Phi_i^h(y) &= w_-^h(p_i)e^{-\chi_- y} + v_-^h(p_i)e^{-\chi_+ y} \\ \Psi_i^h(y) &= w_-^h(p_i)e^{-\chi_- y} - v_-^h(p_i)e^{-\chi_+ y}\end{aligned}\quad (4.66)$$

Подробности получения дисперсионных уравнений будут приведены ниже.

Теперь рассмотрим интервал $p \in [\kappa, +\infty)$. В этом случае χ_- становится мнимой функцией от p и может быть заменено новым параметром $\tilde{\chi}_- = \sqrt{p^2 - \kappa^2} = i\chi_-$. Тогда вместо (4.63) потенциалы могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} \Phi^h(y, p) = a^h(p) \cos(\tilde{\chi}_- y) + b^h(p) \sin(\tilde{\chi}_- y) + \cancel{v_+^h(p) e^{\chi_+ y}} + v_-^h(p) e^{-\chi_+ y} \\ \Psi^h(y, p) = a^h(p) \cos(\tilde{\chi}_- y) + b^h(p) \sin(\tilde{\chi}_- y) - \cancel{v_+^h(p) e^{\chi_+ y}} - v_-^h(p) e^{-\chi_+ y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^h(p) &= \frac{1}{2} (\Phi^h(0, p) + \Psi^h(0, p)) - \\ &\quad - \frac{1}{2\tilde{\chi}_-} \int_0^h \sin(\tilde{\chi}_- u) \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Phi^h(u, p) + (1 - \varepsilon(u)) p^2 \Psi^h(u, p) \right) du \\ b^h(p) &= \frac{1}{2\tilde{\chi}_-} \int_0^h \cos(\tilde{\chi}_- u) \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Phi^h(u, p) + (1 - \varepsilon(u)) p^2 \Psi^h(u, p) \right) du \end{aligned} \quad (4.67)$$

В этом случае условие ограниченности на бесконечности приводит к требованию $v_+^h(p) = 0$, которое может быть удовлетворено для каждого значения p из интервала $p \in [\kappa, +\infty)$. Таким образом получается непрерывный спектр.

Е-моды. Для Е-мод векторные модовые функции могут быть записаны через скалярные потенциалы Φ^e и Ψ^e по формулам (2.45). Потенциалы при этом удовлетворяют следующей системе, дополненной граничными условиями Дирихле на стенках (см. (2.46)):

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Phi^e + p^2 \varepsilon_{\perp} \Psi^e = 0 \\ \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \Psi^e + p^2 \varepsilon_{\perp} \Phi^e = 0 \end{cases} \quad \Phi^e, \Psi^e \Big|_L = 0 \quad (4.68)$$

По аналогии с предыдущим случаем решение может быть записано в виде $\Psi^e(x, y) = \Psi^e(x) \Psi^e(y)$, $\Psi^e(x) = \sin(\kappa_n x)$, $\kappa_n = \pi n / L$. Подобно (4.63) представляем решение как

$$\begin{cases} \Psi^e(y, p) = w_+^e(p) e^{\chi_- y} + w_-^e(p) e^{-\chi_- y} + v_+^e(p) e^{\chi_+ y} + v_-^e(p) e^{-\chi_+ y} \\ \Phi^e(y, p) = w_+^e(p) e^{\chi_- y} + w_-^e(p) e^{-\tilde{\chi}_- y} - v_+^e(p) e^{\chi_+ y} - v_-^e(p) e^{-\chi_+ y} \end{cases} \quad (4.69)$$

Коэффициенты $w_{\pm}^e, v_{\pm}^e$ при этом определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} w_{\pm}^e(p) &= \frac{\pm 1}{4\chi_-} \left(\frac{d\Psi^e(0, p)}{dy} + \frac{d\Phi^e(0, p)}{dy} - \int_0^y e^{\mp \chi_- u} \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Psi^e(u, p) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p^2 (1 - \varepsilon(u)) \Psi^e(u, p) \right) du \right) \\ v_{\pm}^e(p) &= \frac{\pm 1}{4\chi_+} \left(\frac{d\Psi^e(0, p)}{dy} - \frac{d\Phi^e(0, p)}{dy} - \int_0^y e^{\mp \chi_+ u} \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Psi^e(u, p) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p^2 (1 - \varepsilon(u)) \Psi^e(u, p) \right) du \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Также как и в предыдущем случае для $p \in (0, \kappa)$ условие ограниченности на бесконечности приводит к требованию:

$$w_+^e(p) = 0, \quad v_+^e(p) = 0 \quad (4.71)$$

Это условие удовлетворяется только для конечного числа дискретных точек $p_i \in (0, \kappa)$, в результате получается дискретный спектр.

Решение вне диэлектрического слоя записывается следующим образом (аналогично (4.66) для Н-волн)

$$\begin{cases} \Psi_i^e(y) = w_-^e(p_i)e^{-\chi_-y} + v_-^e(p_i)e^{-\chi_+y} \\ \Phi_i^e(y) = w_-^e(p_i)e^{-\chi_-y} - v_-^e(p_i)e^{-\chi_+y} \end{cases} \quad (4.72)$$

Для непрерывного спектра $p \in [\kappa, +\infty)$ решение имеет следующий вид, где $v_+^e(p) = 0$:

$$\begin{cases} \Psi^e(y, p) = a^e(p)\cos(\tilde{\chi}_-y) + b^e(p)\sin(\tilde{\chi}_-y) + \cancel{v_+^e(p)e^{\chi_+y}} + v_-^e(p)e^{-\chi_+y} \\ \Phi^e(y, p) = a^e(p)\cos(\tilde{\chi}_-y) + b^e(p)\sin(\tilde{\chi}_-y) - \cancel{v_+^e(p)e^{\chi_+y}} - v_-^e(p)e^{-\chi_+y} \end{cases}$$

$$a^e(p) = \frac{1}{2\tilde{\chi}_-} \int_0^y \sin(\tilde{\chi}_-u) \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Psi^e(u, p) - p^2(1 - \varepsilon(u)) \Psi^e(u, p) \right) du \quad (4.73)$$

$$b^e(p) = \frac{1}{2\tilde{\chi}_-} \left[\frac{d\Psi^e(0, p)}{dy} + \frac{d\Phi^e(0, p)}{dy} - \int_0^y \cos(\tilde{\chi}_-u) \left(\frac{1}{\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d}{du} \Psi^e(u, p) - p^2(1 - \varepsilon(u)) \Psi^e(u, p) \right) du \right]$$

Дисперсионные уравнения для дискретного спектра.

Рассмотрим подробно получение дисперсионных уравнений для дискретного спектра (4.65) и (4.71). Так как рассматривается случай однородного диэлектрического слоя, то решение системы (4.61) и похожей системы для Е-мод внутри слоя могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \Psi^h(y, p) &= A(\zeta_-^2 \cosh(\zeta_+y) + \zeta_+^2 \cos(\zeta_-y)) + B(\cosh(\zeta_+y) - \cos(\zeta_-y)) \\ \Phi^h(y, p) &= \sqrt{\varepsilon} (A(\zeta_-^2 \cosh(\zeta_+y) - \zeta_+^2 \cos(\zeta_-y)) - B(\cosh(\zeta_+y) + \cos(\zeta_-y))) \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}\Phi^e(y, p) &= C \left(\zeta_-^2 \sinh(\zeta_+ y) + \zeta_+^2 \sin(\zeta_- y) \right) + D \left(\sinh(\zeta_+ y) - \sin(\zeta_- y) \right) \\ \Psi^e(y, p) &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(C \left(\zeta_-^2 \sinh(\zeta_+ y) - \zeta_+^2 \sin(\zeta_- y) \right) + D \left(\sinh(\zeta_+ y) + \sin(\zeta_- y) \right) \right)\end{aligned}\quad (4.75)$$

где $\zeta_{\pm} = \sqrt{\sqrt{\varepsilon} p^2 \pm \kappa^2}$. Здесь A , B , C и D - некоторые константы. Эти формулы подставляются в (4.64), (4.70) и в условия (4.65), (4.71) соответственно. В результате получается система из двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными A и B для Н-мод и похожая система относительно C и D для Е-мод. Эти системы имеют нетривиальное решение только в случае, когда их определители равняются нулю.

В результате получаются дисперсионные уравнения для нахождения собственных чисел p на отрезке $(\kappa/\sqrt[4]{\varepsilon}, \kappa)$:

$$\begin{aligned}\text{H-modes : } & (1 - \sqrt{\varepsilon})^2 g_-(p) t_+(p) - (1 + \sqrt{\varepsilon})^2 g_+(p) t_-(p) = 0 \\ \text{E-modes : } & (1 - \sqrt{\varepsilon})^2 g_-(p) t_-(p) - (1 + \sqrt{\varepsilon})^2 g_+(p) t_+(p) = 0\end{aligned}\quad (4.76)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}g_{\pm}(p) &= \chi_+(p) \cosh(\zeta_+(p)h) \pm (\zeta_+(p)/\sqrt{\varepsilon}) \sinh(\zeta_+(p)h) \\ t_{\pm}(p) &= \chi_-(p) \cos(\zeta_-(p)h) \pm (\zeta_-(p)/\sqrt{\varepsilon}) \sin(\zeta_-(p)h)\end{aligned}\quad (4.77)$$

Ортогональность мод. Чтобы использовать модовые функции для разложения искоемых полей их необходимо нормализовать. Хотя эта процедура достаточно проста для мод дискретного спектра, она представляет некоторые трудности для непрерывного спектра. Дискретные моды удовлетворяют условиям биортогональности и являются ортогональными к модам непрерывного спектра:

$$\begin{aligned}\int_S \Psi_n^h(x, y, p_n) \Phi_m^h(x, y, p_m) dS &= \int_S \varepsilon(x, y) \Psi_n^e(x, y, p_n) \Phi_m^e(x, y, p_m) dS = \delta_{nm} \\ \int_S \Psi_n^h(x, y, p_n) \Phi^h(x, y, p) dS &= \int_S \varepsilon(x, y) \Psi_n^e(x, y, p_n) \Phi^e(x, y, p) dS = 0 \Leftarrow p > p_n\end{aligned}\quad (4.78)$$

Похожие соотношения для непрерывного спектра требуют введения нормированных функций $N_{h,p}^2(p)$:

$$\int_S \Psi^h(x, y, p) \Phi^h(x, y, p') dS = N_h^2(p) \delta(p - p') \quad (4.79)$$

$$\int_S \varepsilon(x, y) \Psi^e(x, y, p) \Phi^e(x, y, p') dS = N_e^2(p) \delta(p - p')$$

Предложенный метод, основанный на интегральных уравнениях (4.62), позволяет получить аналитическое выражение для нормировочных функций:

$$N_{h,e}^2(p) = \frac{\pi}{16} (a^{h,e}(p)^2 + b^{h,e}(p)^2) \frac{\tilde{\chi}_-}{p} \left(\frac{L}{2} + \frac{\sin(2L\kappa)}{4\kappa} \right) \quad (4.80)$$

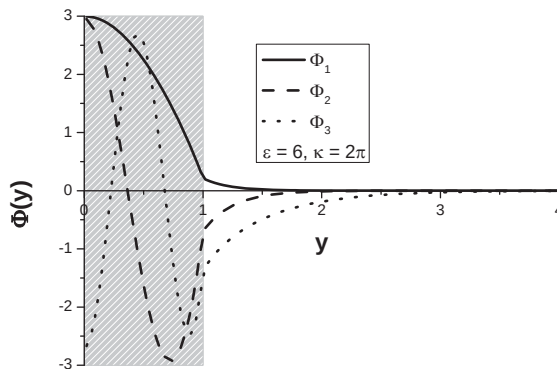


Рис. 4.11. Некоторые дискретные Н-моды.

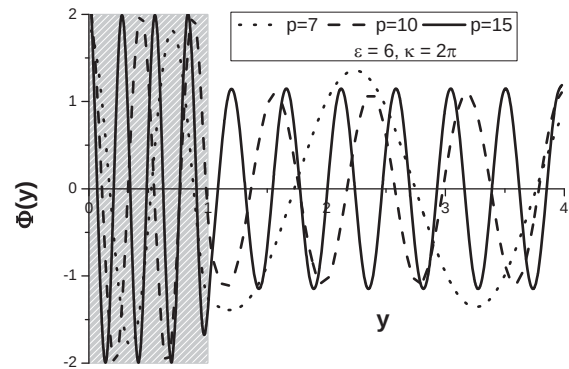


Рис. 4.12. Некоторые Н-моды непрерывного спектра

На рис. 4.11 и 4.12 представлены некоторые примеры модовой функции Φ^h . Серый прямоугольник на рисунках соответствует области, которую занимает диэлектрический слой. Дискретные моды, изображенные на рис. 4.11, осциллируют внутри слоя и затухают при отдалении от его поверхности. На рис. 4.12 изображены некоторые моды непрерывного спектра, эти моды осциллируют и внутри, и вне диэлектрического слоя, однако они имеют различные амплитуды в этих двух областях, увеличение собственного значения p приводит к увеличению пространственной частоты этих функций. Интересно отметить, что для любых параметров исследуемого волновода ($h > 0, \varepsilon > 1, L > 0, \kappa = \pi n / L, n = 1, 2, 3, \dots$) всегда существует по крайней мере одна мода дискретного спектра с одной полуволной внутри слоя. Собственные значения дискретных мод лежат в диапазоне $(\kappa/\sqrt[4]{\varepsilon}, \kappa)$.

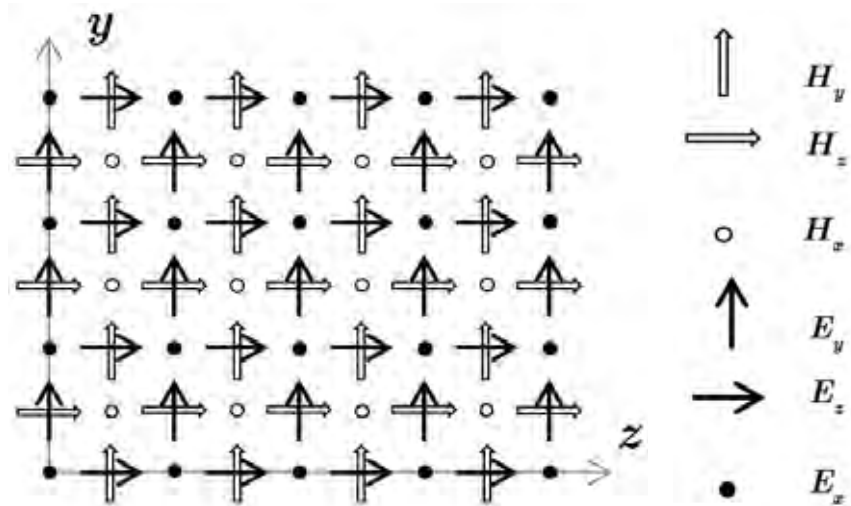


Рис. 4.13. Пространственная сетка для FDTD расчетов

FDTD анализ распространения дискретной моды. Описанный выше метод модовых разложений во временной области позволяет рассчитать эволюцию поля в исследуемой структуре в различные моменты времени для заданных начальных или начально-граничных условий. Однако для этой цели необходимо решить сложную систему интегро-дифференциальных уравнений, которые описывают модовые преобразования при распространении. Здесь мы используем более простой гибридный подход. Эволюция поля рассчитывается с помощью метода конечных разностей во временной области (FDTD), однако начально-граничные условия и результирующие поля будут проанализированы с помощью проецирования их на моды, полученные аналитически методом модовых разложений во временной области. Мы собираемся возбудить в рассматриваемой структуре некоторые дискретные моды и проанализировать физические особенности их распространения.

В методе FDTD пространственные и временные производные в уравнения Максвелла аппроксимируются с помощью конечных разностей взятых на дискретной сетке. В результате система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к конечно-разностным уравнениям, которые используются для явного «шагания» по времени: значения поля во всех узлах сетки в последующий момент времени вычисляются через значения поля на предыдущем временном шаге. FDTD метод предложенный в этой работе имеет только

одно отличие от классического (схема Yee): в нашем случае X -зависимость полей известна ($\cos(\kappa X)$ или $\sin(\kappa X)$ для различных компонент поля) и X -производные могут быть вычислены аналитически. В результате вместо трехмерной задачи решается двумерная задача в координатах y, z . Смещенная пространственная сетка с взаимным расположением различных компонент поля показана на рис. 4.13. Формулы обновления для полей выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 E_x^{k+1/2}|_{i,j} &= E_x^{k-1/2}|_{i,j} + \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left(H_z^k|_{i,j+1/2} - H_z^k|_{i,j-1/2} \right) - \\
 &\quad - \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left(H_y^k|_{i+1/2,j} - H_y^k|_{i-1/2,j} \right) \\
 E_y^{k+1/2}|_{i,j+1/2} &= E_y^{k-1/2}|_{i,j+1/2} + \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left(H_x^k|_{i+1/2,j+1/2} - H_x^k|_{i-1/2,j+1/2} \right) + \frac{\kappa\Delta t}{\varepsilon} H_z^k|_{i,j+1/2} \\
 E_z^{k+1/2}|_{i+1/2,j} &= E_z^{k-1/2}|_{i+1/2,j} - \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left(H_x^k|_{i+1/2,j+1/2} - H_x^k|_{i+1/2,j-1/2} \right) - \frac{\kappa\Delta t}{\varepsilon} H_y^k|_{i+1/2,j} \\
 H_x^{k+1}|_{i+1/2,j+1/2} &= H_x^k|_{i+1/2,j+1/2} + \frac{c\Delta t}{\Delta z} \left(E_y^{k+1/2}|_{i+1,j+1/2} - E_y^{k+1/2}|_{i,j+1/2} \right) - \\
 &\quad - \frac{c\Delta t}{\Delta y} \left(E_z^{k+1/2}|_{i+1/2,j+1} - E_z^{k+1/2}|_{i+1/2,j} \right) \\
 H_y^{k+1}|_{i+1/2,j} &= H_y^k|_{i+1/2,j} - \frac{c\Delta t}{\Delta z} \left(E_x^{k+1/2}|_{i+1,j} - E_x^{k+1/2}|_{i,j} \right) + \kappa\Delta t E_z^{k+1/2}|_{i+1/2,j} \\
 H_z^{k+1}|_{i,j+1/2} &= H_z^k|_{i,j+1/2} - \frac{c\Delta t}{\Delta y} \left(E_x^{k+1/2}|_{i,j+1} - E_x^{k+1/2}|_{i,j} \right) - \kappa\Delta t E_y^{k+1/2}|_{i,j+1/2}
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Здесь надстрочные индексы соответствуют временным, а подстрочные – пространственным точкам (i для z - и j для y -координаты), то есть: $E_{i+1,j}^{k+1/2} = E(t=(k+1/2)\Delta t, z=(i+1)\Delta z, y=j\Delta y)$. Здесь Δt – временной шаг, Δy и Δz пространственные шаги вдоль y и z осей соответственно.

Для того чтобы возбудить соответствующую моду в FDTD моделировании поля источника добавляются к H_z компоненте в некотором поперечном сечении источника ($i_s = 1/2$ для определенности). Зависимость от координаты y полей источника соответствует модовому распределению возбуждаемой моды ($\Phi^h(y)$), которое похоже на распределения, представленные на рис. 4.11.

Также она зависит от некоторой заданной временной формы $f(t)$. В этом случае последнее уравнение в (4.81) для $i_s = 1/2$ превращается в:

$$H_z \Big|_{1/2,j+1/2}^{k+1} = H_z \Big|_{1/2,j+1/2}^k - \frac{c\Delta t}{\Delta y} (E_x \Big|_{1/2,j+1}^{k+1/2} - E_x \Big|_{1/2,j}^{k+1/2}) - \kappa\Delta t E_y \Big|_{1/2,j+1/2}^{k+1/2} + \Phi^h((j+1/2)\Delta y) f((k+1/2)\Delta t) \quad (4.82)$$

Это соответствует так называемому “мягкому источнику” [144]. В результате возбуждается волна, которая распространяется симметрично в обоих направлениях от поперечного сечения возбуждения. Для уменьшения вдвое размера расчетной области, в поперечном сечении источника ($i_s = 1/2$) используются симметричные граничные условия:

$$E_x \Big|_{1,j}^{k+1/2} = -E_x \Big|_{0,j}^{k+1/2}, \quad E_y \Big|_{1,j+1/2}^{k+1/2} = -E_y \Big|_{0,j+1/2}^{k+1/2}, \quad H_z \Big|_{1,j+1/2}^{k+1} = -H_z \Big|_{0,j+1/2}^{k+1}. \quad (4.83)$$

Результаты расчетов.

Для численных расчетов параметры изучаемой структуры (см. рис. 4.10) были выбраны следующими: $h = 1$, $L = 1$, $\kappa = \pi/L$. Использовались два значения диэлектрической проницаемости: $\varepsilon = 4$ (существует одна дискретная мода) и $\varepsilon = 10$ (существуют две различные дискретные моды). Размеры FDTD ячеек выбраны равными $\Delta x = \Delta y = h/20$, все координаты на рисунках выражены в единицах этих ячеек. Временная форма возбуждающего сигнала выбрана в виде производной от функции Гаусса:

$$f(t) = \frac{t - t_0}{T} e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}, \quad t_0 = 4T \quad (4.84)$$

Когда возбуждается первая Н-мода в структуре Φ_1^h в соответствии с (4.82), поле распространяется вправо вдоль волновода как изображено на рис. 4.14. При этом некоторая часть поля остается связанной со слоем, в то время как другая часть волны излучается (вытекает) из слоя. Таким образом, существует некоторая связь между возбуждаемой дискретной модой и непрерывным спектром (излученное поле).

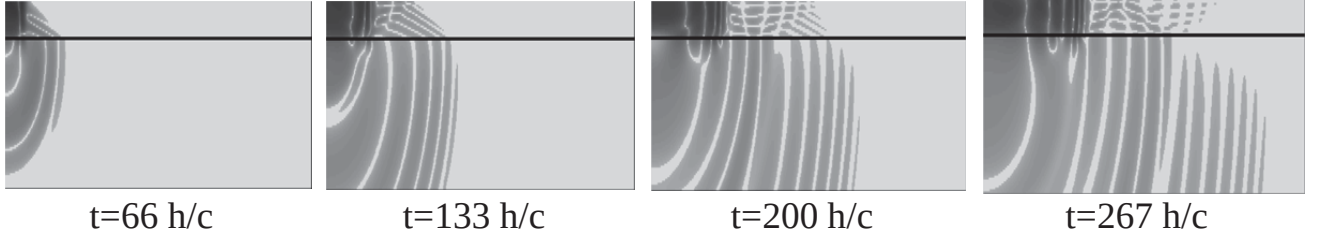


Рис. 4.14. Эволюция волны при распространении. Пространственное распределение H_z компоненты поля (в y, z -координатах) в логарифмическом масштабе изображено в некоторые моменты времени для параметров $h = 1$, $L = 1$, $\kappa = \pi$, $\varepsilon = 4$, $T = 0.5h/c$. Диэлектрический слой расположен сверху от черной линии.

Поля в волноводе, рассчитанные с помощью FDTD, могут быть разделены на дискретную моду $H_z^i(x, y, z, t)$ и непрерывную часть спектра $H_z^c(x, y, z, t)$

$$H_z(x, y, z, t) = H_z^c(x, y, z, t) + \sum_i H_z^i(x, y, z, t) \quad (4.85)$$

Все рассматриваемые здесь поля зависят от x как $\cos(\kappa x)$, и в дальнейшем, этот множитель опущен.

В первом рассматриваемом случае дискретный спектр имеет только одну моду $H_z^1(y, z, t)$, которая может быть представлена в виде произведения модовой функции $\Phi_1^h(y)$ и модовой амплитуды $h_1(z, t)$; похожим образом непрерывная часть спектра может быть представлена как интеграл по спектральному параметру p от модовых функций $\Phi^h(y, p)$ помноженных на модовые амплитуды $h^c(z, t, p)$:

$$\begin{aligned} H_z^1(y, z, t) &= h_1(z, t) \Phi_1^h(y), \\ H_z^c(y, z, t) &= \int_p h^c(z, t, p) \Phi^h(y, p) dp, \end{aligned} \quad (4.86)$$

Подставляя модовое представление (4.86) в (4.85) и используя условия биортогональности (4.78), можно определить первую модовую амплитуду как

$$h_1(z, t) = \int H_z(y, z, t) \Psi_1^h(y) dy = \sum_j H_z(y_j, z, t) \Psi_1^h(y_j) dy \quad (4.87)$$

Здесь интеграл представлен квадратурной суммой по узлам FDTD сетки $y_j = (j + 1/2)\Delta y$. Бесконечные пределы интегрирования не создают проблем,

так как дискретная модовая функция вне слоя экспоненциально затухает (см. рис. 4.11). Непрерывная часть поля может быть найдена как остаток:

$$H_z^c(y, z, t) = H_z(y, z, t) - h_1(z, t) \Phi_1^h(y) \quad (4.88)$$

Хотя, строго говоря, непрерывная часть спектра не ортогональна дискретной моде (они связаны условиями биортогональности (4.78)), мы можем посмотреть на энергию различных слагаемых из (4.85) в каждом поперечном сечении следующим образом:

$$\begin{aligned} WH_z^1(z, t) &= \int_0^\infty \left(h_1^h(z, t) \Phi_1^h(y) \right)^2 dy \\ WH_z^c(z, t) &= \int_0^\infty \left(H_z^c(y, z, t) \right)^2 dy \end{aligned} \quad (4.89)$$

На рис. 4.15 сверху представлено рассчитанное с помощью FDTD пространственное распределение компоненты H_z поля в логарифмической шкале в момент времени $t \approx 260h/c$, при этом на нижнем графике изображены энергии различных модовых компонент, определенные по формуле (4.89) в тот же момент времени.

Можно заметить, что поле разделяется на медленную волноводную волну ($z < 120$) и быструю волну предвестника ($z > 120$). Медленная волноводная волна осциллирует вдоль волновода с длиной волны, уменьшающейся по мере приближения к фронту волны; а волна предвестника (БИВВ) создает внутри диэлектрического слоя распределение поля, похожее на картину, которая образуется при переотражении плоской волны, распространяющейся под критическим углом между границами слоя. Волноводная волна в основном состоит из дискретной моды, амплитуда непрерывной части спектра в этой области на 20 дБ ниже ($z < 120$). В области волны предвестника амплитуда дискретной моды уменьшается на 60 дБ, в то время как непрерывная часть спектра уменьшается только на 10-20 дБ и, таким образом, становится на 20 дБ больше амплитуды дискретной моды. Моделирование с различными длительностями возбуждающего импульса $T = 0.5h/c$ и $T = h/c$ показало, что около 2 % полной энергии поля трансформируется в непрерывную часть спектра для более короткого им-

пульса и 0.5% для более длинного импульса $T = h/c$. Таким образом, непрерывная часть спектра в основном возбуждается высокочастотными составляющими входного сигнала.

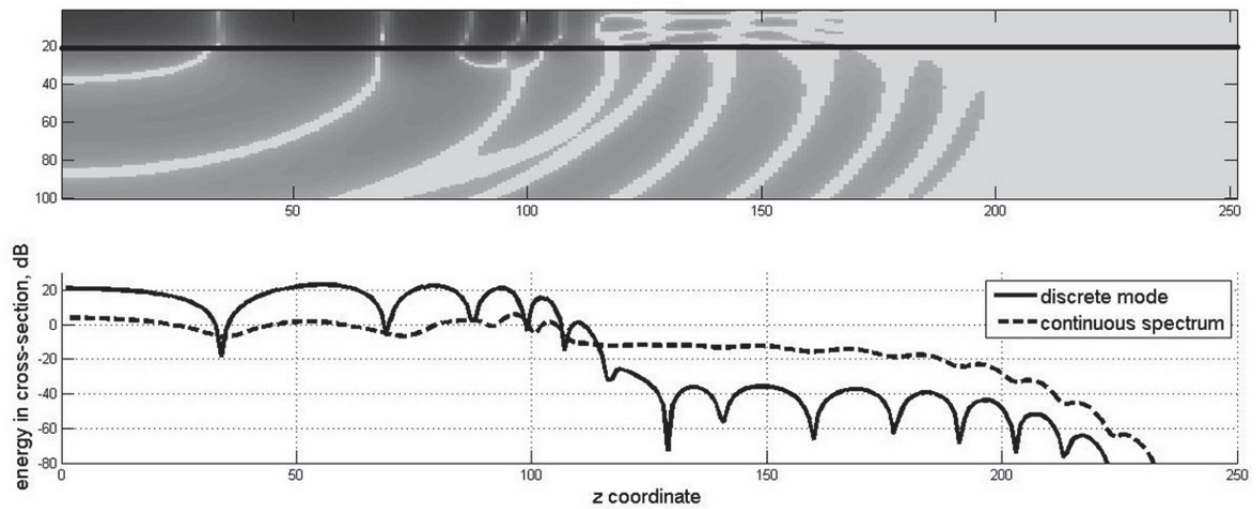


Рис. 4.15. Распределение $H_z(z, y, t_1)$ (сверху) и $WH_z^1(z, t_1)$, $WH_z^c(z, t_1)$ (снизу) при $t_1 \approx 260h/c$ для параметров $h = 1$, $L = 1$, $\kappa = \pi$, $\varepsilon = 4$, $T = 0.5h/c$, $\Delta x = \Delta y = h/20$.

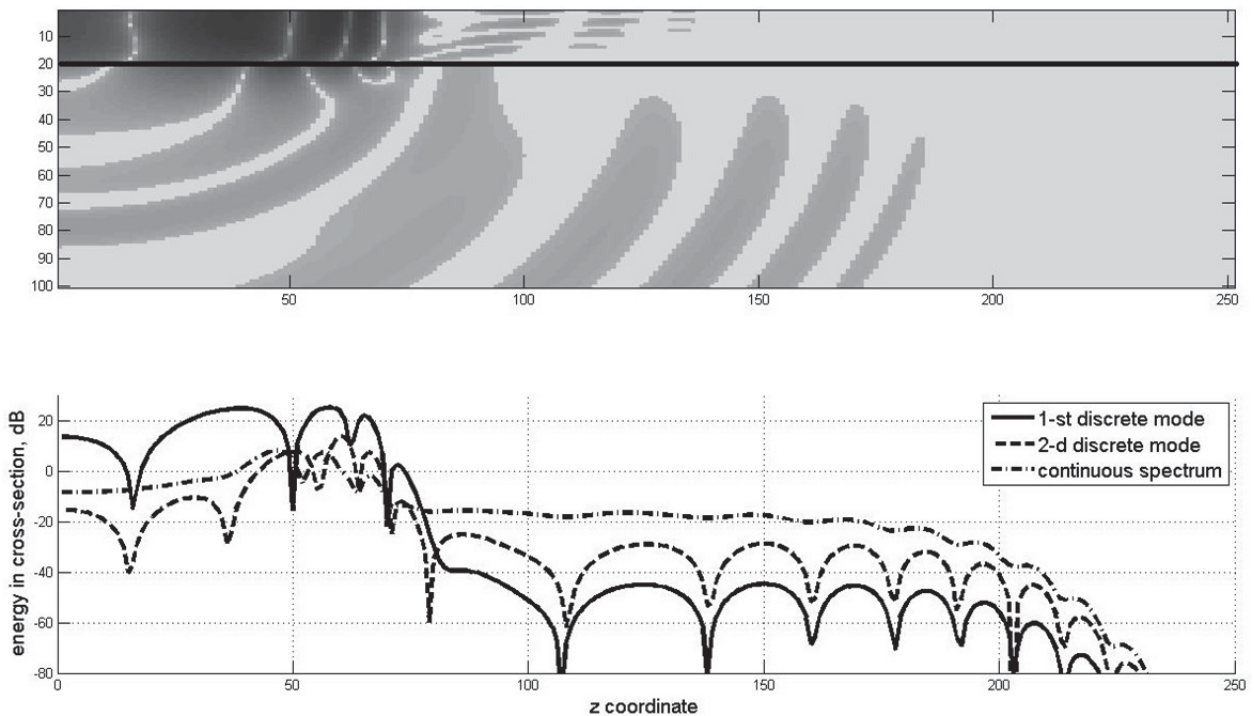


Рис. 4.16. Распределение $H_z(z, y, t_1)$ (сверху) и $WH_z^1(z, t_1)$, $WH_z^2(z, t_1)$, $WH_z^c(z, t_1)$ (снизу) при $t_1 \approx 260h/c$ для параметров $h = 1$, $L = 1$, $\kappa = \pi$, $\varepsilon = 10$, $T = 0.5h/c$, $\Delta x = \Delta y = h/20$.

Похожие на приведенные выше рассуждения могут быть применены и в случае второго вычислительного эксперимента, где моделируется волновод с $\varepsilon = 10$, который имеет две различные дискретные моды, описываемые модовыми функциями $\Phi_1^h(y)$, $\Phi_2^h(y)$ и модовыми амплитудами $h_1^d(z,t)$ и $h_2^d(z,t)$. Эти моды удовлетворяют условиям биортогональности (4.78) и также как и в (4.87) модовые амплитуды могут быть получены из результатов FDTD моделирования следующим образом:

$$\begin{aligned} h_1^d(z,t) &= \int_0^\infty H_z(y,z,t) \Psi_1^h(y) dy = \sum_i H_z(y_i,z,t) \Psi_1^h(y_i) dy, \\ h_2^d(z,t) &= \int_0^\infty H_z(y,z,t) \Psi_2^h(y) dy = \sum_i H_z(y_i,z,t) \Psi_2^h(y_i) dy \end{aligned} \quad (90)$$

Непрерывная часть спектра поля может быть найдена как остаток:

$$H_z^c(y,z,t) = H_z(y,z,t) - \sum_{j=1,2} h_j^d(z,t) \Phi_j^h(y) \quad (91)$$

На рис 4.16 приведены те же данные, что и на рис. 4.15 для момента времени $t \approx 260h/c$. На нижнем графике в этом случае изображены 3 линии: для 1-й дискретной моды $WH_z^1(z,t) = \int_0^\infty (h_1^h(z,t) \Phi_1^h(y))^2 dy$, для 2-й дискретной моды $WH_z^2(z,t) = \int_0^\infty (h_2^h(z,t) \Phi_2^h(y))^2 dy$ и для непрерывной части спектра $WH_z^c(z,t) = \int_0^\infty (H^c(y,z,t))^2 dy$.

В рассматриваемом случае возбуждается 1-я дискретная мода, естественно она имеет наибольшую амплитуду в области медленной волноводной волны. Однако в области предвестника она имеет даже меньшую амплитуду чем 2-я мода, в то время как непрерывная часть спектра доминирует. Это объясняется тем, что здесь поле распространяется в основном вне диэлектрического слоя, где дискретные модовые функции быстро затухают.

На Рис. 4.17 показано пространственное распределение модовой амплитуды $h^d(z,t)$ для первого численного эксперимента (с $\varepsilon = 4$) в некоторые моменты времени, на вставке показаны те же данные в меньшем масштабе, чтобы

стала видна структура предвестника. Волна распространяется вдоль волновода с сильной дисперсией и в области медленной, и в области быстрой волны. Предвестник осциллирует в пространстве. Его пространственный период может быть определен из следующего рассмотрения: это плоская волна, переотражающаяся между диэлектрическими границами и металлом, причем угол, который эта плоская волна образует с диэлектрической границей, равен углу полного внутреннего отражения $\theta_{cr} = \arcsin(1/\sqrt{\varepsilon})$. Из простых геометрических соображений пространственный период волны предвестника в диэлектрике должен быть равен

$$\lambda = 4h \tan(\theta_{cr}) = 4h / \sqrt{\varepsilon - 1} \quad (92)$$

Для рассматриваемого случая $h = 20\Delta z$, $\varepsilon = 4$, таким образом, длина волны равна $\lambda \approx 46\Delta z$. Периодичность, которая наблюдается на рис. 4.17 согласуется с этим рассмотрением.

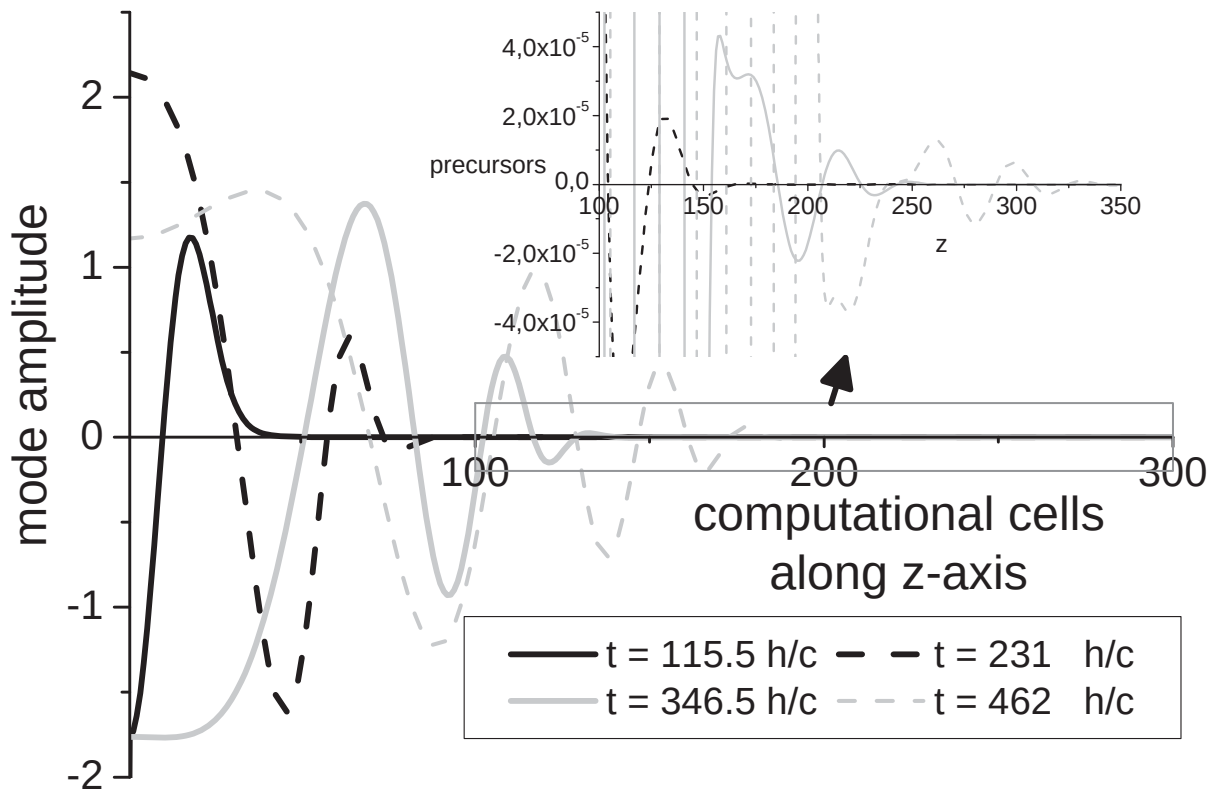


Рис. 4.17. Зависимость дискретных модовых амплитуд от z в некоторые моменты времени для волновода с $h = 1$, $L = 1$, $\kappa = \pi$, $\varepsilon = 4$, $T = 0.5h/c$, $\Delta x = \Delta y = h / 20$

Краткие выводы по проведённому рассмотрению можно сформулировать в виде следующих тезисов:

- Для построения модового базиса для простейшего открытого диэлектрического волновода (диэлектрический слой расположен на стенке прямоугольного волновода, а противоположная стенка удалена на бесконечность) был применён новый аналитический метод, основанный на интегральных уравнениях. Для модовых функций и их нормировочных функций получены аналитические выражения.
- Рассматриваемая структура имеет непрерывную часть спектра и конечное число (по меньшей мере одну) дискретных частотно-независимых мод, которые зависят от толщины и диэлектрической проницаемости слоя. Поэтому в дальнейшем численном моделировании были рассмотрены волноводы с одной или двумя дискретными модами.
- Задача о распространении короткого импульса в рассматриваемом открытом диэлектрическом волноводе решена численно с помощью метода конечных разностей во временной области (FDTD). Численные результаты были проанализированы с использованием полученных аналитических выражений для модовых функций и соответствующих им биортогональных проекторов.
- Показано, что в области основного импульса распространение волны может быть представлено с помощью одной моды с точностью около 20 дБ. Волна предвестника и вытекающие излучаемые волны имеют значительно меньшую амплитуду и описываются в основном непрерывной частью спектра модового разложения. Эти поля в основном возбуждаются для высокочастотных составляющих импульсного сигнала.
- Получена и подтверждена данными численного моделирования простая формула для пространственной периодичности волны предвестника. Формула основана на рассмотрении предвестника в виде плоской волны, которая переотражается между границами слоя под углом полного внутреннего отражения.

4.6. Решение задачи на основе метода BOR-FDTD с сопровождающим окном

В этом подразделе кратко описывается вычислительная схема на основе метода FDTD, адаптированного для расчета тел вращения (Body Of Revolution FDTD – BOR-FDTD), с использованием сопровождающего окна. Эта схема используется для верификации результатов расчета ММБ, проведенных по схеме, описанной ранее в подразделе 4.4. Кроме того, такая полноволновая схема оказывается более универсальной в задачах с нерегулярным диэлектрическим волноводом (например, при моделировании излучения с конца стержневой антенны, сужающегося в виде конуса). Построенная схема также будет использована в следующем подразделе для численного анализа распространения импульсного сигнала в круглом диэлектрическом волноводе на значительное расстояние. Основные результаты этого подраздела изложены в работах автора [22, 65].

Рассматриваемая задача довольно естественно моделируется численными методами во временной области наподобие FDTD [144, 363]. Однако моделирование распространения импульса на значительное расстояние требует значительного времени на расчёт, так как и количество требуемых временных шагов и размер вычислительной области растут линейно с увеличением расстояния, проходимого волной до конца симуляции, что приводит к квадратичному росту времени моделирования. Для преодоления этой сложности мы используем метод сопровождающего окна [364, 365]: вычисления проводятся не во всём пространстве, где волна может проходить, а только в некоторой области фиксированного размера, которая двигается, отслеживая часть волнового фронта, которая представляет интерес. В нашем случае вычислительная область имеет постоянный объём и время вычислений растёт только линейно с проходимым волной расстоянием.

Таким образом, мы ставим целью создать вычислительный алгоритм на основе метода FDTD для тел вращения [144, 363] с сопровождающим окном [364, 365], которое двигается со скоростью света вдоль диэлектрического волновода. Для ограничения вычислительного объёма в радиальном направлении

используются поглощающие граничные условия на основе идеально согласованного слоя (perfectly matched layer – PML) [363]. Используя предложенный метод, мы собираемся промоделировать распространение предвестника импульсной волны в круглом диэлектрическом волноводе. Подробный анализ явления будет представлен в следующем подразделе.

В методе BOR-FDTD моделируемая структура обладает осевой симметрией, что позволяет представить искомые поля в виде независимых угловых гармоник. Поэтому 3-мерные уравнения Максвелла могут быть дискретизированы на 2-мерной вычислительной области в цилиндрических координатах ρ, z для интересующей угловой моды, которая возбуждается в структуре. Явные формулы обновления полей для компонент поля для этого случая можно найти в книгах [144, 363].

Для ограничения вычислительной области в радиальном направлении в работах [364, 365] использовались локальные поглощающие граничные условия, что приводило к некоторым проблемам с нарастанием поля в радиальном направлении [364]; это приводило к необходимости увеличивать вычислительную область в радиальном направлении для устранения влияния боковой стенки на поле. Мы же используем метод PML, который основан на помещении слоя искусственной поглощающей среды, граница которой согласована с возмущением и не создаёт отражения, на границу вычислительного объёма (в данном случае на боковую поверхность цилиндра расчётного объёма). Особенности применения одноосного PML в BOR-FDTD и соответствующие формулы обновления полей могут быть найдены в [363]. Этот подход позволил использовать небольшой в радиальном направлении вычислительный объём без возникновения описанных выше проблем. Для проверки влияния PML на вычислительную схему мы сравнили поля на продольной линии, расположенной на расстоянии одной ячейки от границы PML, с полями в тех же точках, рассчитанными при использовании гораздо большего в радиальном направлении расчётного объёма. Максимальная ошибка по амплитуде в пределах “чистого” вре-

менного окна, когда отражение от внешней границы не могло вернуться к этим точкам, составила меньше 0,15 % (–56 дБ) для PML толщиной 8 ячеек.

Схема BOR-FDTD является условно стабильной, поэтому временной шаг должен выбираться в соответствии с критерием стабильности [144]. Для согласования шага движения окна с временным шагом, последний (Δt) должен быть выбран как целая часть продольного шага (Δz), поэтому мы использовали $c_0 \Delta t = \Delta z / 2$, что обеспечивало стабильность вычислительной схемы для нулевой и первой угловых гармоник, которые и представляли интерес для рассматриваемого круглого диэлектрического волновода. Таким образом, после каждых двух временных шагов все поля в вычислительной области (включая PML) сдвигались на одну ячейку влево, т.е. назад по отношению к направлению распространения волны. На правой стороне вычислительной области слой ячеек инициализировался нулями, что не возмущало решения, так как физически волна ещё не могла попасть в эту область из-за конечности скорости распространения электромагнитного поля. Хотя там могли возникать некоторые нефизические “сверхсветовые” поля с малой амплитудой, которые возникают из-за численной дисперсии конечно-разностной схемы. Ошибки, создаваемые отражением этих “сверхсветовых” полей того же порядка амплитуды, что и ошибки численной дисперсии в основной части вычислительного объёма и они уменьшаются квадратично с уменьшением временного и пространственного шагов решётки дискретизации полей.

Поля в удаляемых сзади ячейках можно было бы временно сохранять в некотором буфере для использования при обновлении полей в последних ячейках на следующем шаге, однако в нашем случае самые левые ячейки могут не обновляться и сами служить таким буфером, так как эти ячейки не обновляются в течении двух (или более) шагов между сдвигом окна, их значения являются актуальными только на первом из этих шагов. Но дело в том, что ошибки, создаваемые при этом не могут угнаться за движущимся окном; то есть ошибки не могут распространиться в основную часть вычислительного объёма, кото-

рый движется со скоростью света, за исключением разве что некоторых “сверхсветовых” артефактов, вызванных численной дисперсией. Сравнение с расчётом в фиксированном окне показало, что эти ошибки во второй от края ячейке имеют порядок 10^{-6} (–120 дБ) при использовании одинарной точности, так что они могут быть игнорированы.

Таким образом, в отличие от [364, 365] в нашем методе нам не нужны были поглощающие условия на переднем и заднем торце вычислительного объёма вдоль z . Поглощающие условия использовались только в радиальном направлении: задние ячейки не обновлялись, а передние ячейки заполнялись нулями при смещении окна на одну ячейку каждые два временных шага. Несколько первых временных шагов окно должно быть неподвижно, пока волна не заполнит вычислительный объём. В течение этого времени источник расположен на левой границе, где в это время используются условия симметрии пока окно не начнёт двигаться.

Результаты расчетов различными методами для волновода с параметрами $\varepsilon = 12, a = 1.1$ представлены на рис. 4.18. На верхней части рисунка представлена радиальная зависимость азимутальной компоненты электрического поля на расстоянии $0.021a$ от источника в виде (4.57) в момент времени $T = 4.5/c_0$ (заштрихованная область обозначает положение диэлектрического стержня), когда уже сформировалась излучённая волна в свободном пространстве.

На нижней части рис. 4.18 изображено изменение распределения азимутальной компоненты электрического поля вдоль продольной координаты z в точке $r = 0.5a$ по радиусу в различные моменты времени.

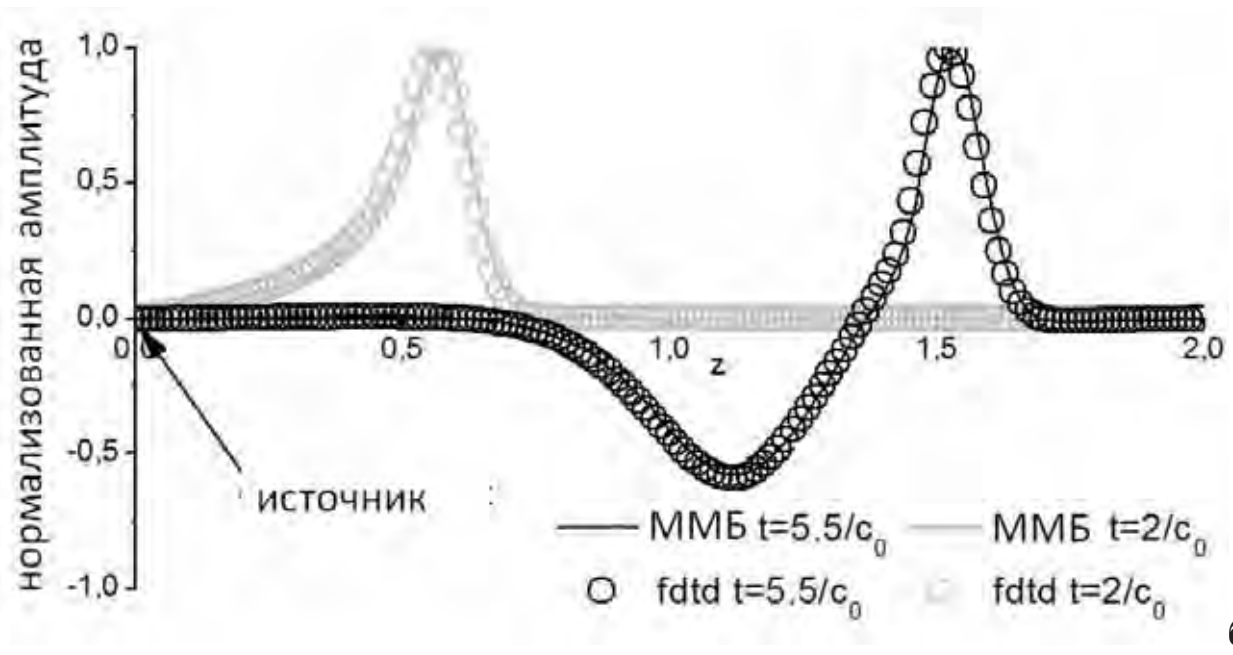
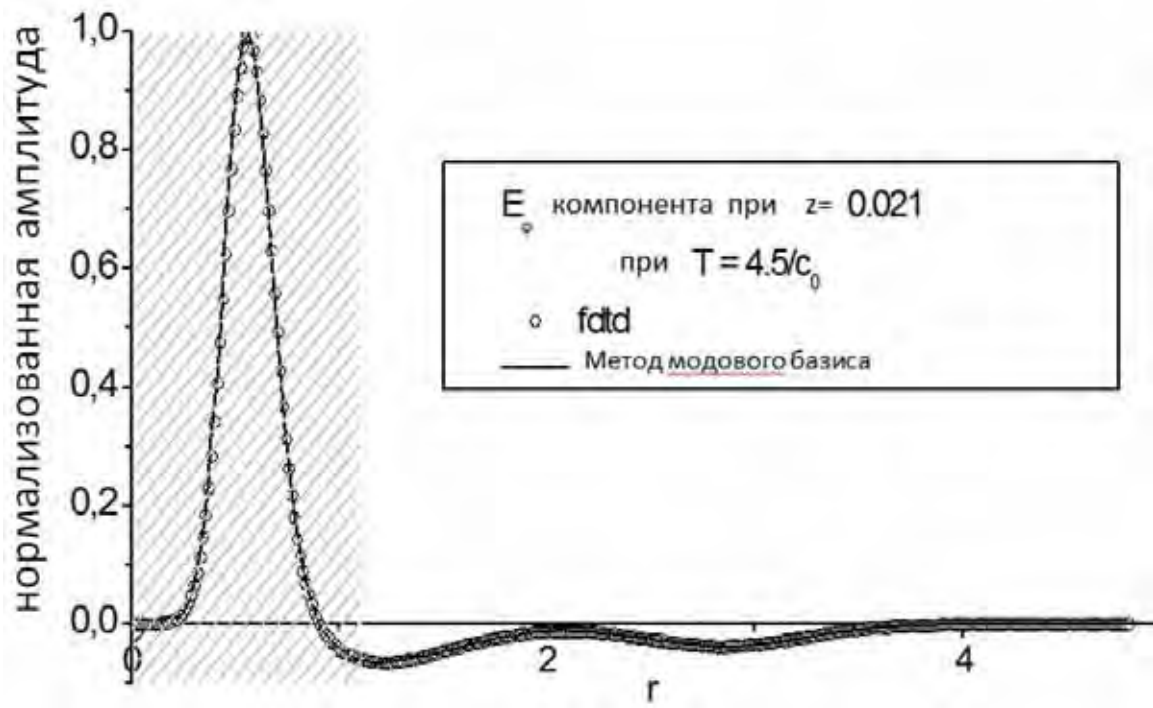


Рис. 4.18. Сравнение волновых форм для двух методов

4.7. Анализ распространения импульсного сигнала в диэлектрическом волноводе. Импульсная поверхностная волна.

Материалы этого подраздела опубликованы в работах автора [19, 21, 24, 63, 66, 73, 74].

В результате численного моделирования во временной области процесса возбуждения и распространения импульсного сигнала в открытом диэлектрическом волноводе было выявлено и проанализировано новое физическое явление в виде импульсной поверхностной волны-предвестника (ИПВ), которая распространяется вдоль волновода со скоростью света в свободном пространстве, сохраняя свою пространственную структуру при распространении. Эта волна возникает за счёт преломления части излучения от источника под углами, близкими к углу полного внутреннего отражения. Кроме того, волны от источника, прошедшие через границу под большими углами, формируют излучаемое поле в виде сферической волны (рис. 4.19). На границе диэлектрике этот сферический фронт переходит в поверхностную волну: благодаря эффекту, похожему по механизму на черенковское излучение, происходит формирование конического фронта вглубь диэлектрика. Этот фронт распространяется под углом критического преломления к границе (рис. 4.20). Скорость распространения этого конического фронта в перпендикулярном к нему направлении равна скорости света в диэлектрике, а скорость его распространения вдоль оси волновода соответствует скорости света в окружающем свободном пространстве. Когда этот конический фронт доходит до оси, он превращается в расходящийся конический фронт и снова попадает на границу диэлектрик-воздух под критическим углом, образуя следующие лепестки поверхностной волны. В результате формируется волновая структура, похожая на ножницы, которая распространяется вдоль волновода со скоростью света в свободном пространстве в виде предвестника основной части волноводной волны (рис. 4.21).

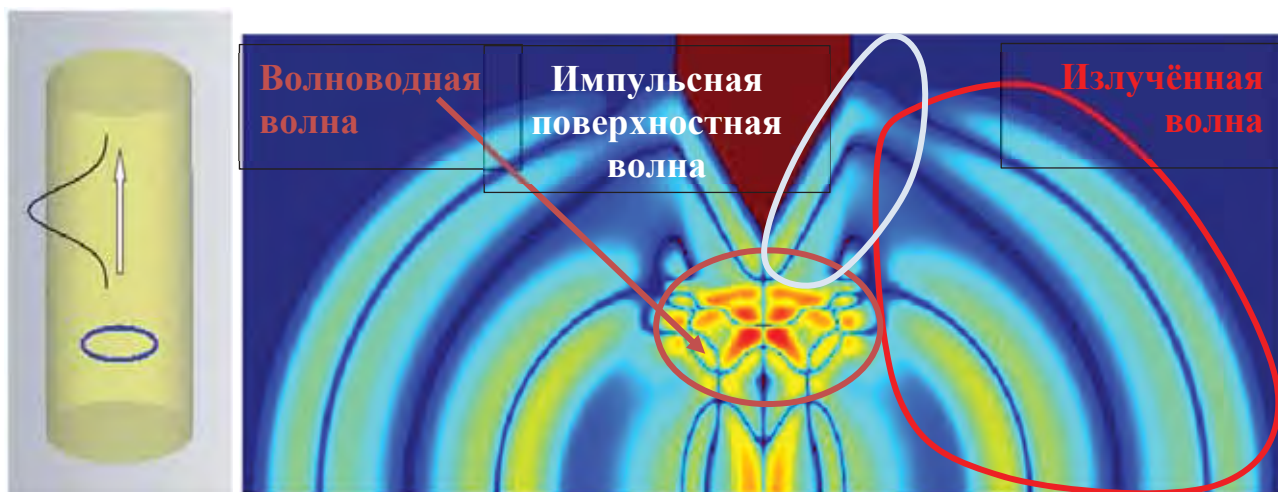


Рис. 4.19. Волновые структуры вблизи источника – разделение волны на излученную, волноводную, поверхностную

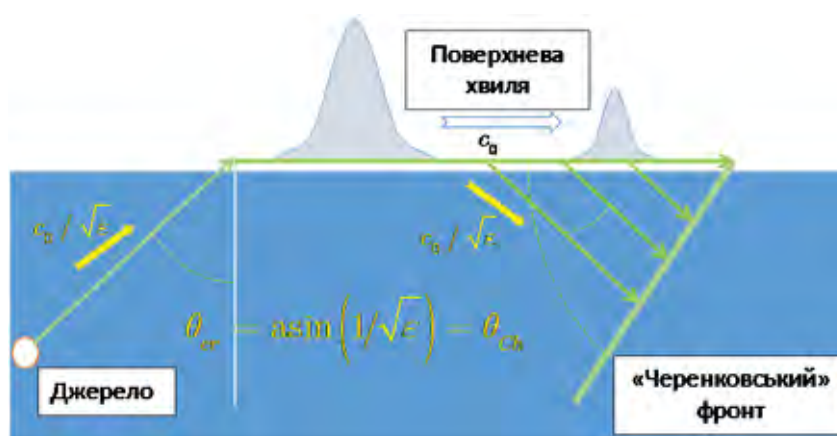


Рис. 4.20. Механизм формирования ИПВ

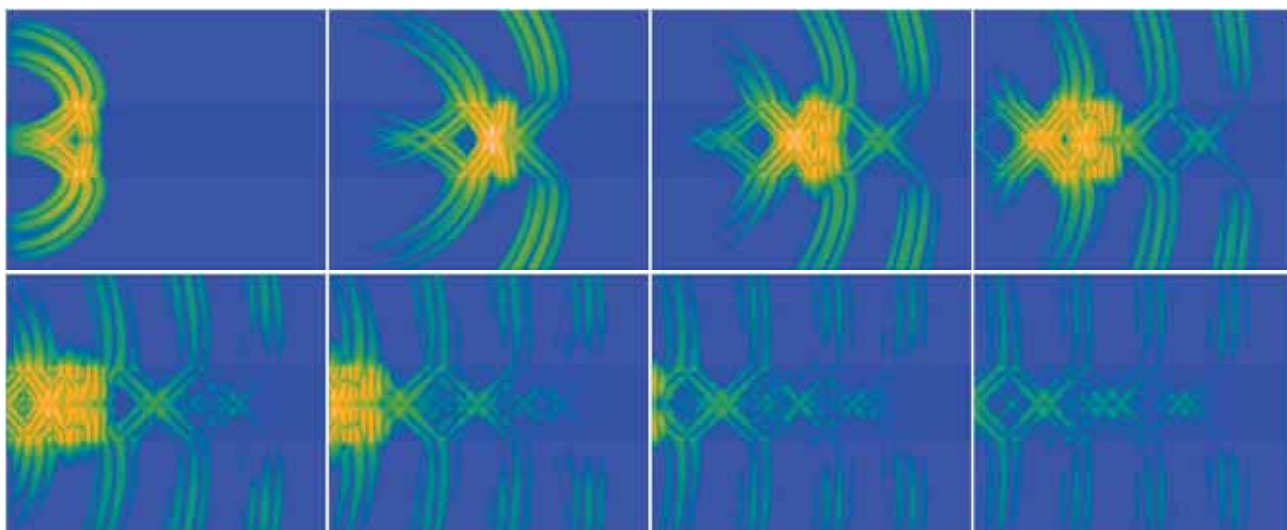


Рис. 4.21. Долговременное распространение ИПВ. Распределение плотности электромагнитной энергии в диэлектрическом волноводе с ($\varepsilon = 4$) в несколько последовательных моментов времени в сопровождающем окне.

Для исследования возбуждения и длительного распространения импульс-

ной поверхностной волны отдельно от волноводной части были применены возбуждения дипольным источником, включалось вдоль оси бегущей волны, образуя подобие черенковского источника. Результаты моделирования в сопровождающем окне изображена на рис. 4.22. На первых двух кадрах происходит заполнение вычислительного объёма, а далее 6 кадров представлены уже в окне, которое движется со скоростью света в свободном пространстве. На последних двух кадрах источник выключен. Небольшие остаточные статические поля на оси, которые наблюдаются на первых 4 кадрах при включении источника и на последних двух кадрах при его выключении связаны с возникающей несимметричностью возбуждения (при включении передняя часть источника дольше находится в амплитудном окне, чем задняя, а при выключении – наоборот)

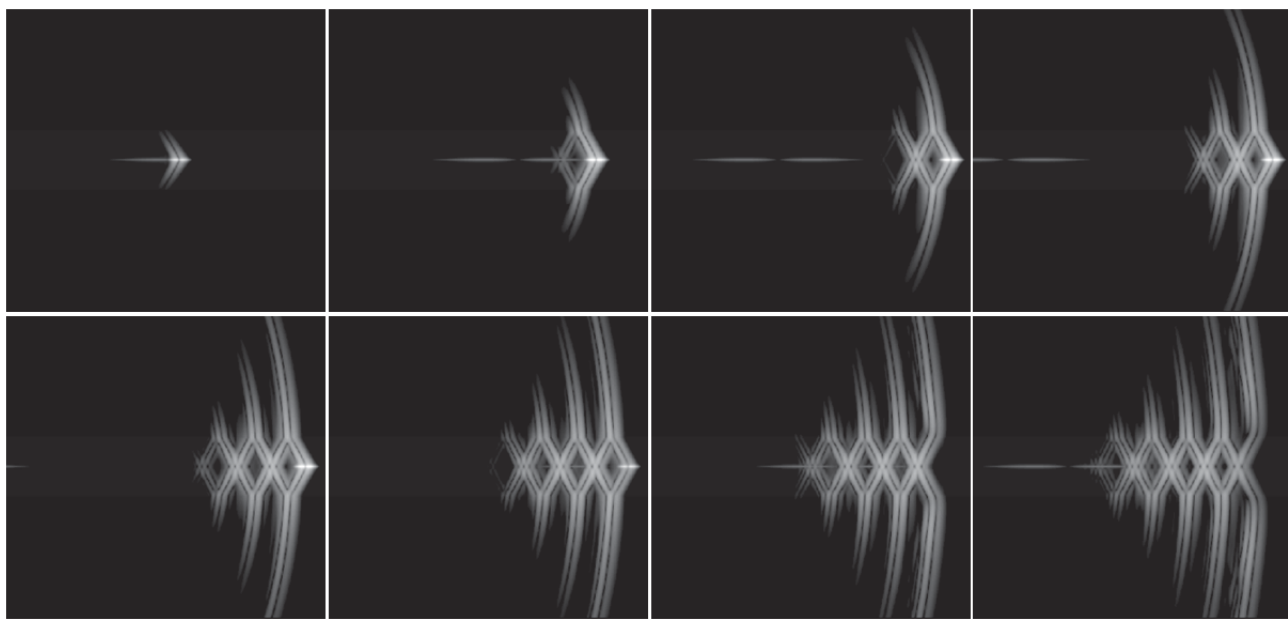


Рис. 4.22. Возбуждение ИПВ черенковским источником. Плотность энергии в диэлектрическом волноводе в несколько моментов времени при возбуждении импульсной поверхностной волны черенковским источником на оси волновода.

Необходимо также отметить разницу между широко известной поверхностной волной в частотной области и импульсной поверхностной волной, о которой идет речь здесь. В частотной области поверхностные волны могут существовать на границе диэлектрика с потерями (так называемые “поверхностные плазмоны”), они экспоненциально затухают в обе стороны (и вверх, и вниз)

от поверхности и распространяются вдоль поверхности с медленной скоростью с относительно малым затуханием [366]. В диэлектрическом волноводе без потерь существуют распространяющиеся волны, локализованные внутри стержня, которые также экспоненциально затухают при удалении от поверхности, эти волны распространяются без потерь с медленной скоростью. Как было сказано выше, во временной области наблюдается иная ситуация: импульсная поверхностная волна распространяется со скоростью света в свободном пространстве и затухает при распространении из-за высвечивания части волны внутрь диэлектрика. Похожий эффект был рассмотрен Аннаном (Annan) в 1973 г. [367]: горизонтальный диполь на диэлектрической поверхности возбуждает сферический волновой фронт в воздухе, а часть фронта в диэлектрике распространяется с замедленной скоростью и соединяется с фронтом волны в свободном пространстве с помощью некоторого аналога излучения Вавилова-Черенкова. В данной работе, в отличие от работы Аннана, источник расположен внутри диэлектрика, поэтому сферический фронт в воздухе оказывается разделенным из-за эффекта полного внутреннего отражения на излученную часть (Излучённая волна на рис. 4.19) и поверхностную волну с пустой областью между ними.

Рассматриваемая поверхностная волна теряет энергию из-за «черенковского» излучения внутрь диэлектрика. Импульсная поверхностная волна возбуждается лучами, которые падают от источника на границу диэлектрика под углами близкими к критическому углу полного внутреннего отражения $\theta_{TR} = \arcsin(1/\sqrt{\varepsilon})$ (см рис. 4.20). Интересно заметить, фронт черенковского излучения формируется лучами, которые проникают в диэлектрик под тем же критическим углом. Таким образом, угол между фронтом черенковского излучения и поверхностью оказывается равным $\theta_{Ch} = \theta_{TR}$ (см. рис. 4.20). В пределе $\varepsilon \rightarrow 1$ угол полного внутреннего отражения стремится к углу скольжения $\theta_{TR} \rightarrow \pi/2$, а фронт черенковского излучения становится перпендикулярным к поверхности. При этом для больших значений ε полное внутреннее отражение происходит на углах близких к нормали и фронт излучения Черенкова стремится к поверхности.

Интересно обсудить различные взгляды на скорость импульсной поверхностной волны в ранних публикациях по этой теме. В экспериментальном изучении дифракции импульсной волны на диэлектрическом цилиндре с потерями (алюминий в терагерцовом диапазоне) [368] измеренная скорость поверхностной волны оказалась $0,91c_0$ (эта скорость отличается от c_0 из-за наличия потерь и кривизны поверхности). В [369] авторы при рассмотрении геометро-оптической модели рассеяния импульса на диэлектрическом цилиндре без потерь полагают скорость поверхностной волны равной скорости в более быстрой среде. В [370] авторы рассматривают дифракцию импульсной волны на диэлектрической сфере, при этом поверхностная волна, которая создает волну в обратном направлении, имеет постоянную распространения более близкую к постоянной распространения в диэлектрике, чем к постоянной распространения в свободном пространстве, это объясняется проникновением поля через диэлектрическую сферу от одной поверхности к другой. Отметим, что в рассматриваемом случае импульсная поверхностная волна распространяется в регулярном волноводе без потерь и без кривизны, поэтому мы наблюдаем скорость поверхностной волны равной c_0 .

Кроме поверхностной волны на рис. 4.19 также можно наблюдать волноводную волну, движущуюся вдоль диэлектрического стержня с медленной скоростью $c = c_0/\sqrt{\varepsilon}$. Эта волна формируется лучами, падающими от источника на поверхность под углом больше, чем угол полного внутреннего отражения $\theta > \theta_{TR}$ и, следовательно, эти лучи остаются локализованными внутри диэлектрического ядра и распространяются в основном вдоль оси.

Рассмотрим теперь распределение энергии вдоль волновода. На рис. 4.23 ниже представлены несколько кадров моделирования распространения импульсной волны, возбуждённой аналогично рис. 4.19 в волноводе с $\varepsilon = 12$. На каждом кадре приведено сверху два распределения энергии (электрической – слева, магнитной – справа) и снизу график пространственного распределения вдоль волновода суммарной энергии в децибельной шкале (проинтегрированной по сечению для каждого z). Вертикальные отметки на нижних графиках обозна-

чают границы сопровождающего окна, для которого выводятся верхние графики.

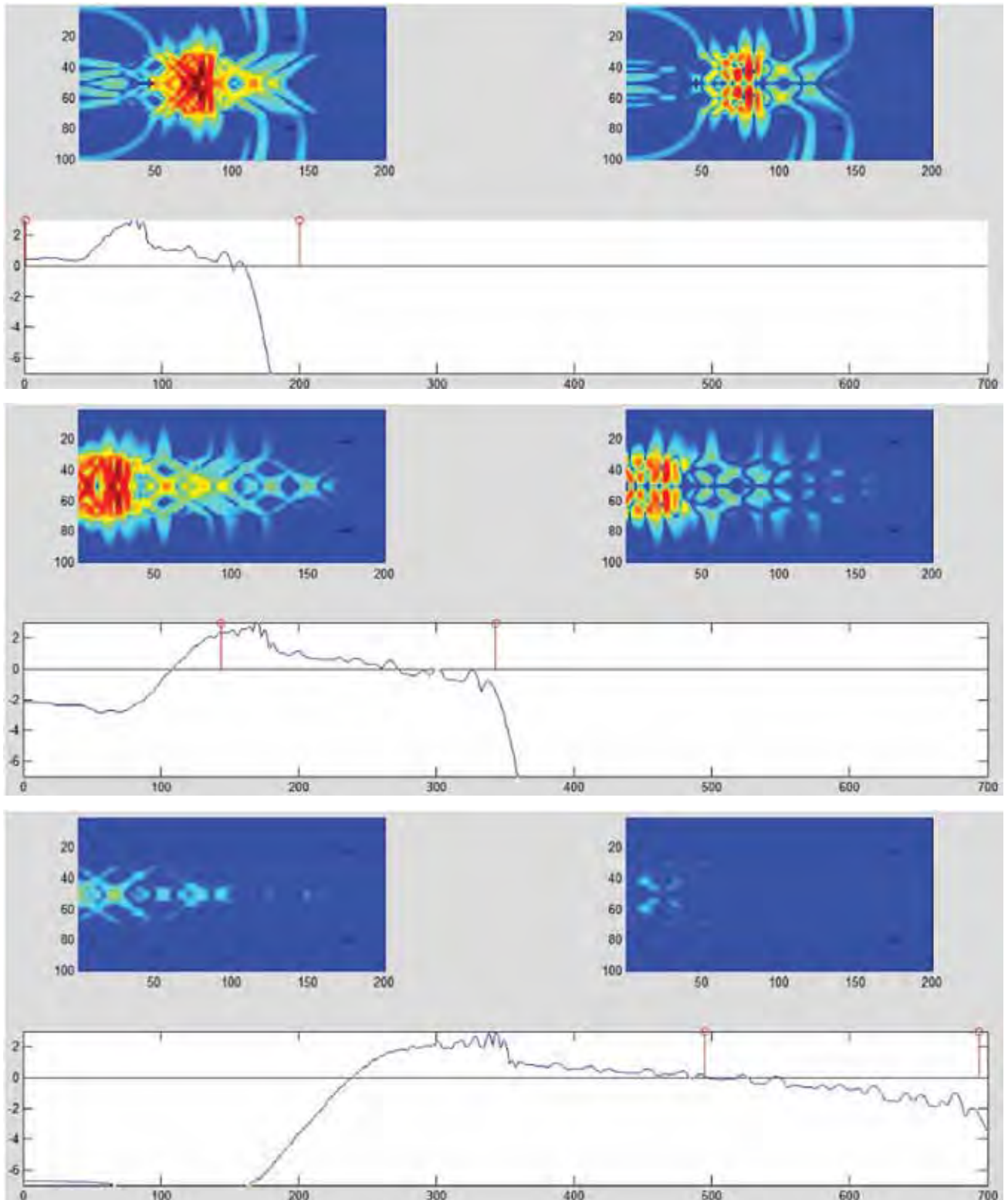


Рис. 4.23. Распространение импульсной волны в диэлектрическом волновом с $\epsilon = 12$ в три последовательных момента времени. Показано пространственное распределение электрической (слева) и магнитной (справа) энергии в пределах сопровождающего окна, продольное распределение суммарной энергии в сече-

нии волновода, вертикальные палочки на графиках обозначают границы сопровождающего окна в текущий момент.

Из графиков видна достаточно чёткая передняя граница основной волноводной моды, видно как убывает энергия в волне-предвестнике, как уширяется волноводная часть импульса за счёт дисперсии в волноводе. Снижение энергии ИПВ обусловлено тем, что передняя её часть по сути создаётся всё время заново по ходу движения поверхностной частью. В результате поверхностная часть первого лепестка теряет на это энергию. Эта энергия уходит вглубь диэлектрика и проходя через центр выходит с запаздыванием и формирует второй поверхностный лепесток, отражаясь опять вглубь диэлектрика. При этом второй поверхностный лепесток при распространении продолжает высвечивать энергию вглубь диэлектрика. В результате формируются новые лепестки позади, а передние теряют энергию, но ромбическая структура волны (скелетон, вдоль которого происходит перекачка энергии) при этом движется как целое вдоль волновода со скоростью света.

Если сравнить этот процесс с тем, который происходит когда ИПВ возбуждается черенковским источником (рис. 4.22), то мы видим, что источник энергии находится спереди волны и всё время (пока не выключится на последних двух кадрах) подкачивает энергией первый лепесток, от которого энергия перетекает вдоль волновой структуры, формируя задние лепестки.

Выводы к разделу 4

Был построен метод модового базиса для анализа возбуждения и распространения импульсных сигналов в открытых диэлектрических волноводах. Особенностью открытых структур является то, что задача на собственные значения для определения мод имеет непрерывный спектр. Как следствие, модовые разложения уже являются не суммами, а интегралами. То есть моды зависят от спектрального параметра, по которому ведется интегрирование. Это требует, в частности, особого внимания при нормировании базисных функций. В результате получена система интегро-дифференциальных эволюционных волноводных уравнений, в которой роль матричных коэффициентов играют ядра интегралов, описывающих межмодовые и межтиповые преобразования. Эти ядра удовлетворяют тем же соотношениям, которые были получены ранее для матриц коэффициентов в закрытом волноводе. Разработана численная схема решения системы интегро-дифференциальных уравнений, основанная на использовании метода моментов. Спектральные характеристики представлены в виде разложения по системе кусочно-постоянных интервальных функций. Построены и пронормированы модовые функции для круглого диэлектрического волновода. Получены ядра межмодовых преобразований, для них получены матрицы в рамках метода моментов. В результате система интегро-дифференциальных уравнений была сведена к системе матричных дифференциальных уравнений, для которой, аналогично второму разделу, была построена явная конечно-разностная расчетная схема. Проведено моделирование распространения импульса. Для верификации результатов была создана расчетная программа на основе метода FDTD для тел вращения (BOR-FDTD) с сопровождающим окном, позволяющая при ограниченном размере вычислительного объема моделировать распространение головной части импульсной волны на значительные расстояния. Подтверждено совпадение результатов обоих методов.

В результате численного моделирования во временной области процесса возбуждения и распространения импульсного сигнала в открытом диэлектрическом волноводе выявлено и проанализировано новое физическое явление в виде импульсной поверхностной волны-предвестника, которая распространяется вдоль

волновода со скоростью света в свободном пространстве, сохраняя свою пространственную структуру при распространении. Эта волна возникает благодаря преломлению части излучения от источника под углами, близкими к углу полного внутреннего отражения. Кроме того, волны от источника, прошедшие через границу под большими углами, формируют излучаемое поле в виде сферической волны. На границе диэлектрика этот сферический фронт переходит в импульсную поверхностную волну. Благодаря эффекту, который сходен по механизму с черенковским излучением, происходит формирование конического фронта вглубь диэлектрика, распространяющегося под углом критического преломления к границе. Скорость распространения этого конического фронта в перпендикулярном к нему направлении равна скорости света в диэлектрике, а скорость его распространения вдоль оси волновода соответствует скорости света в окружающем свободном пространстве. Когда этот конический фронт доходит до оси, он становится расширяющимся коническим фронтом и снова падает на границу диэлектрик-воздух под критическим углом, образуя следующий лепесток поверхностной волны. В результате формируется волновая структура наподобие ножниц, которая распространяется вдоль волновода в виде предвестника основной части волны со скоростью света в свободном пространстве. Было исследовано также излучение такой волны с конца диэлектрического волновода, имеющего конический конец, для того чтобы преломление большей части этого фронта (по поляризации) происходило под углом Брюстера. Обнаруженный эффект имеет значительное практическое значение, поскольку открывает путь к созданию ряда новых резонансных элементов, основанных на взаимодействии таких конических фронтов с коническими зеркалами и плоской поверхностью.

На основе метода разложения волнового пучка в интеграл по бесселевым модам и применения к нему оптимальной квадратуры, был создан вычислительный метод, с помощью которого проанализированы изменения характеристик кривизны импульсного волнового пучка при распространении. По аналогии с известным в частотной области понятием фазового центра было предложено ввести понятие отдельных амплитудного и временного центра для адекватного описания поведения импульсных полей в промежуточной зоне импульсных антенн. Ампли-

тудный центр определяет точку, от которой происходит уменьшение амплитуды фронта в дальней зоне по обратной степенной зависимости. В свою очередь временной центр определяет центр кривизны фронта, то есть он нужен для описания параксиальной части пучка. Выявлены особенности поведения импульсного волнового пучка, образуемого гауссовым распределением токов на плоскости при импульсном возбуждении лягеровским импульсом. Амплитудный центр является интегральной характеристикой распространения пучка, в то время как временной центр является мгновенной характеристикой фронта и меняется с распространением. Установлено, что временной центр изначально находится на бесконечности позади плоскости возбуждения, что соответствует плоскому фронту в ближней зоне пока дифракционное расплывание еще не началось. Далее с распространением волны ее центр кривизны (временной центр) приближается к плоскости возбуждения и пересекает ее, выходя на постоянный уровень где-то на расстоянии 6-7 поперечных размеров пучка впереди плоскости возбуждения. В то же время установлено, что амплитудный центр всегда находится позади плоскости, с уменьшением поперечных размеров пучка он ожидаемо приближается к плоскости возбуждения (переход к точечному источнику). Проведенный анализ может быть использован для компактного и при этом достаточно точного описания полей импульсных антенн в ближней и промежуточной зонах.

РАЗДЕЛ 5

РЕШЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

5.1. Введение

В этом разделе мы возможно не очень удачно использовали термин широкополосные задачи дифракции. Этим термином мы попытались противопоставить традиционные методы расчёта в частотной области, когда решение получается на одной частоте, и для того чтобы посчитать спектр компонент матрицы рассеяния, приходится рассчитывать её на сетке частот в требуемом диапазоне. Вместо этого, при использовании моделирования во временной области, рассчитывается прохождение короткого импульса через структуру, записываются временные формы требуемых модовых амплитуд отражённых/прошедших волн, и далее их спектр делится на спектр импульса возбуждения. В результате мы получаем требуемые результаты сразу во всей полосе частот, которая сохранилась в импульсе возбуждения. Таким образом, когда употребляем термин широкополосные задачи, то в первую очередь хотим подчеркнуть этим, что применяемые методы позволяют получать результаты сразу в широкой полосе частот.

В начале раздела будут представлены некоторые аналитические результаты, полученные при изучении простейших задач дифракции в волноводе, при которой не происходят межмодовые преобразования – это дифракция импульсной волны на плоской границе раздела двух сред. Задача рассмотрена в достаточно общей постановке, когда среды характеризуются диэлектрической проницаемостью, магнитной проницаемостью и проводимостью. Далее обсуждается эффект, возникающий при падении импульсной E -волны из воздуха на границу проводящей среды в волноводе. При этом, благодаря продольной составляющей электрического поля, заряды проводимости «толкаются» волной вглубь среды, что приводит к волне объёмного заряда проводимости и колебаниям поверхностного заряда проводимости на границе.

Далее будут рассмотрены более сложные задачи многомодовой дифракции, такие как дифракция на скачке сечения, сочленение волноводов с общей апертурой и т.п. Подобные задачи в частотной области решаются в том числе методом, известным как согласование мод. Сам метод при его использовании сильно завязан на использование дисперсионных соотношений для мод. Здесь мы предлагаем перенести его во временную область, требуя выполнения согласования мод в каждый момент времени, при этом моды моделируются независимыми модовыми каналами, роль «согласования» в них выполняют модовые поглощающие условия. Описана численная схема такого метода, после чего продемонстрировано его применение на нескольких простейших задачах, которые было легко проверить FDTD моделированием или же расчётом в универсальном электромагнитно солвере. Среди таких задач рассмотрена дифракция на скачке в плоскопараллельном волноводе, стык коаксиального и круглого волноводов, излучение биконической антенны, которая рассматривается как стык двух регулярных конических волноводов – биконической линии и свободного пространства.

5.2. Метод операторов дифракции в одно-модовых задачах

5.2.1. Дифракция на границе раздела магнето-диэлектриков в цилиндрическом волноводе

Рассмотрим задачу дифракции произвольной импульсной волны в волноводе на плоской границе раздела двух сред с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями и проводимостью (рис. 5.1.). Т.е. волновод при $z < 0$ заполнен средой, характеризующейся параметрами $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, а при $z > 0$ — параметрами $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. В однородных участках волновода слева и справа от границы распространение импульсной волны может быть описано суперпозицией независимо распространяющихся мод. Граничные условия на границе раздела не приводят к межмодовой связи, таким образом, решение можно проводить для каждой моды отдельно – задача дифракции является одномодовой.

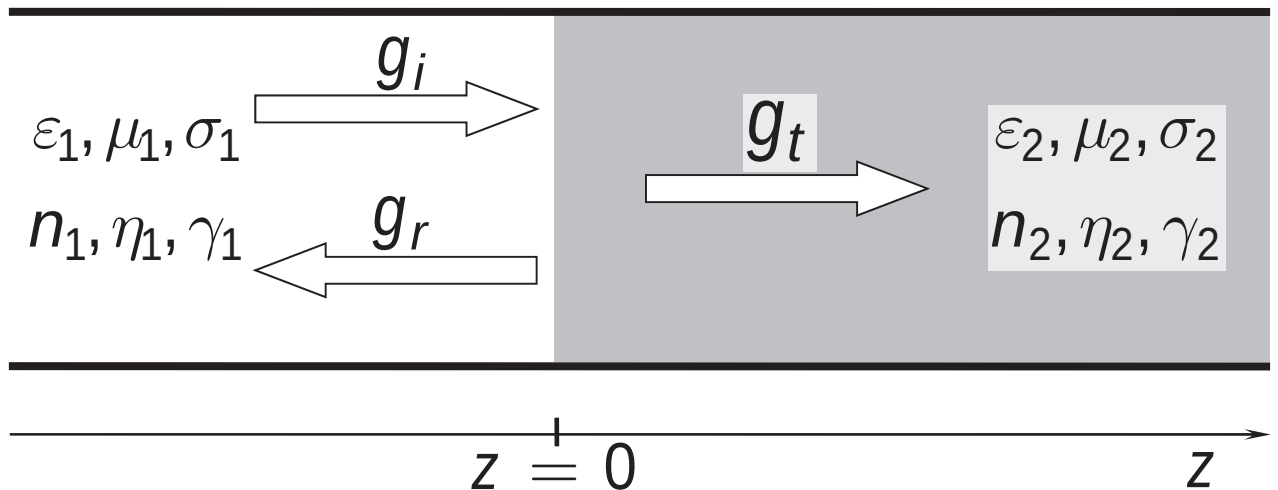


Рис. 5.1. Геометрия задачи.

Для описания параметров среды удобнее будет использовать не непосредственно параметры ε, μ, σ , а производные от них параметры: показатель преломления (замедления) $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, постоянную затухания в среде на частоте отсечки моды $\gamma = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon\omega_0$ и безразмерный импеданс среды $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Для удобства использования аппарата преобразования Лапласа, в этом разделе мы будем использовать несколько отличающуюся нормировку при разложении полей, чтобы получить эволюционное уравнение в наиболее простом виде. Поэтому приведём все необходимые формулы для модового разложения в однородном волноводе. Итак, исходная система уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \partial_t \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{J}}^\sigma, & \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\partial_t \vec{\mathcal{B}}, \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_\sigma, & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0, \\ \vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{\mathcal{E}}, \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \mu \vec{\mathcal{H}}, \quad \vec{\mathcal{J}}^\sigma = \sigma \vec{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (5.1)$$

при нормально-тангенциальном разложении полей

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{z}_0 E_z, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H} + \vec{z}_0 H_z, \quad \dots, \quad \nabla = \nabla_\perp + \vec{z}_0 \partial_z \quad (5.2)$$

в волноводе, заполненном средой с постоянными параметрами $\varepsilon, \mu, \sigma = \text{const}$, разбивается на две подсистемы для ТЕ-(Н-) и ТМ-(Е-) волн. Рассмотрим вначале **ТЕ-волны**. Для них система уравнений Максвелла будет выглядеть таким образом:

$$\begin{cases} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] H_z = \varepsilon_0 \varepsilon \partial_t (\vec{E}) + \partial_z [\vec{H} \times \vec{z}_0] + \sigma \vec{E} \\ \mu_0 \mu \partial_t H_z = \nabla_{\perp} \cdot [\vec{z}_0 \times \vec{E}] \\ \partial_z H_z = -\nabla_{\perp} \cdot \vec{H} \end{cases} . \quad (5.3)$$

Искомые поля можно представить в виде модового разложения:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{\pm m}^h &= \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}} v_{\pm m}^h(z, t) [\nabla_{\perp} \psi_m \times \vec{z}_0] \\ \vec{\mathcal{H}}_{\pm m}^h &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu}} [i_{\pm m}^h(z, t) \nabla_{\perp} \psi_m + \vec{z}_0 h_{\pm m}(z, t) \nu_m^2 \psi_m] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Базисные скалярные функции $\psi_m(x, y)$ находятся из решения граничной задачи на собственные значения с условиями Неймана на контуре:

$$(\nabla_{\perp}^2 + \nu_m^2) \psi_m = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi_m \Big|_L = 0 \quad (5.5)$$

и нормируются условиями:

$$\frac{\nu_m^2}{S} \int_S \psi_m \psi_{m'} dS = \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \psi_m \cdot \nabla_{\perp} \psi_{m'} dS = \delta_{mm'}. \quad (5.6)$$

Подстановка модовых разложений в уравнения Максвелла для ТЕ-волн даёт следующие эволюционные волноводные уравнения для модовых амплитуд:

$$\begin{cases} (\partial_{ct}^2 + \tilde{\sigma} \partial_{ct} - \partial_z^2 + \nu_m^2) h_m = 0; \\ v_m^h = -\partial_{ct} h_m; \\ i_m^h = \partial_z h_m, \end{cases} , \quad (5.7)$$

где введены обозначения:

$$\partial_{ct} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} \partial_t; \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \sigma. \quad (5.8)$$

Аналогичные построения для **ТМ-волн** выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] E_z = \mu_0 \mu \partial_t \vec{H} + \partial_z [\vec{z}_0 \times \vec{E}] \\ \varepsilon_0 \varepsilon \partial_t E_z = \nabla_{\perp} \cdot [\vec{H} \times \vec{z}_0] - \sigma E_z \\ \partial_z E_z = -\nabla_{\perp} \cdot \vec{E} \end{cases} . \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{\pm n}^e &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}} [v_{\pm n}^e(z, t) \nabla_{\perp} \varphi_n + \vec{z}_0 e_{\pm n}(z, t) \kappa_n^2 \varphi_n] \\ \vec{\mathcal{H}}_{\pm n}^e &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu}} i_{\pm n}^e(z, t) [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \varphi_n] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp}^2 + \kappa_n^2) \varphi_n &= 0; \quad \varphi_n|_L = 0; \\ \frac{\kappa_n^2}{S} \int_S \varphi_n \varphi_{n'} dS &= \frac{1}{S} \int_S \nabla_{\perp} \varphi_n \cdot \nabla_{\perp} \varphi_{n'} dS = \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} (\partial_{ct}^2 + \tilde{\sigma} \partial_{ct} - \partial_z^2 + \kappa_n^2) e_n = 0; \\ i_n^e = -\partial_{ct} e_n - \tilde{\sigma} e_n; \\ v_n^e = \partial_z e_n, \end{cases} \quad (5.12)$$

Для удобства в дальнейшем будем использовать безразмерное время и координату, пронормированные на частоту отсечки пустого волновода для рассматриваемой моды (ω_0), индекс моды n или m также будем опускать в дальнейшем:

$$\begin{aligned} t' &\equiv \omega_0 t, \quad z' \equiv \omega_0 z / c_0 \\ \omega_0^2 &= c_0^2 \{ \kappa_n^2, \nu_m^2 \} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь $c_0 = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость света в свободном пространстве, κ, ν – собственные значения соответствующих граничных задач для мод (5.5) и (5.11). Наконец, мы готовы записать унифицированное уравнение распространения (известное как уравнение Клейна-Гордона) в виде:

$$(\partial_t^2 + 2\gamma \partial_t - n^{-2} \partial_z^2 + n^{-2}) g = 0, \quad (5.14)$$

где $g = \{e_n, h_m\}$ – модовая амплитуда продольной компоненты поля рассматриваемого типа, $2\gamma = c\tilde{\sigma} / \omega_0 = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon \omega_0$ – постоянная затухания в среде на критической частоте, $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ — показатель преломления (замедление в среде). Будем использовать следующие преобразования Лапласа для модовых амплитуд по временной координате:

$$\begin{aligned} g(z, t) &= \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} G(z, s) e^{st} ds \\ G(z, s) &= \int_0^\infty g(z, t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (5.15)$$

Тогда из уравнения распространения получим, что производная по координате выражается следующим оператором умножения в области Лапласа:

$$\partial_z \rightarrow \pm n \sqrt{s^2 + 2\gamma s + n^{-2}}, \quad (5.16)$$

что приводит к элементарному решению уравнения распространения в области Лапласа в виде прямой и обратной волн:

$$G^{\pm}(z,s) = G^{\pm}(0,s) \exp\left(\mp zn \sqrt{s^2 + 2\gamma s + n^{-2}}\right) \quad (5.17)$$

После обратного преобразования Лапласа, это соотношение приводит к следующей формуле, выражающей модовые амплитуды волны при заданных начально-граничных условиях в виде их свёртки с оператором распространения:

$$g^+(z,t+nz) = Z_{n,\gamma;z}(t) * g^+(0,t) = \int_0^{\infty} Z_{n,\gamma;z}(\tau) g^+(0,t-\tau) d\tau. \quad (5.18)$$

Интервал интегрирования взят от 0 для явного учёта принципа причинности (то же самое можно было выразить неявно, считая, что $Z(t < 0) = 0$). Запоздывание учтено в явном виде в аргументе слева, поэтому оператор распространения $Z_{n,\gamma;z}(t)$ описывает только изменение формы сигнала (не включая смещения). В явном виде оператор распространения выглядит следующим образом:

$$Z_{n,\gamma;z}(t) = \left[\delta(t) - \left[1 - (n\gamma)^2 \right] \frac{z}{n} \tilde{J}_1\left(\tilde{\omega} \sqrt{t^2 + 2nzt}\right) e^{-\gamma t} \right] e^{-\gamma nz}, \quad (5.19)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}^2 = n^{-2} - \gamma^2; \quad \tilde{J}_1(t) = \frac{J_1(t)}{t}. \quad (5.20)$$

Иногда удобнее для представления решения и численных расчётов использовать оператор распространения для начально-граничной задачи при заданной пространственной производной на границе:

$$g^+(z,t+nz) = Z'_{n,\gamma;z}(t) * \partial_z g^+(0,t). \quad (5.21)$$

Соответствующий оператор распространения выглядит проще:

$$Z'_{n,\gamma;z}(t) = -\frac{1}{n} J_0\left(\tilde{\omega} \sqrt{t^2 + 2nzt}\right) e^{-\gamma(t+nz)} \quad (5.22)$$

Для прямой/обратной волны временная зависимость модовой амплитуды в некотором сечении связана с её продольной производной соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \partial_z g^{\pm}(z,t) &= \mp \left\{ \delta^{(1)}(t) + \gamma \delta(t) + \tilde{\omega}^2 \tilde{J}_1(\tilde{\omega} t) e^{-\gamma t} \right\} * g^{\pm}(z,t) \\ g^{\pm}(z,t) &= \mp J_0(\tilde{\omega} t) e^{-\gamma t} * \frac{1}{n} \partial_z g^{\pm}(z,t) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Стоит отметить, что благодаря использованию запаздывающего времени в записи формул (5.18) и (5.21), они могут быть использованы как для описания распространения волны в будущее, так и для вычисления модовой амплитуды волны в прошлом при отрицательном времени (т.е. для обращённого во времени распространения). При этом для любого сигнала $f(t)$ выполняется естественное соотношение взаимной обратности операторов распространения на положительное расстояние L и отрицательное расстояние $-L$:

$$\begin{aligned} Z_{n,\gamma;L}(t) * Z_{n,\gamma;-L}(t) * f(t) &= f(t) \\ Z'_{n,\gamma;L}(t) * Z'_{n,\gamma;-L}(t) * f(t) &= f(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Наконец, мы готовы вернуться к рассмотрению исходной постановки задачи о дифракции (рис. 5.1). Рассмотрим вначале **ТЕ-(Н-) волну**. Для неё граничные условия на границе диэлектрика приводят к следующим соотношениям для модовых амплитуд слева и справа от границы:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_2 \\ B_{z1} = B_{z2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} v_1^h = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} v_2^h \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} i_1^h = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} i_2^h \\ \sqrt{\mu_1} h_1 = \sqrt{\mu_2} h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\mu_1} \partial_t h_1 = \sqrt{\mu_2} \partial_t h_2 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \partial_z h_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \partial_z h_2 \\ \sqrt{\mu_1} h_1 = \sqrt{\mu_2} h_2 \end{cases} \quad (5.25)$$

Одно из этих уравнений избыточно, поэтому, разбивая поле слева на падающую (i) и отражённую (r) волны, а волну справа обозначая как прошедшую (t), мы получим граничные условия в виде:

$$\begin{cases} \sqrt{\mu_1} h_1 = \sqrt{\mu_2} h_2, \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \partial_z h_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \partial_z h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\mu_1} (h_i + h_r) = \sqrt{\mu_2} h_t, \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} (\partial_z h_i + \partial_z h_r) = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \partial_z h_t, \end{cases} \quad (5.26)$$

который после применения преобразования Лапласа запишется как:

$$\begin{cases} \sqrt{\mu_1} (H_i(s) + H_r(s)) = \sqrt{\mu_2} H_t(s), \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} (\partial_z H_i(s) + \partial_z H_r(s)) = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \partial_z H_t(s) \end{cases} \quad (5.27)$$

В соответствии с (5.16) производные от модовых амплитуд выражаются в виде:

$$\begin{aligned}
\partial_z H_i &= -n_1 \sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}} H_i(s) \\
\partial_z H_r &= +n_1 \sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}} H_r(s) \\
\partial_z H_t &= -n_2 \sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}} H_t(s)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Подставляя эти выражения в (5.27), после некоторых преобразований можно получить следующую связь в области Лапласа:

$$H_i = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}}} \right\} \partial_z H_t, \tag{5.29}$$

которая эквивалентна уравнению в свёртках во временной области:

$$h_i(t) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{-\gamma_2 t}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}} J_0(\tilde{\omega}_2 t) + \frac{e^{-\gamma_1 t}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} J_0(\tilde{\omega}_1 t) \right\} * \partial_z h_t. \tag{5.30}$$

Решением задачи дифракции является формула, связывающая временную зависимость модовой амплитуды отражённой волны (или её продольной производной) от временной зависимости падающей волны. В области Лапласа это решение выглядит следующим образом в развёрнутой и операторной форме:

$$\partial_z H_t = -2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}}} \right\}^{-1} H_i, \tag{5.31}$$

$$\partial_z H_t(s) = T^h(s) H_i(s)$$

где $T^{TE}(s)$ – искомый оператор отражения, который необходимо представить во временной области:

$$T^{TE}(s) = -2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}}} \right\}^{-1}. \tag{5.32}$$

Теперь рассмотрим аналогичные выражения для **ТМ-(Е-) волны**. Граничные условия:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_2 \\ D_{z1} - D_{z2} = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} v_1^e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} v_2^e \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} i_1^e = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} i_2^e \\ (\sqrt{\varepsilon_1} \mathbf{e}_1 - \sqrt{\varepsilon_2} \mathbf{e}_2) \sqrt{\varepsilon_0} \kappa_n^2 \varphi_n = q \end{cases} \tag{5.33}$$

Здесь в третьем уравнении возникает поверхностная плотность заряда проводимости, которая может создаваться на границе двух проводящих сред. Подробнее это явление будет изучено в следующем подразделе, где мы рассмотрим падение импульсной Е-волны из свободного пространства на границу проводящей среды. Здесь же, пользуясь избыточностью граничных условий, мы будем использовать первые два условия. В результате преобразований, последовательно получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \partial_z \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \partial_z \mathbf{e}_2 \\ \sqrt{\varepsilon_1} (\partial_t + 2\gamma_1) \mathbf{e}_1 = \sqrt{\varepsilon_2} (\partial_t + 2\gamma_2) \mathbf{e}_2 \\ (\sqrt{\varepsilon_1} \mathbf{e}_1 - \sqrt{\varepsilon_2} \mathbf{e}_2) \sqrt{\varepsilon_0} \kappa_n^2 \varphi_n = q \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon_1} (\partial_t + 2\gamma_1) (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_r) = \sqrt{\varepsilon_2} (\partial_t + 2\gamma_2) \mathbf{e}_t, \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (\partial_z \mathbf{e}_i + \partial_z \mathbf{e}_r) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \partial_z \mathbf{e}_t \end{cases} \quad (5.35)$$

Используя связь (5.16) между продольными производными и амплитудой в прямой и обратной волнах, записываем:

$$\begin{aligned} \partial_z E_i &= -n_1 \sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}} E_i(s) \\ \partial_z E_r &= +n_1 \sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}} E_r(s). \\ \partial_z E_t &= -n_2 \sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}} E_t(s) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Подставляя это в преобразование Лапласа от (5.35), можно прийти к следующему соотношению в области Лапласа:

$$E_i = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} \frac{s + 2\gamma_2}{s + 2\gamma_1} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}}} \right\} \partial_z E_t, \quad (5.37)$$

которое во временной области эквивалентно уравнению в свёртках:

$$\begin{aligned} e_i &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} \left[J_0(\tilde{\omega}_2 t) e^{-\gamma_2 t} + 2(\gamma_2 - \gamma_1) J_0(\tilde{\omega}_2 t) e^{-\gamma_2 t} * e^{-2\gamma_1 t} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}} J_0(\tilde{\omega}_1 t) e^{-\gamma_1 t} \right\} * \partial_z e_t \end{aligned} \quad (5.38)$$

Аналогично, вводя оператор прохождения для ТМ-волны

$$\partial_z E_t(s) = T^{TM}(s) E_i(s), \quad (5.39)$$

получаем задачу на обращение во временную область выражения:

$$T^{TM}(s) = -2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} \frac{s + 2\gamma_2}{s + 2\gamma_1} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}}} \right\}^{-1} \quad (5.40)$$

Для обращения из области Лапласа во временную область выражений (5.32) и (5.40) необходимо привести их к виду произведения дробно-рациональной функции на например, из (5.32) получаем:

$$T^{TE}(s) = D \left(s^2 + 2As + B + \frac{C_1 s + C_2}{s^2 + 2C_3 s + C_4} \right) \times \\ \times \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}}} - \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}}} \right) \quad (5.41)$$

где константы $A, B, C_{1..4}, D$ выражаются через параметры сред. Каждое из получающихся при раскрытии скобок выражений может быть обращено во временную область. При этом получающийся оператор удобно разбить на сингулярную (описывающую моментальный отклик) и регулярную (описывающую резонансный поздневременной отклик) части. Для сингулярной части получим:

$$T_s^{TE} = \\ = -\frac{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}} \left(\delta'(t) + \left(2 \frac{\varepsilon_2 \mu_1 \gamma_1 - \varepsilon_1 \mu_2 \gamma_2}{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2} - \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \gamma_1 - \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} - \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} \right) \delta(t) \right), \quad (5.42)$$

где $\delta'(\cdot)$ – первая производная от δ -функции (соответствующая при свёртке дифференцированию сигнала). Для регулярной части оператора в рассматриваемом наиболее общем случае получается довольно громоздкое выражение:

$$\begin{aligned}
T_{reg}^{TE} = & -\frac{2\sqrt{n_1 n_2 \eta_1 \eta_2}}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \times \\
& \left[\left[\frac{\eta_2^2 (n_1^2 - n_2^2)}{n_1^2 n_2^2 (\eta_2^2 - \eta_1^2)} + \frac{2\eta_2^2 (\gamma_1 - \gamma_2) (\eta_2^2 \gamma_1 - \eta_1^2 (2\gamma_2 - \gamma_1))}{(\eta_2^2 - \eta_1^2)^2} \right] \eta_1 e^{-\gamma_1 t} J_0(\tilde{\omega}_1 t) - \right. \\
& - \left[\frac{\eta_2^2 (n_1 - n_2)}{n_1^2 n_2^2 (\eta_2^2 - \eta_1^2)} + \frac{2\eta_1^2 (\gamma_1 - \gamma_2) (\eta_2^2 (2\gamma_2 - \gamma_1) - \eta_1^2 \gamma_1)}{(\eta_2^2 - \eta_1^2)^2} \right] \eta_2 e^{-\gamma_2 t} J_0(\tilde{\omega}_2 t) + \\
& + \left[1 + 2t(\gamma_1 - \gamma_2) \frac{\eta_2^2}{(\eta_2^2 - \eta_1^2)} \right] \tilde{\omega}_1^2 \eta_1 e^{-\gamma_1 t} \tilde{J}_1(\tilde{\omega}_1 t) - \\
& - \left[1 + 2t(\gamma_1 - \gamma_2) \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \right] \tilde{\omega}_2^2 \eta_2 e^{-\gamma_2 t} \tilde{J}_1(\tilde{\omega}_2 t) + \\
& + \left[\frac{4\eta_1^2 \eta_2^2 (\gamma_1 - \gamma_2)}{n_1^2 n_2^2 (\eta_2^2 - \eta_1^2)^2} \left[(n_2^2 - n_1^2) - 2n_1^2 n_2^2 (\gamma_1 - \gamma_2) \frac{\eta_2^2 \gamma_1 - \eta_1^2 \gamma_2}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \right] \cos(\alpha t) - \right. \\
& - \frac{n_1 n_2 (\eta_2^2 - \eta_1^2) \sin(\alpha t)}{\sqrt{(n_1^2 \eta_1^2 - n_2^2 \eta_2^2) (\eta_2^2 - \eta_1^2) - n_1^2 n_2^2 (\eta_2^2 \gamma_2 - \eta_1^2 \gamma_1)^2}} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{\eta_1 \eta_2}{n_1^3 n_2^3 (\eta_2^2 - \eta_1^2)^3} \left((\eta_2^2 - \eta_1^2)^3 + 4n_1^2 n_2^2 \eta_1^2 \eta_2^2 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 (n_1^2 \eta_1^2 - n_2^2 \eta_2^2) \right) - \right. \\
& - \left. \frac{4\eta_1^2 \eta_2^2 (\gamma_1 - \gamma_2) (\eta_2^2 \gamma_1 - \eta_1^2 \gamma_2)}{n_1^2 n_2^2 (\eta_2^2 - \eta_1^2)^3} \left[(n_2^2 - n_1^2) - 2n_1^2 n_2^2 (\gamma_1 - \gamma_2) \frac{\eta_2^2 \gamma_1 - \eta_1^2 \gamma_2}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \right] \right] \Bigg] \times \\
& \times e^{-\frac{\eta_2^2 \gamma_1 - \eta_1^2 \gamma_2}{\eta_2^2 - \eta_1^2} t} * (\eta_1 e^{-\gamma_1 t} J_0(\tilde{\omega}_1 t) - \eta_2 e^{-\gamma_2 t} J_0(\tilde{\omega}_2 t))
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где введено обозначение:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2 (\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2)} - \frac{(\varepsilon_2 \mu_1 \gamma_2 - \varepsilon_1 \mu_2 \gamma_1)^2}{(\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2)^2}} = \sqrt{\frac{n_1^2 \eta_1^2 - n_2^2 \eta_2^2}{n_1^2 n_2^2 (\eta_2^2 - \eta_1^2)} - \frac{(\eta_2^2 \gamma_2 - \eta_1^2 \gamma_1)^2}{(\eta_2^2 - \eta_1^2)^2}} \tag{5.44}$$

Из граничных условий (5.27) и формул (5.28) несложно получить формулу для оператора отражения через оператор прохождения:

$$R^{TE}(t) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} T^{TE} + n_1 \delta^{(1)}(t) + n_1^{-1} e^{-\gamma_1 t} \tilde{J}_1(\tilde{\omega}_1 t). \quad (5.45)$$

В выражениях (5.43)-(5.44) мы намеренно использовали параметры n, η вместо ε, μ чтобы подчеркнуть наличие особенностей в выражениях при одинаковых импедансах сред: $\eta_1 = \eta_2$. В этом случае уже исходное выражение (5.41), и как следствие (5.42), будет содержать особенность, поэтому вместо него и дальнейших формул особый случай нужно рассмотреть отдельно. В этом случае $\mu_1/\varepsilon_1 = \mu_2/\varepsilon_2$ и параметры задачи можно выразить через $n_1, n_2, \gamma_1, \gamma_2$. Исходное выражение, которое необходимо обратить, будет:

$$T^{TE} = -2\sqrt{n_1 n_2} \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_1 s + n_1^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2\gamma_2 s + n_2^{-2}}} \right)^{-1} \quad (5.46)$$

В результате преобразований, получаем чуть более простое выражение:

$$T_s = -\sqrt{n_1 n_2} \left(\delta'(t) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \delta(t) \right) \\ T_{reg} = -\frac{\sqrt{n_1 n_2}}{\Delta\gamma} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\alpha(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 - (\Delta\gamma)^2)}{(2\Delta\gamma)^3} + \frac{\tilde{\omega}_1^2}{t} \right] J_0(\tilde{\omega}_1 t) e^{-\gamma_1 t} - \\ & - \left[\frac{\alpha(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + (\Delta\gamma)^2)}{(2\Delta\gamma)^3} + \frac{\tilde{\omega}_2^2}{t} \right] J_0(\tilde{\omega}_2 t) e^{-\gamma_2 t} - \\ & - \left[\frac{\alpha}{(2\Delta\gamma)^2} - \frac{\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + 3(\Delta\gamma)^2}{2\Delta\gamma t} + \frac{2}{t^2} \right] \tilde{\omega}_1 J_1(\tilde{\omega}_1 t) e^{-\gamma_1 t} + \\ & + \left[\frac{\alpha}{(2\Delta\gamma)^2} - \frac{\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 - 3(\Delta\gamma)^2}{2\Delta\gamma t} + \frac{2}{t^2} \right] \tilde{\omega}_2 J_1(\tilde{\omega}_2 t) e^{-\gamma_2 t} - \\ & - \frac{\alpha^2}{(2\Delta\gamma)^4} (J_0(\tilde{\omega}_2 t) e^{-\gamma_2 t} - J_0(\tilde{\omega}_1 t) e^{-\gamma_1 t}) * e^{-\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\Delta\gamma} t} \end{aligned} \right\}, \quad (5.47)$$

$$\text{где } \alpha = 4 \frac{n_2^2 \gamma_2^2 + n_1^2 \gamma_1^2}{n_2^2 n_1^2} - \gamma_1 \gamma_2 4 \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_2^4 n_1^4} + \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 n_2^2} \right)^2, \quad \Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1.$$

Здесь опять возникает сингулярность в знаменателе, когда у сред одинаковые константы затухания $\gamma_1 = \gamma_2$. В этом случае (будем писать $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) выражения для операторов упрощаются еще сильнее:

$$T_s = -\sqrt{n_1 n_2} [\delta'(t) + \gamma \delta(t)]$$

$$T_{reg} = -2\sqrt{n_1 n_2} e^{-\gamma t} \left\{ \frac{3}{(n_1^{-2} - n_2^{-2}) t^2} \left[\tilde{\omega}_1^2 (J_0(\tilde{\omega}_1 t) - 2\tilde{J}_1(\tilde{\omega}_1 t)) - \right. \right. \right. \quad (5.48)$$

$$\left. \left. \left. - \tilde{\omega}_2^2 (J_0(\tilde{\omega}_2 t) - 2\tilde{J}_1(\tilde{\omega}_2 t)) \right] + \right. \right. \left. \left. + \tilde{\omega}_1^2 \tilde{J}_1(\tilde{\omega}_1 t) + \tilde{\omega}_2^2 \tilde{J}_1(\tilde{\omega}_2 t) \right\}$$

Примечательно, что в случае изоимпедансных сред сингулярная часть оператора отражения обращается в ноль:

$$R_s(t) = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} T_s + n_1 (\delta'(t) + \gamma \delta(t)) = 0 \quad (5.49)$$

Регулярная часть оператора отражения выражается по формуле:

$$R_{reg}(t) = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} T_{reg} + n_1 \tilde{\omega}_1^2 e^{-\gamma t} \tilde{J}_1(\tilde{\omega}_1 t). \quad (5.50)$$

Хоть это и сложно заметить из (5.43), но кроме разности импедансов в знаменателе, это выражение также содержит разность показателей преломления в числителях многих выражений. Можно показать, что при равных показателях преломления но разных импедансах операторы отражения и прохождения не будут вносить дополнительной дисперсии (т.е. их резонансная часть будет соответствовать только переходу от временной зависимости модовой амплитуды к временной зависимости продольной производной от модовой амплитуды как это описывается формулами (5.23)).

Выражения для ТМ-(Е-) волны в общем случае оказываются еще более громоздкими, чем рассмотренные выражения для ТЕ-волн. Поэтому вместо рассмотрения общего случая, мы приведём формулы только для более простого случая падения волны из свободного пространства на границу диэлектрика с проводимостью. Соответствующие формулы будут получены в следующем подразделе в контексте рассматриваемой задачи об анализе поведения зарядов проводимости при воздействии импульсной Е-волны.

5.2.2. Дифракция на границе проводящей среды в цилиндрическом волноводе. Осцилляции поверхностного заряда и волна объемного заряда при дифракции Е-волны.

Рассмотрим волновод произвольного поперечного сечения с идеально проводящими стенками (ТЕМ-моды в таком волноводе отсутствуют). Часть волновода $z > 0$ предполагается заполненной проводящей средой с диэлектрической проницаемостью ε и проводимостью σ (рис. 5.2а). Из пустой части волновода ($z < 0$) на границу раздела $z = 0$ падает импульсная Е-волна, что приводит к образованию отраженной и прошедшей волн. Прошедшая волна в проводящей среде создает продольные токи проводимости, в результате этого появляется объемный заряд проводимости. Также на границе проводящей среды наводится некоторый поверхностный заряд.

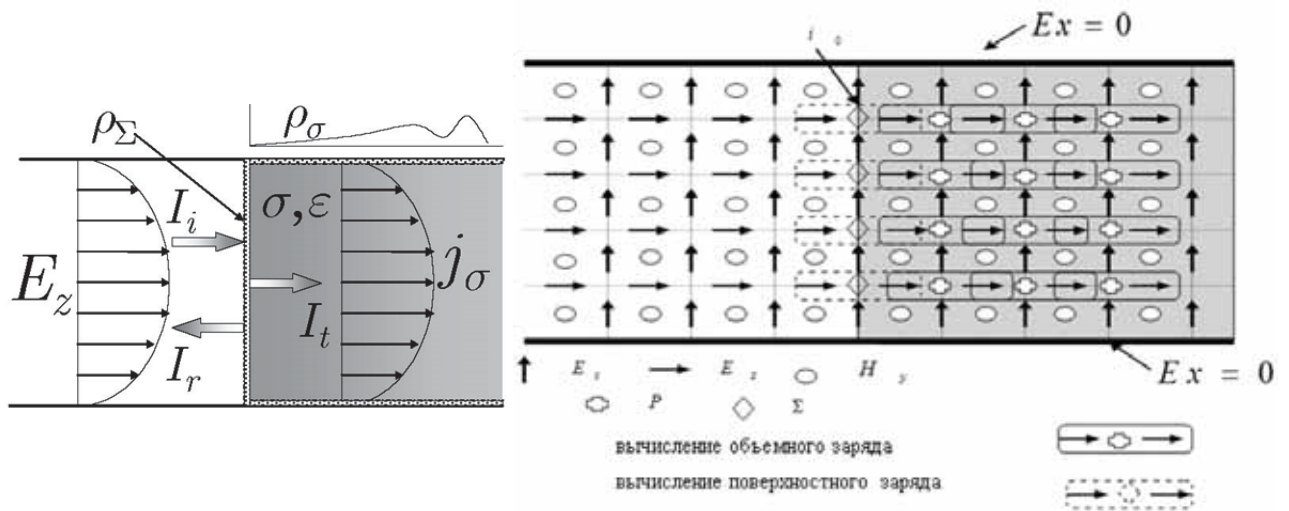


Рис. 5.2. Геометрия задачи (слева) и соответствующая сетка для дискретизации компонент полей при вычислении методом FDTD.

Рассмотрим, как может быть рассчитан этот заряд. Одна возможность для этого – решения уравнения непрерывности

$$\partial_t \rho_\sigma = -\nabla \cdot \vec{j}_\sigma. \quad (5.51)$$

Другой путь состоит в использовании дивергентного уравнения Максвелла:

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (5.52)$$

Необходимо напомнить, что в частотной области в данном уравнении присутствуют только заряды, перемещаемые под действием внешнего источни-

ка, но не заряды проводимости. Это обусловлено тем, что проводимость включена в определение комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^* = \varepsilon + \sigma/i\omega\varepsilon_0$, здесь $i = \sqrt{-1}$. Во временной области заряды проводимости рассматриваются отдельно от зарядов поляризации и поэтому могут быть получены из (5.52). Поверхностный заряд может быть определен из граничного условия для нормальной к границе компоненты вектора электрического смещения, что даёт с учетом (5.52):

$$\rho_\Sigma = \varepsilon_0 (\varepsilon E_z^2 - E_z^1). \quad (5.53)$$

Индексы 1 и 2 в формуле (5.53) обозначают поле в пустом волноводе и в проводящем диэлектрике соответственно.

Эта формула также может быть получена из ее аналога в частотной области следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{D}_z^1 - \dot{D}_z^2 = 0 &\Rightarrow \varepsilon_0 \dot{E}_z^1 - \varepsilon_0 \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0} \right) \dot{E}_z^2 = 0, \\ \frac{1}{i\omega} \dot{E}(\omega) &\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \int_{-\infty}^t E(\tau) d\tau, \\ \varepsilon_0 (E_z^1 - \varepsilon E_z^2) &= \int_{-\infty}^t \sigma E_z^2 dt = \int_{-\infty}^t j_{z\sigma} dt = -\rho_\Sigma. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Из этих рассуждений можно сделать выводы, что поверхностный заряд возникает из-за того что продольная компонента тока проводимости перемещает заряды с поверхности. Выкладки похожие на (5.54) также могут быть применены для определения поверхностного заряда на границе между проводящей средой и стенками волновода. В этом случае окажется, что некоторые поверхностные заряды проводимости также оказываются на боковых стенках из-за существования поперечных компонент в токах проводимости. Также необходимо отметить следующее: поперечные компоненты тока не перемещают заряд из одного поперечного сечения в другое, они только берут некоторый заряд со стенок, перемещают его в поперечном сечении и, позднее, возвращают его обратно. Так как исследуется перемещение заряда вдоль волновода, в дальнейшем не учитывается объемная плотность заряда, созданная поперечными токами. Математически это вы-

ражается в том, что в уравнении (5.51) остается только z компонента токов проводимости:

$$\partial_t \rho'_\sigma = -\partial_z j_{\sigma z}. \quad (5.55)$$

Штрих при этом обозначает, что в данном уравнении рассматриваются только часть зарядов, перемещаемая вдоль волновода.

С учетом наличия среды с некоторыми постоянными диэлектрической проницаемостью и проводимостью уравнения Максвелла в нормально-тангенциальной форме для E -волны могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} [\vec{z}_0 \times \nabla_\perp] E_z = \mu_0 \partial_t \vec{H} + \partial_z [\vec{z}_0 \times \vec{E}], \\ \varepsilon_0 \varepsilon \partial_t E_z = \nabla_\perp \cdot [\vec{H} \times \vec{z}_0] - \sigma E_z, \\ \partial_z E_z + \nabla_\perp \cdot \vec{E} = \rho_\sigma / \varepsilon_0 \varepsilon. \end{cases} \quad (5.56)$$

Поля разлагаются в ряд по модовому базису как (2.57), с учётом наличия только E -волн и одной моды с собственным числом λ .

Объёмная плотность заряда ρ_σ и поверхностная плотность заряда Σ_σ на границе среды могут быть разложены по базису следующим образом (для одной моды):

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(\vec{r}_\perp, z, t) &= (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1/2} p^\sigma(z, t) (\lambda/c)^2 \Phi^e(\vec{r}_\perp, \lambda), \\ \Sigma_\sigma(\vec{r}_\perp, t) &= (\varepsilon_0)^{-1/2} s^\sigma(t) (\lambda/c)^2 \Phi^e(\vec{r}_\perp, \lambda), \end{aligned} \quad (5.57)$$

где $P(z, t)$ – модовая амплитуда объёмной плотности заряда и $S(t)$ – модовая амплитуда плотности поверхностного заряда.

Система эволюционных уравнений, с учётом наличия в дивергентном уравнении объёмной плотности заряда, имеет следующий вид

$$\begin{cases} (\lambda/c)^2 e^z = \partial_\tau j + \partial_z v, \\ \partial_\tau e^z = -j - \tilde{\sigma} e^z, \\ \partial_z e^z = v + p^\sigma, \\ \partial_z j + \partial_\tau v + \tilde{\sigma} v = 0, \end{cases} \quad (5.58)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0 \varepsilon}$. Система (5.58) может быть переписана в следующем виде

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t - c^2\partial_z^2 + \lambda^2)i = 0, \\ (\partial_t + 2\gamma)e = -ci, \\ (\partial_t + 2\gamma)v = -c\partial_z i, \end{cases} \quad (5.59)$$

где $\gamma = c\tilde{\sigma} / 2 = \sigma / 2\varepsilon_0\varepsilon$. Здесь первое уравнение – это уравнение Клейна-Гордона, решаемое относительно модовой амплитуды i , второе и третье уравнения при этом позволяют найти модовый амплитуды v и e , если модовая амплитуда i уже определена.

Решение уравнения Клейна-Гордона может быть получено с использованием преобразования Лапласа ($t \rightarrow s$). В области изображений уравнение Клейна-Гордона имеет следующий вид

$$i(z,t) \rightarrow I(z,s), (c^2\partial_z^2 - (s^2 + 2\gamma s + \lambda^2))I = 0.$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид (C_1 , C_2 – константы)

$$I(z,s) = C_1 \exp\left(-c^{-1}z\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}\right) + C_2 \exp\left(+c^{-1}z\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}\right).$$

В этом выражении первое слагаемое обозначает волну, распространяющуюся в направлении $+\infty$, в то время как, второе слагаемое соответствует волне бегущей к $-\infty$. Принимая во внимание условие, что все источники должны находиться при $z < 0$, в решении оставляем только первое слагаемое

$$I(z,s) = C_1 \exp\left(-c^{-1}z\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}\right). \quad (5.60)$$

Подставляя $z = 0$ в формулу (5.60), мы можем выразить C_1 через $I(0,s)$ и получить выражение

$$I(z,s) = I(0,s) \exp\left(-c^{-1}z\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}\right). \quad (5.61)$$

Похожим образом, после применения производной по z к уравнению (5.60) в точке $z = 0$ константа C_1 может быть выражена через $\partial_z I(0,s)$

$$I(z,s) = -c\partial_z I(0,s) \frac{\exp(-c^{-1}z\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2})}{\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}}. \quad (5.62)$$

Применяя к формулам (5.61) и (5.62) обратное преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, можно получить следующие транспортные операторы Z и Z' :

$$\begin{aligned} I(z,t) &= Z(z,t) * I(0,t), \\ I(z,t) &= Z'(z,t) * \partial_z I(0,t), \\ Z(z,t) &= \delta(t - z/c) e^{-\gamma z/c} - \eta(t - z/c) e^{-\gamma t} \tilde{\omega}^2 \tilde{J}_1(\tilde{\omega} \sqrt{t^2 - (z/c)^2}) z/c, \\ Z'(z,t) &= -c e^{-\gamma t} J_0(\tilde{\omega} \sqrt{t^2 - (z/c)^2}) \eta(t - z/c), \end{aligned} \quad (5.63)$$

где $\tilde{\omega} = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}$, $\tilde{J}_1(x) = J_1(x)/x$, $J_0(\cdot)$ и $J_1(\cdot)$ – функции Бесселя, $\delta(\cdot)$ – дельта функция Дирака, $\eta(\cdot)$ – функция Хэвисайда.

Из системы эволюционных уравнений (5.59) можно также получить операторы, связывающие различные модовые амплитуды в любом сечении z :

$$\begin{aligned} i(z,t) &= \Omega(t) * \partial_z i(z,t), & \Omega(t) &= -c e^{-\gamma t} J_0(\tilde{\omega} t), \\ e^z(z,t) &= \Psi(t) * i(z,t), & \Psi(t) &= -c e^{-2\gamma t}, \\ v(z,t) &= \Psi(t) * \partial_z i(z,t). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Теперь рассмотрим задачу дифракции (рис. 4.2). Граничные условия требуют непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на границе среды:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_2, \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_2. \end{cases} \quad (5.65)$$

Подставляя модовые разложения в граничные условия (5.65), можно получить граничные условия для модовых амплитуд

$$\begin{aligned} i_i + i_r &= i_t, \\ v_i + v_r &= v_t / \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Индексы i , r и t обозначают падающее, отражённое и прошедшее поле соответственно.

Будем искать решение задачи в виде операторов дифракции $R(t)$ и $T(t)$, которые соотносят производные от модовых амплитуд отражённой и прошедшей волны с модовой амплитудой падающей волны на границе (расположенной при $z = 0$):

$$\begin{aligned}\partial_z i_r(0, t) &= R(t) * i_i(0, t), \\ \partial_z i_t(0, t) &= T(t) * i_i(0, t).\end{aligned}\quad (5.67)$$

Используя (5.61), можно получить следующие соотношения для модовых амплитуд падающей, отраженной и прошедшей волн в области Лапласа

$$c_0 \partial_z I_i = -\sqrt{s^2 + \lambda_0^2} I_i(s), \quad (5.68)$$

$$c_0 \partial_z I_r = +\sqrt{s^2 + \lambda_0^2} I_r(s), \quad (5.69)$$

$$\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}} \partial_z I_t = -\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2} I_t(s). \quad (5.70)$$

При этом $\lambda_0 = c_0 \kappa$, $\lambda = c_0 \kappa / \sqrt{\varepsilon}$.

После подстановки выражений (5.68), (5.69) и (5.70) в граничные условия (5.66) можно получить оператор прохождения в области Лапласа

$$T(s) = -2 \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + \lambda_0^2} \sqrt{\varepsilon} (s + 2\gamma)} + \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}} \right)^{-1}. \quad (5.71)$$

Теперь это выражение должно быть преобразовано из области Лапласа обратно во временную область. Для этого приведём его к следующему виду

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{-2s(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2)(s^2 + \lambda_0^2)(s + 2\gamma)^2}{s^2(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2) - \varepsilon(s^2 + \lambda_0^2)(s + 2\gamma)^2} \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(s + 2\gamma)\sqrt{s^2 + \lambda_0^2}} - \frac{\varepsilon}{s\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}} \right).\end{aligned}\quad (5.72)$$

Первый сомножитель в (5.72) может быть представлен в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{s(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2)(s^2 + \lambda_0^2)(s + 2\gamma)^2}{s^2(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2) - \varepsilon(s^2 + \lambda_0^2)(s + 2\gamma)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \left(s^3 + \alpha(2 - \varepsilon)s^2 + \alpha^2 s + \alpha^3 \varepsilon + \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{s - \beta_i} \right), \quad (5.73)$$

где $\alpha = 2\gamma / (1 - \varepsilon)$, β_i – корни следующего полинома относительно s

$$(1 - \varepsilon)s^4 + 2\gamma(1 - 2\varepsilon)s^3 + (\lambda^2 - \varepsilon\lambda_0^2 - \varepsilon(2\gamma)^2)s^2 - 4\gamma\varepsilon\lambda_0^2 s - (2\gamma)^2 \varepsilon \lambda_0^2 = 0.$$

Коэффициенты A_i могут быть получены из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{M}_{i,1} &= 1, \quad \mathbf{M}_{i,2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \beta_j, \quad \mathbf{M}_{i,4} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \beta_j, \\ \mathbf{M}_{i,3} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 \beta_j \beta_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \beta_j^2, \quad i = 1 \dots 4, \\ \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \alpha^4 + \varepsilon \lambda^4 \\ -2\gamma \varepsilon (\varepsilon \alpha^4 + 2\lambda^4) \\ \varepsilon \lambda^2 (\alpha^4 \varepsilon (\varepsilon + 1) + 4\gamma^2 \lambda^2) \\ -2\gamma \alpha^4 \varepsilon^3 \lambda^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Элементарные дроби в (5.73) соответствуют экспоненциальным функциям во временной области. Второй сомножитель в произведении (5.73) также может быть просто преобразован во временную область:

$$\frac{1}{s\sqrt{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2}} \Rightarrow \eta(t) * e^{-\gamma t} J_0(\tilde{\omega} t), \quad (5.74)$$

$$\frac{1}{(s + 2\gamma)\sqrt{s^2 + \lambda_0^2}} \Rightarrow e^{-2\gamma t} * J_0(\lambda_0 t). \quad (5.75)$$

Далее, принимая во внимание формулы (5.73), (5.74) и (5.75), может быть получено полное временное представление оператора прохождения. При этом

полученный оператор может быть разделён на сингулярную и регулярную части:

$$T = T_s + T_{reg}. \quad (5.76)$$

Сингулярная часть оператора содержит дельта функцию Дирака $\delta(t)$ и ее первую производную $\delta'(t)$, эти функции описывают мгновенный отклик:

$$\begin{aligned} T_s &= T_{s1}\delta'(t) + T_{s0}\delta(t), \\ T_{s0} &= \gamma \frac{2\varepsilon(1 + \varepsilon - 2/\sqrt{\varepsilon})}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad T_{s1} = -\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Регулярная часть оператора содержит регулярные функции и описывает поздне-временной (резонансный) отклик

$$\begin{aligned} T_{reg}(t) &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon} \left(\lambda_0^2 \tilde{J}_1(\lambda_0 t) + (\varepsilon \alpha^2 - \lambda_0^2) J_0(\lambda_0 t) \right) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(\left(F_2(t) * e^{-\gamma t} J_0(\tilde{\omega} t) + \left[\frac{4\gamma^2(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2} - \lambda^2 \right] J_0(\tilde{\omega} t) \right) e^{-\gamma t} \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{2\gamma\tilde{\omega}}{(1 - \varepsilon)} J_1(\tilde{\omega} t) + \tilde{\omega}^2 \tilde{J}_1(\tilde{\omega} t) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.78)$$

где введены следующие функции

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \sum_{i=1}^4 \frac{A_i (e^{\beta_i t} - e^{-2\gamma t})}{\beta_i + 2\gamma} + \varepsilon^2 \alpha^3 e^{-2\gamma t}, \\ F_2(t) &= \sum_{i=1}^4 \frac{A_i (e^{\beta_i t} - \eta(t))}{\beta_i} - \varepsilon \alpha^3 \eta(t), \\ \tilde{J}_1(x) &= J_1(x) / x. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ являются вещественными. Получив выражение для оператора прохождения, оператор отражения может быть выражен через него с помощью граничных условий (5.67)

$$R(s) = \sqrt{s^2 + \lambda_0^2} + \frac{s}{s + 2\gamma} \frac{T(s)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Этот оператор также можно разделить на сингулярную и регулярную части:

$$R = R_s + R_{reg}, \quad (5.79)$$

где регулярная часть выражается в виде

$$\begin{aligned} R_{reg}(t) = & \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon} \left(2\gamma^2 \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} - \lambda^2 \right) e^{-\gamma t} J_0(\tilde{\omega}t) - \\ & - \lambda_0^2 \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \tilde{J}_1(\lambda_0 t) - \frac{4\lambda_0 \varepsilon \gamma}{(1-\varepsilon)^2} J_1(\lambda_0 t) - 2 \left(\frac{4\gamma^2 \varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^3} - \frac{\lambda_0^2}{(1-\varepsilon)} \right) J_0(\lambda_0 t) + \\ & + \frac{2(\lambda^2 - \gamma^2)\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon} e^{-\gamma t} \tilde{J}_1(\tilde{\omega}t) - \frac{4\gamma \varepsilon \tilde{\omega} \sqrt{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^2} e^{-\gamma t} J_1(\tilde{\omega}t) - \\ & - \frac{2}{1-\varepsilon} F_3(t) * J_0(\lambda_0 t) + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon} F_4(t) * e^{-\gamma t} J_0(\tilde{\omega}t). \end{aligned}$$

Здесь введены следующие функции (они также являются вещественными)

$$\begin{aligned} F_3(t) = & \\ = & \sum_{i=1}^4 \frac{(\beta_i + A_i)(e^{\beta_i t} - e^{-2\gamma t}) - (A_i - 2\gamma)(\beta_i + 2\gamma)te^{-2\gamma t}}{(\beta_i + 2\gamma)^2} - \alpha^3 \varepsilon^2 (\varepsilon - 2\gamma t) e^{-2\gamma t}, \\ F_4(t) = & \sum_{i=1}^4 \frac{2\gamma(\beta_i + A_i)(e^{\beta_i t} - \eta(t)) + \beta_i(A_i - 2\gamma)e^{-2\gamma t}}{2\gamma\beta_i(\beta_i + 2\gamma)} - \varepsilon^2 \alpha^3 e^{-2\gamma t}. \end{aligned}$$

Сингулярная часть оператора отражения (5.79) имеет вид

$$\begin{aligned} R_s(t) &= R_{s1} \delta'(t) + R_{s0} \delta(t), \\ R_{s1} &= \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1}, \\ R_{s0} &= \gamma \frac{\sqrt{\varepsilon}(3\sqrt{\varepsilon} + 1)}{(\varepsilon - 1)(\sqrt{\varepsilon} + 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, после нахождения операторов дифракции, могут быть рассчитаны амплитуды прошедшей и отражённой волны в любых точках в координатах z, t , при этом используются операторы распространения (5.63) и операторы дифракции (5.67).

Теперь необходимо соотнести модовые амплитуды для полей, которое рассчитывается по предложенной выше схеме, с модовыми амплитудами для зарядов (5.57). Принимая во внимание формулу

$$j_{\sigma z} = \sigma E_z \quad (5.80)$$

и подставляя разложение поля в (5.55), можно получить следующее соотношение:

$$\partial_t p^\sigma(z, t) = -2\gamma \partial_z e(z, t), \quad (5.81)$$

Теперь соединим формулы (5.64), (5.67) и (5.81) в одну цепочку операторов, выражающую модовую амплитуду объёмной плотности заряда через модовую амплитуду падающего поля. $\partial_z e_t$ выражается через $\partial_z i_t$ как

$$\partial_z e_t(z, t) = \Psi(t) * \partial_z i_t(z, t), \quad \Psi(t) = -ce^{-2\gamma t}.$$

После применения оператора распространения (5.63), данная модовая амплитуда может быть связана с модовой амплитудой на границе

$$\partial_z e_t(z, t) = \Psi(t) * Z(z, t) * \partial_z i_t(0, t).$$

Далее, применяя оператор прохождения (5.67), может быть получено выражение для модовой амплитуды объёмной плотности заряда

$$p^\sigma(z, t) = -2\gamma \eta(t) * \Psi(t) * Z(z, t) * T(t) * i_i(0, t). \quad (5.82)$$

Необходимо отметить, что, так как свёртка является ассоциативной и коммутативной операцией, эта цепочка операторов может быть применена в любой последовательности. Модовая амплитуда плотности поверхностного заряда может быть найдена с помощью подстановки (5.57) в формулу для плотности поверхностного заряда (5.53):

$$s^\sigma(t) = \sqrt{\epsilon} e_t(0, t) - (e_i(0, t) + e_r(0, t)).$$

Таким образом, получены все формулы, необходимые для расчёта искомых плотностей поверхностного и объёмного заряда для любого вида падающего поля.

Для проверки полученного аналитического решения данная задача может быть решена с помощью метода FDTD.

Рассмотрим Е-волну в плоско-параллельном волноводе (рис. 5.2). Уравнения Максвелла для этого волновода записываются в виде:

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{H}_y = \partial_x E_z - \partial_z E_x, \\ \partial_\tau E_z + (2\gamma/c)E_z = \partial_x \tilde{H}_y, \\ \partial_\tau E_x + (2\gamma/c)E_x = -\partial_z \tilde{H}_y. \end{cases} \quad (5.83)$$

Здесь используется нормированное магнитное поле $\tilde{H}_y = H_y \sqrt{\mu_0 / \varepsilon \varepsilon_0}$. После аппроксимации временных и пространственных производных центральными конечными разностями и использования разделённой сетки во времени для электрического и магнитного поля можно получить следующую формулу обновления полей со временем:

$$\begin{cases} \tilde{H}_y|_{i,j}^{k+0.5} = \tilde{H}_y|_{i,j}^{k-0.5} + S_x \left(E_z|_{i,j+0.5}^k - E_z|_{i,j-0.5}^k \right) - S_z \left(E_x|_{i+0.5,j}^k - E_x|_{i-0.5,j}^k \right), \\ E_z|_{i,j+0.5}^{k+1} = (1 + \gamma\Delta t)^{-1} \left[(1 - \gamma\Delta t) E_z|_{i,j+0.5}^k + S_x \left(\tilde{H}_y|_{i,j+1}^{k+0.5} - \tilde{H}_y|_{i,j}^{k+0.5} \right) \right], \\ E_x|_{i+0.5,j}^{k+1} = (1 + \gamma\Delta t)^{-1} \left[(1 - \gamma\Delta t) E_x|_{i+0.5,j}^k - S_z \left(\tilde{H}_y|_{i+0.5,j}^{k+0.5} - \tilde{H}_y|_{i,j}^{k+0.5} \right) \right], \end{cases} \quad (5.8)$$

где $S_x = c\Delta t / \Delta x$, $S_z = c\Delta t / \Delta z$. Узлы разнесённой пространственной сетки, в которых вычисляются различные компоненты поля, показаны на рис. 5.2. Эта численная схема неявно учитывает закон Гаусса, поэтому она учитывает и закон сохранения заряда.

В численных расчётах пространственные шаги выбирались $\Delta z = \Delta x = L / 20$, где L – размер поперечного сечения волновода. Это обеспечивает 40 точек на длину волны, соответствующую критической частоте. Временной шаг выбирается в соответствии с критерием стабильности

$$\Delta t = \frac{1}{c\sqrt{1 / \Delta x^2 + 1 / \Delta z^2}}. \quad (5.85)$$

Схема расчёта плотностей поверхностного и объёмного заряда показана на рис. 5.2 справа. Плотность поверхностного заряда определяется из скачка

продольной компоненты вектора электрической индукции на границе (см. (5.53))

$$\Sigma|_j = Ex|_{i_0-0.5,j} - \varepsilon Ex|_{i_0+0.5,j}. \quad (5.86)$$

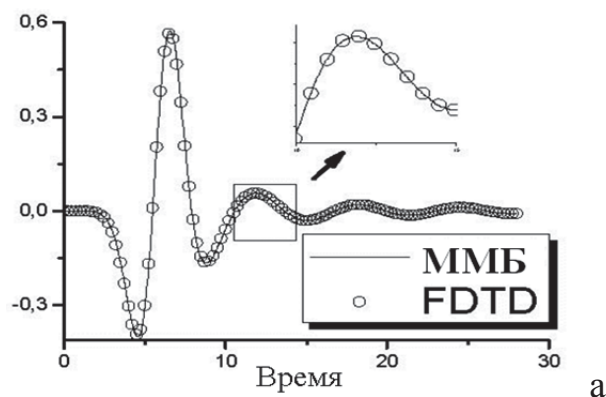
Из уравнений (5.55) и (5.80) может быть получена следующая формула обновления для определения плотности объёмного заряда

$$\rho|_{i+0.5,j+0.5}^{n+0.5} = \rho|_{i+0.5,j+0.5}^{n-0.5} - 2\sigma \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Ex|_{i+1,j+0.5}^n - Ex|_{i,j+0.5}^n \right). \quad (5.87)$$

Таким образом, с помощью формул (5.86) и (5.87) могут быть рассчитаны плотности поверхностного и объёмного заряда.

В FDTD расчётах использовался Total Field/Scattered Field (TF/SF) метод для возбуждения поля в волноводе [144]. В рамках метода TF/SF необходимо использовать значения падающего поля в двух различных поперечных сечениях, находящихся на расстоянии $\Delta z / 2$.

Расчёты методом FDTD сравнивались с аналитическим расчётом на основании полученных в рамках ММБ операторов типа свёртки для полей и зарядов.



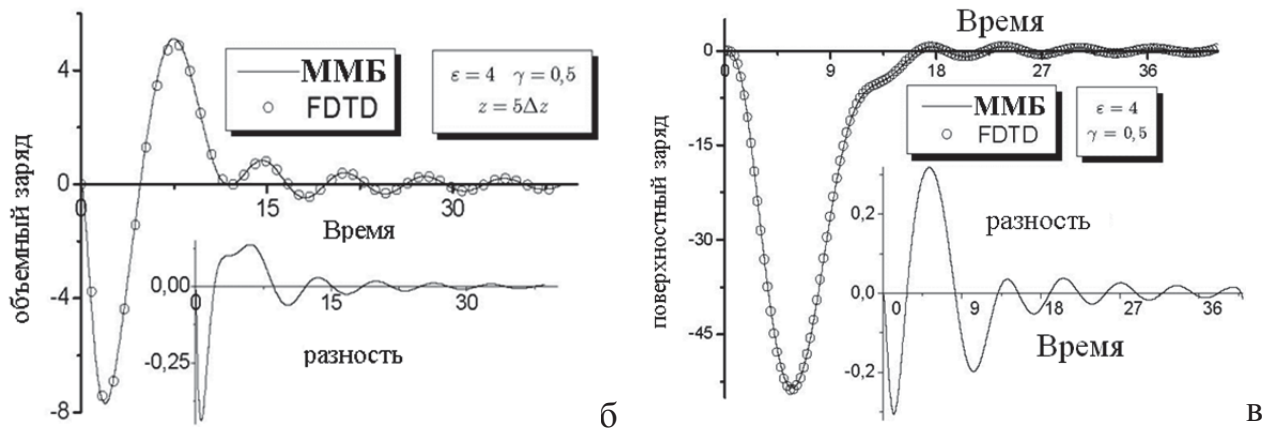


Рис. 5.3. Сравнение результатов FDTD и МБМ для компоненты поля (а), плотностей объёмного (б) и поверхностного (в) зарядов

Результаты такого сравнения приведены на рис. 5.3 для компонент полей после распространения на расстояние $5\Delta z$ от точки возбуждения (а), а также для поверхностного и объёмного зарядов (б и в). Хорошее совпадение расчётных кривых подтверждает правильность полученных аналитических выражений для операторов-свёрток. Дальнейшие результаты были получены уже с использованием точных формул в виде свёрток с аналитически определёнными операторами.

Анализ результатов.

В дальнейшем анализе используются два вида возбуждения. В первом импульсе продольная компонента поля изменяется со временем, как импульс Лягерра:

$$f(t) = t^2(1 - t/3)e^{-t}. \quad (5.88)$$

Это биполярный импульс, у которого нет составляющих на нулевой частоте. Второй импульс рассчитывается как интеграл от первого:

$$f(t) = -t^3e^{-t}. \quad (5.89)$$

Здесь продольная компонента электрического поля имеет спектр вплоть до нулевой частоты, то есть имеет некоторую статическую компоненту. При этом поперечные компоненты поля ($I \sim H_y$, $V \sim E_x$) вычисляемые как производные от продольной не имеют составляющих на нулевой частоте. Такими задаются

начально-граничные условия для полей падающей волны на границе $z = 0$ (см. рис. 5.4).

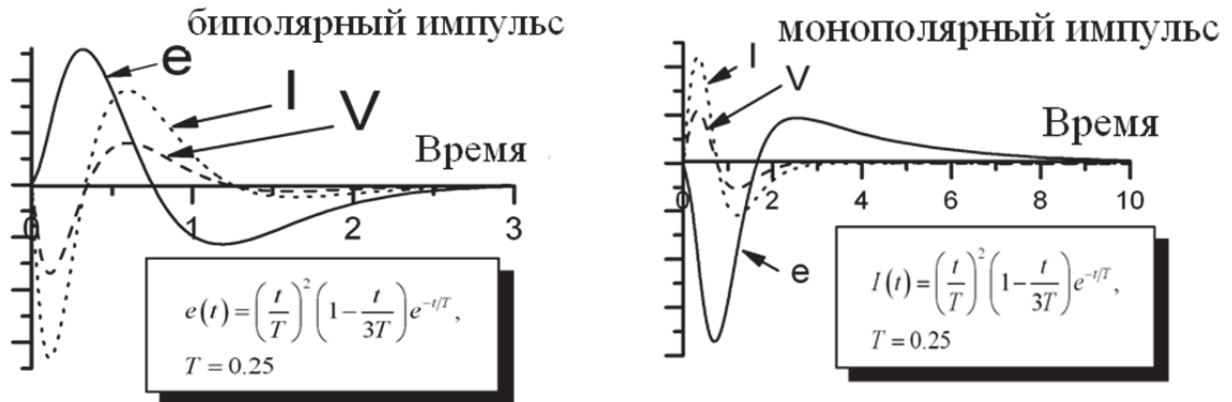


Рис. 5.4. Возбуждающие сигналы.

Дифрагированные сигналы получаются похожими на падающие (так как сингулярная часть операторов дифракции обеспечивает значительный моментальный отклик). Искажение больше проявляется для второго сигнала из-за того, что большая часть его спектральной плотности лежит в области низких частот.

На рис. 5.5 ниже приведены зависимости поверхностного заряда от времени для двух типов импульсов возбуждения и двух параметров затухания в среде. Обратная величина к параметру γ , введенному в (5.59), определяет время релаксации для проводящей среды.

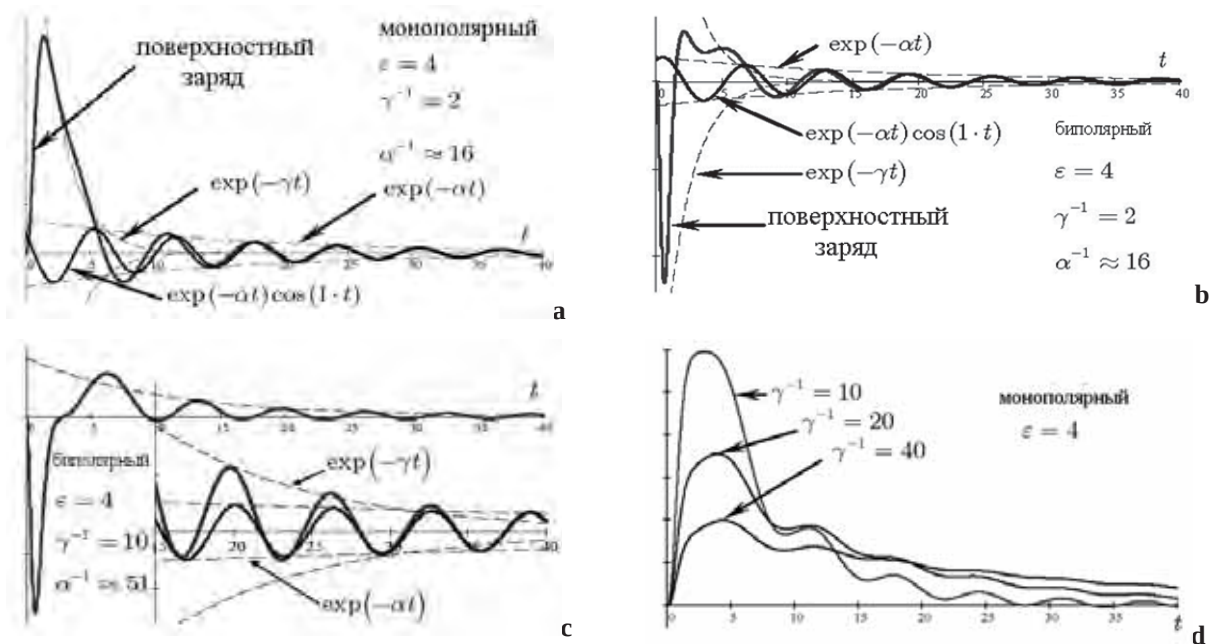


Рис. 5.5. Зависимость поверхностного заряда от времени.

Как это видно из рисунков, в ранние моменты времени, после прохождения импульса, поверхностный заряд, созданный импульсом, затухает экспоненциально с параметром затухания равным γ . Этот процесс обусловлен тем, что заряды перемещены импульсом в среду, эти заряды возвращаются обратно на поверхность под действием потенциального (невихревого) электрического поля созданного за счет разделения зарядов.

Существует и другой периодический процесс, затухающий медленнее, поэтому заметный в более поздние моменты времени. Этот процесс обусловлен наличием резонанса поверхностной волны. Хорошо известно, что на поверхности любой проводящей среды может существовать поверхностная волна, затухающая с удалением от поверхности [372,371]. Она удовлетворяет следующему дисперсионному соотношению:

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon^*(\omega)}{1 + \varepsilon^*(\omega)}} \frac{\omega}{c_0}. \quad (5.90)$$

Стенки волновода определяют границы резонатора, и поверхностная волна переотражается между этими стенками. Время затухания определяется из мнимой части собственной частоты, полученной из граничной задачи для поперечного резонатора, ограниченного стенками волновода, с дисперсионными свойствами (5.90). Таким образом, получен параметр затухания $\alpha = 1/16$, это показано на рис. 5.5.

Падающий короткий импульс имеет очень широкий спектр. Он содержит в том числе и энергию на частотах, близких к критическим для рассматриваемой моды. Эти спектральные компоненты распространяются под углами, близкими к $\pi/2$ (согласно концепции Бриллюэна) и поэтому эффективно возбуждают поверхностную волну.

На рис. 5.6 сравниваются пространственные распределения продольной компоненты электрического поля для среды с потерями и среды без потерь.

Показано “статическое” (потенциальное) электрическое поле, созданное благодаря разделению зарядов. Оно вычисляется по формуле

$$\partial_z E_{zst} = \rho, \quad \Rightarrow \quad E_{zst}(z, t) = - \int_{z_{front}}^z \rho(z, t) dz.$$

Наличие данного поля обусловлено тем, что заряды перемещенные импульсом поля возвращаются обратно к поверхности и система возвращается к нейтральному незаряженному состоянию.

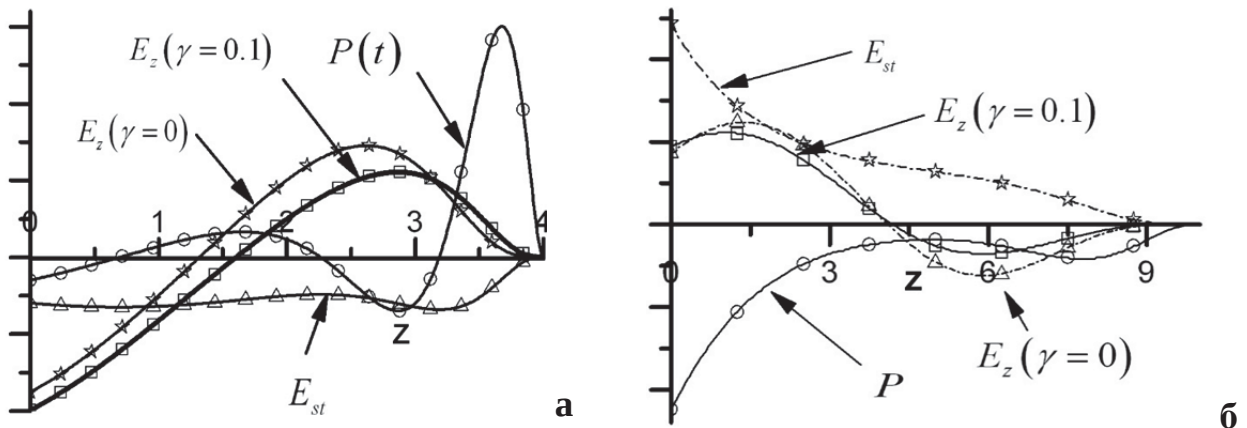


Рис. 5.6. “Статическая” потенциальная продольная компонента электрического поля для биполярного (а) и монополярного (б) импульсов

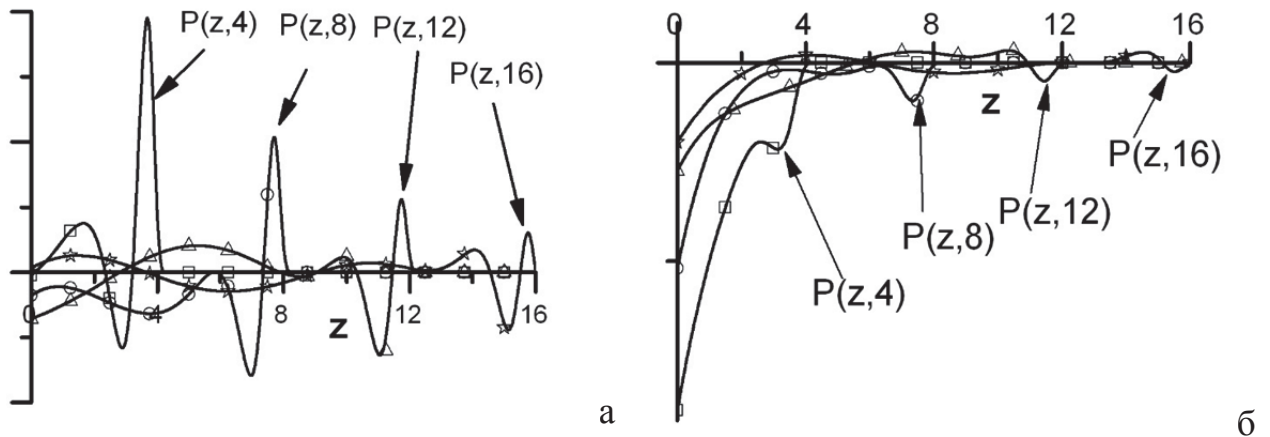


Рис. 5.7. Распределение объемного заряда в среде с $\varepsilon = 4, \gamma = 0.1$ (а- биполярный импульс, б-монополярный импульс).

Из рис. 5.7 а видно, что импульс не перемещает заряды вперед. Это импульсное поле затухает по мере продвижения вглубь среды и оставляет за собой небольшие осцилляции зарядов. После того, как импульс полностью затухнет, за-

ряды перемещаются обратно на поверхность. Из рис. 5.7 б для монополярного импульса можно сделать вывод, что монополярный характер волны заряда наблюдается только на небольших расстояниях от поверхности, так как составляющие сигнала на низких частотах быстрее затухают, и импульс становится биполярным после распространения на некоторое расстояние от поверхности.

5.2.3. Излучение нестационарного диполя из центра диэлектрического шара

Нестационарное излучение диполя соответствует возбуждению сферической дипольной волны (сферической гармоники) в конической линии, причём из запредельной области. Уравнение Клейна-Гордона-Фока, описывающее распространение сигнала в коническом волноводе, содержит частоту отсечки, которая зависит от радиуса (убывает пропорционально радиусу). Используя среды с высоким показателем преломления, частоту отсечки для излучаемой моды можно существенно снизить. Это может привести к «туннелированию» энергии из запредельной области и следовательно, к увеличению эффективности излучения. Конечно, этот эффект может быть легко рассмотрен в частотной области, но существенный интерес представляет анализ его именно во временной области. Эта задача очень подобна рассмотренным ранее операторам дифракции на границе диэлектриков в закрытом цилиндрическом волноводе. Особенностью, однако, является наличие центра координат с одной из сторон, который отражает падающую на него волну, т.е. сходящаяся сферическая волна «отражаясь» от центра превращается в расходящуюся. Это накладывает свой отпечаток на структуру оператора дифракции и требует отдельного анализа полного оператора (включая резонансное переотражение от границы и центра), и оператора «единичного» взаимодействия с границей.

Рассмотрение этой задачи во временной области также важно с точки зрения изучения фундаментальных вопросов эффективного импульсного излучения малых антенн. Хотя вопрос малых антенн изучается довольно давно в частотной области [327, 328] и в общем-то признаётся, что малая антенна может быть согласована для эффективного излучения на одной частоте, но для широкополосного/импульсного излучения малые антенны изучены гораздо меньше [329], и именно использование диэлектрической нагрузки рассматривается как наиболее важный способ миниатюризации антенн. В частотной области эта концепция получила развитие в так называемых антеннах на диэлектрическом резонаторе (DRA) [330].

Материалы этого подраздела изложены в работе [77].

Постановка задачи. Рассмотрим излучение электрического диполя, помещенного в центр диэлектрического шара (рис. 5.8).

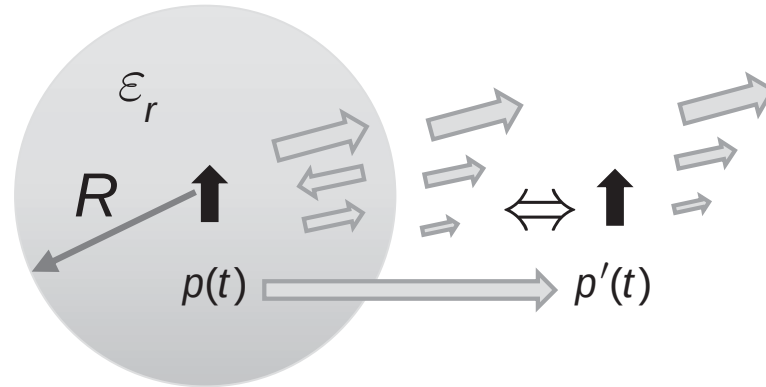


Рис. 5.8. Геометрия задачи.

Мы рассматриваем точечный электрический диполь с заданной временной зависимостью дипольного момента в виде $\vec{p}(t) = \vec{z}_0 p(t)$. Диполь помещён в центр диэлектрической сферы с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r и радиусом R (см. рис. 5.8). Диполь создаёт расходящуюся сферическую волну, которая падает на границу сферы, частично проходит и формирует излучённую расходящуюся волну вне сферы. Она также частично отражается назад от поверхности и формирует сходящуюся сферическую волну, которая распространяется к центру, где она отражается назад, превращаясь в расходящуюся волну. Этот процесс повторяется в виде стоячей волны, которая постепенно теряет энергию на излучение. По ходу распространения в сфере волна также испытывает искажения из-за дисперсии конического волновода. Нам интересно описать этот процесс. Более строго, мы хотим сравнить результирующую излучённую волну (поле во внешней области $r > R$) с волной, которую бы создал некий виртуальный диполь в свободном пространстве (при отсутствии диэлектрического шара). Таким образом мы выразим временную зависимость этого виртуального диполя в свободном пространстве в виде оператора типа свёртки, применённого к временной зависимости реального диполя в диэлектрическом шаре. Этот оператор и будет полностью описывать эффект от наличия диэлектрического шара на импульсное излучение диполя.

В одном из предыдущих разделов (см. стр. 129) мы уже рассмотрели оператор распространения для волны, создаваемой электрическим диполем. Теперь давайте рассмотрим основную задачу. Во-первых, мы выпишем в частотной области выражения для полей внутри и снаружи сферы. Внутренние поля состоят из первичной расходящейся волны, созданной диполем и стоячей волны, которая удовлетворяет граничным условиям в центре. Итак, поле диполя выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{\varphi}^{dip} &= A \left(-\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right) e^{-ikr} \sin \theta \\ E_{\theta}^{dip} &= AZ \left(-\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-ikr} \sin \theta, \\ E_r^{dip} &= AZ \left(\frac{i}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-ikr} 2 \cos \theta \end{aligned} \quad (5.91)$$

где амплитуда волны A связана с комплексной амплитудой (спектральной плотностью) диполя как $A = p_{\omega} \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega^3 / 4\pi$. Мы также ввели следующие обозначения для волнового числа и импеданса диэлектрика: $k = \sqrt{\varepsilon_r} \omega / c_0$, $Z = (\sqrt{\varepsilon_r})^{-1} Z_0 = (\sqrt{\varepsilon_r})^{-1} / \varepsilon_0 c_0$.

Поля, относящиеся к стоячей волне (резонансные) выражаются в терминах сферических функций Бесселя, которые могут быть явно выражены через экспоненты для того, чтобы явно выразить их в виде суперпозиции сходящейся и расходящейся сферических волн:

$$\begin{aligned} H_{\varphi}^{res} &= \bar{B} \left(\frac{\sin kr}{k^2 r^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right) \sin \theta = \\ &= B \left[\left(-\frac{1}{kr} - \frac{i}{k^2 r^2} \right) e^{ikr} + \left(-\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right) e^{-ikr} \right] \sin \theta \\ E_{\theta}^{res} &= i \bar{B} Z \left(\frac{\sin kr}{kr} + \frac{\cos kr}{k^2 r^2} - \frac{\sin kr}{k^3 r^3} \right) \sin \theta = \\ &= B Z \left[\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} - \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{ikr} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-ikr} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned}
E_r^{res} &= i\bar{B}Z \left(\frac{\cos kr}{k^2 r^2} - \frac{\sin kr}{k^3 r^3} \right) 2 \cos \theta = \\
&= BZ \left[\left(\frac{i}{k^2 r^2} - \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{ikr} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-ikr} \right] 2 \cos \theta
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Вне сферы расходящаяся сферическая волна может быть представлена подобно полю диполя внутри:

$$\begin{aligned}
H_\varphi^{rad} &= C \left(-\frac{1}{k_0 r} + \frac{i}{k_0^2 r^2} \right) e^{-ik_0 r} \sin \theta \\
E_\theta^{rad} &= CZ_0 \left(-\frac{1}{k_0 r} + \frac{i}{k_0^2 r^2} + \frac{1}{k_0^3 r^3} \right) e^{-ik_0 r} \sin \theta \\
E_r^{rad} &= CZ_0 \left(\frac{i}{k_0^2 r^2} + \frac{1}{k_0^3 r^3} \right) e^{-ik_0 r} 2 \cos \theta
\end{aligned} \tag{5.94}$$

где амплитуда излучённой волны C связана с комплексной амплитудой виртуального диполя в свободном пространстве p'_ω как $C = p'_\omega \mu_0 \varepsilon_0 \omega^3 / 4\pi$. Следующие граничные условия должны выполняться на границе диэлектрика:

$$\begin{aligned}
H_\varphi^{dip} + H_\varphi^{res} &= H_\varphi^{rad} \\
E_\theta^{dip} + E_\theta^{res} &= E_\theta^{rad} \\
\varepsilon_r (E_r^{dip} + E_r^{res}) &= E_r^{rad}
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Последнее из этих условий линейно зависимо с первым и является избыточным. Подставляя выражения для полей, получаем:

$$\begin{aligned}
AP_H^+ z_k^{-1} + B[P_H^- z_k + P_H^+ z_k^{-1}] &= CP_{H_0}^+ z_{k_0}^{-1} \\
AP_E^+ z_k^{-1} + B[P_E^- z_k + P_E^+ z_k^{-1}] &= C\sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ z_{k_0}^{-1},
\end{aligned} \tag{5.96}$$

где для простоты мы ввели обозначения для множителя запаздывания $e^{-ikr} = z_k^{-1}$; $e^{-ik_0 r} = z_{k_0}^{-1}$ и для множителя распространения для соответствующих компонент: $P_E^\pm = \mp(kr)^{-1} + i(kr)^{-2} \pm (kr)^{-3}$, $P_{H_0}^\pm = -(k_0 r)^{-1} \pm i(k_0 r)^{-2}$. Исключо-

чая B из этих уравнений мы получим следующее соотношение:

$$C = -\frac{2}{k^2 r^2} \frac{z_{k_0}}{(P_{H_0}^+ P_E^- - \sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ P_H^-) z_k + (P_{H_0}^+ P_E^+ - \sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ P_H^+) z_k^{-1}} A$$

Подставляя сюда выражения для амплитуд волн через амплитуды соответствующих диполей и преобразуя знаменатель в сумму геометрической прогрессии, мы получаем:

$$\rho'_0 = \frac{2\varepsilon_r}{k^2 r^2} \frac{z_k^{-1} z_{k_0}}{\sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ P_H^- - P_{H_0}^+ P_E^-} \left(1 + \frac{P_{H_0}^+ P_E^+ - \sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ P_H^+}{\sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ P_H^- - P_{H_0}^+ P_E^-} z_k^{-2} + \left(\frac{P_{H_0}^+ P_E^+ - \sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ P_H^+}{\sqrt{\varepsilon_r} P_{E_0}^+ P_H^- - P_{H_0}^+ P_E^-} \right)^2 z_k^{-4} + \dots \right) \rho_0 \quad (5.97)$$

Это и есть искомая формула, записанная в частотной области. Все члены здесь могут быть представлены в форме дробно-рациональных функций от jk и, как следствие, легко обращены аналитически во временную область подобно тому, как мы это продемонстрировали при выводе оператора распространения (см. стр. 129). К сожалению, результирующие формулы получаются довольно громоздкими. Пока что, мы можем коротко проанализировать полученную формулу, представив её в виде :

$$\rho'_0 = z_k^{-1} P^+ T_\varepsilon (z_{k_0}^{-1} P_0^+)^{-1} \times \left(1 + R_\varepsilon P^- R_c P^+ z_k^{-2} + (R_\varepsilon P^- R_c P^+)^2 z_k^{-4} + \dots \right) \rho_0, \quad (5.98)$$

где множитель $z_k^{-1} P^+$ соответствует распространению от диполя до границы, T_ε означает оператор прохождения через границу, $(z_{k_0}^{-1} P_0^+)^{-1}$ компенсирует распространение от виртуального диполя до границы, $R_\varepsilon P^- R_c P^+ z_k^{-2}$ соответствует отражению от границы R_ε , распространению к центру P^- , отражению от центра R_c , распространению к границе P^+ , z_k^{-2} описывает запаздывание, обусловленное распространением к центру и назад к границе.

Аналогично можно было бы получить и операторы дифракции для магнитного диполя и рассмотреть вопрос о согласовании временных форм ортогональных электрического и магнитного диполей таким образом, чтобы после

взаимодействия с границей они оказались в нужном соотношении в излучённом поле, образуя элемент Гюйгенса. Кроме того, из анализа формулы (5.98) видно, что временную форму диполя можно задать так, чтобы второй импульс деструктивно интерферировал с расходящейся волной, получающейся после отражения первого импульса от границы и центра. В результате можно добиться излучения уединённого импульса без возникновения резонанса в диэлектрике.

5.3. Метод согласования мод во временной области

Основные материалы этого раздела изложены в работах автора [17,18,51,56,61].

В электродинамике достаточно часто встречаются задачи, которые могут быть классифицированы, как дифракция на стыке нескольких регулярных линий передачи. Среди подобных задач можно отметить дифракцию на ступенчатых неоднородностях в волноводе, диафрагмы в волноводе, соединение двух и более волноводов на некоторой общей апертуре (см. рис. 5.9). Даже излучение некоторых антенн: биконическая, антенна-бабочка, ТЕМ-рупор и некоторых других тоже можно описать как дифракцию на стыке двух регулярных конических линий, одной из которых является свободное пространство.

Обычно в частотной области такие задачи решаются методом согласования мод (метод переразложений), который заключается в применении метода моментов к условиям непрерывности полей, записанным в терминах модовых разложений в регулярных участках структуры. Обзоры по методу согласования мод в частотной области могут быть найдены, например, в книгах [373,374,375] и статье [376]. Кроме того стоит отметить новые работы И. Петрусенко и Ю. Сиренко по анализу свойств и обоснованию метода сшивания [89, 90, 91].

Короткие импульсы занимают широкую спектральную полосу, поэтому методы частотной области для анализа дифракции импульсов в этом случае требуют выполнения вычислений на большом количестве частотных точек и не удобны для физического анализа временных форм сигналов. Такие задачи целесообразнее решать непосредственно во временной области.

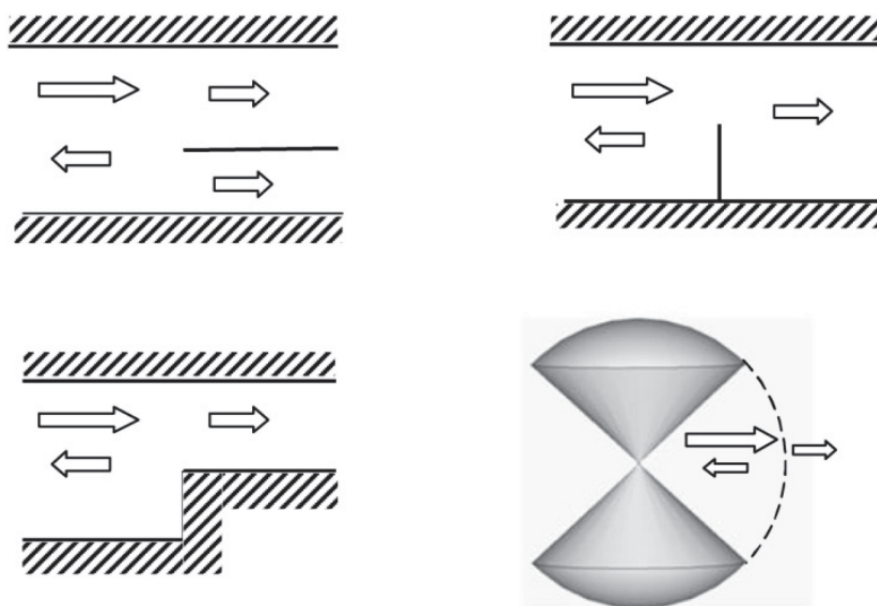


Рис. 5.9. Геометрии задач, которые могут решаться методом согласования мод

Существует несколько численных подходов во временной области, подходящих для решения подобных задач. Наиболее популярными среди них являются метод интегральных уравнений [145] и метод конечных разностей (FDTD) [144]. В этих методах дискретизируются поверхностные токи или пространственное распределение поля. При этом возникают численные проблемы, усложняющие получение достаточно точных результатов, и не дающие возможности физического анализа процессов. Главные проблемы с точностью возникают в связи с аппроксимацией полей на ребрах, где сингулярность поля требует сгущения сетки, что в свою очередь требует уменьшения шага по времени в условно-стабильных численных схемах.

Здесь мы предлагаем новый метод для решения задач дифракции импульсных сигналов. Этот метод базируется на применении модового разложения полей и метода согласования мод [373] непосредственно во ВО.

В рамках метода модового базиса нестационарные поля в регулярной линии представляются в виде модового разложения. Для анализа распространения импульсов в регулярных участках используется явная FDTD схема для эволюционных волноводных уравнений, которая дополняется некоторыми уравнени-

ями связи, позволяющими обновлять значения модовых амплитуд на стыке регулярных участков волноводов так, чтобы удовлетворять условиям непрерывности полей на общей апертуре и граничным условиям на фланцах/диафрагмах.

Предложенный метод уменьшает ошибки и объем требуемых вычислений по сравнению с обычным FDTD. Это связано с тем, что пространственная дискретизация полей требуется только в сечении стыка, а во всем остальном пространстве совокупность одномерных FDTD уравнений заменяет трехмерную пространственную сетку обычного FDTD. Более того, пространственная дискретизация в сечении стыка делается неявно, так что в результате получается некоторая матрица, связывающая все модовые каналы в этой точке.

5.3.1. Общая схема метода

В этом пункте будут вкратце описаны основные идеи метода, показано как данный метод согласуется с методом переразложений в частотной области и обычным FDTD методом.

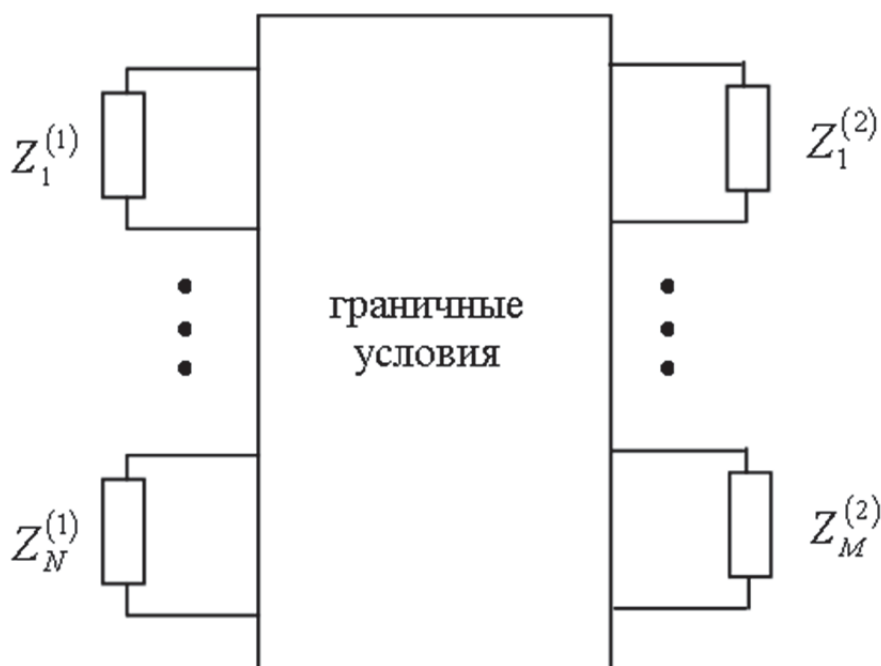


Рис. 5.10. Стык волноводов представляется в виде многополюсника, нагруженного на импедансы модовых каналов

В частотной области для решения задач дифракции волн на скачкообразных неоднородностях в волноводе чаще всего используется метод согласования

мод (метод переразложений, метод сшивания полей) [373]. В рамках этого метода структура рассматривается, как многополюсник, нагруженный на характеристические импедансы, соответствующие отдельным модовым каналам (рис. 5.10). Поля в поперечном сечении неоднородности представляются в виде модового разложения и тогда к сумме мод применяются граничные условия в пространственной области. Полученные в результате функциональные уравнения проектируются на некоторые тестовые функции. В качестве тестовых функций могут быть выбраны: функции разложения (метод Галеркина), некоторые кусочно-непрерывные интерполирующие функции (метод конечных элементов) либо дельта функции (метод коллокаций). После применения подобного проектирования получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных амплитуд мод рассеянного поля.

Метод FDTD также может быть использован для решения задач волноводной дифракции [144]. Структура при этом также рассматривается, как многополюсник. Некоторая пространственная область вблизи рассеивателя дискретизируется с помощью регулярной сетки и поля на этой сетке обновляются во времени шаг за шагом. Падающая волна вводится в область вычисления с помощью модового источника с помощью TF/SF метода [144]. Порты волновода ограничиваются некоторыми поглощающими условиями (обычно используется PML [144]), которые имитируют полу-бесконечный регулярный волновод. В некотором поперечном сечении в области рассеянного поля возле поглощающих условий пространственное распределение поля проектируется на модовые функции для получения временных форм амплитуд мод отраженного и прошедшего поля. Записанные временные формы могут быть в дальнейшем с помощью преобразования Фурье преобразованы в частотную область и поделены на спектр падающего сигнала для получения спектра элементов матрицы рассеяния.

Вместо применения поглощающих условий в пространственной области в статье [377] предложено использовать модовые согласующие условия для возбуждения падающего поля и для разделения рассеянного поля в отдельные мо-

довые каналы, которые моделируются одномерными конечно-разностными уравнениями. В предлагаемом методе используется похожий подход: также используется FDTD моделирование одномерных модовых каналов, но граница перехода между обычным FDTD и совокупностью одномерных модовых каналов сдвигается непосредственно к неоднородности. При этом пространственная область, где поля должны дискретизироваться на некоторой сетке, смещается непосредственно к сечению стыка различных регулярных волноводов. Тем не менее такой подход требует дискретизации некоторого объема в окрестности неоднородности и следовательно страдает от всех недостатков, присущих полноволновым сеточным методам.

Таким образом, одномерная конечно-разностная схема используется для моделирования модовых каналов в регулярных частях волновода. Концы модовых каналов «закрываются» эффективными модовыми поглощающими условиями [44]. В общем поперечном сечении для получения пространственного распределения поля должны быть просуммированы модовые функции, помноженные на соответствующие модовые амплитуды. Это распределение поля должно удовлетворять условию на идеальном металле на фланце, условию на ребре и условиям непрерывности полей на общей апертуре (или нескольких апертурах). Введение граничных условий позволяет получить некоторые уравнения, которые должны выполняться во всех точках на фланце и на апертуре в каждый момент времени. Эти уравнения проецируются на тестовые функции, и получается СЛАУ (система линейных алгебраических уравнений), которая соотносит модовые амплитуды во всех модовых каналах слева и справа от неоднородности. Эта СЛАУ, дополненная конечно-разностными уравнениями в каждом модовом канале, позволяет получить явную формулу для обновления модовых амплитуд на неоднородности. Коэффициенты в СЛАУ, описывающие связь различных мод, не зависят от времени и могут быть вычислены только один раз перед обновлением времени.

Далее будет детально рассмотрена процедура переразложения полей на стыке двух волноводов различного поперечного сечения.

Процедура переразложения полей в численной схеме.

Моды распространяются независимо, а, следовательно, и рассчитываются независимо как одномерные волновые каналы во всей рассматриваемой области, исключение составляет только точка стыка волноводов. В этой точке должны использоваться граничные условия на апертуре и на фланце. В результате должно получаться соотношение, связывающее все модовые амплитуды слева и справа.

В дальнейшем будет рассмотрен стык волноводов различного поперечного сечения, подобно скачку в волноводе. При этом рассматриваются два волновода: узкий и широкий, которые соединены общей апертурой, занимающей все поперечное сечение узкого волновода.

Для получения формул обновления для модовых амплитуд используются уравнения для временных производных модовых амплитуд электрического поля, которые выглядят похоже для модового базиса в цилиндрической (4.50) (см. раздел 2 и 4) и сферической (см. раздел 3) системах координат:

$$\begin{aligned}\partial_\tau V &= -\partial_r i, \\ \partial_\tau V &= -\partial_z i.\end{aligned}\tag{5.99}$$

Дальнейшие рассуждения будут справедливы для обоих этих случаев при смене обозначения координаты, вдоль которой происходит распространение волны $r \leftrightarrow z$.

Известно [378], что численные граничные условия могут иметь порядок точности меньше на один, чем порядок точности численной схемы. Поэтому для формул на границе используется левая конечная разность вместо центральной, которая используется в формулах (4.51). Таким образом, получается следующая формула обновления для каждого модового канала:

$$V^{(n)} \Big|_0^{k+1} = V^{(n)} \Big|_0^k - \frac{2\Delta\tau}{\Delta r_{-1/2}^{(n)}} \left(I^{(n)} \Big|_0^{k+1/2} - I^{(n)} \Big|_{-1/2}^{k+1/2} \right).\tag{5.100}$$

Пространственный индекс $|_0$ соответствует позиции стыка волноводов. Поэтому $I^{(n)} \Big|_{-1/2}^{k+1/2}$ обозначает модовую амплитуду магнитного поля в левом мо-

довом канале № n на расстоянии $\Delta r_{-1/2}^{(n)} / 2$ от стыка; $\Delta r_{-1/2}^{(n)}$ - радиальный шаг до неоднородности (он может быть различным в каждом модовом канале и изменяться в конической линии, как описано ранее в разделе 3).

Формула обновления (5.100) может быть записана для всех модовых каналов одновременно, используя матричные обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)}|_N^{k+1} &= \mathbf{v}^{(1)}|_N^k - 2\mathbf{S}^{(1)} \cdot \left(\mathbf{i}^{(1)}|_0^{k+1/2} - \mathbf{i}^{(1)}|_{-1/2}^{k+1/2} \right), \\ \mathbf{S}^{(1)} &= \text{diag} \left(\Delta\tau / \Delta r_{-1/2}^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (5.101)$$

Здесь величины $\mathbf{v}^{(1)}$ и $\mathbf{i}^{(1)}$ — это вектора, соответствующие модовым амплитудам для каналов в волноводе №1 (узкий), $\mathbf{S}^{(1)}$ - диагональная матрица чисел Куранта $S = \Delta\tau / \Delta r$ в различных модовых каналах. Похожим образом на формулу (5.101) с использованием правой конечной разности может быть записана формула обновления для широкого волновода (№2):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)}|_0^{k+1} &= \mathbf{v}^{(2)}|_0^k - 2\mathbf{S}^{(2)} \cdot \left(\mathbf{i}^{(2)}|_{1/2}^{k+1/2} - \mathbf{i}^{(2)}|_0^{k+1/2} \right), \\ \mathbf{S}^{(2)} &= \text{diag} \left(\Delta\tau / \Delta r_{+1/2}^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Граничные условия на стыке волноводов требуют непрерывности тангенциальных компонент поля на общей апертуре и равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на фланце:

$$\begin{aligned} \sum_m \left(\mathbf{v}^{(1)}|_0^k \right)_m \vec{E}_m^{(1)}(\vec{r}_\perp) &= \sum_{m'} \left(\mathbf{v}^{(2)}|_0^k \right)_{m'} \vec{E}_{m'}^{(2)}(\vec{r}_\perp), \quad \vec{r}_\perp \in \text{Апертура}; \\ \sum_m \left(\mathbf{v}^{(1)}|_0^k \right)_m \vec{E}_m^{(1)}(\vec{r}_\perp) &= 0, \quad \vec{r}_\perp \in \text{Фланец}; \\ \sum_m \left(\mathbf{i}^{(1)}|_0^k \right)_m \vec{H}_m^{(1)}(\vec{r}_\perp) &= \sum_{m'} \left(\mathbf{i}^{(2)}|_0^k \right)_{m'} \vec{H}_{m'}^{(2)}(\vec{r}_\perp), \quad \vec{r}_\perp \in \text{Апертура}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Для сведения этой системы к СЛАУ используется метод моментов. В качестве тестовых функций в первом уравнении из (5.103) используются модовые функции широкого волновода №2, и базис для узкого волновода №1 — во втором условии из (5.103). В результате получается матричная формулировка граничных условий

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}^{(1)}|_0^k = \mathbf{v}^{(2)}|_0^k, \\ \mathbf{i}^{(1)}|_0^{k+1/2} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{i}^{(2)}|_0^{k+1/2}. \end{cases} \quad (5.104)$$

Здесь T означает транспонирование, а матрица связи $\mathbf{M}$ определяется как следующий интеграл от модовых функций:

$$M_{mm'} = \int \vec{E}_m^{(1)}(\vec{r}_\perp) \cdot \vec{E}_{m'}^{(2)}(\vec{r}_\perp) dS. \quad (5.105)$$

Используем односторонние конечные разности (5.101)-(5.102) для получения модовых амплитуд магнитного поля на апертуре:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)}|_0^{k+1} &= \mathbf{v}^{(2)}|_0^k - 2\mathbf{S}^{(2)} \cdot \left(\mathbf{i}^{(2)}|_{0.5}^{k+0.5} - \mathbf{i}^{(2)}|_0^{k+0.5} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{i}^{(2)}|_0^{k+0.5} = \mathbf{i}^{(2)}|_{0.5}^{k+0.5} + \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(2)})^{-1} (\mathbf{v}^{(2)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(2)}|_0^k), \\ \mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} &= \mathbf{v}^{(1)}|_0^k - 2\mathbf{S}^{(1)} \cdot \left(\mathbf{i}^{(1)}|_0^{k+0.5} - \mathbf{i}^{(1)}|_{-0.5}^{k+0.5} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{i}^{(1)}|_0^{k+0.5} = \mathbf{i}^{(1)}|_{-0.5}^{k+0.5} - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(1)})^{-1} (\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(1)}|_0^k). \end{aligned} \quad (5.106)$$

Далее подставим эти выражения во второе матричное уравнение в (5.104), означающее условие непрерывности магнитного поля на апертуре:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^{(1)}|_{-0.5}^{k+0.5} - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(1)})^{-1} (\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(1)}|_0^k) &= \\ = \mathbf{M}^T \cdot \left(\mathbf{i}^{(2)}|_{0.5}^{k+0.5} + \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(2)})^{-1} (\mathbf{v}^{(2)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(2)}|_0^k) \right). \end{aligned} \quad (5.107)$$

Первое матричное уравнение из (5.104) используется для того, чтобы исключить величины $\mathbf{v}^{(2)}$ из уравнения (5.107):

$$\mathbf{v}^{(2)}|_0^k = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}^{(1)}|_0^k \Rightarrow (\mathbf{v}^{(2)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(2)}|_0^k) = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(1)}|_0^k). \quad (5.108)$$

После подстановки этого соотношения в (5.107) получается:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^{(1)}|_{-0.5}^{k+0.5} - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(1)})^{-1} (\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(1)}|_0^k) &= \\ = \mathbf{M}^T \cdot \left(\mathbf{i}^{(2)}|_{0.5}^{k+0.5} + \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{(2)})^{-1} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(1)}|_0^k) \right). \end{aligned} \quad (5.109)$$

Это выражение может быть рассмотрено, как линейное уравнение связывающее искомое приращение модовой амплитуды электрического поля

$(\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(1)}|_0^k)$ с известными значениями модовых амплитуд магнитного поля слева и справа от стыка на временном шаге $k + 0.5$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left((\mathbf{S}^{(1)})^{-1} + \mathbf{M}^T \cdot (\mathbf{S}^{(2)})^{-1} \mathbf{M} \right) (\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} - \mathbf{v}^{(1)}|_0^k) = \\ = \mathbf{i}^{(1)}|_{-0.5}^{k+0.5} - \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{i}^{(2)}|_{0.5}^{k+0.5}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Это уравнение решается обращением несингулярной матрицы $\mathbf{F} = (\mathbf{S}^{(1)})^{-1} + \mathbf{M}^T \cdot (\mathbf{S}^{(2)})^{-1} \mathbf{M}$, в результате чего получается формула обновления для $\mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1} = \mathbf{v}^{(1)}|_0^k + 2\mathbf{F}^{-1} \cdot \left(\mathbf{i}^{(1)}|_{-1/2}^{k+1/2} - \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{i}^{(2)}|_{1/2}^{k+1/2} \right), \\ \mathbf{v}^{(2)}|_0^{k+1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}^{(1)}|_0^{k+1}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Теперь, когда общая численная схема построена, можно рассмотреть несколько конкретных примеров, которые легко проверяются традиционными методами.

5.3.2. Дифракция на скачке в плоскопараллельном волноводе

Первая структура, которая будет проанализирована с помощью предложенного метода, – это скачек в плоско-параллельном волноводе. Рассматривается дифракция ТЕМ-волны, возбужденной в широком волноводе ($a = 1$), на стыке с узким волноводом ($b = 0.6$) (см. врезку на рис. 5.11). Задача решается предложенным методом и результаты расчета сравниваются с точным решением, полученным методом переразложений в частотной области [373]. Модовый базис в этом случае выражается через тригонометрические функции [379], и соответствующая матрица переразложения (5.105) может быть легко получена аналитически. В численных расчетах рассматривались ТЕМ-мода в широком и узком волноводах, а также дополнительно 8 Е-мод в широком и 5 Е-мод в узком волноводе в соответствии с правилом Миттры [373], которое требует, чтобы поперечные волновые числа наивысших рассматриваемых мод в согласуемых волноводах приблизительно совпадали.

Возбуждающий импульс имеет Гауссову временную форму (см. рис. 5.11) с параметрами $T = 0.4a/c_0$, $t_0 = 3T$. В FDTD моделировании временной шаг выбирается так, чтобы максимальная среди всех рассматриваемых мод частота отсечки была дискретизирована, как минимум 8 точками на период. В вычислениях использовалось $\Delta t = 0.03$. Пространственные шаги Δz для каждой моды выбирались отдельно на пределе критерия стабильности (4.52). При моделировании сделано 4096 временных шагов. Полученные временные формы падающей, отраженной и прошедшей ТЕМ-волн показаны на рис. 5.11.

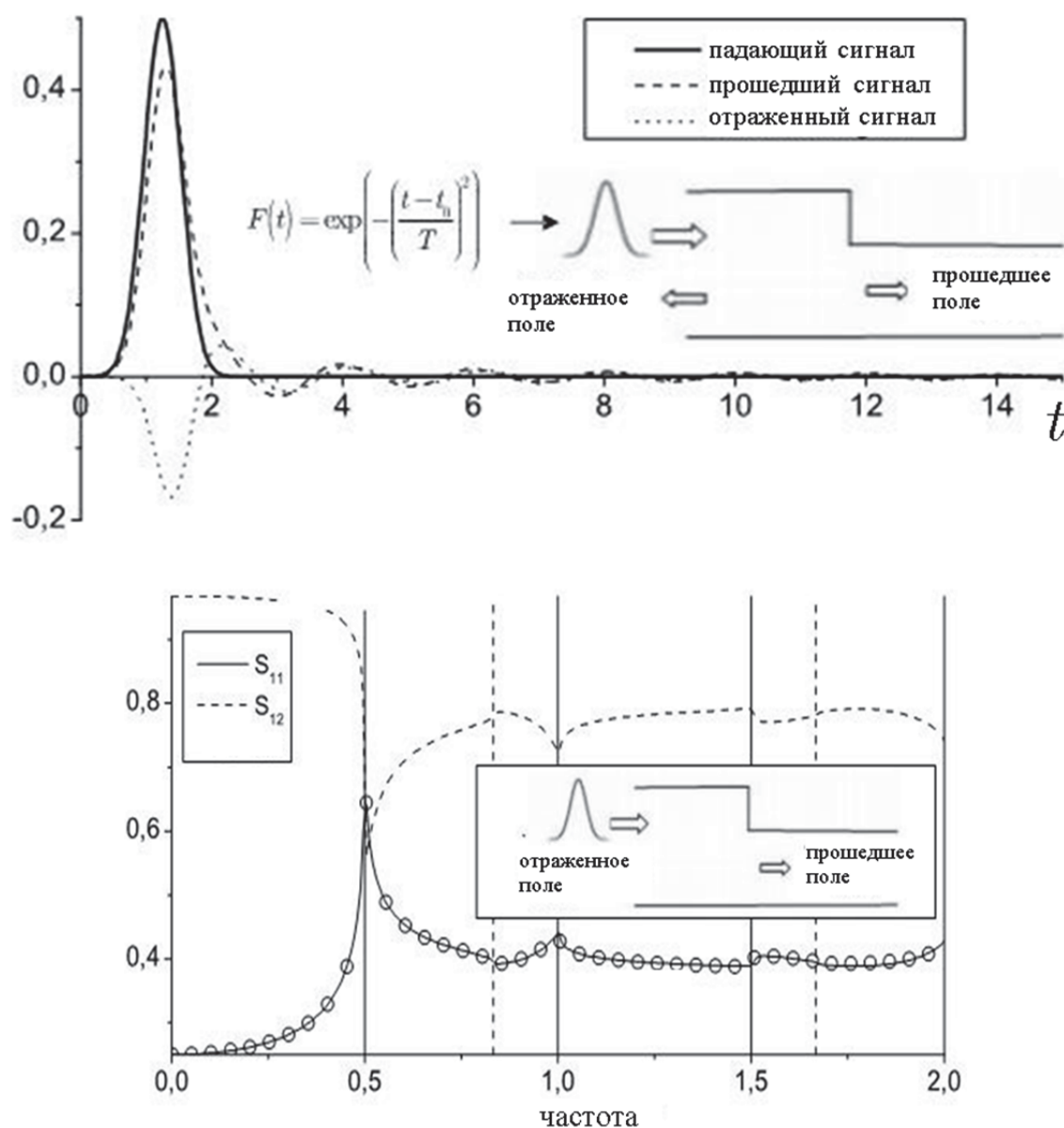


Рис. 5.11. Геометрия задачи. Результаты моделирования во временной и частотной области.

На нижнем рис. 5.11 представлены также рассчитанные спектры коэффициентов отражения и прохождения для ТЕМ-мод. Сплошные (пунктирные) вертикальные линии на рисунке обозначают частоты отсечки для широкого (узкого) волновода. Полученные предложенным методом данные хорошо совпадают с результатами расчетов методом переразложений в частотной области [373]. Разница возрастает с ростом частоты (из-за квадратичного порядка точности используемой FDTD-схемы) и имеет пики на частотах отсечки, обусловленные особенностями спектра в этих точках.

Отметим также, что коэффициент отражения равен единице в запердельной для второго волновода области и имеет скачок на каждой критической частоте для обоих волноводов.

5.3.3. Дифракция на сочленении коаксиального и круглого волноводов

Далее рассмотрим соединение коаксиального и круглого волноводов (геометрия структуры представлена на врезке на рис. 5.12). Внешний радиус равен $b = 0.5$, внутренний радиус – $a = 0.1$.

Модовые функции для коаксиального и круглого волноводов хорошо известны [380], элементы матрицы переразложений могут быть легко вычислены, как интегралы от функций Бесселя. В круглом волноводе учитывались 5 Е-мод. В коаксиальном волноводе рассматривались ТЕМ-мода и 4 Е-моды в соответствии с правилом Миттры [373].

ТЕМ-волна возбуждается в коаксиальном волноводе и падает на стык. Возбуждающий сигнал имеет Гауссову временную форму (см. рис. 5.12) с параметрами $T = 0.2a/c_0$, $t_0 = 5T$. Временной шаг выбирается из таких же соображений, как описано в предыдущем пункте, но при этом учитывалось 15 точек на наименьшей критической длине волны, в результате получилось $\Delta t = 0.013$.

Пространственные шаги Δz выбирались на пределе стабильности для каждой моды. Во время моделирования выполнено 4096 временных шагов. Полученные временные формы изображены на рис. 5.12 а-б.

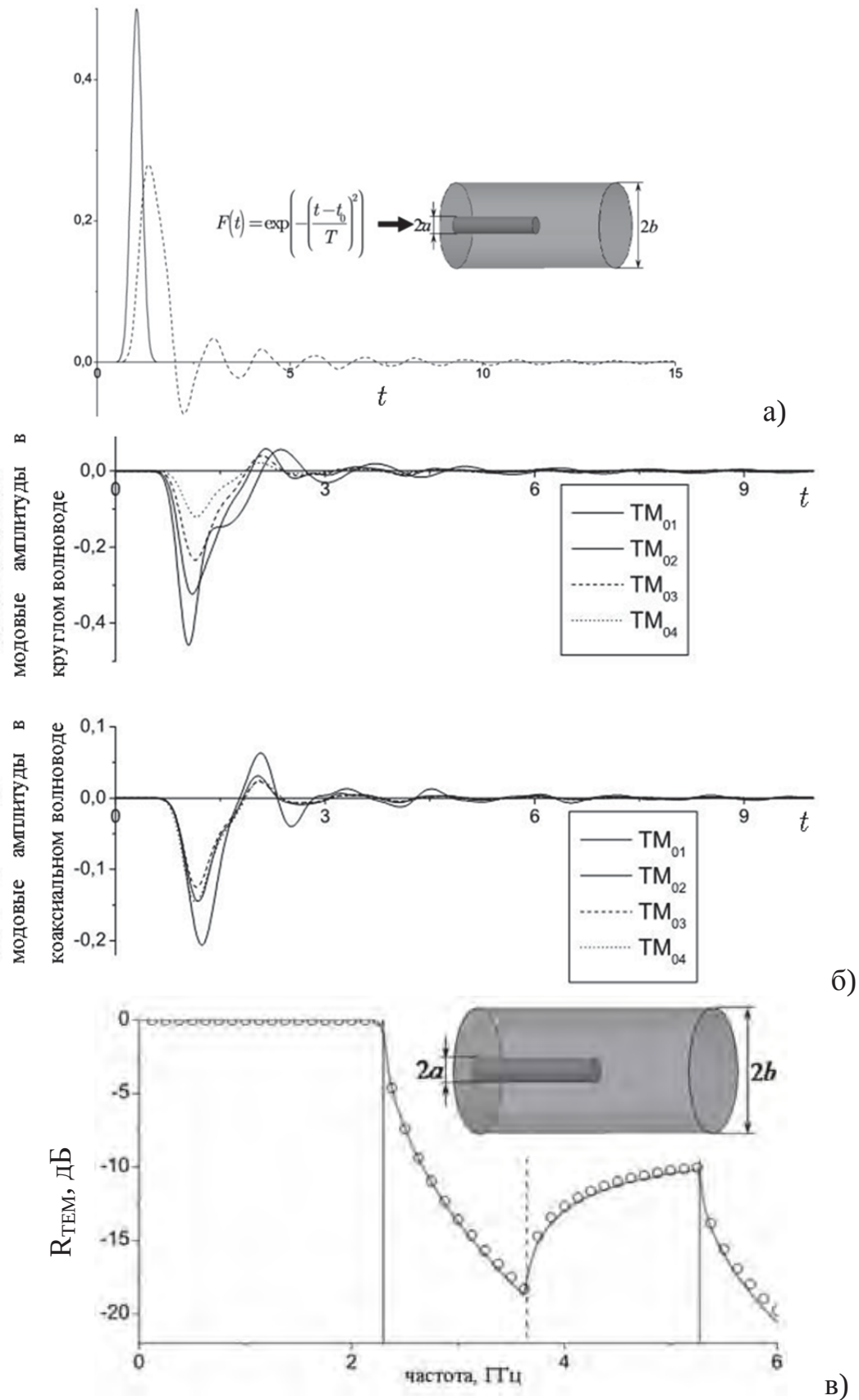


Рис. 5.12. Геометрия задачи. Результаты моделирования во временной и частотной области. а) отражённая ТЕМ волна, б) амплитуды ТМ волн в коаксиале и в круглом волноводе; в) частотная зависимость коэффициента отражения в ТЕМ волну

Там же показано сравнение вычисленного спектра коэффициента отражения для ТЕМ-волны с результатами, полученными с помощью трехмерного FDTD моделирования. Сплошные/пунктирные линии на графике обозначают частоты отсечки круглого/коаксиального волноводов соответственно.

5.3.4. Излучение биконической антенны как дифракция на сочленении конического волновода и свободного пространства.

Теперь используем предложенный метод для решения задачи излучения. Биконическая антенна, изображенная на рис. 5.13, широко используется для излучения сверхширокополосных коротких импульсов.

Это простейшая коническая линия, в которой может распространяться ТЕМ-волна. Данная структура была выбрана для анализа, так как ее модовые функции могут быть получены аналитически.

Антенна возбуждается ТЕМ-волной, которая испытывает дифракцию на открытом конце конической линии (апертура антенны) в Е-моды, при этом Н-моды не возбуждаются, так как из-за симметрии в структуре нет радиальной компонент магнитного поля.

Модовый базис для биконической линии и свободного пространства был получен ранее в подразделе 3.3.

В численных расчетах рассматривалась симметричная биконическая линия с радиусом $R = 10\text{ мм}$ и углом конуса $\theta = 47,98^\circ$. Такая линия имеет волновой импеданс 100 Ом .

Антенна запитывается гауссовым импульсом с параметрами $T = 50\text{ пс}$ и $t_0 = 5T$ (см. рис. 5.13), который распространяется в виде ТЕМ-волны от центра к концу антенны. В свободном пространстве, для того чтобы точно описать все гармоники, возбужденные импульсом на конце антенны, учитывались 20 Е-мод. В биконической линии рассматривались ТЕМ-мода и 9 Е-мод, в соответствии с правилом Миттры [373].

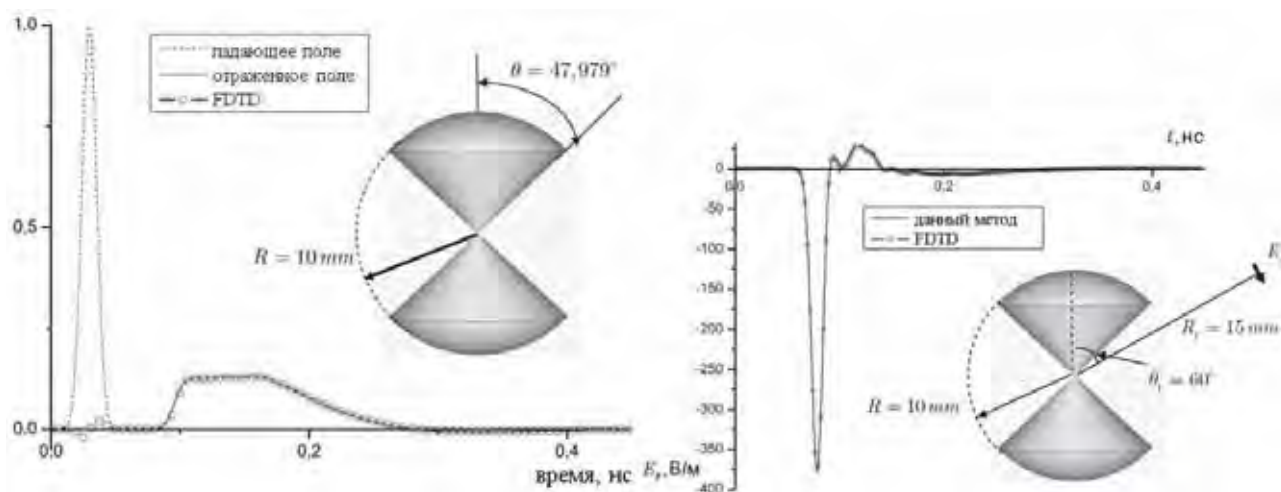


Рис. 5.13. Геометрия задачи. Результаты моделирования во временной области предложенным методом (линии) и полноволновым FDTD (точки).

Слева – временные формы запитывающего антенну сигнала и отражённого от антенны сигнала. Справа – временная форма излучённого сигнала в указанной на врезке точке.

Радиальный шаг в конической линии выбирался неоднородным, это необходимо для учета увеличения частот отсечки при приближении к центру. Временной шаг вычислялся из критерия стабильности для минимального из используемых радиальных шагов. В расчетах выполнено 4096 временных шагов. Вычисленное отражение от конца антенны для ТЕМ-волны изображено на рис. 5.13 во временной области. Результаты расчета сравнивались с результатами, полученными с помощью коммерческой трехмерной FDTD программы. Небольшое отличие в ранние моменты времени вызвано ошибками при моделировании точки запитки в FDTD программе, при этом в поздние моменты времени результаты хорошо совпадают.

Для радиуса $R_1 = 15$ мм из моделирования описанным методом получены временные формы излученных сферических гармоник в свободном пространстве, далее они суммировались с угловыми зависимостями сферических гармоник, в результате получены временные формы поля E_θ для различных углов θ . Результаты представлены на рис. 5.14.

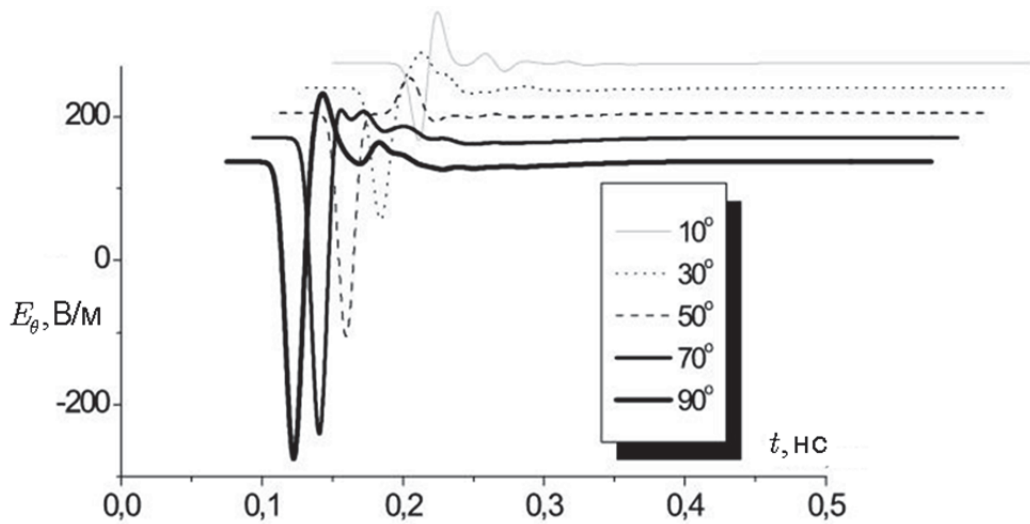


Рис. 5.14. Временные формы E_θ в ближней зоне при $R = 15\text{ mm}$ для различных углов θ

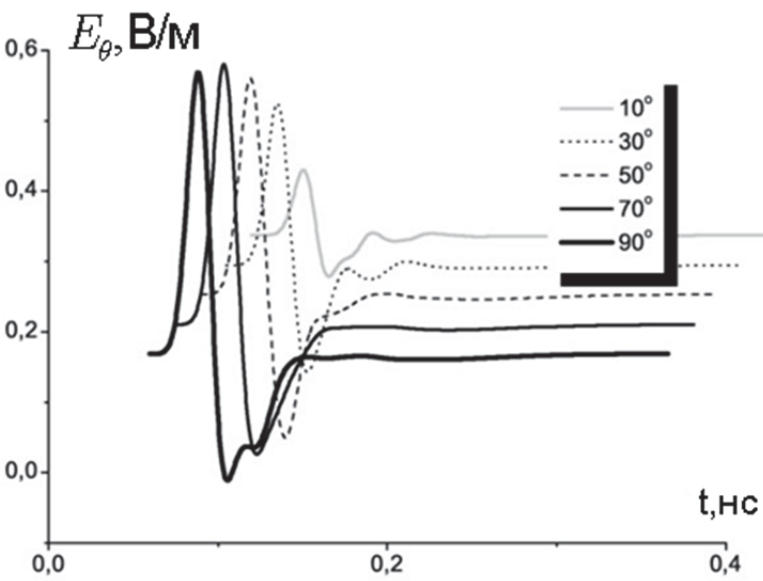
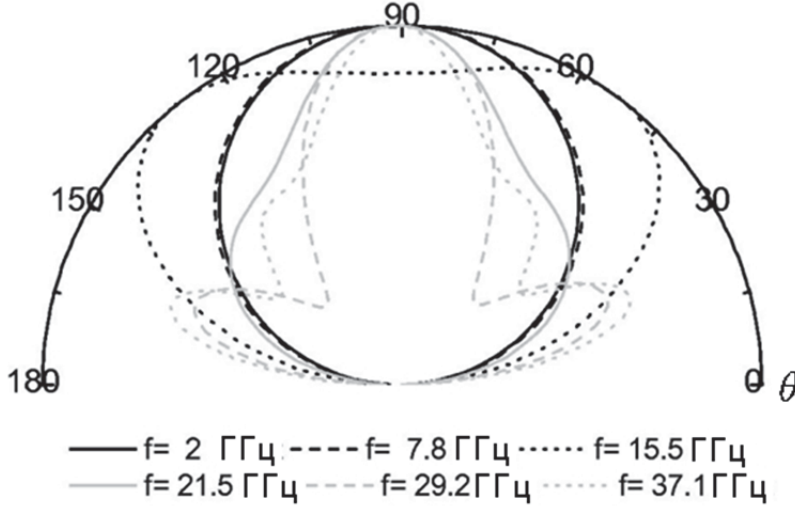


Рис. 5.15. Диаграмма направленности (сверху) и временные формы излученного сигнала в дальней зоне (снизу)

Обычно интересно знать временные формы поля в дальней зоне. Для их расчета необходимо выполнить преобразование из ближней зоны, где рассчитываются поля в рамках FDTD-схемы, в дальнюю зону. Для получения этого преобразования выполним преобразование Фурье уравнения Клейна-Гордона-Фока, описывающего распространение волн в сферической системе (см. раздел 3) и получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - (q_n/r)^2 - \omega^2 \right) E_n(r, \omega) = 0. \quad (5.112)$$

Уравнение (5.112) дополняется начальным условием $E_n(R, \omega) = E_n^0(\omega)$, здесь $E_n^0(\omega)$ – спектр модовой амплитуды, записанный при радиусе R в ближней зоне. Решение этой задачи, описывающее уходящую волну, может быть представлено в виде:

$$E_n(r, \omega) = E_n^0(\omega) \sqrt{\frac{r}{R_0}} \frac{H_{b_n}^{(2)}(\omega r)}{H_{b_n}^{(2)}(\omega R_0)}, \quad (5.113)$$

где $H_\nu^{(2)}(\cdot)$ – функция Ханкеля второго рода, $b_n = \sqrt{1/4 + n(n+1)}$.

Формула (5.113) позволяет получить спектр излученного поля на любом расстоянии от антенны. Используя асимптотику для функции Ханкеля для больших значений аргумента, можно получить следующую формулу для спектра модовой амплитуды в дальней зоне:

$$E_n(\omega, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{R_0 \pi}} \frac{E_n^0(\omega)}{\sqrt{\omega H_{b_n}^{(2)}(\omega R_0)}} e^{\frac{\pi}{2} i (b_n + 1/2) - i \omega r}. \quad (5.114)$$

Необходимо заметить, что функция затухания r^{-1} была факторизована ранее в представлении полей (3.44). Полученная формула может использоваться для преобразования из ближней зоны в дальнюю. Временные формы модовых амплитуд записываются при некотором значении радиуса при обновлении времени в FDTD, далее полученные сигналы с помощью преобразования Фурье переводятся в частотную область. После этого применяется формула (5.114) и полученные спектры преобразовываются обратно во временную область с по-

мощью обратного преобразования Фурье. В результате получаем временные формы модовых амплитуд в дальней зоне. Далее модовые амплитуды, помноженные на модовые функции свободного пространства (3.60), суммируются по формуле (3.44). В результате получаются временные формы полей в дальней зоне для каждого заданного направления. При этом, если необходимо вычислить диаграмму направленности, то обратное преобразование Фурье не выполняется и спектральная плотность модовых амплитуд на заданной частоте суммируется со сферическими гармониками.

Примеры рассчитанных диаграмм направленности на нескольких частотах и временных форм сигналов для некоторых углов изображены на рис. 5.15. Этот рисунок позволяет проследить формирование боковых лепестков в диаграмме направленности с ростом частоты.

5.3.5. Излучение с конца стержневой антенны

Основные материалы этого подраздела изложены в работах автора [18, 56, 61].

Согласование мод на конце диэлектрического стержня. Мы проанализируем излучение импульсного сигнала концом диэлектрической стержневой антенны (рис. 5.16). Полу-бесконечный стержень с диэлектрической проницаемостью ε и радиусом a , расположен вдоль оси z при $z \in (-\infty, L]$. В качестве источника используется кольцо с магнитными токами, расположенное в поперечном сечении $z = 0$.

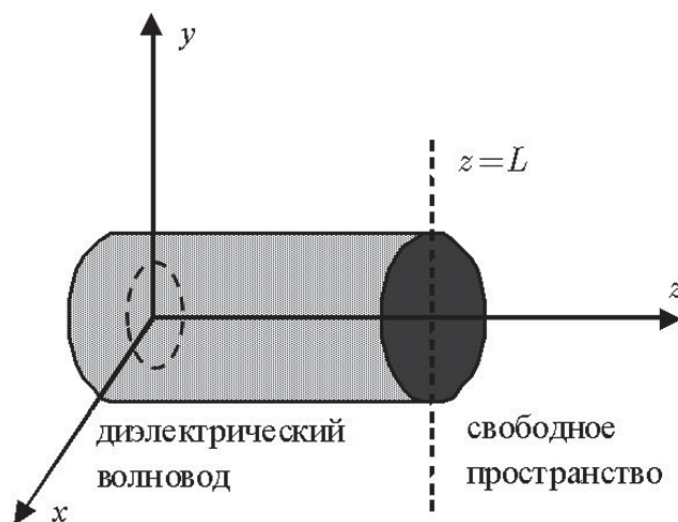


Рис. 5.16. Геометрия задачи. Излучение стержневой антенны.

Для решения данной задачи используется метод согласования мод во временной области, общая схема этого метода описана ранее. При этом моделирование распространения импульсного сигнала в диэлектрическом волноводе осуществляется с помощью подхода, описанного в данной работе выше. При этом система интегро-дифференциальных эволюционных уравнений сводится к системе матричных дифференциальных уравнений, как описано в разделе 4. Значения проекций модовых амплитуд полей в различных поперечных сечениях диэлектрического стержня в различные моменты времени вычисляются с помощью формул обновления (4.56).

Для свободного пространства искомые поля также могут быть разложены в интеграл по модовому базису в виде (4.37), но с другими модовыми функциями. Модовые амплитуды удовлетворяют системе (4.55) с некоторыми упрощениями: функции связи имеют следующий вид

$$L_0^{ee} = L_0^{hh} = K_0^{ee} = K_0^{hh} = \delta(p - p'), L_0^{he} = 0. \quad (5.115)$$

Свободное пространство обозначено индексом 0. Используя разложение модовых амплитуд по ортогональным функциям $\psi_0(p)$, получим систему независимых дифференциальных уравнений, подобную системе (4.55)

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathbf{i}_0^h &= -\partial_z \mathbf{v}_0^h, \mathbf{v}_0^h = -\partial_\tau \mathbf{h}_0^z, \\ \partial_\tau \mathbf{v}_0^h + \partial_z \mathbf{i}_0^h - \mathbf{P}_0^2 \cdot \mathbf{h}_0^z &= 0, \mathbf{i}_0^h = \partial_z \mathbf{h}_0^z, \\ \partial_\tau \mathbf{v}_0^e &= -\partial_z \mathbf{i}_0^e, \mathbf{i}_0^e = -\partial_\tau \mathbf{e}_0^z, \\ \partial_\tau \mathbf{i}_0^e + \partial_z \mathbf{v}_0^e - \mathbf{Q}_0^2 \cdot \mathbf{e}_0^z &= 0, \mathbf{v}_0^e = \partial_z \mathbf{e}_0^z. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Система (5.116) эквивалентна системе (4.55), если использовать матрицы связи вида $\mathbf{L}_0^{ee} = \mathbf{L}_0^{hh} = \mathbf{K}_0^{ee} = \mathbf{K}_0^{hh} = I$, $\mathbf{L}_0^{he} = 0$ (I – единичная матрица). Численное решение системы (5.116) аналогично решению системы (4.55) с учетом приведенных значений матриц связи.

Далее необходимо «соединить» расчетные схемы для двух регулярных областей (свободное пространство и диэлектрический волновод). Обозначим конец диэлектрического стержня пространственным индексом $i = 0$. Для диэлектрического волновода (свободного пространства) пространственные индек-

сы при этом принимают отрицательные (положительные) значения (см. рис. 5.17). Для получения связи между модовыми амплитудами полей в этих двух областях используем граничные условия в общей плоскости, соединяющей диэлектрический волновод и свободное пространство (плоскость $z = L$ на рис. 5.16 и пунктирная линия на рис. 5.17). Таким образом, должны удовлетворяться следующие соотношения: непрерывность поперечных компонент электрического $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})$ и магнитного $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r})$ полей, непрерывность продольной компоненты вектора электрической индукции $D_z(\vec{r}) = D_{z0}(\vec{r})$ (что эквивалентно $\varepsilon(\vec{r})E_z(\vec{r}) = E_{z0}(\vec{r})$), и непрерывность продольной компоненты магнитного поля $H_z(\vec{r}) = H_{z0}(\vec{r})$.

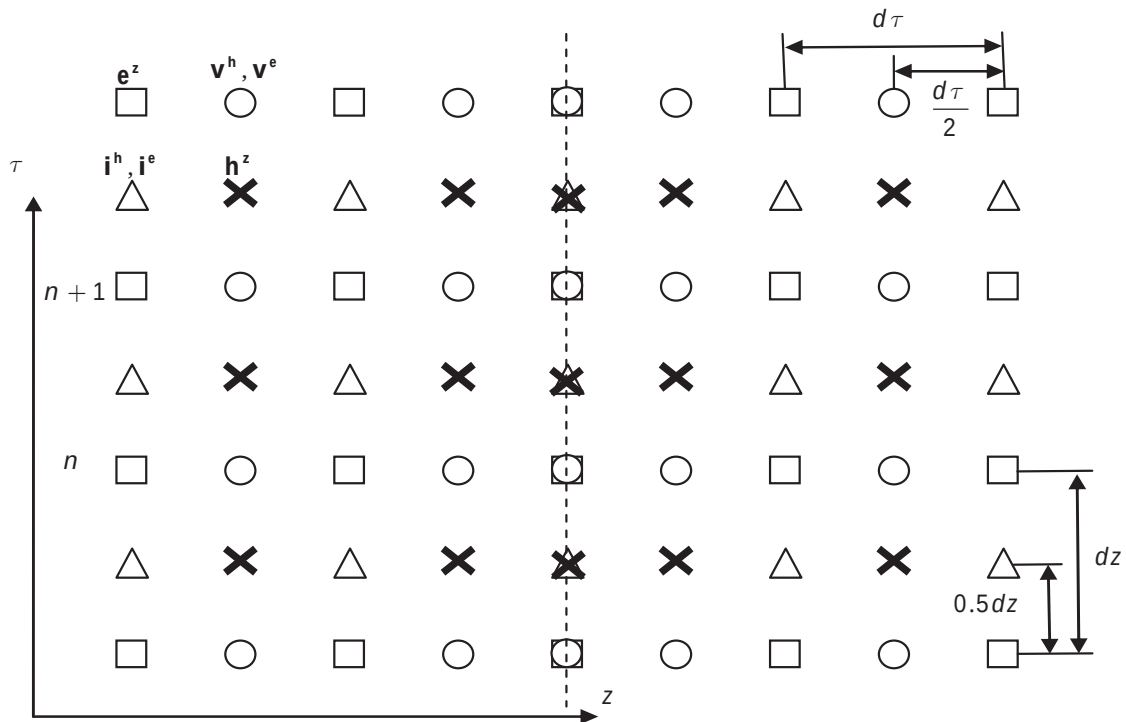


Рис. 5.17. Пространственно-временная сетка для конечно-разностного решения системы эволюционных уравнений

Эти соотношения могут быть трансформированы в модовую область, при использовании разложения полей (4.37) для диэлектрического волновода и свободного пространства. После проектирования этих соотношений на ортогональные функции получают следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{v}^e \Big|_0^n + \mathbf{U}^h \cdot \mathbf{v}^h \Big|_0^n &= \mathbf{U}_0^e \cdot \mathbf{v}_0^e \Big|_0^n + \mathbf{U}_0^h \cdot \mathbf{v}_0^h \Big|_0^n, \\
\mathbf{W}^e \cdot \mathbf{i}^e \Big|_0^n + \mathbf{W}^h \cdot \mathbf{i}^h \Big|_0^n &= \mathbf{W}_0^e \cdot \mathbf{i}_0^e \Big|_0^n + \mathbf{W}_0^h \cdot \mathbf{i}_0^h \Big|_0^n, \\
\mathbf{M}^e \cdot \mathbf{e}^z &= \mathbf{e}_0^z, \quad \mathbf{h}^z = \mathbf{M}^h \cdot \mathbf{h}_0^z.
\end{aligned} \tag{5.117}$$

где введены следующие матрицы переразложений, представляющие собой матричную форму проекций различных модовых функций друг на друга:

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^e &= \iiint \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^e(\vec{r}, p') \psi_i(p) \psi_j(p') dS dp dp', \\
U_{i,j}^h &= \iiint \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^h(\vec{r}, p') \psi_i(p) \psi_j(p') dS dp dp', \\
U_{0i,j}^e &= \iiint \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}_0^e(\vec{r}, p') \psi_i^0(p) \psi_j^0(p') dS dp dp', \\
U_{0i,j}^h &= \iiint \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}_0^h(\vec{r}, p') \psi_i^0(p) \psi_j^0(p') dS dp dp', \\
W_{i,j}^e &= \iiint \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^e(\vec{r}, p') \psi_i(p) \psi_j(p') dS dp dp', \\
W_{i,j}^h &= \iiint \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^h(\vec{r}, p') \psi_i(p) \psi_j(p') dS dp dp', \\
W_{0i,j}^e &= \iiint \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}_0^e(\vec{r}, p') \psi_i^0(p) \psi_j^0(p') dS dp dp', \\
W_{0i,j}^h &= \iiint \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}_0^h(\vec{r}, p') \psi_i^0(p) \psi_j^0(p') dS dp dp', \\
M_{i,j}^e &= \iiint \frac{p'}{p} \Phi^e(\vec{r}, p) \Psi_0^e(\vec{r}, p') \psi_i(p) \psi_j^0(p') dS dp dp', \\
M_{i,j}^h &= \iiint \frac{p'}{p} \Phi_0^h(\vec{r}, p) \Psi^h(\vec{r}, p') \psi_i^0(p) \psi_j(p') dS dp dp'.
\end{aligned}$$

Запишем формулы обновления модовых амплитуд на стыке двух регулярных областей возле конца диэлектрического стержня. При этом используются односторонние (левые/правые) конечные разности для аппроксимации пространственных производных

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}^h \Big|_0^{n+1/2} &= \mathbf{i}^h \Big|_0^{n-1/2} - 2(\mathbf{L}^{hh})^T \cdot \mathbf{S} \left(\mathbf{v}^h \Big|_0^n - \mathbf{v}^h \Big|_{-1/2}^n \right), \quad \mathbf{i}_0^h \Big|_0^{n+1/2} = \mathbf{i}_0^h \Big|_0^{n-1/2} - 2\mathbf{S}_0 \left(\mathbf{v}_0^h \Big|_{1/2}^n - \mathbf{v}_0^h \Big|_0^n \right), \\
\mathbf{i}^e \Big|_0^{n+1/2} &= \mathbf{i}^e \Big|_0^{n-1/2} - (\mathbf{L}^{ee})^T \cdot \mathbf{S} \left(\mathbf{v}^e \Big|_0^n - \mathbf{v}^e \Big|_{-1/2}^n \right) + \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{e}^z \Big|_0^n - (\mathbf{L}^{he})^T \cdot \mathbf{S} \left(\mathbf{v}^h \Big|_0^n - \mathbf{v}^h \Big|_{-1/2}^n \right), \\
\mathbf{i}_0^e \Big|_0^{n+1/2} &= \mathbf{i}_0^e \Big|_0^{n-1/2} - \mathbf{S}_0 \left(\mathbf{v}_0^e \Big|_0^n - \mathbf{v}_0^e \Big|_{-1/2}^n \right) + \mathbf{Q}_0^2 \cdot \mathbf{e}_0^z \Big|_0^n,
\end{aligned} \tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^z \Big|_0^{n+1} &= \mathbf{e}^z \Big|_0^n - d\tau \mathbf{L}^{ee} \cdot \mathbf{i}^e \Big|_0^{n+1/2}, & \mathbf{i}^h \Big|_0^{n+1/2} &= (2/dz) \left(\mathbf{h}^z \Big|_0^n - \mathbf{h}^z \Big|_{-1/2}^n \right), \\
\mathbf{e}_0^z \Big|_0^{n+1} &= \mathbf{e}_0^z \Big|_0^n - d\tau \cdot \mathbf{i}_0^e \Big|_0^{n+1/2}, & \mathbf{i}_0^h \Big|_0^{n+1/2} &= (2/dz_0) \left(\mathbf{h}_0^z \Big|_{1/2}^n - \mathbf{h}_0^z \Big|_0^n \right).
\end{aligned} \tag{5.119}$$

Отметим, что в данном случае, в отличие от метода рассмотренного в 5.2, необходимо вычислять значения всех модовых амплитуд в поперечном сечении стыка. Это связано с необходимостью выполнения всех граничных условий на стыке диэлектрик-воздух, в отличие от случая, рассмотренного выше, где должны удовлетворяться лишь условия непрерывности полей на апертуре и условия на металлическом фланце. После громоздких преобразований из формул обновления (5.118)-(5.119) и граничных условий (5.117) может быть получена следующая схема вычисления значений модовых амплитуд на конце диэлектрического стержня (при $i = 0$):

1) До начала обновления времени вычисляются дополнительные матрицы

$$\begin{aligned}
G_1 &= 0.5 \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot K^{ee}, \\
G_2 &= 0.5 \left(\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot K^{eh} + \mathbf{U}^h \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot K^{hh} \right), \\
G_3 &= 0.5 \mathbf{U}_0^e \cdot \mathbf{S}_0^{-1}, G_4 = 0.5 \mathbf{U}_0^h \cdot \mathbf{S}_0^{-1}.
\end{aligned}$$

2) Далее на каждом временном шаге обновляются значения модовой амплитуды продольного электрического поля и вычисляются дополнительные вектора

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^z \Big|_0^{n+1} &= \mathbf{e}^z \Big|_0^n - d\tau \mathbf{L}^{ee} \cdot \mathbf{i}^e \Big|_0^{n+1/2}, \quad \mathbf{e}_0^z \Big|_0^{n+1} = \mathbf{e}_0^z \Big|_0^n - d\tau \mathbf{i}_0^e \Big|_0^{n+1/2}, \\
Kv^1 &= \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{v}^e \Big|_{-1/2}^n + \mathbf{U}^h \cdot \mathbf{v}^h \Big|_{-1/2}^n - \mathbf{U}_0^e \cdot \mathbf{v}_0^e \Big|_{1/2}^n - \mathbf{U}_0^h \cdot \mathbf{v}_0^h \Big|_{1/2}^n + \\
&+ 0.5 \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot K^{ee} \cdot \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{e}^z \Big|_0^n + 0.5 \mathbf{U}_0^e \cdot \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{Q}_0^2 \cdot \mathbf{e}_0^z \Big|_0^n, \\
Kv^2 &= 2 \left(\mathbf{M}^h \cdot \left(\mathbf{h}_0^z \Big|_{1/2}^{n+1/2} - \mathbf{h}_0^z \Big|_{1/2}^{n-1/2} \right) - \left(\mathbf{h}^z \Big|_{-1/2}^{n+1/2} - \mathbf{h}^z \Big|_{-1/2}^{n-1/2} \right) \right).
\end{aligned}$$

и с помощью SVD (Singular Value Decomposition) [312] решается переопределенная матричная система уравнений относительно приращений значений модовых амплитуд на границе

$$\begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \\ \mathbf{W}^e & \mathbf{W}^h & -\mathbf{W}_0^e & -\mathbf{W}_0^h \\ \mathbf{M}^e \cdot \mathbf{L}^{ee} & 0 & -I & 0 \\ 0 & dzI & 0 & dz_0 \mathbf{M}^h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} di^e \\ di^h \\ di_0^e \\ di_0^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kv^1 \\ 0 \\ 0 \\ Kv^2 \end{pmatrix}.$$

3) После этого обновляются значения модовых амплитуд поперечной компоненты магнитного поля на границе, которые используются в общей конечно-разностной схеме для расчета полей вблизи стыка в диэлектрическом волноводе и в свободном пространстве

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0^h \Big|_0^{n+1/2} &= \Delta \mathbf{i}_0^h + \mathbf{i}_0^h \Big|_0^{n-1/2}, \mathbf{i}^e \Big|_0^{n+1/2} = \Delta \mathbf{i}^e + \mathbf{i}^e \Big|_0^{n-1/2}, \\ \mathbf{i}^h \Big|_0^{n+1/2} &= \Delta \mathbf{i}^h + \mathbf{i}^h \Big|_0^{n-1/2}, \mathbf{i}_0^e \Big|_0^{n+1/2} = \Delta \mathbf{i}_0^e + \mathbf{i}_0^e \Big|_0^{n-1/2}. \end{aligned}$$

Предложенная схема используется для расчета значений модовых амплитуд поперечной компоненты магнитного поля в момент времени $n + 1/2$ и модовых амплитуд продольной компоненты электрического поля в момент времени n .

Результаты расчёта по предложенной схеме сравнивались с результатами расчёта методом BOR-FDTD, описанным в разделе 4.6. Результаты сравнения, приведенные на рис. 5.18, демонстрируют отличное совпадение полученных результатов как в области излучённого поля (справа на рис. 5.18), так и около конца стержня, где происходит отражение волны (слева на рис. 5.18).

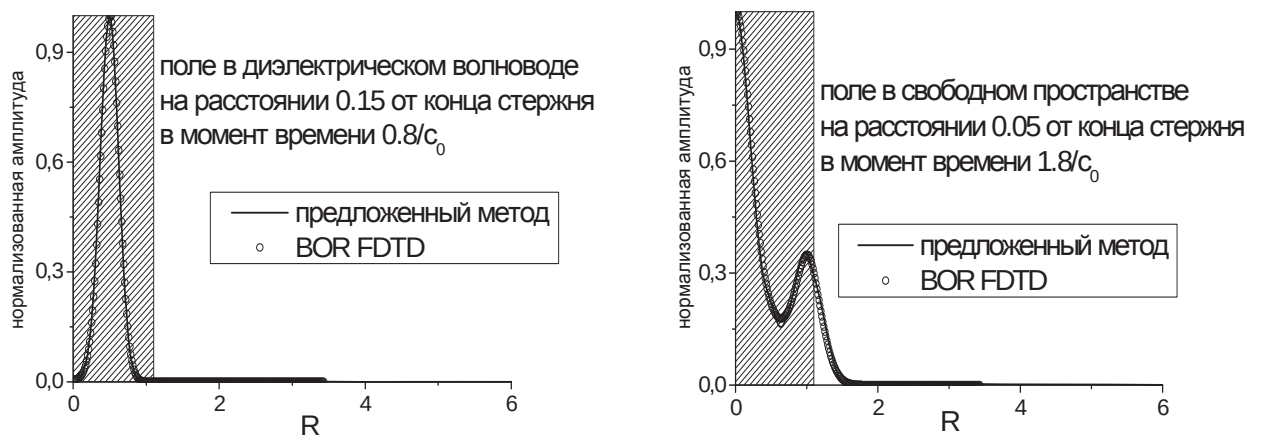


Рис. 5.18. Сравнение результатов расчета предложенным методом и методом BOR FDTD

5.4. Дифракция плоской волны на тонком проводящем цилиндре. Физический анализ аномального широкополосного поглощения.

В этом подразделе рассмотрен эффект аномального поглощения в тонкой проводящей проволочке. Аномальность заключается в том, что сечение рассеяния тонкой проволочки может на несколько порядков (в моделировании будет продемонстрировано поглощение до 10^5) превышает геометрические размеры (диаметр) проволочки. Причем этот эффект является широкополосным. Хотя задача о дифракции на проволочке была решена в строгой постановке еще Рэле-ем в 1918 г. [128] и позднее для наклонного падения рассмотрена в статье [129], но на эффект сильного поглощения впервые обратили внимание В. М. Кузьми-чѳв и Н. Г. Кокодий [126] при экспериментальном и теоретическом изучении болометров – приборов для измерения мощности лазерного излучения.

Основные результаты текущего подраздела изложены в работах автора [20, 34, 60, 69]. Здесь приводится только описание теоретической модели, в ста-тьях можно найти описание экспериментальных результатов.

Итак, рассмотрим задачу о нормальном падении Е-поляризованной плос-кой гармонической волны на бесконечный цилиндр (проволочку) радиусом a из диэлектрика, характеризующегося комплексной диэлектрической проницае-мостью ε (рис. 5.19). Нас будет интересовать поглощение энергии в проволочке, обусловленное потерями в диэлектрике (из-за проводимости). Для конкрет-ности рассмотрим медную проволочку. Комплексная диэлектрическая прони-цаемость меди в широком диапазоне частот описывается моделью Друде [125]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 + \omega^2} + i \frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 + \omega^2}, \quad (5.120)$$

где плазменная частота для меди будет $\omega_p \approx 1.6 \cdot 10^{16} [\text{s}^{-1}]$, а постоянная зату-хания $\gamma \approx 3.8 \cdot 10^{13} [\text{s}^{-1}]$. При этом эквивалентная проводимость для постоян-ного тока будет $\sigma = \varepsilon_0 \omega_p^2 / \gamma = 5.96 \cdot 10^7 [\text{Sm/m}]$. Как показали расчѳты, для Е-

поляризации в этой задаче действительная часть диэлектрической проницаемости не играет практически никакой роли при условии, что длина волны много больше диаметра проволоочки, так как эффекты преломления на границе диэлектрика при этом не важны. Кроме того, в рассмотренном диапазоне длин волн (1 мм ... 100 м) не важна и дисперсия проводимости, поэтому расчёты с более простой моделью постоянной проводимости:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \quad (5.121)$$

практически не отличаются от результатов с использованием более точной модели Друде (5.120).

Таким образом, параметрами задачи являются: длина волны λ , радиус проволоочки a и проводимость материала проволоочки σ .

Точное решение задачи основывается на следующей формуле разложения плоской волны по цилиндрическим волнам:

$$e^{iky} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho) e^{in\varphi}. \quad (5.122)$$

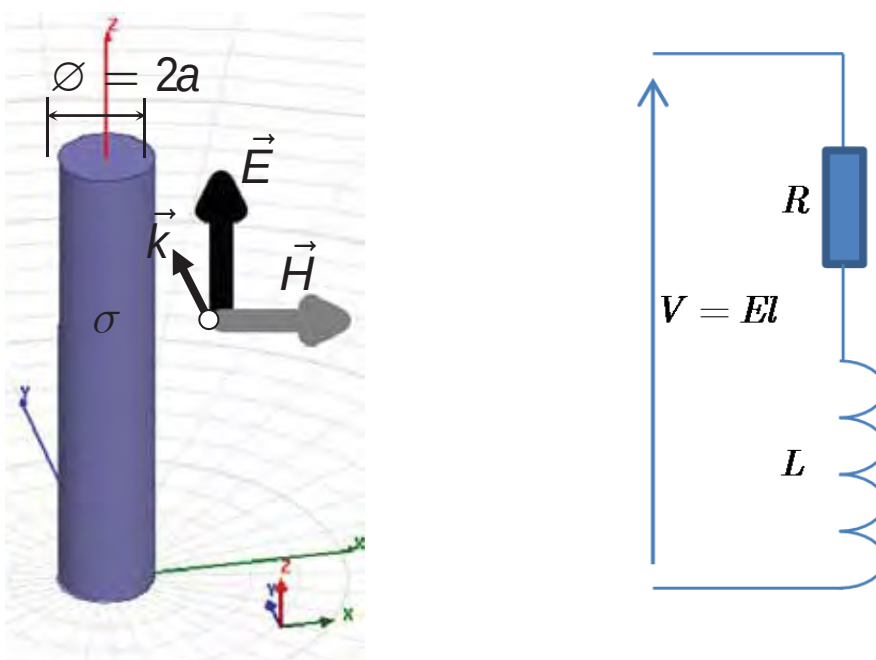


Рис. 5.19. Геометрия задачи (слева) и соответствующая ей физическая модель (справа) в виде последовательных резистивности и индуктивности

Рассеянное поле вне цилиндра может быть представлено в виде разложения по функциям Ханкеля, соответствующим расходящимся цилиндрическим волнам:

$$E^{s(2)} = \hat{z} \sum_n C_n^{(2)} H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\varphi}. \quad (5.123)$$

Записывая поле внутри в виде:

$$E^{t(1)} = \hat{z} \sum_n C_n^{(1)} J_n(\sqrt{\varepsilon} k_0 \rho) e^{jn\varphi} \quad (5.124)$$

и накладывая граничные условия непрерывности полей на поверхности, можно получить соответствующие коэффициенты разложения полей:

$$\begin{aligned} C_n^{(2)} &= \frac{J_n(k\rho) \sqrt{\varepsilon} J_n'(\sqrt{\varepsilon} k_0 \rho) - J_n'(k_0 \rho) J_n(\sqrt{\varepsilon} k_0 \rho)}{H_n'^{(2)}(k_0 \rho) J_n(\sqrt{\varepsilon} k_0 \rho) - H_n^{(2)}(k_0 \rho) \sqrt{\varepsilon} J_n'(\sqrt{\varepsilon} k_0 \rho)} \\ C_n^{(1)} &= \frac{J_n(k\rho) H_n'^{(2)}(k_0 \rho) - J_n'(k_0 \rho) H_n^{(2)}(k_0 \rho)}{H_n'^{(2)}(k_0 \rho) J_n(\sqrt{\varepsilon} k_0 \rho) - H_n^{(2)}(k_0 \rho) \sqrt{\varepsilon} J_n'(\sqrt{\varepsilon} k_0 \rho)} \end{aligned} \quad (5.125)$$

Мощность потерь в цилиндре проще всего найти, вычислив поток энергии внутрь цилиндра через его поверхность:

$$\begin{aligned} p &= - \int_L \frac{1}{2} \operatorname{Re}[E \times H^*] \cdot \vec{n} dl = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(E_z(a) H_\varphi^*(a)) a d\varphi = \\ &= \frac{a}{2Z_0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_n C_n^{(1)} J_n(\sqrt{\varepsilon} k_0 a) e^{jn\varphi} \right) \left(\sum_m C_m^{*(1)} j \sqrt{\varepsilon} J_m'^*(\sqrt{\varepsilon} k_0 a) e^{-jm\varphi} \right) d\varphi = \\ &= \frac{a}{Z_0} \sum_n |C_n^{(1)}|^2 \operatorname{Re} \left(J_n(\sqrt{\varepsilon} k_0 a) j \pi \sqrt{\varepsilon} J_n'^*(\sqrt{\varepsilon} k_0 a) \right) \end{aligned} \quad (5.126)$$

Сечение поглощения вычисляется как поглощённая мощность (5.126), делённая на плотность потока падающей энергии, которая при единичной амплитуде электрического поля падающей волны составляет $P = 0.5 \operatorname{Re}[E \times H^*] = 1 / 2Z_0$. В результате фактор поглощения Q_{abs} (иногда также называемый эффективностью поглощения), который мы определим как отношение сечения рассеяния к диаметру проволоочки, можно рассчитать по формуле:

$$Q_{abs} = \frac{p}{P} \frac{1}{2a} = \sum_n |C_n^{(1)}|^2 \operatorname{Re} \left(J_n(\sqrt{\varepsilon} k_0 a) j \pi \sqrt{\varepsilon} J_n'^*(\sqrt{\varepsilon} k_0 a) \right), \quad (5.127)$$

где сумма по n ведётся по нулевому, положительным и отрицательным индексам: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$. Наибольший вклад даёт нулевая гармоника, далее с ростом $|n|$ величина слагаемых быстро убывает. Результаты расчёта фактора поглощения по формуле (5.127) для медной проволоочки различного диаметра и при различных длинах волн представлены в лог-лог масштабе на рис. 5.20 линиями с маркерами (см. подпись к рисунку). Как видно из приведённых кривых, фактор поглощения достигает очень больших значений (до 10^5) и, начиная с некоторой длины волны, оказывается независимым от длины волны поля в длинноволновом диапазоне. Максимум фактора поглощения при длинах волн дециметрового и сантиметрового диапазонов оказывается при радиусах медной проволоочки порядка десятых долей микрона.

Рассмотрим теперь предложенную физическую модель этого явления (рис. 5.19). Мы рассматриваем длинноволновый режим, когда длина волны много больше диаметра проволоочки. Для начала будем считать, что поле в проволочке распределено однородно по сечению. При этом, в силу непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля на границе диэлектрика, электрическое поле внутри будет равно электрическому полю падающей волны снаружи. Получаем, что в проволочке течёт ток $j = \sigma E$. Полное сопротивление току в проволочке на единице длины можно рассчитать, введя погонное сопротивление проволоочки:

$$R = \frac{1}{\sigma S} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}. \quad (5.128)$$

Ток в проволочке обуславливает выделение тепловой мощности в единице длины, которую можно рассчитать по формуле $P_{abs} = \frac{1}{2} j E S = \frac{1}{2} \sigma E^2 \pi a^2$, с другой стороны, эту величину можно получить и из погонного сопротивления:

$$P_{abs}^R = \frac{1}{2} U I = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} = \frac{1}{2} E^2 \pi a^2 \sigma. \text{ В то же время, мощность потока энергии, про}$$

ходящего через сечение единицы длины проволоочки будет определяться

$P_{in} = \frac{1}{2} E H 2a = E^2 \frac{a}{Z_0}$. Множитель $1/2$ в формулах соответствует среднему за

период от квадратичной величины при гармонической зависимости от времени. Фактор поглощения, определённый как отношения мощности, падающей на сечение к мощности, поглощённой в проволочке, будет вычисляться как:

$$Q_{abs} = P_{abs} / P_{in} = \pi a^2 \sigma \frac{Z_0}{2a} = \frac{\pi}{2} \sigma Z_0 a \sim \sigma a. \quad (5.129)$$

Как следует из полученной формулы, фактор поглощения не зависит от длины волны и пропорционален первой степени радиуса проволочки. Соответствующие зависимости представлены на рис. 5.20 толстыми серыми линиями. Таким образом, полученная аппроксимация корректно описывает режим работы при малых радиусах (левая часть левого графика) и при больших длинах волн (правая часть правого графика). Однако при дальнейшем увеличении радиуса проволочки линейный рост достигает максимума и переходит в спадающий участок. При уменьшении длины волны также начинается спадание фактора поглощения.

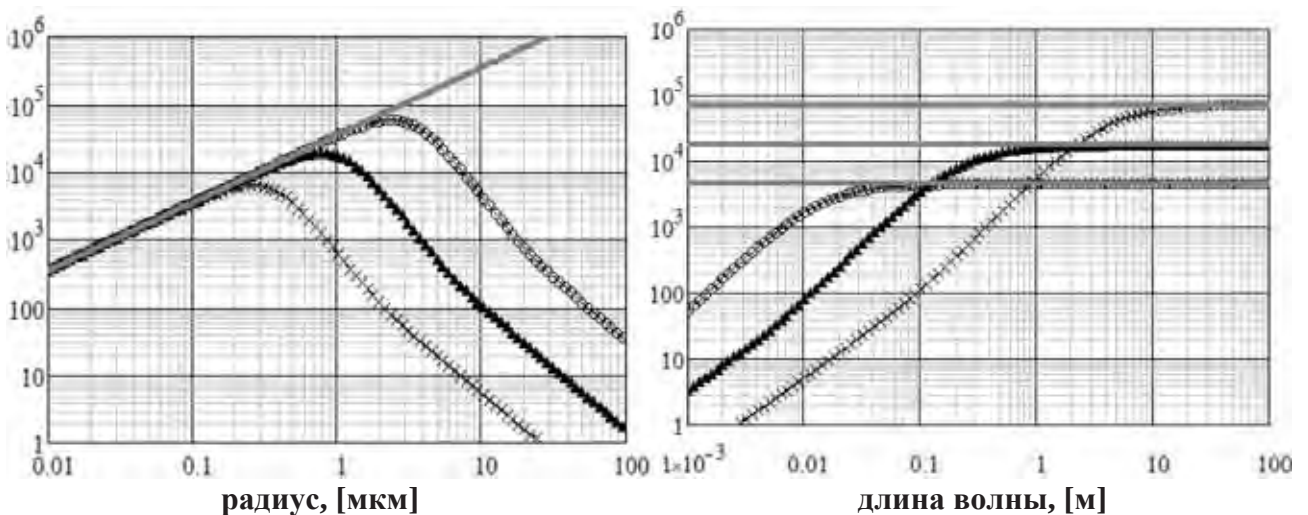


Рис. 5.20. Сравнение зависимости фактора поглощения с учетом только резистивности (толстая серая линия) с точными значениями (маркеры). Слева: зависимость Q_{abs} от радиуса проволочки a для длин волн $\lambda = 0.1$ м (x), 1 м ($\blacktriangle$), 10 м (o). Справа: зависимость Q_{abs} от длины волны λ для радиусов проволочки $a = 0.13$ мкм (o), 0,5 мкм ($\blacktriangle$), 2 мкм (x).

Чтобы объяснить этот переход, необходимо учесть индуктивность проволоочки. Проволочка может быть представлена как активное сопротивление и индуктивность, включенные последовательно, и подключенные к источнику напряжения (рис. 5.19). При этом нарастание тока будет ограничиваться полным комплексным сопротивлением: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. Т.е. из-за наличия индуктивности, ток будет $I = U / Z$, а мощность выделения тепла будет определяться потерями в активной части сопротивления:

$$P_{abs}^{RL} = \frac{1}{2} I^2 R = \frac{U^2}{2R} \frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2} = P_{abs}^R \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda_0(R, L)}{\lambda} \right)^2}, \quad (5.130)$$

где введено обозначение λ_0 для длины волны, при которой индуктивное сопротивление начинает играть существенную роль:

$$\lambda_0(R, L) = \frac{2\pi c_0 L}{R} \quad (5.131)$$

Задача вычисления индуктивности круглой проволоочки была рассмотрена еще в 1908 г. в статье Е. В. Rosa [127], однако в статическом приближении индуктивность бесконечной по длине проволоочки оказывается бесконечной. В самом деле: индуктивность проволоочки может быть рассчитана исходя из определения магнитной энергии: $\frac{1}{2} L I^2 = \int_S \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dS$, откуда $L = \mu_0 \int_S (H/I)^2 dS$. Если ток равномерно распределён по сечению проволоочки, то в статическом приближении магнитное поле вокруг бесконечного цилиндра радиуса a будет записываться в виде:

$$H(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\pi a^2} I, & \rho < a \\ \frac{1}{2\pi \rho} I, & \rho > a \end{cases} \quad (5.132)$$

Внутренняя часть индуктивности легко находится:

$$L_{in} = \mu_0 \int_0^a \left(\frac{H(\rho)}{I} \right)^2 2\pi\rho d\rho = \mu_0 \int_0^a \left(\frac{\rho}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \frac{\rho^3}{a^4} d\rho = \frac{\mu_0}{8\pi}. \quad (5.133)$$

Попытка непосредственного вычисления внешней индуктивности приводит к

расходящемуся интегралу:
$$L_{ext} = \mu_0 \int_a^\infty \left(\frac{H(\rho)}{I} \right)^2 2\pi\rho d\rho = \mu_0 \int_a^\infty \left(\frac{1}{2\pi\rho} \right)^2 2\pi\rho d\rho =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} [\ln(\rho)]_a^\infty. \text{ Т.е. внешняя индуктивность не может быть рассчитана по стати-}$$

ческому приближению поля и должна учитывать переменный характер полей.

Поля, создаваемые элементом тока можно рассчитать по формуле:

$$H = \frac{I}{4\pi} \int \left(\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} e^{-ikr} + ik \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} e^{-ikr} \right) \quad (5.134)$$

Временная зависимость подразумевается в виде $e^{i\omega t}$. Первое из этих слагаемых соответствует индуктивным полям (которые запасают энергию и возвращают её источникам), а второе слагаемое описывает излучаемые поля. Тогда, используя только индуктивный член, мы получаем:

$$H(\rho) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} e^{-ikr} = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{r^3} e^{-ikr} dz, \quad (5.135)$$

где $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ — расстояние от элемента тока до точки наблюдения. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{r^3} e^{-ikr} dz &= \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} e^{-ikr} dz = \left| \frac{dz = \frac{r}{z} dr}{r = \rho \dots \infty} \right| = \frac{I}{2\pi} \int_\rho^\infty \frac{\rho}{r^2 z} e^{-ikr} dr = \frac{I}{2\pi} \int_\rho^\infty \frac{\rho}{r^2 \sqrt{r^2 - \rho^2}} e^{-ikr} dr = \\ &= \frac{I}{2\pi\rho} \int_\rho^\infty \frac{1}{\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - 1}} e^{-ik\rho \frac{r}{\rho}} d\frac{r}{\rho} = \left| \frac{\zeta = \frac{r}{\rho}}{\zeta = 1 \dots \infty} \right| = \frac{I}{2\pi\rho} \int_1^\infty \frac{1}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-ik\rho\zeta} d\zeta = \\ &= \left| \frac{\zeta' = \zeta - 1}{\zeta' = 0 \dots \infty} \right| = \frac{I}{2\pi\rho} e^{-ik\rho} \int_0^\infty \frac{1}{(\zeta' + 1)^2 \sqrt{\zeta' + 1} \sqrt{\zeta' + 2}} e^{-ik\rho\zeta'} d\zeta' \end{aligned} \quad (5.136)$$

Выделив квазистатическую часть $H(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} e^{-ik\rho} \int$, осталось оценить интеграл, который зависит только от параметра $k\rho$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\zeta' + 1)^2 \sqrt{\zeta'} \sqrt{\zeta' + 2}} e^{-ik\rho\zeta'} d\zeta' = \\ = \int_0^{\infty} \frac{\cos(k\rho\zeta)}{(\zeta + 1)^2 \sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta + 2}} d\zeta + i \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\rho\zeta)}{(\zeta + 1)^2 \sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta + 2}} d\zeta \end{aligned} \quad (5.137)$$

Эти интегралы в явном виде не выражаются, однако можно оценить их численно. Для этого бесконечный интервал интегрирования разбивается на подынтервалы, где подынтегральное выражение остаётся знакопостоянным:

$$\begin{aligned} Int_c(k\rho) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(k\rho\zeta)}{(\zeta + 1)^2 \sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta + 2}} d\zeta = \\ = \int_0^{\frac{1}{2k\rho}} \frac{\cos(k\rho\zeta)}{(\zeta + 1)^2 \sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta + 2}} d\zeta + \int_{\frac{1}{2k\rho}}^{\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{\pi}{k\rho}} \frac{\cos(k\rho\zeta)}{(\zeta + 1)^2 \sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta + 2}} d\zeta + \dots \end{aligned} \quad (5.138)$$

В результате получаем сумму знакопеременного ряда из конечных интегралов. Остаток такого сходящегося ряда будет меньше последнего отбрасываемого члена, поэтому легко контролировать сходимость: вычисляем конечные интегралы численно, пока очередной интеграл не станет меньше требуемой точности. Аналогичное выражение можно записать для мнимой части $Int_s(k\rho)$.

Результаты численного расчета этих интегралов представлены на рис. 5.21а как функции параметра $k\rho$. Для вычисления внешней индуктивности нужно вычислять магнитную энергию, которая будет выражаться через квадрат комплексной амплитуды поля:

$$\begin{aligned} |H(\rho)|^2 = \frac{I}{2\pi\rho} e^{-ik\rho} (Int_c(k\rho) + i Int_s(k\rho)) \cdot \frac{I^*}{2\pi\rho} e^{ik\rho} (Int_c(k\rho) - i Int_s(k\rho)) = \\ = \frac{|I|^2}{4\pi^2\rho^2} (Int_c^2(k\rho) + Int_s^2(k\rho)) \end{aligned} \quad (5.139)$$

Подставляя это выражение в

$$L_{\text{ext}} = \mu_0 \int_a^\infty \left(\frac{H(\rho)}{I} \right)^2 2\pi\rho d\rho, \quad (5.140)$$

получим:

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_a^\infty \left(\left(\text{Int}_c(k\rho) \right)^2 + \left(\text{Int}_s(k\rho) \right)^2 \right) \frac{d(k\rho)}{k\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{ka}^\infty \frac{\left(\text{Int}_c(x) \right)^2 + \left(\text{Int}_s(x) \right)^2}{x} dx \quad (5.141)$$

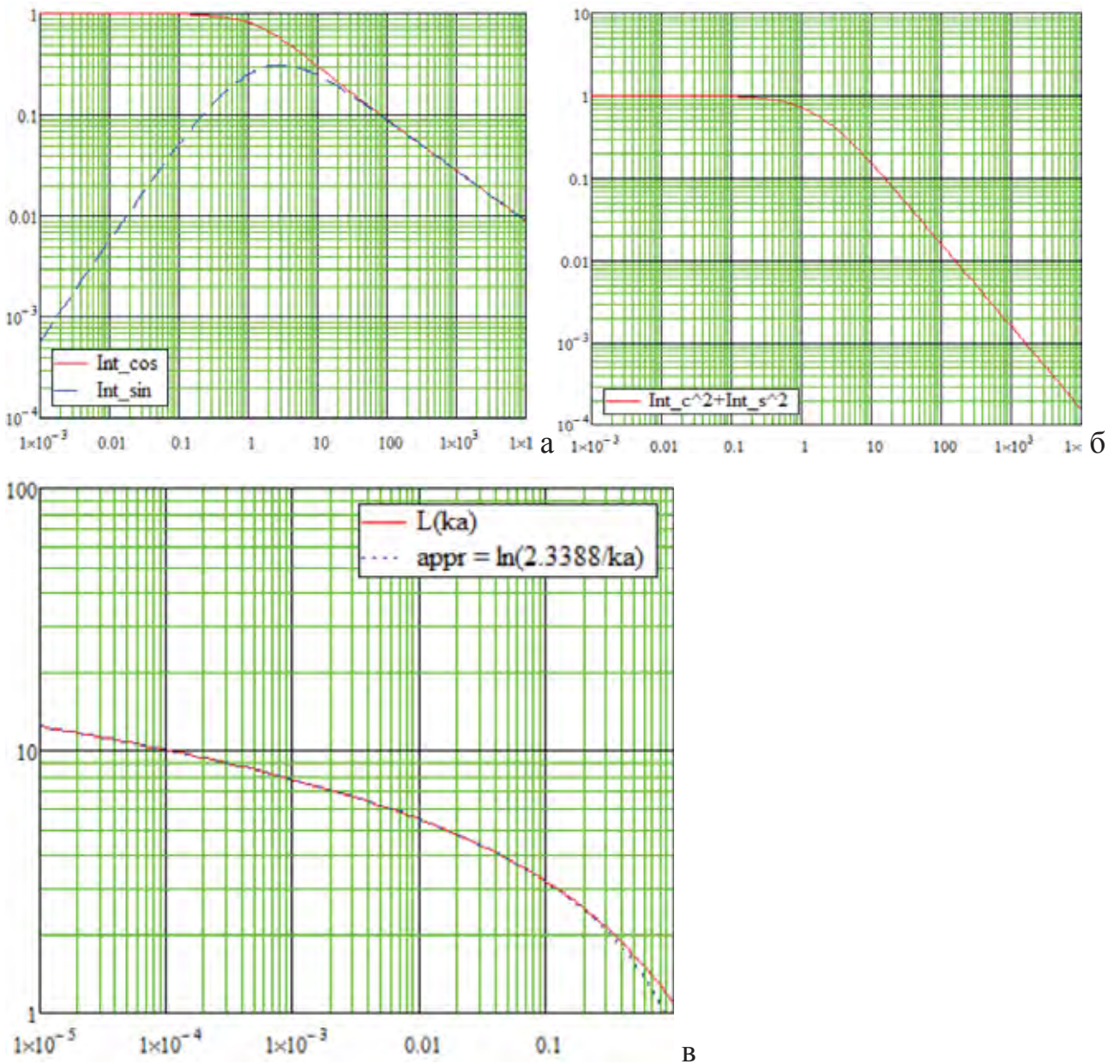


Рис. 5.21. К вычислению динамической индуктивности: а) график зависимости интеграла (5.138) от $k\rho$; б) график зависимости числителя подынтегрального выражения в (5.141) от аргумента (ka); в) результат вычисления внешней индуктивности по интегралу (5.141) как функция ka и её аппроксимация.

То есть результат будет функцией только от параметра ka . Числитель подынтегрального выражения изображен на рис. 5.21б. Как видно из графика, для рассматриваемого случая тонких по сравнению с длиной волны проволочек (при $ka < 0.1$) первообразная будет вести себя логарифмически, поэтому результат численного интегрирования выражения (5.141), представленный на рис. 5.21в сплошной кривой, в диапазоне $ka < 0.1$ хорошо аппроксимируется приближённым выражением

$$L_{\text{ext}} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{2.3388}{ka} \right) \quad (5.142)$$

Если добавить сюда внутреннюю индуктивность (5.133), то итоговая «динамическая» индуктивность круглого проводника может быть выражена как:

$$L(\lambda, a) \approx \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{2.3388}{ka} \right) \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{3.003}{2\pi} \frac{\lambda}{a} \right) \quad (5.143)$$

Подставляя полученное выражение для погонной индуктивности бесконечного круглого проводника в формулы модели (5.130)-(5.131), получим следующую аппроксимацию для фактора поглощения:

$$Q_{\text{abs}} = \frac{a\pi\sigma Z_0}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a^2}{\lambda} \pi\sigma Z_0 \ln \left(\frac{3}{2\pi} \frac{\lambda}{a} \right) \right)^2} \quad (5.144)$$

При этом для больших радиусов проволочки, когда индуктивность начинает играть существенную роль, асимптотика фактора поглощения будет иметь вид:

$$Q_{\text{abs}} \sim \frac{\lambda^2}{a^3 2\pi\sigma Z_0 \ln^2 \left(\frac{3}{2\pi} \frac{\lambda}{a} \right)} \sim \lambda^2 a^{-3} \sigma^{-1} \quad (5.145)$$

Сравнение полученного приближения с точными значениями, показано на рис. 5.22. Как видно, предложенная модель теперь правильно описывает поведение фактора поглощения в середине диапазонов. В частности, на графике зависимости от радиуса произошел перелом от асимптотики $Q_{\text{abs}} \sim a$ к асимптотике $Q_{\text{abs}} \sim a^{-3}$, однако при больших значениях радиуса точные значения

убывают по более медленному закону, чем предсказывает модель. На графике зависимости фактора поглощения от длины волны тоже правильно описывается переход от постоянного уровня к убыванию с уменьшением длины волны по закону $Q_{abs} \sim \lambda^2$. В более коротковолновом диапазоне модель также отклоняется от точных значений, явно прослеживается новая степенная зависимость.

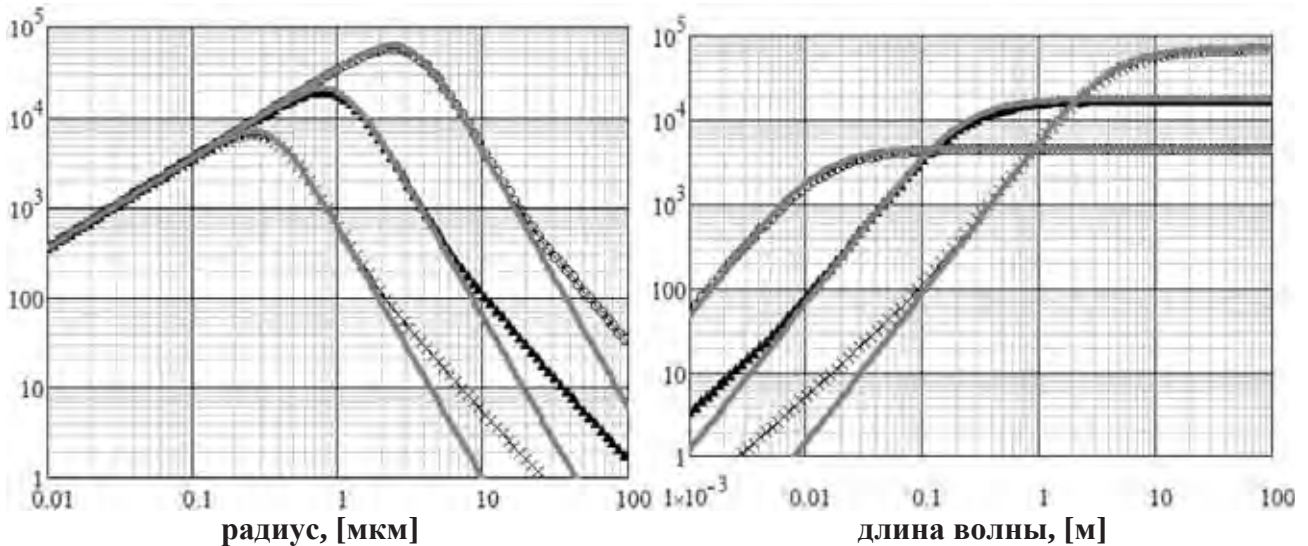


Рис. 5.22. Сравнение зависимости фактора поглощения с учетом резистивности и индуктивности (толстая серая линия) с точными значениями (маркеры). Слева: зависимость Q_{abs} от радиуса проволоочки a для длин волн $\lambda = 0.1$ м (x), 1 м ($\blacktriangle$), 10 м (o). Справа: зависимость Q_{abs} от длины волны λ для радиусов проволоочки $a = 0.13$ мкм (o), 0,5 мкм ($\blacktriangle$), 2 мкм (x).

Отклонения от модели наблюдаются при больших радиусах или малых длинах волн, что предполагает возможное участие в этом процессе скин-эффекта. Скин-эффект приводит к неоднородному по сечению распределению поля и соответственно тока проводимости, что можно описать увеличением эффективного сопротивления проводника. Теория скин-эффекта в круглом цилиндрическом проводнике хорошо изучена [130]. Учёт скин-эффекта приводит к тому, что при увеличении отношения радиуса к толщине скин-слоя

$$a / \delta = \sqrt{\frac{\pi \sigma Z_0}{\lambda}} a \text{ выше порогового значения } a/\delta \gtrsim 1.5 \text{ активное сопротивление}$$

с учётом скин-эффекта становится больше сопротивления при постоянном токе

на множитель $f_{scin}(a/\delta)$, который растёт линейно с ростом радиуса (см. рис. 5.23) и может быть рассчитан по формуле:

$$\frac{R_{scin}}{R_{static}} = f_{scin} \left(\frac{a}{\delta(\lambda)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{J_0 \left((1-i) \frac{a}{\delta} \right)}{2 J_1 \left((1-i) \frac{a}{\delta} \right) / (1-i) \frac{a}{\delta}} \right), \quad (5.146)$$

где толщина скин-слоя определяется формулой:

$$\delta(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \sigma Z_0}}. \quad (5.147)$$

При $a / \delta < 1.5$ можно считать $f_{scin} \approx 1$, при $a / \delta > 1.5$ асимптотика будет

$$f_{scin} \approx \frac{a}{2\delta} + \frac{1}{4}.$$

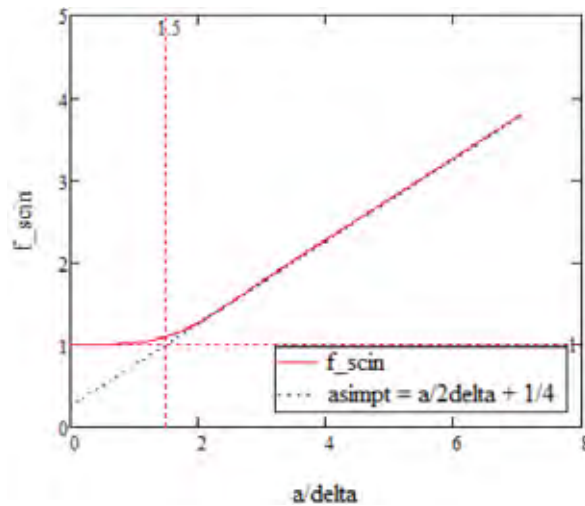


Рис. 5.23. Зависимость фактора увеличения сопротивления проводника от отношения радиуса к толщине скин-слоя.

Таким образом, мы можем считать, что скин-эффект приводит к тому, что вместо формулы (5.128) для активного сопротивления нужно использовать формулу:

$$R(a, \lambda, \sigma) = \frac{1}{\pi a^2 \sigma} f_{scin} \left(\frac{a}{\delta(\lambda)} \right). \quad (5.148)$$

Стоит отметить, что скин-эффект («выдавливание» токов к периметру) приводит также к снижению внутренней индуктивности, однако, так как в рассматриваемом диапазоне (проволочка тонкая, т.е. радиус мал по сравнению с

длиной волны) внешняя индуктивность на порядок выше внутренней, то мы пренебрежём этим эффектом.

Итак, если подставить выражение для индуктивности (5.143) в формулу для критической частоты (5.131) и использовать выражение (5.130), где активное сопротивление вычислять по новой формуле (5.148), то фактор поглощения будет приближенно вычисляться по следующей формуле:

$$Q_{abs}(a, \lambda, \sigma) = \frac{1}{1 + \left(\frac{a^2}{\lambda} \frac{\pi \sigma Z_0}{f_{scin} \left(\frac{a}{\delta(\lambda)} \right)} \ln \left(\frac{3}{2\pi} \frac{\lambda}{a} \right) \right)^2} \frac{a \pi \sigma Z_0}{2 f_{scin} \left(\frac{a}{\delta(\lambda)} \right)}. \quad (5.149)$$

При больших радиусах, когда начинает работать скин-эффект, можно получить асимптотику:

$$Q_{abs} \approx \frac{\lambda^2}{a^3 2 \pi \sigma Z_0 \ln^2 \left(\frac{3}{2\pi} \frac{\lambda}{a} \right)} \frac{a}{2 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \sigma Z_0}}} \approx \frac{\lambda^{3/2}}{a^2} \frac{1}{4 \sqrt{\pi \sigma Z_0} \ln^2 \left(\frac{3}{2\pi} \frac{\lambda}{a} \right)} \sim \lambda^{3/2} a^{-2} \sigma^{-1/2}. \quad (5.150)$$

Сравнивая эту асимптотику с полученной ранее с учетом только индуктивности (5.145), видим, что участок уменьшения с радиусом фактора поглощения a^{-3} сменится более пологим убыванием a^{-2} . Аналогично росту фактора поглощения с длиной волны перед выходом на постоянный уровень в виде λ^2 предшествует более пологий участок $\lambda^{3/2}$. На графиках ниже приведено сравнение точного выражения с приближением, которое учитывает влияние скин-эффекта на активное сопротивление (5.149). Как видно на графиках, полученное приближение правильно описывает асимптотическое поведение и положение точек перехода между режимами.

Расхождение между точной и аппроксимирующей кривыми может быть объяснено тем, что мы не учитываем эффекта излучения, который может быть выражен введением дополнительного радиационного сопротивления, ограничивающего ток в проволочке. Используемая модель «динамической» индуктивности так же является приближённым описанием процесса запасания энергии в индуктивном поле. По крайней мере, предложенная модель хорошо в ка-

чественном плане и достаточно хорошо количественно описывает рассматриваемое явление, позволяя выделить существенные параметры и эффекты, влияющие на поведение фактора поглощения при варьировании параметров задачи — длины волны, радиуса и проводимости проволоочки.

Кроме того, выявленные особенности поведения фактора поглощения позволяют давать рекомендации для исследования более сложных поглощающих структур на основе этого эффекта аномального поглощения в тонких проводящих проволочках. Так, из установленной зависимости максимума фактора поглощения от эффекта ограничения токов в проволочке индуктивным сопротивлением, можно сделать вывод о необходимости снижения индуктивности для увеличения поглощения. Этого можно добиться, например, используя геометрию в виде винтовой линии (угол навивания в 45° обеспечивает кроме того эффективное поглощение для обеих поляризаций) или бифилярной винтовой линии. Возможно рассмотрение даже «фрактальных» структур когда проволочка в виде винтовой линии в свою очередь скручивается в винтовую линию большего радиуса, которая навивается в виде винтовой линии еще большего радиуса и т.д. Однако, исследование таких структур требует более сложного аппарата.

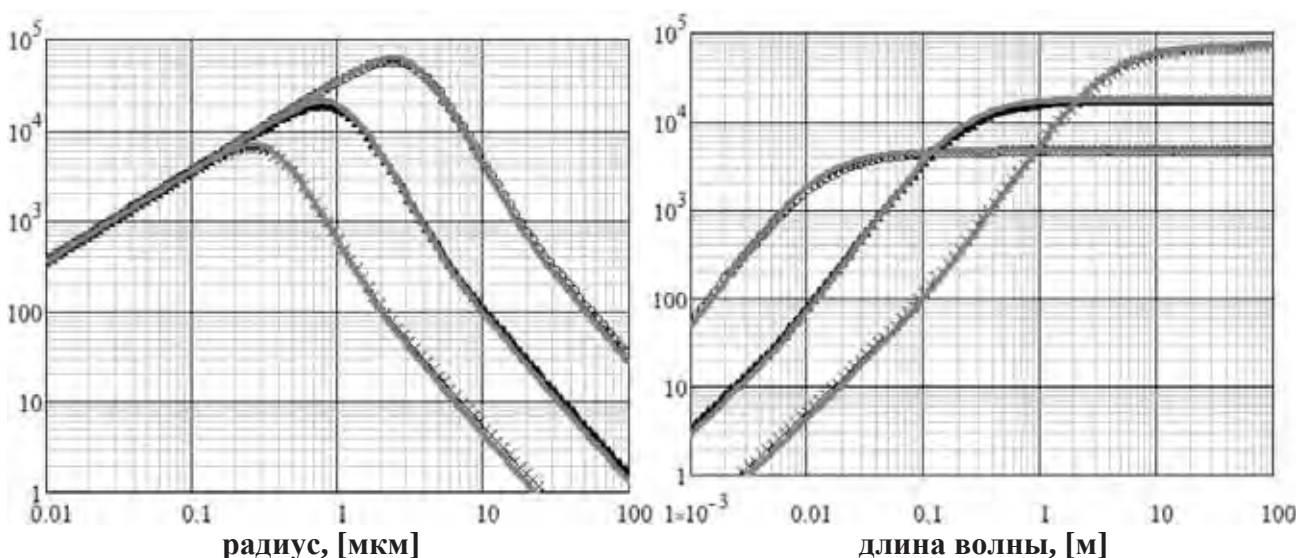


Рис. 5.24. Сравнение зависимости фактора поглощения с учетом резистивности, индуктивности и скин-эффекта (толстая серая линия) с точными значениями (маркеры). Слева: зависимость Q_{abs} от радиуса проволоочки a для длин волн $\lambda = 0.1$ м (x), 1 м (▲), 10 м (o). Справа: зависимость Q_{abs} от длины волны λ для радиусов проволоочки $a = 0.13$ мкм (o), 0,5 мкм (▲), 2 мкм (x).

Выводы к разделу 5

Получены в явном виде выражения для операторов дифракции типа свертки, описывающих изменение волновой формы модовой амплитуды при дифракции на плоской границе раздела двух магнито-диэлектрических проводящих сред в волноводе. Определены формулы для особых случаев: изоимпедансных сред, изорефракционных сред. Установлено, что для границы изоимпедансных сред мгновенная часть операторов дифракции оказывается нулевой, однако резонансный «хвост» остаётся. В то же время на границе изорефракционных сред резонансная часть становится нулевой, происходит только мгновенное преобразование с сохранением временной формы волны и изменением амплитуды.

Проанализированы физические эффекты, которые возникают при падении импульсной Е-волны на границу проводящей среды в волноводе. При этом продольная компонента электрического поля в сечении волновода создает суммарный поток заряда проводимости от поверхности в глубину среды. На основе предварительно полученных операторов дифракции для этого случая в аналитическом виде получены также операторы, позволяющие вычислять временные зависимости поверхностного заряда и волны объемного заряда, возникающей за границей. Выявлены и объяснены колебания поверхностного и объемного зарядов вблизи границы, которые возникают при этом процессе. В частности установлено, что показатель затухания этих колебаний соответствует потере энергии поверхностной волной на границе проводящей среды. Проанализированы случаи возбуждения импульсом и циклом, что приводит к экспоненциальному и колебательному режимам соответственно.

Предложено численно-аналитический метод решения задач волноводной дифракции на основе модовых перераспределений непосредственно во временной области. Этот метод (согласование мод) является одним из широко применяемых в частотной области методов изучения дифракции на сочленениях волноводов, имеющих нулевой объем. Его суть заключается в разложении полей на апертуре и на фланце по системе мод узкой и широкой части волновода и проектировании на другой базис волн. Это приводит к матричной формулировке граничных условий.

В частотной области это матричное уравнение должно выполняться на каждой частоте спектра. В свою очередь, в предложенном подходе установлена аналогичная матричная связь, используемая для сшивания полей в каждый момент времени при моделировании распространения волны. С помощью этого метода, в частности, было исследовано излучение импульсной волны простыми конфигурациями импульсных антенн, например, биконической антенной. Такая антенна может рассматриваться как стык биконической линии, в которой есть свой набор отдельных мод, со свободным пространством, в котором распространяются сферические гармоники. Полученные результаты сравнивались с очень похожим по топологии процессом дифракции импульсной волны на стыке коаксиального и круглого волноводов. Результаты сравнивались и с моделированием известными методами в частотной (MOM) и временной области (FVTD), что подтвердило их достоверность. Обсуждены преимущества предложенного подхода по сравнению с прямыми численными методами.

Проведен физический анализ аномального поглощения в тонких проводящих проволочках, когда сечение поглощения на несколько порядков (например, до 10^5 в максимуме для медного провода радиусом 2 мкм) превышает геометрические размеры объекта, причем этот эффект является сверхширокополосным. Предложена и проанализирована физическая модель, учитывающая последовательно включенные резистивную и индуктивную нагрузки. Результаты сравнивались с точной формулой, полученной разложением плоской волны на цилиндрические волны и точным учетом граничных условий. Эта модель объясняет различные режимы процесса поглощения (резистивного, индуктивного взаимодействия, скин-эффекта). Получены асимптотики соответствующих зависимостей коэффициента поглощения от параметров задачи – длины волны, радиуса и проводимости проволоки. Проведенный физический анализ дает возможность более эффективно создавать поглощающие структуры на основе этого эффекта. Например, установленная зависимость поглощения от индуктивности позволила предложить конфигурации из проволок в виде винтовых линий или бифилярных винтовых линий для снижения индуктивности и усиления эффектов поглощения. На

основе этого явления возможно создание эффективных нерезонансных широкополосных поглотителей для применения в безэховых камерах, задачах маскировки от радиолокационного обнаружения, обеспечения электромагнитной совместимости и тому подобное.

РАЗДЕЛ 6

СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ В ЗАДАЧАХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В МУЛЬТИСЕНСОРНЫХ СИСТЕМАХ

В разделе рассматривается круг вопросов, связанных с обработкой измерений в магнитокардиографических системах, представляющих собой решетку из сенсоров магнитного поля, предназначенную для измерения сверхслабых магнитных полей от сердца человека на фоне существенно более сильных полей от внешних источников. Рассматриваются методы пространственной и временной фильтрации в контексте решения обратной задачи. Методы пространственной фильтрации базируются на использовании разложения магнитного поля в ряд Тейлора на сенсорах решетки, и в построении оценки матрицы ковариации ожидаемого сигнала и полей от удаленных источников с помощью метода собственных ортогональных мод (на основе SVD).

Основные результаты раздела представлены в публикациях автора [1, 2, 5-8, 14, 15, 30, 33, 39, 45, 54, 67].

6.1. Введение

Появление магнитометрических устройств на основе SQUID-градиометров (сверхпроводящих квантовых интерферометров – superconductive quantum interference device), которые имеют уникальную чувствительность, стало основой для разработки магнетометрических систем, которые способны измерять сверхслабые магнитные поля от биологических объектов [320, 135]. На основе таких сенсоров были созданы системы для измерения магнитных полей сердца, мозга, глазных мышц и гладких мышц кишечника. В таких системах пространственное распределение магнитного поля измеряется с помощью решетки из нескольких сенсоров. Затем на основе измеренных полей необходимо решить обратную задачу магнитостатики для определения параметров электрических токов в биологических объектах, которые сгенерировали такие поля.

Одна из самых главных проблем, возникающих при этом, заключается в очень низком отношении сигнал/шум. Кроме того, несмотря на очевидные преимущества МКГ над ЭКГ, такие системы достаточно редки в клинической диагностики, что обусловлено высокой стоимостью оборудования, связанной с использованием экранированных комнат и дорогих (из-за высокого уровня выбраковки при производстве) градиометров высокого порядка для подавления шума. Таким образом для того, чтобы сделать такой тип диагностики привлекательным для врачей и снизить стоимость производства оборудования, необходимо развивать эффективные методы обработки МКГ данных для устранения сильных шумов.

Наиболее эффективным, но вместе с тем и наиболее дорогим и наименее гибким способом является проведение магнитных измерений внутри экранированной от внешних магнитных полей комнаты. Однако, было установлено, что использование подобных комнат является неприемлимым в кардиологической практике из-за стрессовых условий создаваемых для пациента, когда его помещают в замкнутое пространство. Возможность работы подобных систем вне магнитно-экранированных помещений и без использования измерителей, требующих тщательной юстировки, была бы очень кстати в клинической практике.

Магнитокардиографические измерения приобрели популярность как средство диагностики ишемии, в исследовании функционирования мышечных тканей сердца (выявление умирающих клеток и клеток, страдающих от гипоксии) и в анализе рисков развития аритмии.

Биомагнитная локализация может быть использована в кардиологии для определения фокуса активности в системе проводимости сердца. Например, побочных каналов проводимости, как при синдроме Вольфа-Паркинсона, области, создающие предпосылки возникновения экстрасистол или тахикардии, могут быть определены не инвазивно с точностью до миллиметров.

В попытках уменьшения или устранения шума из полезного МКГ сигнала было создано немало различных методов. Наиболее общий метод подавления шума основывается на использовании градиометрических (аппаратных или про-

граммных) методов в сочетании с классической фильтрацией, которая использует низкочастотный, высокочастотный и полосовой режекторный (для подавления помех на 50 Гц) фильтры. Хотя такие фильтры не очень подходят в этой области, так как они не являются адаптивными и их использование приводит к искажениям сигнала, особенно в случае использования режекторного фильтра.

Известны также методы, основанные на использовании некоторых контрольных (референсных) сенсоров. Используя адаптивно методы кросс-корреляции различными способами [131, 133], можно вычистить пики от детерминированных шумов из сенсоров, измеряющих сигнал, благодаря тому, что пики детерминированного шума коррелируют друг с другом, но не коррелируют с полезным сигналом. Главной проблемой такого подхода является то, что для приемлемого снижения шума необходимо использовать от 7 до 25 референсных датчиков. Более того, использование большого количества референсных датчиков даже с привлечением методов кросс-корреляции не решает серьёзную проблему случайных шумов, так как такой шум не коррелирует с собой.

Много усилий было затрачено на снижение случайного шума. В частности в работах Schreiber [321, 322] описан метод использования локальных проекций в фазовом пространстве вместе с матрицей корреляции. Показано, что этот метод оказывается весьма полезным для снижения случайного шума. В этой процедуре представление сигнала локализуется в фазовом пространстве, а затем проецируется на подпространство, которое не содержит шум и определяется с помощью выделения наибольшего собственного значения матрицы ковариации. Этот метод работает неплохо, но только в случае, когда размерность подпространства сигнала известна заранее. В общем случае, когда шум достаточно высок, размерность пространства сигнала неизвестна и спектр собственных значений спадает медленно.

В МКГ для локализации источников электрической активности используются также следующие математические подходы: нелинейное формирование луча и магнитометрия с синтезированной апертурой [323, 324]. Эти методы также очень эффективны для разделения сигнала и шума, но, по словам авто-

ров, эти методы, хотя и эффективны в магнитоэнцефалографии, но вряд ли помогут в МКГ, так как источники в сердце, по крайней мере в пределах QRS- и ST- комплексов, являются протяжёнными и движущимися, в отличие от точечных неподвижных источников в мозге.

Такая же задача рассматривается в магнитоэнцефалографических измерениях. Подходы к решению задачи в основном базируются на нестационарной Байезиановской оценке, на использовании модели токовых диполей, которые возникают и исчезают, но не перемещаются [325]. Однако, такой подход также неприменим к МКГ, где токовые диполи перемещаются со временем.

Довольно обширный обзор методов пространственной фильтрации в задачах магнитоэнцефалографии (формирования луча с помощью синтезирования апертуры) приведён в книге K. Sekihara и S. Nagarajan [326]. Все они направлены на выделение временной зависимости неподвижного точечного источника, что не годится для задач МКГ с подвижным источником.

Следует отметить, что в аналогичных задачах для синтезирования апертуры в СВЧ измерениях (голографические измерения) [2] есть возможность управлять фазами и амплитудами, а при магнитометрических измерениях в силу того, что сигнал на таких частотах приходит ко всем датчикам синфазно, остаётся управлять только амплитудными множителями и работать в пространстве действительных сигналов.

Имеется также ряд работ по использованию вейвлет-фильтрации для разделения сигнала и шума [332]. В статье [132] рассмотрен метод конструирования нестационарной винеровской фильтрации на основе скейлограмм дискретного вейвлет-преобразования. Винеровский фильтр был реализован следующим образом. Было рассмотрено 50 реализаций измеренной смеси сигнала и шума. Эти реализации были разделены на подансамбли, из которых затем вычислялись средние по подансамблям. Из этих усреднённых данных вычислялись скейлограммы дискретных вейвлет-преобразований, которые затем опять усреднялись. Ещё одна скейлограмма вычислялась из усреднённой реализации сигнала. Из этих двух скейлограмм строился винеровский фильтр. Таким обра-

зом, оценка спектра чистого сигнала была получена из усреднения по подансамблям. Этот метод хорошо показал себя для случайного шума с нулевым матожиданием, но он плохо справляется с коррелированным шумом. Помимо того, этот метод требует довольно большого количества реализаций сигнала (50) для получения адекватных результатов, что не всегда возможно/удобно.

В нашей работе мы собираемся рассмотреть винеровский фильтр на основе оконного преобразования Фурье, когда винеровский фильтр строится и применяется к моментальному спектру, определённом для части сигнала, вырезаемой временным окном в окрестности текущего момента времени. Это позволяет использовать динамический фильтр, который зависит от моментальных характеристик сигнала, которые или известны *a priori* (например, для квазипериодического сигнала) или же оцениваются по какому-то параллельному процессу, создаваемому тем же источником (в нашем случае это ЭКГ сигнал).

Следует отметить, что с той же целью можно использовать и любое другое время-частотное представление [96], которое может быть обращено. Например, непрерывное вейвлет преобразование обеспечивает лучшую время-частотную локализацию сигнала и более гибкое в выборе наиболее подходящего вейвлета. Но имеются и определённые недостатки. Большинство вейвлет-функций Most не имеют аналитического представления в виде простой формулы, вместо этого они определяются итеративным выражением, которое легко вычисляется на современных компьютерах. Кроме того, возникает проблема с конусом влияния, суть которой в том, что сигнал, который резко включается или выключается (это может быть в том числе наличие различного постоянного уровня на краях интервала измерения, которое не устраняется вычитанием константы) обрабатывается как сингулярность (скачок), который вносит существенный вклад в окружающие области. Кроме того, так как вейвлет-преобразование даёт на выходе не комплексную, а действительную скейлограмму, то вместо винеровской фильтрации, к ней более адекватно применять пороговую фильтрацию для выделения скелетона скейлограммы.

Еще одним примером время-частотного представления может служить преобразование Вигнера [96]. Его преимуществом является хорошее разрешение во времени и по частоте, инвариантность к сдвигу по фазе, по частоте и по времени, недостатком же является появление интерференции сигналов.

6.2. Оптимизация параметров решётки датчиков

В этом подразделе рассмотрена задача оптимизации параметров измерительной решётки градиометрических датчиков (база решётки и база градиометра) исходя из требования максимизации чувствительности системы к определению параметров источника в заданной области. Основные материалы этого подраздела опубликованы в работе [15].

Магнитокардиографическая (МКГ) система обычно строится из нескольких датчиков магнитного поля, расположенных в одной плоскости в виде прямоугольной или гексагональной решетки. В этой статье мы рассмотрим как раз плоскую гексагональную решетку (см. рис. 6.1), параметром которой является расстояние между датчиками, расположенными в вершинах равносторонних треугольников (база решетки). В качестве датчиков обычно используются градиометры, измеряющие разность какой-то компоненты магнитного поля в двух разнесенных точках. Это позволяет устранить влияние на измерения однородного фонового поля (геомагнитного и промышленного шума). В исследовании мы рассмотрим градиометр, измеряющий разность компоненты B_x в точках, разнесенных вдоль z (см. рис. 6.1), расстояние, на которое разнесены измерительные катушки, является параметром градиометра (базой).

В качестве источника магнитного поля, который наиболее адекватно описывает электрическую активность биологических объектов (сердца, мозга, мышц), обычно используют токовый диполь [320, 135], который создает магнитное поле, описываемое следующей формулой ($\vec{Q}$ — дипольный момент, $\vec{r}_Q$ — положение):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{R} \times \vec{Q}}{R^3}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q. \quad (6.1)$$

По результатам измерений распределения магнитного поля решеткой датчиков можно решать обратную задачу с целью определения положения и вектора токового диполя, создавшего поля. При этом качество решения обратной задачи (величина доверительных интервалов восстанавливаемых параметров) зависит от используемой решетки и датчиков. При построении МКГ системы важно заранее моделированием определить оптимальные значения параметров решетки и градиометра, которые бы обеспечили наилучшие эксплуатационные характеристики системы, что и является целью нашей работы.

Источник магнитного поля в рассматриваемой задаче ищется в области сердца, которая занимает объем радиусом 5 см, центр которого отстоит на 15 см от нижнего края измерительной решетки.

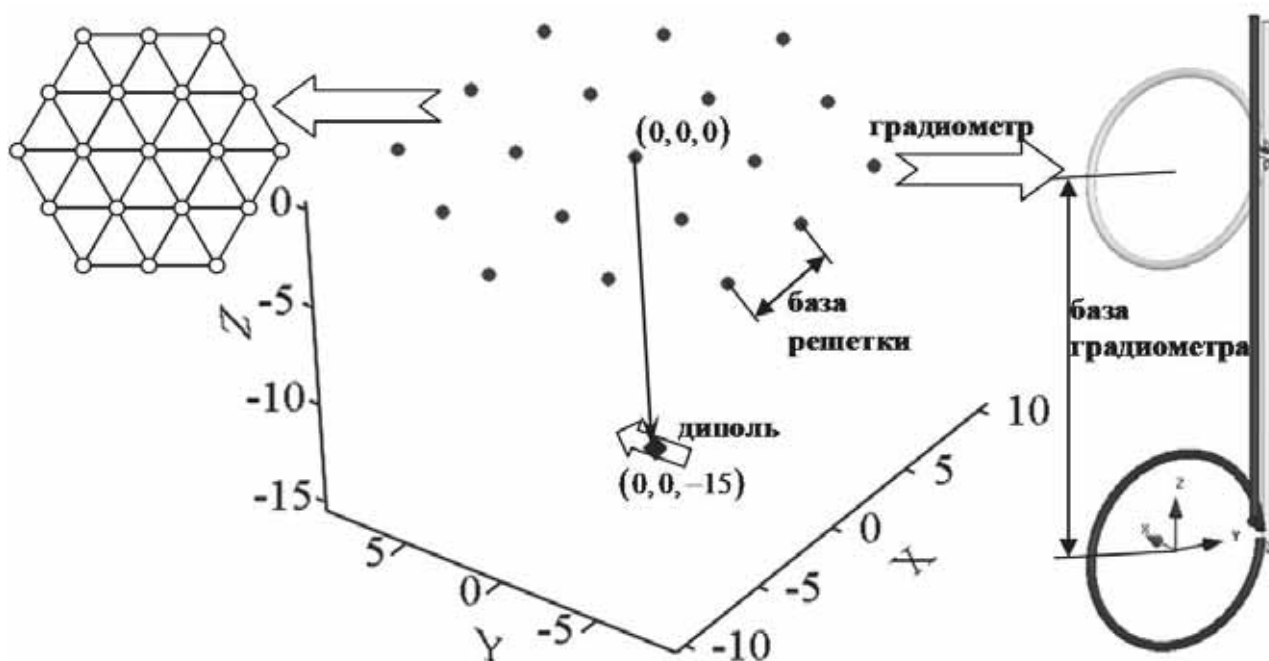


Рис. 6.1. Геометрия задачи. Структура гексагональной измерительной решетки и градиометра, измеряющего dB_x/dz .

При решении обратной задачи минимизируется величина квадратичной невязки между измеренным вектором сигналов на градиометрах и расчетным сигналом от модельного диполя. Параметры модельного диполя, минимизирующие невязку, считаются оценкой параметров реального диполя. При этом чувствительность системы определяется скоростью изменения невязки при

увеличении смещении модельного диполя относительно реального [1]. Пусть $\vec{f}(\vec{r}) = f_i$ — измеренный решеткой сигнал от реального диполя, при смещении модельного диполя на вектор $\delta\vec{r}$ модельный сигнал будет $\vec{f}(\vec{r} + \delta\vec{r})$, величина квадратичной невязки, которая рассчитывается для нормированных сигналов:

$$\chi^2(\vec{r}, \delta\vec{r}) = \left| \frac{\vec{f}(\vec{r})}{|\vec{f}(\vec{r})|} - \frac{\vec{f}(\vec{r} + \delta\vec{r})}{|\vec{f}(\vec{r} + \delta\vec{r})|} \right|^2 \quad (6.2)$$

является квадратичной функцией $\delta\vec{r}$. Чем больше ее вторые производные по компонентам смещения, тем сильнее изменяется невязка при смещении модельного диполя относительно точного и тем выше чувствительность системы. Например, величину $\sqrt{\partial^2 \chi^2(\vec{r}, \delta\vec{r}) / \partial (\delta r_x)^2}$, имеющую размерность [1/м], будем называть чувствительностью системы в точке $\vec{r}$ к смещению диполя вдоль x . Кроме того, имеет смысл ввести интегральную чувствительность, которая будет характеризовать усредненную по направлениям смещения чувствительность [1]. Для этого мы будем вычислять матрицу вторых производных (гессиан) $H_{i,j} = \partial^2 \chi^2(\vec{r}, \delta\vec{r}) / \partial \delta r_i \partial \delta r_j$ и находить ее собственные значения $\lambda_{1,2,3}$, которые описывают чувствительности вдоль главных осей гессиана, их среднее геометрическое будет описывать «интегральную чувствительность», которая инвариантна относительно выбора направления осей системы координат. Эта величина, имеющая размерность [1/м], вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt[6]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (6.3)$$

Чувствительность зависит от параметров измерительной решетки и градиометра. При одинаковых шумовых условиях измерительная система с большей чувствительностью сможет восстановить параметры модельного диполя с меньшими доверительными интервалами, т.е. точнее.

Для определения оптимальных параметров измерительной системы были проведены численные расчеты интегральной чувствительности и чувствительностей к x - и z -смещениям диполя, расположенного в центре предполагаемой области сердца (координаты $(0, 0, -15\text{ см})$) для различных значений базы ре-

шетки ($dGrid$) и базы градиометра ($dGrad$). Результаты представлены на рис. 6.2. Жирными линиями выделены сечения графика для $dGrid = 8\text{ см}$ и $dGrad = 4\text{ см}$. Далее были рассчитаны чувствительности при $dGrad = 4\text{ см}$ для диполя, смещенного в пределах области сердца вдоль x (в плоскости решетки) — рис. 6.3, и вдоль z (перпендикулярно к решетке) — рис. 6.4. Наконец, на рис. 6.5 представлены пространственные распределения показаний градиометра в плоскости решетки при $dGrid = 8\text{ см}$ и $dGrad = 4\text{ см}$ для нескольких положений и ориентаций диполя.

На рис. 6.3 виден четко выраженный максимум по параметру $dGrid$. Это объясняется тем, что, с одной стороны, чтобы получить большую амплитуду сигнала (и, соответственно, большее изменение при смещении диполя), датчики должны быть концентрированы как можно ближе к источнику поля ($dGrid$ минимально), но чем ближе друг к другу находятся датчики, тем более коррелирован сигнал на них, что после нормировки на амплитуду приводит к малому изменению структуры поля при смещениях диполя. С другой стороны, для редкой решетки ($dGrid$ максимально) на крайних датчиках, где изменение структуры поля наиболее существенно, измеряется слишком слабый сигнал по сравнению с центральными датчиками, что снижает итоговую чувствительность.

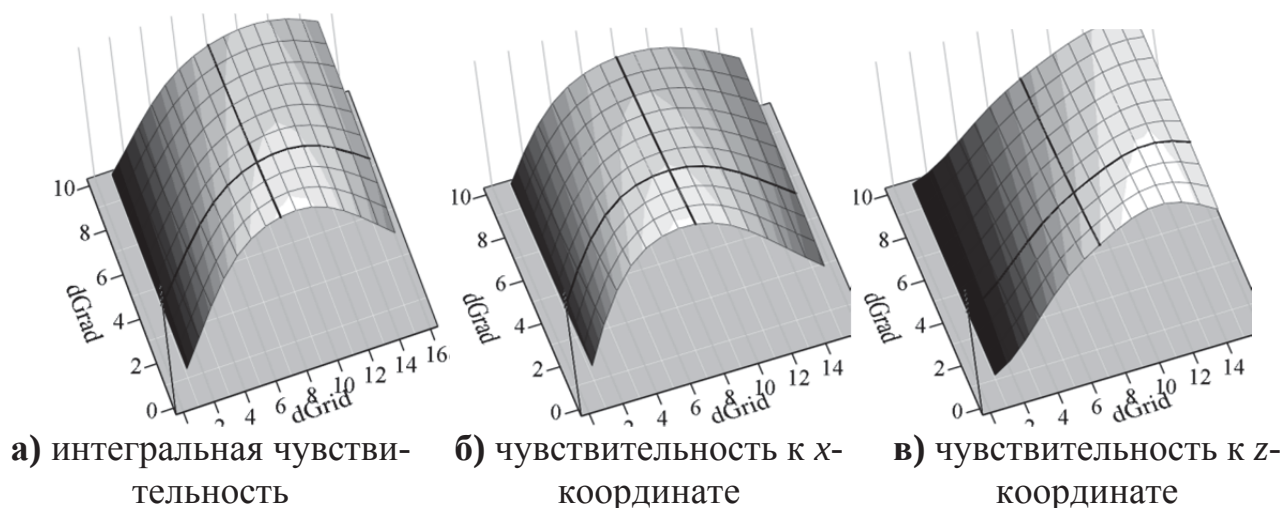


Рис. 6.2. Зависимость чувствительности к положению диполя от базы решетки и базы градиометра (координаты y -ориентированного диполя $(0,0,-15)$).

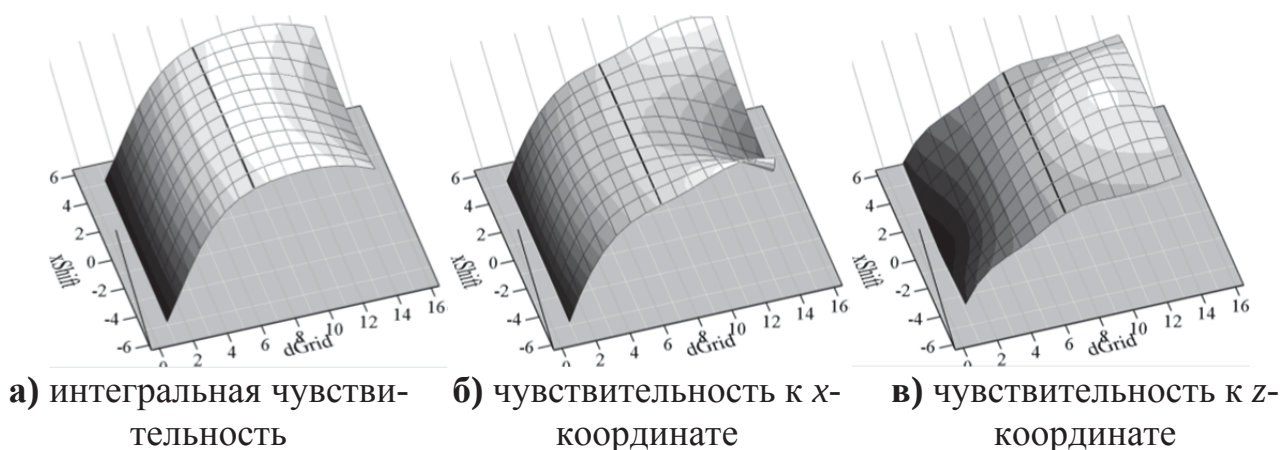


Рис. 6.3. Зависимость чувствительности к положению диполя для разного смещения от центра решетки и разной базы решетки при базе градиометра 4 см (координаты у-ориентированного диполя (xShift, 0, -15))

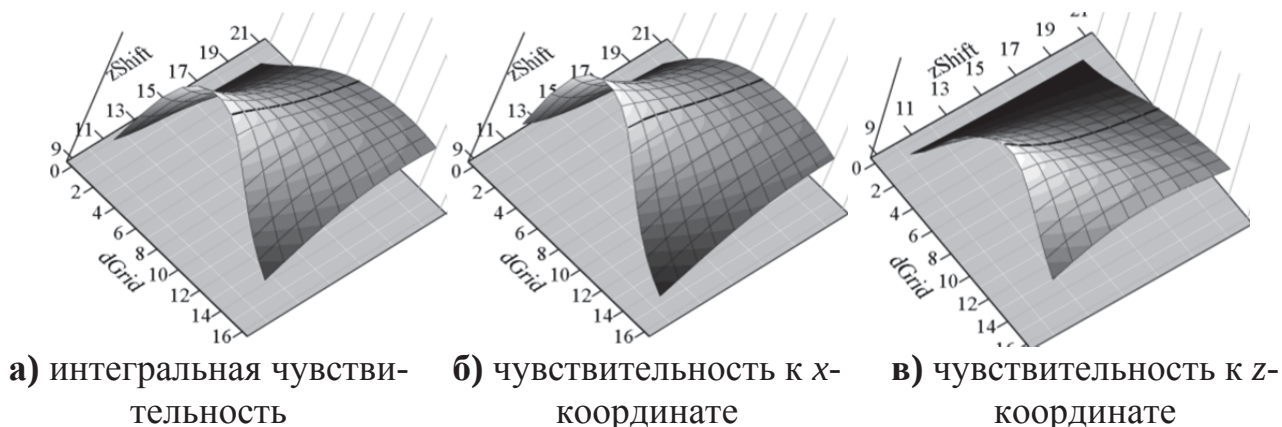


Рис. 6.4. Зависимость чувствительности к положению диполя для разной глубины залегания и разной базы решетки при базе градиометра 4 см (координаты у-ориентированного диполя (0, 0, -zShift))

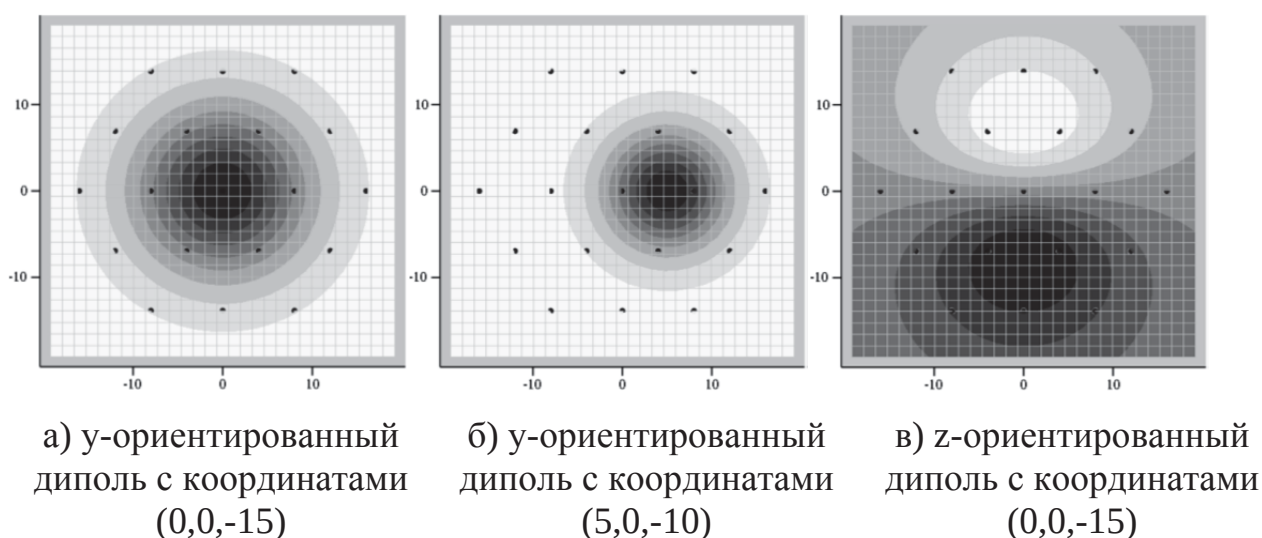


Рис. 6.5. Распределение показаний $\partial B_x / \partial z$ -градиометра (база 4 см) в плоскости измерительной решетки (база 8 см)

Итак, из анализа рис. 6.3 можно сделать следующие выводы:

- для каждого конкретного значения базы градиометра имеется соответствующее ему оптимальное значение базы решетки; это оптимальное значение увеличивается с увеличением базы градиометра;
- зависимость чувствительности от базы решетки гораздо сильнее, чем от базы градиометра;
- с увеличением базы градиометра при любых значениях базы решетки чувствительность монотонно убывает со слабым наклоном.
- чувствительность к смещению диполя в поперечной плоскости в 1,5-2 раза выше, чем к смещению диполя вглубь (это явно не видно на рисунке, так как не показаны цифры на вертикальной шкале).

Таким образом, оптимальной являлась бы минимальная возможная база градиометра, но если катушки (см. рис. 6.1) находятся слишком близко друг к другу, то разностный сигнал градиометра оказывается малым за счет вычитания близких величин, если же слишком далеко разнести ближнюю и дальнюю катушки, то сигнал градиометра будет определяться в основном только сигналом ближней катушки. При базе градиометра порядка 4 см чувствительность в соответствии с рис. 6.2 снижается не существенно, а уровень сигнала оказывается достаточно высоким по сравнению с использованием меньшей базы. Поэтому в дальнейших расчетах в качестве оптимальной базы градиометра используем величину $dGrad = 4\text{ см}$.

Для выбранной оптимальной базы градиометра оптимальная база решетки оказывается различной для разных чувствительностей: в терминах интегральной чувствительности оптимальной будет база решетки около 10 см, для x -чувствительности — 8 см, и для z -чувствительности — 11,5 см. В прикладных задачах более важно определить именно поперечную координату диполя, поэтому мы рекомендуем в качестве оптимальной базы решетки взять $dGrid = 8\text{ см}$.

При анализе изменения чувствительности при смещении диполя из центрального положения (рис. 6.3-6.4) можно сделать следующие выводы:

- при базе решетки $dGrid = 8\text{ см}$ чувствительность очень слабо изменяется при смещениях диполя от центра в пределах 5 см;
- при больших значениях базы решетки формируется провал чувствительности к x -координате при близких к центру положениях диполя, что обусловлено малым размером «засвечиваемого» пятна на решетке (см. рис. 6.5);
- база решетки $dGrid = 8\text{ см}$ оказывается компромиссной между обеспечением оптимальной чувствительности по x и по z на разных глубинах залегания диполя (см. рис. 6.4).

Наконец, анализ структуры измеряемого поля (рис. 6.5) при рекомендованных оптимальных параметрах измерительной решетки $dGrid = 8\text{ см}$ и $dGrad = 4\text{ см}$ показывает, что такой выбор обеспечивает наиболее эффективное использование всей площади решетки для измерения существенных изменений поля при варьировании ориентации и положения диполя в пределах ожидаемой области источников (сердца).

6.3. Пространственная фильтрация. Тейлоровские моды и метод собственных ортогональных мод.

В этом подразделе рассматриваются методы пространственной фильтрации шумов в магнитокардиографических измерениях. Основные результаты, относящиеся к этому материалу, изложены в работах автора [7, 14, 33, 54]. Описан общий математический подход к построению пространственных фильтров в многосенсорных измерительных системах при наличии априорной информации о поведении измеряемых полей. Понятие «градиометр» обобщено введением «пространственных фильтров». Продемонстрировано применение этих фильтров к решению обратной задачи по восстановлению параметров локального диполя в условиях наличия шумового поля от далеко расположенных источников.

Конфигурации аксиальных градиометров [134,136], обычно используемых при измерении полей от слабых локальных источников, изображены на рис. 6.6 (врезка). Такие датчики могут быть реализованы либо аппаратно, последовательным соединением катушек в один датчик, либо программно, когда сигналы от отдельных магнитометров регистрируются независимо друг от друга и при дальнейшей обработке комбинируются в суммарные сигналы [137]:

$$V_i^{\text{гр2}} = [\vec{B}(\vec{r}_{0i}) \cdot \vec{n}_{0i} S_{0i} - \vec{B}(\vec{r}_{1i} - h_{1i} \vec{z}_{0i}) \cdot \vec{n}_{1i} S_{1i}] - \\ - [\vec{B}(\vec{r}_{2i} - h_{2i} \vec{z}_{0i}) \cdot \vec{n}_{2i} S_{2i} - \vec{B}(\vec{r}_{3i} - (h_{2i} + h_{1i}) \vec{z}_{0i}) \cdot \vec{n}_{3i} S_{3i}], \quad (6.6)$$

всего $N / 4$ таких датчика (градиометры второго порядка);

$$V_i^{\text{гр1}} = \begin{cases} \vec{B}(\vec{r}_{0i}) \cdot \vec{n}_{0i} S_{0i} - \vec{B}(\vec{r}_{2i}) \cdot \vec{n}_{2i} S_{2i} \\ \vec{B}(\vec{r}_{1i}) \cdot \vec{n}_{1i} S_{1i} - \vec{B}(\vec{r}_{3i}) \cdot \vec{n}_{3i} S_{3i} \end{cases}, \quad (6.7)$$

всего $N / 2$ таких датчиков (градиометры первого порядка).

Преимущество использования ПРГ (программно реализуемых градиометров) заключается в возможности компенсировать отклонения в площади отдельных катушек, составляющих i -й ПРГ, с помощью калибровочных весовых коэффициентов S_{ji} [138]. Однако возмущение ориентаций $\vec{n}_{ji}$ отдельных катушек, формирующих ПРГ, и вызванная этим чувствительность к поперечным компонентам поля не могут быть скомпенсированы с помощью выбора весовых множителей.

Поскольку сигналы от всех катушек могут быть объединены и в произвольные линейные комбинации, решаемая в данном подразделе задача заключается в получении таких комбинаций, которые обеспечивали бы высокую скорость убывания чувствительности (энергии сигнала, измеряемого таким ПРГ) с расстоянием до источника измеряемого поля и минимальные потери полезного сигнала от локальных источников.

ПРГ как пространственные фильтры. Сигнал на ПРГ можно представить как проекцию исходного N -мерного сигнала на вектор в N -мерном пространстве. Например, измерительная система, состоящая из N сенсоров, объединяемых в M ПРГ, преобразовывает скалярные сигналы с отдельных магни-

тометров в сигнал i -го ПРГ $\tilde{V}_i^{PPG} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} V_{ij} = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{V}$, что представляет собой проекцию N -мерного сигнала $\vec{V}$ со всех сенсоров на вектор $\vec{\alpha}_i$, в котором отличны от нуля только N/M элементов, которые соответствуют используемой конфигурации ПРГ.

Преобразование исходного векторного сигнала $\vec{V}$ системы сенсоров в векторный сигнал $\tilde{\vec{V}}$ системы ПРГ можно представить умножением исходного сигнала на матрицу-фильтр:

$$\tilde{\vec{V}} = \mathbf{F} \cdot \vec{V}, \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U} = \left(\vec{\alpha}_{i=1\dots M} \quad \vec{\beta}_{i=M+1\dots N} \right), \mathbf{M} = \text{diag} \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_M, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-M} \right) \quad (6.8)$$

где $\mathbf{U}$ - базис нового представления исходного сигнала $\vec{V}$, состоящий из M векторов $\vec{\alpha}$ и еще $N - M$ некоторых ортогональных к ним векторов $\vec{\beta}$; $\mathbf{M}$ - диагональная матрица, в которой градиометрам соответствуют единицы на диагонали, а всем остальным проекциям — нули.

Представленные на рис. 6.7 зависимости показывают, что характеристики чувствительности идеальной системы датчиков из 144 магнитометров с последующим применением к сигналу $\vec{V}_{\text{магн}}$ пространственных фильтров $\tilde{\vec{V}}_{\text{гр1}} = \mathbf{F}_{\text{гр1}} \cdot \vec{V}_{\text{магн}}$ и $\tilde{\vec{V}}_{\text{гр2}} = \mathbf{F}_{\text{гр2}} \cdot \vec{V}_{\text{магн}}$ совпадают с характеристиками системы ПРГ (6.6)-(6.7) и аппаратных градиометров 2-го и 1-го порядков соответственно.

Обобщив идею пространственной фильтрации за счет использования градиометрических датчиков до более общего случая пространственных фильтров, которые описывают переход к представлению сигнала в новом базисе, отбрасывание части проекций в этом представлении, и возвращение в исходное представление; эту процедуру мы можем в дальнейшем изучать в терминах свойств матрицы-фильтра $\mathbf{F}$ (6.8).

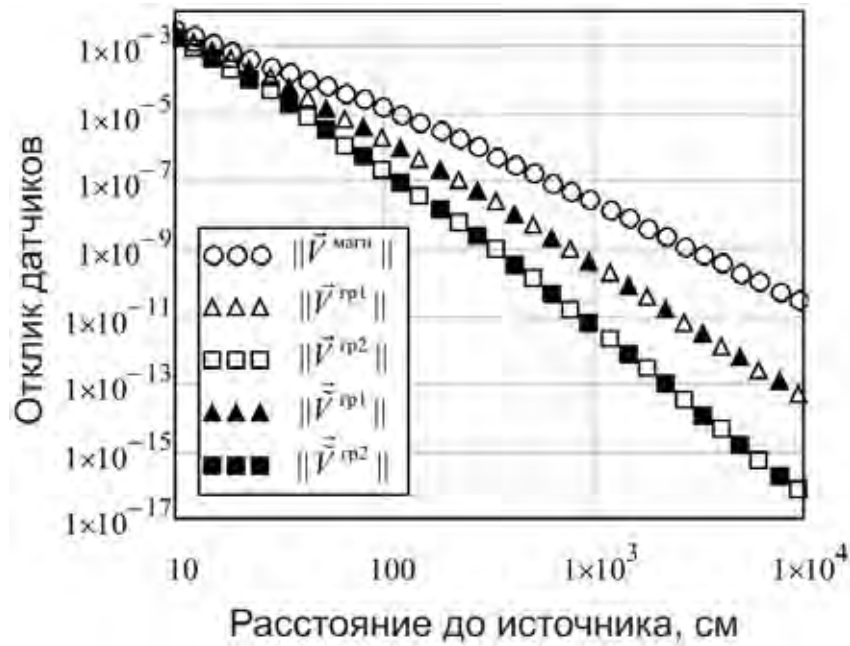


Рис. 6.7. Графики зависимостей чувствительности измерителя от расстояния до магнитного источника, идеальные датчики.

Пространственная фильтрация — тейлоровское разложение полей.

Коэффициенты разложения Тейлора для дипольного источника убывают с расстоянием по степенному закону. При этом показатель степени будет соответствовать порядку члена разложения в ряд. Именно это свойство мы и будем использовать для построения пространственных фильтров.

Трехмерное векторное поле в окрестности измерителя может быть разложено в ряд Тейлора, каждый элемент этого разложения будет описывать соответствующее базисное поле: для $\partial_{xy}^2 B_x$, например, базисный вектор будет иметь вид $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{x}_0 \cdot x \cdot y$, для $\partial_{xyz}^3 B_z$ — $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{z}_0 \cdot x^2 \cdot z$. Эти базисные векторы не ортогональны, но линейно независимы и образуют полную систему.

Чтобы говорить о распределении энергии между проекциями компонент разложения необходимо ортогонализировать подпространства, составленные из членов разного порядка. Для этого построим подпространства, натянутые на проекции интересующих нас компонент разложения. Членам 0-го порядка (коэффициенты при которых убывают как R^{-3}) ставим в соответствие 3-мерное подпространство, для объединения 0-х и 1-х компонент — 12-мерное, для объ-

единения компонент с 0-го по 2-й порядок получаем 30-мерное подпространство, для компонент 0-го до 3-го — 60-мерное.

Теперь мы можем говорить о представлении пространства сигналов $\mathbb{R}^N$ в виде двух частей: одна есть подпространство, соответствующее членам разложения низкого порядка, а вторая часть — его ортогональное дополнение. Очевидно, что описанная выше «тейлоровская фильтрация» заключается в удалении из измеренного сигнала его проекции на подпространство низших членов, или наоборот, можно говорить о проецировании на дополнение к этому подпространству (то есть, на подпространство высших членов). Чтобы устранить вырожденность, возникающую при измерении идеальными сенсорами вследствие их нечувствительности к поперечным компонентам поля, удобно применить сингулярное разложение (SVD, Singular Value Decomposition) [312] к матрице, составленной из векторных сигналов, соответствующих тейлоровским членам, для которых требуется найти общее подпространство.

Пространственная фильтрация – разложение сигналов на подпространства по скорости убывания чувствительности. Следует отметить, что часть полученных в предыдущем разделе сигналов в виде компонент тейлоровского разложения одного порядка окажутся линейно зависимыми в силу симметрии расположения датчиков измерителя. Для устранения имеющей место линейной зависимости следует одновременно учитывать как конкретный тип измерителя, так и конкретный тип источника. Здесь мы собираемся применить метод, известный в некоторых задачах как метод «собственных ортогональных мод» [331] или метод ортогонального разложения на основе SVD. Суть метода заключается в выделении общей линейной части, присутствующей в нескольких сигналах, вычитании проекции на неё, и повторении такого процесса ортогонализации.

Определим векторы $\vec{V}_i^{(n)}$ из условия, что для источников в виде диполей, расположенных на сфере радиуса $R_{\text{сф}}$ (для всех возможных ϑ и φ), проекции измеряемых полей $\vec{V}(\vec{R}_{\text{сф}}, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^N$ на эти векторы будут убывать с увеличе-

нием радиуса сферы как $R_{\text{сф}}^n$, при этом в проекции участвует ортогональное дополнение к уже выделенной части пространства сигналов:

$$\vec{v}_i^{(n)} : \lim_{R_{\text{сф}} \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}^{(i)}) \cdot \vec{V}(\vec{R}_{\text{сф}}, \vartheta, \varphi) \cdot \vec{v}_i^{(n)} R_{\text{сф}}^n = \text{const} > 0 \quad (6.9)$$

Пространство $\mathbf{P}^{(n)} = \text{Span} \{ \vec{v}_i^{(n)} \}$ как линейная оболочка векторов $\vec{v}_i^{(n)}$, представляет собой подпространство убывающих как R^n сигналов из пространства всех сигналов $\mathbb{R}^N$.

Принимая во внимание выражения (6.4) и (6.5), подпространства $\mathbf{P}^{(n)} \neq \emptyset$, начиная с $n > 1$ для электрических и $n > 2$ для магнитных диполей. Кроме того, пространство сигналов от удаленных источников, моделирующих источники шума, представляется как $\mathbf{I} = \sum_{n=0}^{n_{\text{max}}} \mathbf{P}^{(n)}$, где n_{max} есть конечная величина, поскольку ортогональные подпространства $\mathbf{P}^{(n)}$ рано или поздно исчерпают конечную размерность пространства сигналов $\mathbb{R}^N$:

$$\sum_{n=0}^{n_{\text{max}}} \text{rank}(\mathbf{P}^{(n)}) = N.$$

Выделение векторов $\vec{v}_i^{(n)}$ можно осуществить с помощью сингулярного разложения матрицы сигналов от множества удаленных источников. На рис. 6.8 представлены сингулярные числа матрицы сигналов удаленных источников при различных $R_{\text{сф}}$ от источников до измерительной системы. Видно, что пространство сигналов раскладывается на подпространства по скорости убывания чувствительности измерителя.

Приведенные на рис. 6.8 графики соответствуют идеальным датчикам (ориентированным по Z и регулярно расположенным). При использовании неидеального измерителя (см. далее) часть симметрии в расположении датчиков будет утрачена, и подпространства $\mathbf{P}^{(n)}$ будут иметь бóльшую размерность, которая, однако, меньше размерности соответствующих тейлоровских подпространств вследствие симметрии полей, создаваемых дипольными источниками.

Очевидно, что такая фильтрация позволяет сохранить больше информации о полезном сигнале.

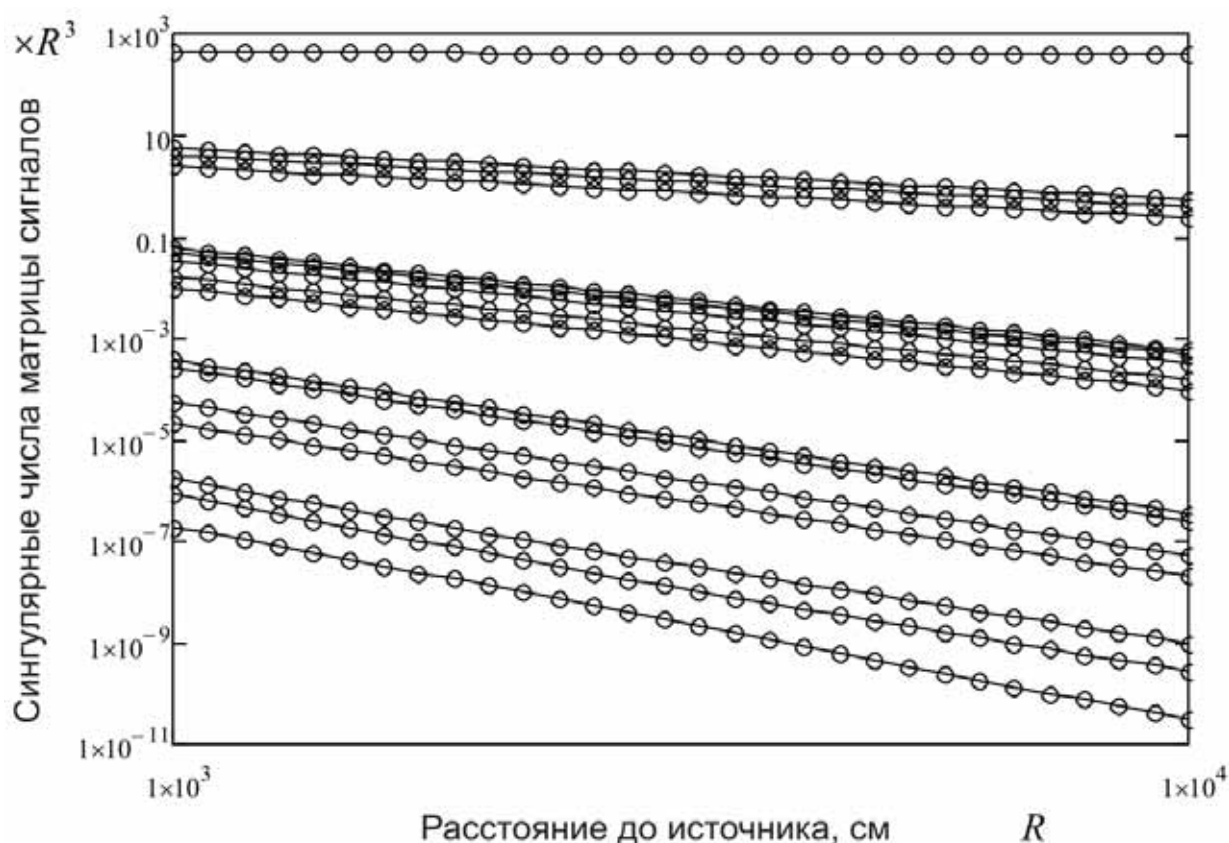


Рис. 6.8. График зависимости сингулярных чисел матрицы сигналов на идеальных сенсорах от ансамбля диполей, расположенных на сферах различного радиуса, от расстояния до сферы.

Применение пространственных фильтров к сигналам на неидеальных датчиках. В случае неидеальных сенсоров, как уже было отмечено выше, несмотря на возможность компенсации отклонений в площади отдельных катушек с помощью весовых коэффициентов, появившаяся чувствительность к поперечным компонентам поля приводит к снижению скорости убывания чувствительности измерителя с расстоянием до источника. Рис. 6.9 демонстрирует зависимости убывания отклика неидеальных датчиков с расстоянием до источника. Видно, что пространственная фильтрация, основанная на геометрии градиометра, уже не осуществляется вследствие нерегулярности размещения и ориентаций катушек.

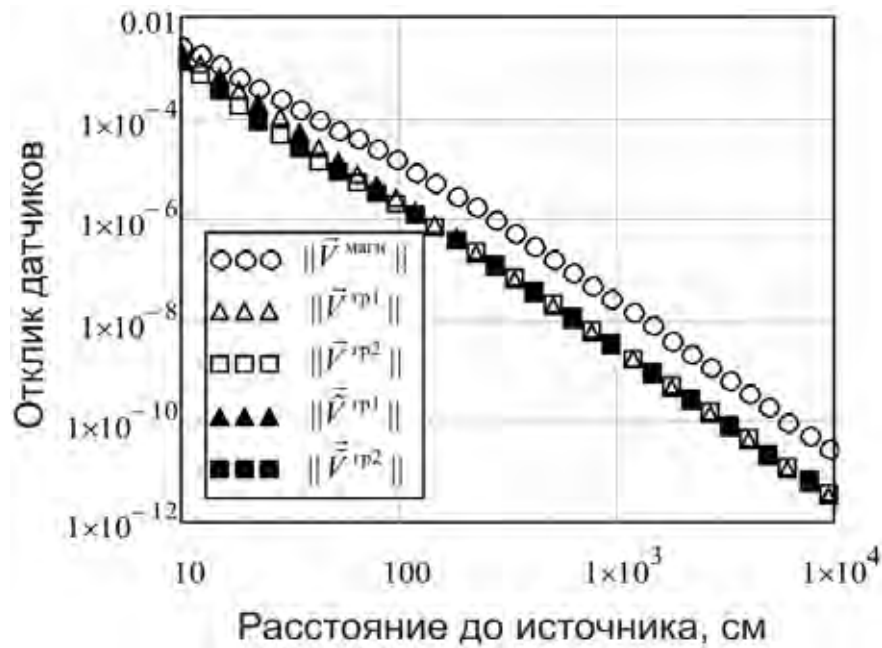


Рис. 6.9. Графики зависимостей чувствительности измерителя от расстояния до магнитного источника, неидеальные датчики.

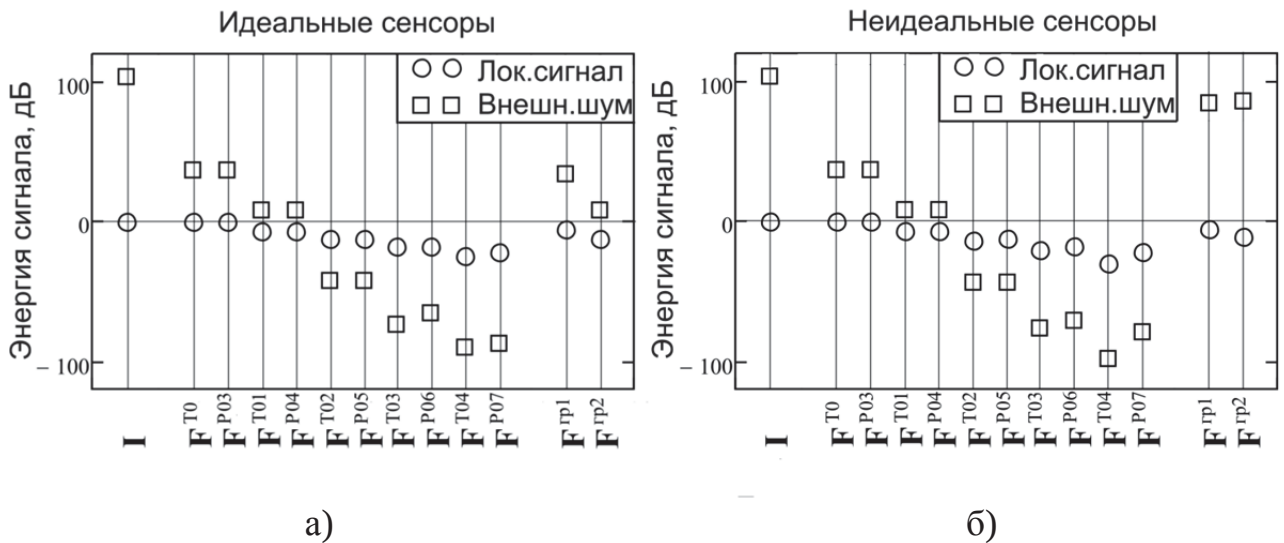


Рис. 6.10. Энергия сигнала после применения различных фильтров.

Рисунки 6.10а и 6.10б иллюстрируют ослабление полезного (от локальных источников) и шумового (от удаленных источников) сигналов при применении описанных фильтров (характеристики использованных при моделировании сигналов см. ниже в описании решения обратной задачи). Фильтры обозначены следующим образом: $\mathbf{F}^{T0N}$ — фильтрация тейлоровских членов порядка $0 - N$, $\mathbf{F}^{P0N}$ — фильтрация на основе численно определенных подпространств $\mathbf{P}^{(n)}$ для порядков убывания $0 - N$, $\mathbf{F}^{npN}$ — фильтр соответствующий исполь-

зованию градиометров N -го порядка. Из приведенных графиков видно, что применение ПРГ по полной системе датчиков, как и ожидалось, обеспечивает лучшую фильтрацию, чем использование 2– и 4– катушечных градиометров.

Применение пространственных фильтров к решению обратной задачи. Решение обратной задачи будем проводить с помощью метода наименьших квадратов, минимизируя суммы квадратичных отклонений между измеренным и рассчитанным (6.4) полем после применения к ним соответствующего фильтра (суммирование проводится по всем датчикам):

$$\begin{aligned}\chi^2(\vec{r}_Q, \vec{Q}) &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \cdot B_j^{\text{изм}} - \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \cdot B_j^{\text{мод}}(\vec{r}_Q, \vec{Q}) \right)^2 = \\ &= (\mathbf{F} \cdot \vec{V}^{\text{изм}} - \mathbf{F} \cdot \vec{V}^{\text{мод}}(\vec{r}_Q, \vec{Q}))^T (\mathbf{F} \cdot \vec{V}^{\text{изм}} - \mathbf{F} \cdot \vec{V}^{\text{мод}}(\vec{r}_Q, \vec{Q})) = (6.10) \\ &= (\vec{V}^{\text{изм}} - \vec{V}^{\text{мод}}(\vec{r}_Q, \vec{Q}))^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot (\vec{V}^{\text{изм}} - \vec{V}^{\text{мод}}(\vec{r}_Q, \vec{Q})),\end{aligned}$$

где $\mathbf{F}$ — матрица соответствующего пространственного фильтра.

Пусть токовый источник $\vec{Q}$ в точке $\vec{r}_Q$ представляется в виде $\vec{q}(\vec{r}) = \vec{Q} \delta(\vec{r} - \vec{r}_Q)$. Подставляя это распределение дипольных моментов в выражение (6.4), для i -го датчика получаем

$$B_i(\vec{Q}, \vec{r}_Q) = \vec{L}_i(\vec{r}_Q) \cdot \vec{Q}, \quad \vec{L}_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{R}_{Qi} \times \vec{n}}{|\vec{R}_{Qi}|^3}, \quad \vec{R}_{Qi} = \vec{r}_i - \vec{r}_Q \quad (6.11)$$

где $\vec{L}_i(\vec{r})$ — ведущее поле (Lead Field) [135], зависящее только от положения электрического диполя относительно магнитометра, и являющееся, по сути, векторной функцией Грина для точечного дипольного источника.

Таким образом, минимизация невязки (6.10) представляет собой задачу нелинейной оптимизации функции $\vec{L}_i(\vec{r}_Q)$ по 3 параметрам (компонентам $\vec{r}_Q$), а компоненты восстанавливаемого диполя $\vec{Q}$ могут быть найдены из линейной системы уравнений (6.11). Решение этой задачи проводилось методом Нелдера – Мида (Simplex Downhill) [312] от точного начального приближения.

В целях более реалистичного рассмотрения мы вводим малые случайные отклонения по положениям сенсоров измерительной системы, изображенной а рис. 6.6: ($\sigma_r = 0.1$ мм для каждой компоненты вектора положения), их ориентации ($\sigma_n = 3^\circ$) и чувствительности катушки ($\sigma_S = 0.1$). Предполагается, что введённые отклонения известны, т.е. погрешности изготовления были установлены калибровкой. Восстановление параметров локального источника проводилось для единичных электрических диполей по ансамблю положений в области $x \in [5;15]$ см и $y \in [5;15]$ см на различной глубине $z = 10, 15, 17$ см от системы датчиков. Внешний шум моделировался 500 случайными магнитными диполями, размещенными на расстояниях от 5 м до 50 м вокруг измерительной системы, с такими амплитудами, что среднеквадратичный уровень их суммарного поля был больше среднеквадратичного уровня поля от локальных источников на определенный фактор (задаваемое соотношение сигнал / шум). Усреднение результатов проводилось по 400 реализациям внешнего шума для каждого отдельного локального диполя. Численные эксперименты показали, что уровень ошибки линейно зависит от уровня шума вплоть до ошибок восстановления $\delta r_Q \leq 1.5$ см.

В таблице 6.1а представлены усредненные ошибки восстановления положения $\delta r_Q = \sqrt{\langle (\vec{r}_{Q_{исх}} - \vec{r}_{Q_{восст}})^2 \rangle}$, а в таблице 6.1б — усредненные ошибки восстановления моментов $\delta Q = \sqrt{\langle (\vec{Q}_{исх} - \vec{Q}_{восст})^2 / \vec{Q}_{исх}^2 \rangle}$ электрического диполя-источника при уровне внешнего сигнала от далеко расположенных источников 100дБ. Исходные сигналы подвергались тейлоровской фильтрации 2-го (удаление из сигнала проекций на подпространство компонент разложения с 0-й по 2-ю, матрица-фильтр $\mathbf{F}^{T02}$) и 3-го (удаление из сигнала проекций на подпространство компонент с 0-й по 3-ю, матрица-фильтр $\mathbf{F}^{T03}$) порядка, а также фильтрации на основе численно определенных подпространств $\mathbf{P}^{(n)}$, матрицы-фильтры $\mathbf{F}^{P05}$ и $\mathbf{F}^{P06}$.

Использование тейлоровских фильтров в данном случае дало практически такие же ошибки восстановления, как и использование фильтров на основе численно определенных подпространств $\mathbf{P}^{(n)}$. Преимущества последних, которые заключаются в сохранении большего количества информации в исходном сигнале, могут стать очевидными при использовании меньшего числа датчиков, при учете других источников шума (например, внутренних шумов измерителя) или при использовании другого метода решения обратной задачи.

Следует отметить также, что с увеличением порядка фильтра уровень фильтрации увеличивается (увеличивается отношение сигнал/шум). Однако при этом ослабляется не только шумовой сигнал, но и полезный, так что в условиях наличия шумов иной природы (внутреннего шума измерителя) дальнейшее увеличение порядка фильтра может приводить к снижению соотношения сигнал/шум за счет ослабления полезного сигнала на фоне некоррелированного шума, на который фильтр не будет оказывать существенного влияния.

Таблица 6.1

а) усредненные ошибки восстановления положения						б) усредненные ошибки восстановления моментов					
Z, см	Уровень шума, дБ	δr_Q , см				Z, см	Уровень шума, дБ	δQ			
		$\mathbf{F}^{T02}$	$\mathbf{F}^{P05}$	$\mathbf{F}^{T03}$	$\mathbf{F}^{P06}$			$\mathbf{F}^{T02}$	$\mathbf{F}^{P05}$	$\mathbf{F}^{T03}$	$\mathbf{F}^{P06}$
10	100	0,119	0,116	0,0039	0,0036	10	100	0,040	0,039	0,0016	0,0014
15		0,288	0,284	0,012	0,011	15		0,079	0,078	0,0039	0,0034
17		0,383	0,376	0,017	0,015	17		0,098	0,097	0,0053	0,0045

Описанный общий математический подход к построению пространственных фильтров в многосенсорных измерительных системах при наличии априорной информации о поведении измеряемых полей может быть применен и к другим измерительным системам и полям (например, к интерпретации данных измерения электрического потенциала на поверхности тела и т.п.). Применение этих фильтров к решению обратной задачи по восстановлению параметров ло-

кального диполя в условиях наличия шумового поля от далеко расположенных источников продемонстрировало высокую эффективность даже для неидеальных сенсоров в условиях очень высокого фоновых шума. Основным ограничивающим фактором применения описанного подхода может оказаться низкий динамический диапазон приемников. Эта проблема может быть ослаблена применением компенсирующих катушек или использованием в качестве элементарных сенсоров градиометров низкого порядка.

6.4. Временная фильтрация в многоканальной системе с разными уровнями шумов

Материал этого подраздела изложен в публикации автора [67]. Предложен метод нестационарной фильтрации МКГ сигналов с использованием референсного сигнала из ЭКГ. Дело в том, что обычно ЭКГ сигнал можно измерить с гораздо меньшими шумами, чем МКГ. Оба эти сигнала соответствуют одному и тому же физическому процессу электрической активности сердца. Они могут отличаться по форме (см. рис. 6.12 а и б), но главное – они одновременно ведут себя как острый импульс или медленная полуволна, или отсутствие сигнала, т.е. они значительно коррелированы, особенно по скорости изменения сигнала. Кроме того, кардиосигнал имеет довольно значительную скважность (см. рис. 6.13), что предлагает использовать идею нестационарной фильтрации: то есть рассматривать широкую полосу, когда происходят быстрые процессы в сердце, и узкую полосу – когда процессы медленные. Для реализации этой идеи было выбрано простейшее обратимое время-частотное преобразование – оконное преобразование Фурье (Short-Time Fourier Transform STFT). Хотя можно использовать и другие обратимые методы часо-частотного представления сигналов [96], хотя оптимальные фильтры для них могут отличаться от винеровского. Для улучшения временного разрешения мы используем сильно перекрывающиеся окна. Например, если используется модифицированное окно Барлетта-Ханнинга размером в 32 сэмпла:

$$w(n) = 0.62 - 0.48|(n/N - 0.5)| + 0.38\cos(2\pi(n/N - 0.5)) \quad (6.12)$$

то мы перекрываем сигнал в соседних окнах на $7/8$, т.е. следующее окно смещается на 4 сэмпла относительно предыдущего. При восстановлении сигнала по его спектрограмме можно использовать информацию из перекрывающихся окон. Разработанный алгоритм обратного оконного преобразования состоит в суммировании обратных преобразований Фурье от каждого моментального спектра с дальнейшим поэлементным делением на сумму соответствующих оконных функций, используемых при прямом STFT. При этих манипуляциях важно также избегать деления восстанавливаемого сигнала на близкие к нулю значения, которые появляются на краях оконных функций.

При анализе эффективности предложенного метода мы взяли реальные сигналы ЭКГ и МКГ, предоставленные фирмой CardioMag Img. Сигнал МКГ уже достаточно чист от шумов за счёт использования градиометров высокого порядка. В численном эксперименте мы использовали два метода фильтрации обычную винеровскую фильтрацию, когда известна оценка спектра сигнала и смеси сигнала и шума. Амплитудный спектр фильтра строится делением оценки спектра полезного сигнала на спектр смеси сигнала и шума. Вторым методом был предложенный метод нестационарной фильтрации. В этом методе мы делаем оконное преобразование Фурье сигнала, подлежащего фильтрации и далее проделываем процедуру фильтрации над каждым моментальным спектром, но при этом оценку амплитудного спектра смеси сигнала и шума мы берем из спектрограммы референсного сигнала в тот же момент времени. В одном эксперименте мы использовали в качестве референсного сигнала сам сигнал, который хотим восстановить (т.е. точную оценку спектра полезного сигнала), во втором эксперименте в качестве референсного использовался сигнал из канала ЭКГ, который имеет ту же динамику спектра но отличается по форме. В численных экспериментах брался чистый сигнал, к нему добавлялся шум, измерялось соотношение сигнал/шум и откладывалось по оси абсцисс, далее к сигналу применялся один из двух описанных выше методов фильтрации (стационарная винеровская и нестационарная на основе STFT), у сигнал после фильтрации измерялось соотношение сигнал/шум (путём сравнения с исходным сигналом), результат откладывался по оси ординат. Численный эксперимент повторялся несколько раз с од-

ним уровнем входного шума и разными реализациями шума, и результаты усреднялись для получения более гладкой кривой. В результате были получены кривые эффективности фильтрации для разных уровней шума на входе (рис. 6.11).

Как видно из представленных графиков, для рассматриваемого кардиосигнала преимущество, получаемое от использования нестационарной фильтрации составляет около 4 дБ. Использование сигнала ЭКГ в качестве референсного имеет смысл при соотношении сигнал/шум на входе ниже 0 дБ, далее вносимые искажения могут оказаться сравнимыми или даже больше, чем при стационарной фильтрации. Этот участок определяется по насыщению на рис. 6.11.

На рис. 6.12 представлены временные зависимости референсного, исходного, зашумлённого и отфильтрованного сигнала. Отношение сигнал/шум для зашумлённого сигнала на графике составляла –20 дБ.

Рисунок 6.13 демонстрирует спектрограммы референсного, исходного, зашумлённого сигнала и восстановленного фильтрацией сигнала. Спектрограммы соответствуют сигналам рис. 6.12.

Итак, мы продемонстрировали, что нестационарные сигналы с закономерно изменяющимся моментальным спектром (такие как квази-периодические последовательности импульсов (pulse trains), которые встречаются в СШП связи или в ЭКГ/МКГ сигналах), когда имеется информация о моментальном спектре сигнала (например из параллельного, менее зашумлённого канала), то динамическая винеровская фильтрация с использованием оконного преобразования Фурье превосходит обычную стационарную винеровскую фильтрацию, особенно для сильно зашумлённых сигналов с низким входным отношением сигнал/шум.

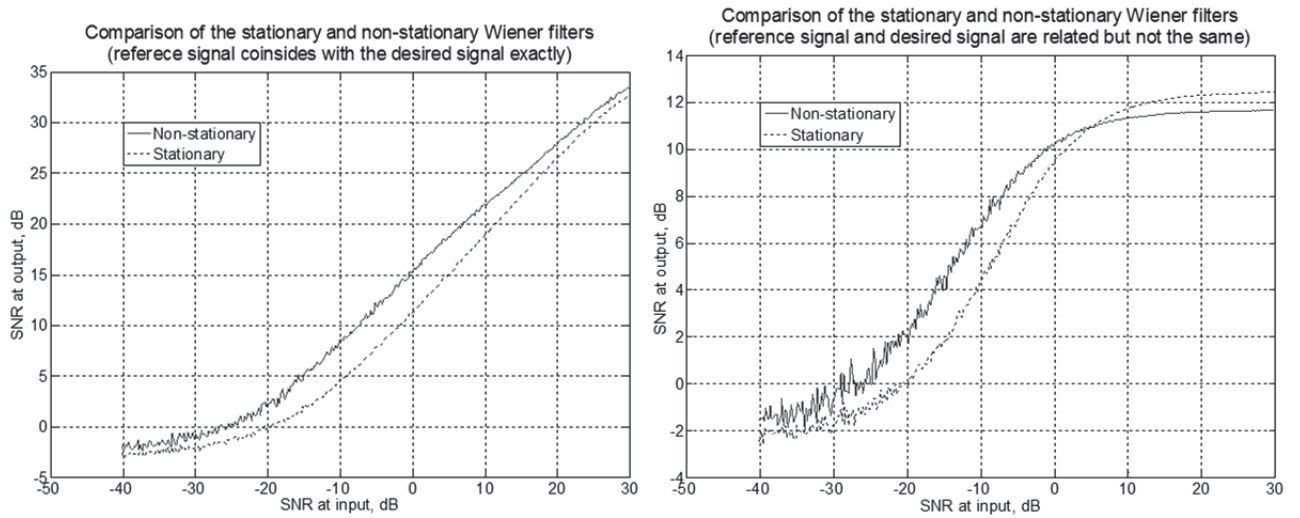


Рис. 6.11. Улучшение отношения сигнал/шум при стационарной винеровской фильтрации (нижние кривые) и при нестационарной (верхние кривые). Слева – в качестве референсного используется исходный сигнал до добавления шума. Справа – в качестве референсного используется сигнал ЭКГ.

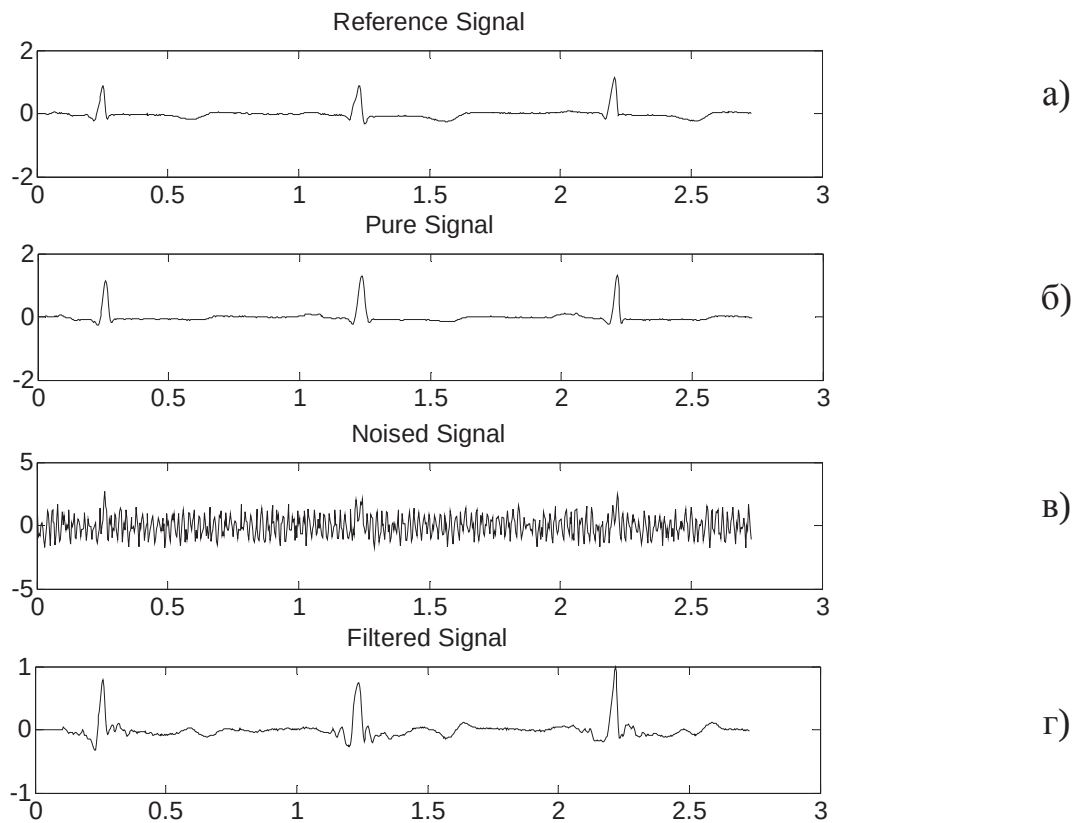


Рис. 6.12. Кардиографические сигналы: а) Сигнал ЭКГ, используемый в качестве референсного для построения нестационарного фильтра; б) незашумлённый сигнал МКГ; в) сигнал МКГ после добавления шума; г) сигнал МКГ после применения нестационарного фильтра на основе ЭКГ сигнала.

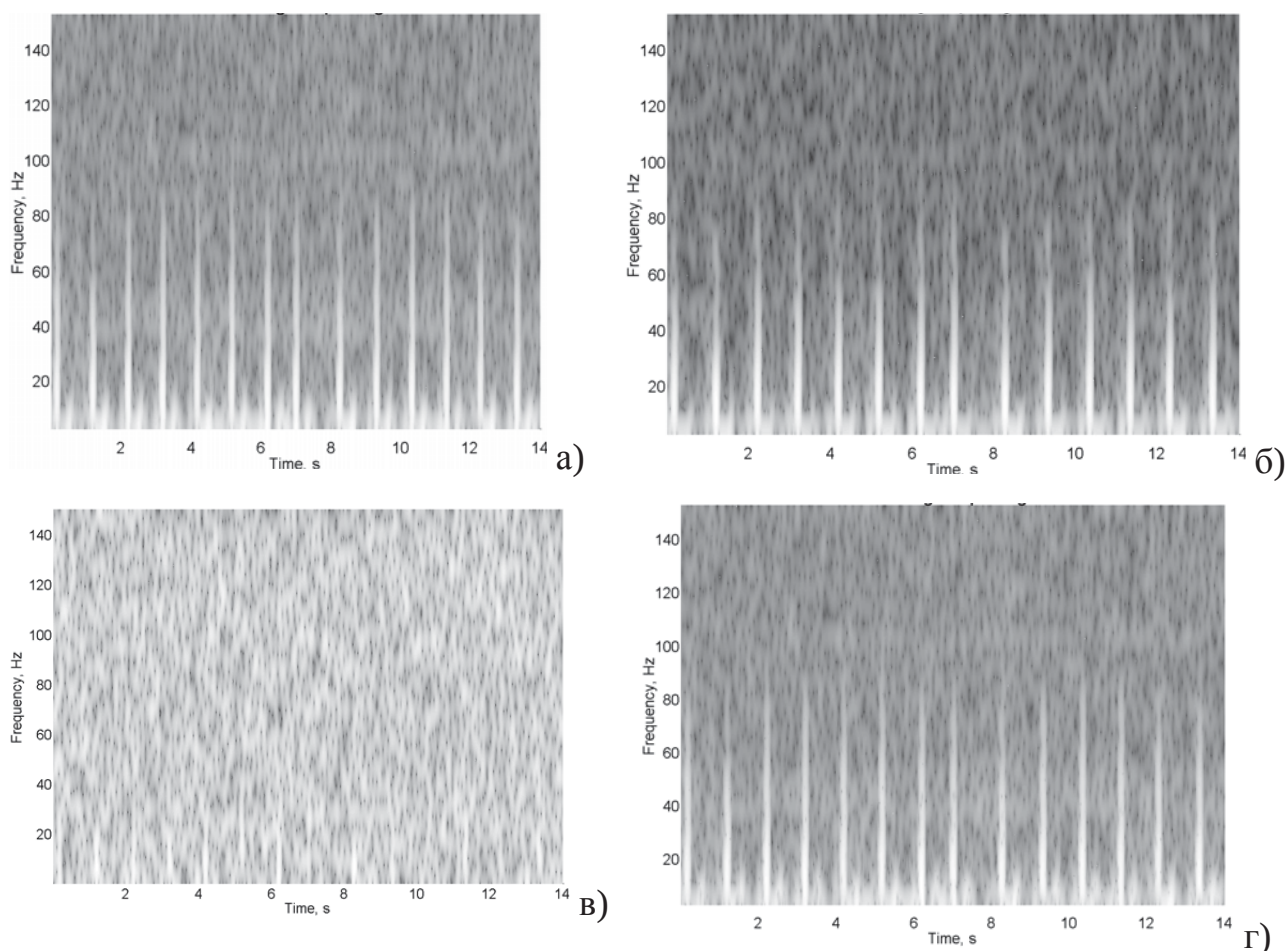


Рис. 6.13. Спектрограммы сигналов, полученные с помощью оконного преобразования Фурье: а) референсный сигнал ЭКГ; б) незашумлённый сигнал МКГ; в) зашумлённый сигнал МКГ; г) сигнала МКГ после фильтрации.

Выводы к разделу 6

На основе разложений полей по тейлоровским модам предложены новые методы пространственной фильтрации для решения обратных задач магнитостатики при измерении полей от локальных источников с помощью решетки датчиков при наличии сильных удаленных источников помех. Кроме того, были также построены методы фильтрации на основе метода собственных ортогональных мод, позволяющие с помощью численного моделирования оценивать матрицы ковариации влияния локальных и удаленных источников. На основе численного моделирования проведено сравнение и выявлены наиболее подходящие методы фильтрации и конфигурации магнитокардиографической измерительной системы с учетом неидеальности датчиков. Установлено, что, например, для проанализи-

рованной конфигурации датчиков, при уровне шума в 100 дБ возможно определение координат диполя, находящегося на глубине 10 см с точностью 0,12 см при использовании тейлоровской фильтрации второго порядка и с точностью 0,004 см при использовании фильтрации 3-го порядка. Точность определения компонент диполя составляет 4 % и 0,16 % соответственно.

Метод частотной фильтрации сигналов при наличии априорной оценки спектра сигнала был усовершенствован за счет нестационарности фильтрации, когда спектральная функция фильтра меняется во времени и накладывается на оконное преобразование Фурье фильтруемого сигнала. Продемонстрирована эффективность такого подхода на примере кардосигналов в магнитокардиографии. Например, в численном эксперименте использовался на входе магнитокардиографический сигнал с уровнем шума 0 дБ. На выходе стационарная фильтрация обеспечила уровень сигнал/шум примерно в 11,5 дБ, в то время как нестационарная фильтрация обеспечила на 4 дБ лучший уровень в 15,3 дБ.

Разработанные методы пространственной и временной фильтрации для магнитокардиографии имеют существенное практическое значение, так как позволяют создавать МКГ системы с использованием более дешевых и доступных феррозондовых датчиков, которые способны работать при комнатной температуре. Это позволит сделать технологию МКГ диагностики более доступной для клинической практики. В рамках международного проекта CRDF автором было разработано программное обеспечение для решения обратных задач в традиционных системах на основе криогенных сверхпроводящих датчиков магнитного поля. Сейчас на кафедре теоретической радиофизики Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина идет работа с участием автора по созданию прототипа магнитокардиографической системы с использованием феррозондовых датчиков, работающих при комнатной температуре. Разработанные в диссертации методы оказались очень кстати на этапе планирования исследования (для определения достижимости цели разработки), на текущем этапе оптимизации параметров установки, и понадобятся в дальнейшем для разработки алгоритмов обработки информации.

ВЫВОДЫ

В диссертации создано новое научное направление исследования волноведущих систем с поперечно-неоднородным заполнением в различных конфигурациях путем построения методов модовых разложений во временной области. Главной проблемой, на решение которой направлен построенный метод, является перенос понятия волноводных мод из частотной области во временную для случая поперечно-неоднородных волноводов, когда традиционные моды в частотной области зависят от частоты. Метод был применен для построения аналитическо-численных схем решения целого ряда задач, получены новые аналитические результаты для операторов дифракции. В ходе исследований было также выявлено и проанализировано несколько новых физических явлений.

Наиболее важные научные и практические результаты, которые способствовали решению научной задачи следующие:

1. Метод модового базиса для закрытых цилиндрических волноводов обобщен на случай волноводов с многосвязной областью поперечного сечения и факторизованной зависимостью материальных параметров среды. Для этого дополнительно сформулирована задача на собственные значения для ТЕМ-волн, обоснованно разделение функционального пространства решений на Е-, Н-, и Т- волны. Получена система эволюционных волноводных уравнений (СЭВУ), описывающая изменение временной формы модовых амплитуд при распространении волны вдоль волновода. СЭВУ, в частности, описывает межмодовые преобразования, происходящие между всеми типами волн. Этим преобразованиям соответствуют матрицы коэффициентов, часть из которых оказались тождественно нулевыми матрицами, для остальных были доказаны несколько соотношений, позволяющих выражать одни матрицы через другие. Доказанные свойства матричных коэффициентов были использованы при построении численной схемы решения СЭВУ. Получена схема явного вида, когда временная производная выражается через остальные слабые, что позволяет шагать во времени от начальных условий. Обобщение

метода на волноводы с многосвязной областью сечения позволило эффективно рассматривать распространение импульсов в актуальном классе линий передачи с квази-ТЕМ волнами, например, в экранированных микрополосковых линиях на диэлектрической подложке. По сравнению с традиционными методами предложенный метод имеет целый ряд преимуществ. Четырёхмерная задача заменяется двумерной задачей на определение базиса и одномерной нестационарной задачей распространения для нескольких связанных волн. Когда такую задачу решают распространёнными методами FDTD, FVTD или FEM, то дискретизировать нужно весь объем волновода (задача трехмерная в пространстве). Вместо этого в ММБ дискретизируются лишь несколько волновых каналов вдоль волновода (задача одномерная, векторная). Проведённые численные эксперименты установили быструю сходимость модовых разложений для сигналов с ограниченной спектральной полосой. Сходимость решений при увеличении числа учитываемых мод становится экспоненциальной, как только учтены все моды (конечное число), распространяющиеся в полосе частот сигнала. То есть получено экспоненциальную сходимость вместо степенной сходимости в традиционных сеточных методах. Следует отметить, что традиционные модовые методы во временной области непригодны для анализа распространения импульсных сигналов, поскольку требуют решения сложной граничной задачи на каждой частоте спектра сигнала. Вместо этого, при использовании предложенного подхода модовые распределения не зависят от частоты и должны быть определены только один раз, что продемонстрировано на примере анализа распространения импульса в экранированной микрополосковой линии.

2. Построен метод модового базиса для конических волноводов с многосвязной областью поперечного сечения и факторизованной зависимостью материальных параметров среды. Уравнения Максвелла представлены в операторном виде с отделенной угловой частью с угловыми зависимостями материальных параметров; введено функциональное пространство, которое обеспечивает самосопряжённость этого оператора. Доказано разложение функ-

ционального пространства решений на подпространства Е-, Н- и Т-волн, для каждого из них сформулированы граничные задачи на собственные значения для определения элементов базиса (мод). Получена и проанализирована система эволюционных волноводных уравнений, описывающая изменение временной формы модовых амплитуд с распространением вдоль радиального направления. В этом случае система выглядит как уравнение Клейна-Гордона-Фока с матричными коэффициентами и слагаемыми, описывающими межтиповые преобразования. Из анализа распространения импульса на простом примере излучения кольца с током установлено, что с увеличением радиуса количество распространяющихся мод увеличивается, и, из-за наличия межмодовой связи, их нужно учитывать в численной схеме решения. Таким образом, предлагаемая схема дает преимущества только для анализа распространения волн в окрестности центра возбуждения. Это может быть применено к анализу антенн с диэлектрическим заполнением, например, ТЕМ-рупоров с диэлектрическим заполнением. При этом количество мод, которые должны быть учтены в расчете, определяется количеством мод, распространяющихся при максимальном радиусе, где еще происходят межмодовые преобразования, то есть на апертуре антенны. Далее в свободном пространстве моды распространяются отдельно друг от друга, следовательно, если высшие моды не были возбуждены с заметной амплитудой на апертуре, то при дальнейшем распространении волны в дальнюю зону, они не внесут существенного вклада в излучаемое поле. Определение начальных амплитуд мод в свободном пространстве, возбуждаемых на апертуре антенны, может быть осуществлено описанным в пятом разделе методом переразложения (метод согласования мод).

3. Был построен метод модового базиса для анализа возбуждения и распространения импульсных сигналов в открытых диэлектрических волноводах. Особенностью открытых структур является то, что задача на собственные значения для определения мод имеет непрерывный спектр. Как следствие, модовые разложения уже являются не суммами, а интегралами. То есть мо-

ды зависят от спектрального параметра, по которому ведется интегрирование. Это требует, в частности, особого внимания при нормировании базисных функций. В результате получена система интегро-дифференциальных эволюционных волноводных уравнений, в которой роль матричных коэффициентов играют ядра интегралов, описывающих межмодовые и межтиповые преобразования. Эти ядра удовлетворяют тем же соотношениям, которые были получены ранее для матриц коэффициентов в закрытом волноводе. Разработана численная схема решения системы интегро-дифференциальных уравнений, основанная на использовании метода моментов. Спектральные характеристики представлены в виде разложения по системе кусочно-постоянных интервальных функций. Построены и пронормированы модовые функции для круглого диэлектрического волновода. Получены ядра межмодовых преобразований, для них получены матрицы в рамках метода моментов. В результате система интегро-дифференциальных уравнений была сведена к системе матричных дифференциальных уравнений, для которой, аналогично второму разделу, была построена явная конечно-разностная расчетная схема. Проведено моделирование распространения импульса. Для верификации результатов была создана расчетная программа на основе метода FDTD для тел вращения (BOR-FDTD) с сопровождающим окном, позволяющая при ограниченном размере вычислительного объема моделировать распространение головной части импульсной волны на значительные расстояния. Подтверждено совпадение результатов обоих методов.

4. В результате численного моделирования во временной области процесса возбуждения и распространения импульсного сигнала в открытом диэлектрическом волноводе выявлено и проанализировано новое физическое явление в виде импульсной поверхностной волны-предвестника, которая распространяется вдоль волновода со скоростью света в свободном пространстве, сохраняя свою пространственную структуру при распространении. Эта волна возникает благодаря преломлению части излучения от источника под углами, близкими к углу полного внутреннего отражения. Кроме того, волны от

источника, прошедшие через границу под бóльшими углами, формируют излучаемое поле в виде сферической волны. На границе диэлектрика этот сферический фронт переходит в импульсную поверхностную волну. Благодаря эффекту, который сходен по механизму с черенковским излучением, происходит формирование конического фронта вглубь диэлектрика, распространяющегося под углом критического преломления к границе. Скорость распространения этого конического фронта в перпендикулярном к нему направлении равна скорости света в диэлектрике, а скорость его распространения вдоль оси волновода соответствует скорости света в окружающем свободном пространстве. Когда этот конический фронт доходит до оси, он становится расширяющимся коническим фронтом и снова падает на границу диэлектрик-воздух под критическим углом, образуя следующий лепесток поверхностной волны. В результате формируется волновая структура наподобие ножниц, которая распространяется вдоль волновода в виде предвестника основной части волны со скоростью света в свободном пространстве. Было исследовано также излучение такой волны с конца диэлектрического волновода, имеющего конический конец, для того чтобы преломление большей части этого фронта (по поляризации) происходило под углом Брюстера. Обнаруженный эффект имеет значительное практическое значение, поскольку открывает путь к созданию ряда новых резонансных элементов, основанных на взаимодействии таких конических фронтов с коническими зеркалами и плоской поверхностью.

5. На основе метода разложения волнового пучка в интеграл по бесселевым модам и применения к нему оптимальной квадратуры, был создан вычислительный метод, с помощью которого проанализированы изменения характеристик кривизны импульсного волнового пучка при распространении. По аналогии с известным в частотной области понятием фазового центра было предложено ввести понятие отдельных амплитудного и временного центра для адекватного описания поведения импульсных полей в промежуточной зоне импульсных антенн. Амплитудный центр определяет точку, от которой

происходит уменьшение амплитуды фронта в дальней зоне по обратной степенной зависимости. В свою очередь временной центр определяет центр кривизны фронта, то есть он нужен для описания параксиальной части пучка. Выявлены особенности поведения импульсного волнового пучка, образуемого гауссовым распределением токов на плоскости при импульсном возбуждении лягеровским импульсом. Амплитудный центр является интегральной характеристикой распространения пучка, в то время как временной центр является мгновенной характеристикой фронта и меняется с распространением. Установлено, что временной центр изначально находится на бесконечности позади плоскости возбуждения, что соответствует плоскому фронту в ближней зоне пока дифракционное расплывание еще не началось. Далее с распространением волны ее центр кривизны (временной центр) приближается к плоскости возбуждения и пересекает ее, выходя на постоянный уровень где-то на расстоянии 6-7 поперечных размеров пучка впереди плоскости возбуждения. В то же время установлено, что амплитудный центр всегда находится позади плоскости, с уменьшением поперечных размеров пучка он ожидаемо приближается к плоскости возбуждения (переход к точечному источнику). Проведенный анализ может быть использован для компактного и при этом достаточно точного описания полей импульсных антенн в ближней и промежуточной зонах.

6. Получены в явном виде выражения для операторов дифракции типа свертки, описывающих изменение волновой формы модовой амплитуды при дифракции на плоской границе раздела двух магнито-диэлектрических проводящих сред в волноводе. Определены формулы для особых случаев: изоимпедансных сред, изорефракционных сред. Установлено, что для границы изоимпедансных сред мгновенная часть операторов дифракции оказывается нулевой, однако резонансный «хвост» остаётся. В то же время на границе изорефракционных сред резонансная часть становится нулевой, происходит только мгновенное преобразование с сохранением временной формы волны и изменением амплитуды.

7. Проанализированы физические эффекты, которые возникают при падении импульсной Е-волны на границу проводящей среды в волноводе. При этом продольная компонента электрического поля в сечении волновода создает суммарный поток заряда проводимости от поверхности в глубину среды. На основе предварительно полученных операторов дифракции для этого случая в аналитическом виде получены также операторы, позволяющие вычислять временные зависимости поверхностного заряда и волны объемного заряда, возникающей за границей. Выявлены и объяснены колебания поверхностного и объемного зарядов вблизи границы, которые возникают при этом процессе. В частности установлено, что показатель затухания этих колебаний соответствует потере энергии поверхностной волной на границе проводящей среды. Проанализированы случаи возбуждения импульсом и циклом, что приводит к экспоненциальному и колебательному режимам соответственно.
8. Предложено численно-аналитический метод решения задач волноводной дифракции на основе модовых перераспределений непосредственно во временной области. Этот метод (согласование мод) является одним из широко применяемых в частотной области методов изучения дифракции на сочленениях волноводов, имеющих нулевой объем. Его суть заключается в разложении полей на апертуре и на фланце по системе мод узкой и широкой части волновода и проектировании на другой базис волн. Это приводит к матричной формулировке граничных условий. В частотной области это матричное уравнение должно выполняться на каждой частоте спектра. В свою очередь, в предложенном подходе установлена аналогичная матричная связь, используемая для сшивания полей в каждый момент времени при моделировании распространения волны. С помощью этого метода, в частности, было исследовано излучение импульсной волны простыми конфигурациями импульсных антенн, например, биконической антенной. Такая антенна может рассматриваться как стык биконической линии, в которой есть свой набор отдельных мод, со свободным пространством, в котором распространяются сферические гармоники. Полученные результаты сравнивались с очень похо-

жим по топологии процессом дифракции импульсной волны на стыке коаксиального и круглого волноводов. Результаты сравнивались и с моделированием известными методами в частотной (MOM) и временной области (FVTD), что подтвердило их достоверность. Обсуждены преимущества предложенного подхода по сравнению с прямыми численными методами.

9. Проведен физический анализ аномального поглощения в тонких проводящих проволочках, когда сечение поглощения на несколько порядков (например, до 10^5 в максимуме для медного провода радиусом 2 мкм) превышает геометрические размеры объекта, причем этот эффект является сверхширокополосным. Предложена и проанализирована физическая модель, учитывающая последовательно включенные резистивную и индуктивную нагрузки. Результаты сравнивались с точной формулой, полученной разложением плоской волны на цилиндрические волны и точным учетом граничных условий. Эта модель объясняет различные режимы процесса поглощения (резистивного, индуктивного взаимодействия, скин-эффекта). Получены асимптотики соответствующих зависимостей коэффициента поглощения от параметров задачи – длины волны, радиуса и проводимости проволоки. Проведенный физический анализ дает возможность более эффективно создавать поглощающие структуры на основе этого эффекта. Например, установленная зависимость поглощения от индуктивности позволила предложить конфигурации из проволок в виде винтовых линий или бифилярных винтовых линий для снижения индуктивности и усиления эффектов поглощения. На основе этого явления возможно создание эффективных нерезонансных широкополосных поглотителей для применения в безэховых камерах, задачах маскировки от радиолокационного обнаружения, обеспечения электромагнитной совместимости и тому подобное.
10. На основе разложений полей по тейлоровским модам предложены новые методы пространственной фильтрации для решения обратных задач магнитостатики при измерении полей от локальных источников с помощью решетки датчиков при наличии сильных удаленных источников помех. Кроме того,

были также построены методы фильтрации на основе метода собственных ортогональных мод, позволяющие с помощью численного моделирования оценивать матрицы ковариации влияния локальных и удаленных источников. На основе численного моделирования проведено сравнение и выявлены наиболее подходящие методы фильтрации и конфигурации магнитокардиографической измерительной системы с учетом неидеальности датчиков. Установлено, что, например, для проанализированной конфигурации датчиков, при уровне шума в 100 дБ возможно определение координат диполя, находящегося на глубине 10 см с точностью 0,12 см при использовании тейлоровской фильтрации второго порядка и с точностью 0,004 см при использовании фильтрации 3-го порядка. Точность определения компонент диполя составляет 4 % и 0,16 % соответственно.

11. Метод частотной фильтрации сигналов при наличии априорной оценки спектра сигнала был усовершенствован за счет нестационарности фильтрации, когда спектральная функция фильтра меняется во времени и накладывается на оконное преобразование Фурье фильтруемого сигнала. Продемонстрирована эффективность такого подхода на примере кардосигналов в магнитокардиографии. Например, в численном эксперименте использовался на входе магнитокардиографический сигнал с уровнем шума 0 дБ. На выходе стационарная фильтрация обеспечила уровень сигнал/шум примерно в 11,5 дБ, в то время как нестационарная фильтрация обеспечила на 4 дБ лучший уровень в 15,3 дБ.
12. Разработанные методы пространственной и временной фильтрации для магнитокардиографии имеют существенное практическое значение, так как позволяют создавать МКГ системы с использованием более дешевых и доступных феррозондовых датчиков, которые способны работать при комнатной температуре. Это позволит сделать технологию МКГ диагностики более доступной для клинической практики. В рамках международного проекта CRDF автором было разработано программное обеспечение для решения обратных задач в традиционных системах на основе криогенных сверхпровод-

дящих датчиков магнитного поля. Сейчас на кафедре теоретической радиопроизики Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина идет работа с участием автора по созданию прототипа магнитокардиографической системы с использованием феррозондовых датчиков, работающих при комнатной температуре. Разработанные в диссертации методы оказались очень кстати на этапе планирования исследования (для определения достижимости цели разработки), на текущем этапе оптимизации параметров установки, и понадобятся в дальнейшем для разработки алгоритмов обработки информации.

Перспективными направлениями дальнейших исследований могут быть: применение метода модового базиса для анализа распространения импульсных сигналов в диспергирующих, нелинейных, нестационарных средах; развитие модовых разложений для секториального волновода (распространение в радиальном направлении в цилиндрической геометрии) и для импульсных волн на клиновидных структурах; развитие методов анализа нерегулярных волноводов на основе предложенных модовых разложений во временной области; применение разработанного недавно более развитого математического аппарата для совершенствования модовых переразложений во временной области; создание и анализ новых резонансных конических структур на основе обнаруженного эффекта импульсной поверхностной волны; создание и анализ поглощающих структур из тонких проволок более сложных геометрических конфигураций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основные научные статьи автора:

1. Бутрым А. Ю. Сравнение двух методов локализации источника магнитного поля в задачах магнитокардиологии / А. Ю. Бутрым, Ю. В. Дурнева, С. Н. Шульга // Радиофизика и радиоастрономия. – 2006. – Том 11, № 4. – С. 397-404.
2. Кочетов Б. А. Моделирование голографического радара с дискретной и непрерывной апертурой / Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. № 712 – “Радіофізика та електроніка”. – 2006. – Вип. №10. – С. 76-79.
3. Butrym A. Yu. Resistive Loading that Does not Reduce Performance of a Pulse Antenna / A. Yu. Butrym, N. N. Kolchigin, S. N. Pivnenko // Electromagnetic Phenomena. – 2007. – Vol. 7, No. 1(18). – P. 71-76.
4. Butrym A. A Tapered Coplanar Strip Antenna with Improved Matching / A. Butrym, S. Pivnenko // Chapter 38 in Ultra-Wideband Short-Pulse Electromagnetics 7 book (ISBN: 9780387377285) / F. Sabath, E. L. Mokole, U. Schenk, D. Nitsch (Eds.). – Berlin: Springer, 2007. – P. 344-355.
5. Bagatskaya O. One-dipole inverse problem of magnetostatics for reconstruction of heart-torso electric activity from magnetocardiography measurements / O. Bagatskaya, A. Butrym, Yu. Durneva, S. Shulga // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. № 756 – “Радіофізика та електроніка”. – 2007. – Вип. 11. – С. 47-50.
6. Багацька О. В. Новий метод локалізації джерела магнітного поля в задачах магнітокардіографії / О. В. Багацька, О. Ю. Бутрим, Ю. В. Дурнева, С. М. Шульга // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – Вип. 1. – С. 212-217.
7. Дурнева Ю. В. Сравнение характеристик чувствительности датчиков магнитного поля на основе программно реализуемых градиометров разного порядка для магнитокардиографических измерений / Ю. В. Дурнева, А. Ю. Бутрым, С. Н. Шульга // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №4. – С. 433-439.
8. Durneva Yu. V. A model of several dipoles in free space in the primary processing of magnetocardiographic data / Yu. V. Durneva, A. Yu. Butrym, S. N. Shul'ga //

- Journal of Communications Technology and Electronics. –2008. – Volume 53, Issue 11. – P. 1339-1344.
9. Бутрым А. Ю. Метод модового базиса для открытых диэлектрических структур / А. Ю. Бутрым, М. Н. Легенький // Вестник ХНУ, Серия “Радиофизика и электроника”. – 2008. – № 806. – С. 44-47.
 10. Бутрым А. Ю. Метод модового базиса во временной области для волновода с поперечно неоднородным многосвязным сечением. 1. Общая теория метода / А. Ю. Бутрым, Б. А. Кочетов // Радиофизика та радиоастрономія. – 2009. – Том 14, № 2. – С. 162-173.
 11. Бутрым А. Ю. Метод модового базиса во временной области для волновода с поперечно неоднородным многосвязным сечением. 2. Пример применения метода / А. Ю. Бутрым, Б. А. Кочетов // Радиофизика та радиоастрономія. – 2009. – Том 14, № 3. – С. 266-277.
 12. Butrym A. Y. Charge transport by a pulse e-wave in a waveguide with conductive medium / A. Y. Butrym, M. N. Legenkiy // Progress in Electromagnetics Research B. – 2009. – Vol. 15. – P. 325-346.
 13. Antyufeyeva M. S. Transient electromagnetic fields in a cavity with dispersive double negative medium / M. S. Antyufeyeva, A. Y. Butrym, O. A. Tretyakov // Progress in Electromagnetics Research M. – 2009. – Vol. 8. – P. 51-65.
 14. Durneva Yu. V. Spatial noise filtering in magnetocardiographic measurements / Yu. V. Durneva, A. Yu. Butrym, S. N. Shul’ga // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2009. – Volume 54, Issue 11. – P. 1292-1297.
 15. Костев А. Ю. Определение оптимальных параметров измерительной магнитокардиографической гексагональной решетки / А. Ю. Костев, А. Ю. Бутрым, С. Н. Шульга // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія ”Радіофізика та електроніка”. – 2009. – №883, випуск 15. – С. 25-29.
 16. Butrym A. Yu. Mode Expansion in Time Domain for Conical Lines with Angular Medium Inhomogeneity / A. Yu. Butrym, B. A. Kochetov // Progress in Electromagnetics Research B. – 2010. – Vol. 19. – P. 151–176.
 17. Legenkiy M. N. Method of mode matching in time domain / M. N. Legenkiy, A. Y. Butrym // Progress In Electromagnetics Research B. – 2010. – Vol. 22 – P. 257-283.
 18. Легенький М. Н. Расчет импульсного излучения круглой диэлектрической стержневой антенны методом согласования мод во временной области /

- М. Н. Легенький, А. Ю. Бутрым, Н. Н. Колчигин // Радиотехника. – 2010. – Вып. 162. – С. 5-12.
19. Legenkiy M. Pulse signals in open circular dielectric waveguide / M. Legenkiy, A. Butrym // Progress in Electromagnetics Research Letters. – 2011. – Vol. 22. – P. 9-17.
 20. Shi He. Interaction of Electromagnetic Waves in a Waveguide with Very Thin Wires / Shi He, S. N. Shulga, N. G. Kokodiy, N. N. Gorobets, V. I. Kiiko, A. Yu. Butrym, Yu Zheng // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2011. – Volume 56, Issue 10. – P. 1193-1196.
 21. Легенький М. Распространение нестационарного электромагнитного поля в диэлектрическом волноводе / М. Легенький, А. Бутрым // Физические основы приборостроения. – 2012. – Т. 1, №1. – С. 23-35.
 22. Бутрым А. Ю. Использование сопровождающего окна в методе BOR-FDTD для расчёта поведения предвестника в диэлектрическом волноводе / А. Ю. Бутрым, Е. О. Коломиец, М. Н. Легенький // Вісник Харківського національного університету, серія: фізична «Ядра, частинки, поля». – 2012. – № 54. – С. 139-141.
 23. Kochetov B. A. Axially symmetric transient electromagnetic fields in a radially inhomogeneous biconical transmission line / B. A. Kochetov, A. Y. Butrym // Progress in Electromagnetics Research B. – 2013. – Vol. 48. – P. 375-394.
 24. Legenkiy M. N. Excitation and propagation of a fast pulse guided wave in a circular dielectric waveguide / M. N. Legenkiy, A. Yu. Butrym // Радиофизика и радиоастрономия. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 147–151.
 25. Бутрым А. Ю. Построение полюсной модели дисперсии диэлектрика на основе результатов измерений показателя преломления и показателя поглощения в ограниченной полосе частот / А. Ю. Бутрым, М. С. Антюфеева, В. В. Хардіков, С. Н. Шульга // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. № 1067 – “Радіофізика та електроніка”. – 2013. – Вип. 22. – С. 3-9.
 26. Legenkiy M. N. Physical Features of Mode Basis in Open Dielectric Structures with Discrete and Continuous Spectrum / M. N. Legenkiy, A. Y. Butrym // Telecommunications and Radio Engineering. – 2014. – Vol. 73, Iss. 10. – P. 863-880.

Дополнительные научные статьи автора:

27. Джин Юн. Конечно-разностная схема во временной области и аналитическое решение уравнения Клейна-Гордона / Джин Юн, Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. № 712 – “Радіофізика та електроніка”. – 2006. – Вип. №10. – С. 91-94.
28. Butrym A. CPW to CPS Transition for Feeding UWB Antennas / A. Butrym, S. Pivnenko // IEEE Aerospace and Electronic Systems. – 2006. – Vol. 21, No. 2. – P. 21-23.
29. Думин А. Н. Нестационарные электромагнитные поля в неограниченном пространстве с произвольным заполнением идеальной средой / А. Н. Думин, О. А. Думина, А. Ю. Бутрым, О. А. Третьяков // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. № 756 – “Радіофізика та електроніка”. – 2007. – Вип. 11. – С. 61-64.
30. Дурнева Ю. В. Использование модели нескольких диполей в свободном пространстве для первичной обработки результатов магнитокардиографических измерений / Ю. В. Дурнева, А. Ю. Бутрым, С. Н. Шульга // Радиотехника и электроника. – 2008. – Том 53, №11. – С. 1420-1425.
31. Кочетов Б. А. О сходимости модовых разложений по сферическим гармоникам во временной области / Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна Серія “Радіофізика та електроніка”. – 2009. – №883, выпуск 15. – С. 41-44.
32. Легенький М. Н. Построение модового базиса для открытых диэлектрических структур методом интегральных уравнений / М. Н. Легенький, А. Ю. Бутрым // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна Серія “Радіофізика та електроніка”. – 2009. – №883, выпуск 15. – С. 50-53.
33. Дурнева Ю. В. Пространственная фильтрация шумов в магнитокардиографических измерениях / Ю. В. Дурнева, А. Ю. Бутрым, С. Н. Шульга // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т.54, №11. – С.1362-1368.
34. Хе Ши. Взаимодействие электромагнитных волн в волноводе с очень тонкими проволочками / Хе Ши, С. Н. Шульга, Н. Г. Кокодий; Н. Н. Горобец, В. И. Кийко, А. Ю. Бутрым, Джин Юн // Радиотехника и электроника. — 2011. — Т. 56, № 10. — С. 1201-1204.

Публикации автора в трудах конференций:

35. Джин Юн. Анализ в ближней зоне поля импульсного волнового пучка, создаваемого гауссовым распределением линейно поляризованных токов на плоскости / Юн Джин, А. Ю. Бутрым // 2-й Международный радиоэлектронный форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития» МРФ-2005. Сборник научных трудов. Том V. Международная конференция «СВЧ и оптоэлектроника». – Харьков: АНПРЭ, ХНУРЭ. – 2005. – С. 47–50.
36. Butrym A. Processing band-limited antenna measurements to reconstruct antenna impulse response on example of resistively loaded Vivaldi antenna / A. Butrym, S. Pivnenko, N. Kolchigin // Proc. of the First European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2006), 6-10 November 2006, Nice (France). – 2006. – P. 1-5. doi: 10.1109/EUCAP.2006.4584608
37. Butrym A. Charge Transport by a Pulse E-Wave in a Waveguide Filled with Conductive Medium / A. Butrym, M. Lyogenkiy, Yu Zheng // Proc. of the Third International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'06), 18-22 September 2006, Sevastopol (Ukraine). 2006. – P. 285-288. doi: 10.1109/UWBUS.2006.307231
38. Butrym A. Time and Amplitude Centre of an Impulse Wavebeam / A. Butrym, Yu Zheng // Proc. of the Third International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'06), 18-22 September 2006, Sevastopol (Ukraine). 2006. – P. 350-352. doi: 10.1109/UWBUS.2006.307253
39. Bagatskaya O. Two-dipole inverse problem of magnetostatics for reconstruction of heart electric activity from magnetocardiography measurements / O. Bagatskaya, A. Butrym, Yu. Durneva, S. Shulga, V. Tuz // Proc. of the 11th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'06), 26-29 June 2006, Kharkiv (Ukraine). – 2006. – P.132-134. doi: 10.1109/MMET.2006.1689723
40. Кочетов Б. А. Верификация метода модового базиса для многосвязных поперечно-неоднородных волноводов / Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым // Современные проблемы радиотехники и телекоммуникаций: 3-я междунар. молодёжная науч.-техн. конф., 16-21 апр. 2007 г.: тезисы докл. – Севастополь, 2007. – С. 301.
41. Кочетов Б. А. Точные решения одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с произвольным параметром для нестационарных задач электродинамики в сферической системе координат / Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым // Тезисы до-

- кладов на 7-й Харьковской конф. молодых учёных «Радиофизика и электроника» (YSC 2007), 12-14 декабря 2007, Харьков. – 2007. – С. 114.
42. Бутрым А. Эффективные модовые поглощающие условия для FDTD / А. Бутрым, М. Легенький // Тезисы докладов на 7-й Харьковской конф. молодых учёных «Радиофизика и электроника» (YSC 2007), 12-14 декабря 2007, Харьков. – 2007. – С. 115.
43. Butrym A.Yu. Mode Basis Method for Spherical TEM-Transmission Lines and Antennas / A.Yu. Butrym, B.A. Kochetov // Proc. of the 6th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07), 17-21 September 2007, Sevastopol (Ukraine). – 2007. – P. 243-245. doi: 10.1109/ICATT.2007.4425171
44. Butrym A. Yu. Comparison of absorbing boundary conditions for numerical analysis of periodic structures / A. Yu. Butrym, M. N. Legenkiy // Proc. of the 6th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07), 17-21 September 2007, Sevastopol (Ukraine). – 2007. – P. 239-242. doi: 10.1109/ICATT.2007.4425170
45. Butrym A. Yu. Sensitivity characteristics of different configurations of software gradiometers used in magnetocardiography / A. Yu. Butrym, Yu. D. Durnyeva, S. N. Shulga // Proc. of the 6th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07), 17-21 September 2007, Sevastopol (Ukraine). – 2007. – P. 317-319. doi: 10.1109/ICATT.2007.4425198
46. Butrym A. Transient spherical wave front steadying in the near zone of an antenna / A. Butrym, Zheng Yu // Proc. of the 6th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'07), 17-21 September 2007, Sevastopol (Ukraine). – 2007. – P. 246. doi: 10.1109/ICATT.2007.4425172
47. Butrym A. Yu. Absorbing Boundary Condition for FDTD Modeling of Waveguides with Lossy Medium / A. Yu. Butrym, M. N. Legenkiy // Proc. of the Sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves and Workshop on Terahertz Technologies (MSMW'07), 25-30 June 2007, Kharkov (Ukraine). – 2007. – P. 298-300. doi: 10.1109/MSMW.2007.4294641
48. Кочетов Б. А. Классификация собственных мод в поперечно-неоднородных волноводах / Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым // Радиоэлектроника и молодёжь в XXI веке: 12-й междунар. молодёжный форум, 1-3 апр. 2008 г.: тезисы докл. – Харьков, 2008. – С. 14.

49. Kochetov B. A. Calculation of Pulse Wave Propagation in a Quasi-TEM Line Using Mode Expansion in Time Domain / B. A. Kochetov, A. Yu. Butrym // Proc. of the 4th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'08), 15-19 September 2008, Sevastopol (Ukraine). – 2008. – P. 222–224. doi: 10.1109/UWBUS.2008.4669415
50. Antyufeyeva M. S. Transient oscillations in a cavity with dispersive double negative medium / M. S. Antyufeyeva, A. Yu. Butrym, O. A. Tretyakov // Proc. of the 4th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'08), 15-19 September 2008, Sevastopol (Ukraine). – 2008. – P. 252–254. doi: 10.1109/UWBUS.2008.4669426
51. Legenkiy M. N. Mode-matching in Time Domain / M. N. Legenkiy, Zheng Yu, A. Yu. Butrym // Proc. of the 4th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'08), 15-19 September 2008, Sevastopol (Ukraine). – 2008. – P. 225–227. doi: 10.1109/UWBUS.2008.4669416
52. Kochetov B. Some Exact Solutions of Transient Problems of Electrodynamics in Spherical Coordinate System Obtained by Symmetry Analysis of Klein-Gordon-Fock Equation / B. Kochetov, A. Butrym // Proc. of the 12th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'08), June 29 2008–July 2 2008, Odessa (Ukraine). – 2008. – P. 291–293. doi: 10.1109/MMET.2008.4580971
53. Legenkiy M. Mode basis method for open dielectric waveguides / M. Legenkiy, A. Butrym // Proc. of the 12th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'08), June 29 2008–July 2 2008, Odessa (Ukraine). – 2008. – P. 392–394. doi: 10.1109/MMET.2008.4581005
54. Butrym A. Application of optimal spatial filtering to measuring magnetic fields of local sources / A. Butrym, Yu. Durneva, S. Shulga // Proc. of the 12th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'08), June 29 2008–July 2 2008, Odessa (Ukraine). – 2008. – P. 412–414. doi: 10.1109/MMET.2008.4581012
55. Кочетов Б. А. Распространение импульсных волн в радиально-неоднородных несимметричных биконических линиях / Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым // Тезисы докладов на 8-й Конф. молодых учёных «Радиофизика, Электроника и Биофизика» (YSC 2008), 25-27 ноября 2008, Харьков. – 2008. – С. 130.
56. Бутрым А. Решение задачи импульсного излучения из открытого конца волновода методом согласования мод во временной области / А. Бутрым,

- М. Легенький // Тезисы докладов на 8-й Конф. молодых учёных «Радиофизика, Электроника и Биофизика» (YSC 2008), 25-27 ноября 2008, Харьков. – 2008. – С. 131.
57. Antyufeyeva M. S. Microwave Oscillations in a Cavity with Dispersive Double Negative Medium / M. S. Antyufeyeva, A. Yu. Butrym, O. A. Tretyakov // Proc. of the 2008 Microwaves Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS-2008), 22-24 September 2008, Kiev (Ukraine). – 2008. – P. 105-107.
doi: 10.1109/MRRS.2008.4669556
58. Butrym A. Yu. Numerical analysis of simple TEM conical-like antennas using mode matching in time domain / A. Yu. Butrym, B. A. Kochetov, M. N. Legenkiy // Proc. of the 3rd European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2009), 23-27 March 2009, Berlin (Germany). – 2009. – P. 3471-3475.
59. Legenkiy M. N. Mode basis construction for open dielectric circular waveguide by integral equation method / M. N. Legenkiy, A. Yu. Butrym // Proc. of the 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'10), 21-26 June 2010, Kharkov (Ukraine). – 2010. – P. 1-3. doi: 10.1109/MSMW.2010.5546185
60. He Shi. Interaction of electromagnetic waves in a waveguide with very thin wires / Shi He, S. N. Shulga, N. G. Kokodiy, N. N. Gorobets, V. I. Kiiko, A. Y. Butrym // Proc. of the 2010 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'10), 21-26 June 2010, Kharkov (Ukraine). – 2010. – P. 1-3.
doi: 10.1109/MSMW.2010.5546021
61. Legenkiy M. Modeling pulse radiation of rod antenna by method of mode matching in time domain / M. Legenkiy, A. Butrym // Proceedings of the 13th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'10), 6-8 September 2010, Kyiv (Ukraine). – 2010. – P. 1-4.
doi: 10.1109/MMET.2010.5611396
62. Kochetov B.A. Transient Wave Propagation in Radially Inhomogeneous Biconical Line / B.A. Kochetov, A.Yu. Butrym // Proc. of the 5th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'10), 6-10 September 2010, Sevastopol (Ukraine). – 2010. – P. 71-73.
doi: 10.1109/UWBUSIS.2010.5609099
63. Legenkiy M. N. Impulse signal propagation in open dielectric circular waveguide / M. N. Legenkiy, A. Yu. Butrym // Proc. of the 5th International Conference on Ul-

- trawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'10), 6-10 September 2010, Sevastopol (Ukraine). – 2010. – P. 119-121.
doi: 10.1109/UWBUSIS.2010.5609170
64. Butrym A. Yu. Mode expansions in time domain / A. Yu. Butrym // Proc. of the 5th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'10), 6-10 September 2010, Sevastopol (Ukraine). – 2010. – P. 49-51.
doi: 10.1109/UWBUSIS.2010.5609088
65. Legenkiy M. Moving frame BOR-FDTD approach for long time simulation of pulse precursor propagation in a dielectric waveguide / M. Legenkiy, A. Butrym // Proc. of the 2012 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'12), 28-30 Aug. 2012, Kharkiv (Ukraine). – 2012. – P. 172-175. doi: 10.1109/MMET.2012.6331278
66. Butrym A. Yu. Properties of pulse surface waves in a dielectric waveguide / A. Yu. Butrym, M. N. Legenkiy // Proceedings of the International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'12), 17-21 September 2012, Sevastopol (Ukraine). – 2012. – P. 309-311.
doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379814
67. Kostiev A. Y. Time-varying wiener filtering based on short-time Fourier transform / A. Y. Kostiev, A. Y. Butrym, S. N. Shulga // Proceedings of the International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'12), 17-21 September 2012, Sevastopol (Ukraine). – 2012. – P. 305-308. doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379813
68. Butrym A. Yu. Effects of TEM-horn antenna tapering / A. Yu. Butrym, M. N. Legenkiy, XiangYu Hao // Proceedings of the International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'12), 17-21 September 2012, Sevastopol (Ukraine). – 2012. – P. 215-217.
doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379784
69. Butrym A. Y. Anomalous wideband absorption in ultrathin copper wires / A. Y. Butrym, V. V. Zhurbenko // Proceedings of the International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'12), 17-21 September 2012, Sevastopol (Ukraine). – 2012. – P. 317-318.
doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379817
70. Kochetov B. A. Rigorous calculation of ultra short pulse propagation in a shielded microstrip line using coupled mode expansion in time domain / B. A. Kochetov, A. Y. Butrym // Proceedings of the International Conference on Ultrawideband and

- Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'12), 17-21 September 2012, Sevastopol (Ukraine). – 2012. – P. 284-287. doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379807
71. Butrym A. Yu. Mode expansions in time domain / A. Yu. Butrym // Proceedings of the International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'12), 17-21 September 2012, Sevastopol (Ukraine). – 2012. – P. 47-50. doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379727
 72. Legenkiy M. N. About possibility to create a small antenna based on inhomogeneous biconical line / M. N. Legenkiy, A. Yu. Butrym, M. S. Sharkova // Proc of the 2013 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'13), 23-28 June 2013, Kharkov (Ukraine). – 2013. – P. 470-472. doi: 10.1109/MSMW.2013.6622092
 73. Legenkiy M. N. Fast pulse guided wave in an optical waveguide / M. N. Legenkiy, A. Yu. Butrym // Proc of the 2013 International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'13), 23-28 June 2013, Kharkov (Ukraine). – 2013. – P. 207-209. doi: 10.1109/MSMW.2013.6622001
 74. Legenkiy M. N. Excitation of fast pulse guided wave in receiving dielectric rod antenna / M. N. Legenkiy, A. Yu. Butrym // Proc. of the IX International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'13), 16-20 Sept. 2013, Odessa (Ukraine). – 2013. – P. 444-446. doi: 10.1109/ICATT.2013.6650806
 75. Legenkiy M. Evaluation of On-Ground Object Radar Detectability Reduction / Maxim Legenkiy, Alexander Butrym, Mariya Antyufeyeva // Proceedings of the 2014 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'14). – 2014. – P. 254-257. doi: 10.1109/MMET.2014.6928746
 76. Legenkiy M. N. Diffraction of a Pulse Electromagnetic TM wave on lossy layer in a waveguide / M. N. Legenkiy, A. Yu. Butrym // Proceedings of the conference Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS'14), 15-19 September 2014, Kharkiv (Ukraine). – 2014. – P. 104-107.
 77. Butrym A. Yu. Time domain analysis of transient radiation of dipole in dielectric sphere / A. Yu. Butrym, M. N. Legenkiy // Proc. of the X International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT'15), 21-24 April 2015, Kharkiv (Ukraine). – 2015. – P. 1-3.

Прочие цитируемые источники:

- 78.Думін О. М. Нестационарні електромагнітні поля вісесиметричних випромінювачів: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.03 / О. М. Думін ; Харк. нац. ун-т ім. В.Н.Каразіна. — Х., 2000. — 16 с.
- 79.Бутрим О. Ю. Імпульсні сигнали у хвильоводах з неоднорідним заповненням та у щілинних антенах, що розширюються (аналіз у часовій області): Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.03 / О. Ю. Бутрим ; Харк. нац. ун-т ім. В.Н.Каразіна. — Х., 2005. — 189 с.
- 80.Джин Юн. Дифракція імпульсного хвильового пучка на межі розділу двох середовищ з втратами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.04.03 / Юн Джин; Харк. нац. ун-т ім. В.Н.Каразіна. — Х., 2006. — 16 с.
- 81.Антюфєєва М. С. Електромагнітні коливання в резонаторі, який заповнено нестационарним і дисперсійним середовищем: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.04.03 / М. С. Антюфєєва ; Харк. нац. ун-т ім. В.Н.Каразіна. — Х., 2010. — 19 с.
- 82.Кочетов Б. А. Нестационарні електромагнітні поля в поперечно-неоднорідних багатозв'язних циліндричних і конічних лініях передачі: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.04.03 / Б. А. Кочетов ; НАН України ; Ін-т радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова. — Х., 2011. — 19 с.
- 83.Легенький М. М. Розповсюдження та випромінювання імпульсних сигналів в діелектричних хвильоводах: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.04.03 / М. М. Легенький ; Харк. нац. ун-т ім. В.Н. Каразіна. — Х., 2011. — 19 с.
- 84.Почерняєв В. М. Наукові основи побудови пристроїв на частково заповнених діелектриком хвильоводах для радіотехнічних систем: Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.12.17 / В. М. Почерняєв ; Українська держ. академія зв'язку ім. О.С.Попова. — О., 1999. — 30 с.
- 85.Куриляк Д. Б. Розроблення аналітико-числових методів розв'язування крайових задач теорії дифракції для конічних, клиноподібних та циліндричних об'єктів: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.04.03 / Д. Б. Куриляк ; НАН України. Ін-т радіофізики та електрон. ім. О.Я.Усикова. — Х., 2002. — 32 с.
- 86.Куриляк Д. Б. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях / Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук. — Київ: Наук. думка, 2006. — 280 с.
- 87.Сіренко К. Ю. Перетворення та випромінювання електромагнітних імпульсів структурами з осьовою симетрією: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук:

- 01.04.03 / К. Ю. Сіренко ; НАН України. Ін-т радіофізики та електроніки ім. О.Я.Усикова. — Х., 2007. — 17 с.
88. Sirenko Y. K. Modeling and Analysis of Transient Processes in Open Resonant Structures: New Methods and Techniques / Yuriy K. Sirenko, Staffan Ström, Nataliya P. Yashina. — New York: Springer, 2014. — 353 с. — (Springer Series in Optical Sciences, Vol. 122).
89. Петрусенко И. В. Обобщённый метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. Часть 1. Формулы Френеля для операторов рассеяния / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электроника. — 2012. — 3(17), № 3. — С. 8–15.
90. Петрусенко И. В. Обобщённый метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. Часть 2. Сходимость проекционных приближений / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электроника. — 2012. — 3(17), № 4. — С. 18–21.
91. Петрусенко И. В. Обобщённый метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. Часть 3. Рассеяние волн на резонирующих неоднородностях / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электроника. — 2012. — 3(17), № 4. — С. 22–28.
92. Мележик П. Н., Пазынин В. Л., Сиренко К. Ю. Преобразование импульсных TE_{0n}- и TM_{0n}-волн аксиально-симметричными волноводными узлами. Специальные задачи // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2006. — Т. 11, № 2-3. — С. 22–29.
93. Свеженцев О. Є. Поширення та збудження хвиль у відкритих хвильоводах і циліндричних мікросмужкових антенах: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.04.03 / О.Є. Свеженцев ; Ін-т радіофізики та електрон. ім. О.Я.Усикова. — Х., 2010. — 32 с.
94. Мележик П. М. Теорія власних і вимушених електромагнітних коливань у відкритих двовимірних структурах: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.04.03 / П.М. Мележик ; Харк. нац. ун-т ім. В.Н.Каразіна. — Х., 2001. — 33 с.
95. Єгорова Н. П. Розсіяння хвильових пучків та імпульсів плоскими поверхнями: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.03 / Н. П. Єгорова; Харк. держ. ун-т. — Х., 1999. — 15 с.

- 96.Лазоренко О. В. Сверхширокополосные сигналы и процессы. Монография / О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. – Харьков: Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2009. – 576 с.
- 97.Non-stationary electromagnetics / [Nerukh A. G., Sakhnenko N. K., Benson T. M., Sewell P.]. – Singapore: Pan Stanford Publishing, 2012. – 596 p.
- 98.Нерух А. Метод аппроксимирующих функций для интегральных уравнений Вольтерра / А. Нерух, Д. Золотарев. – Saarbrücken Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 85 pp.
- 99.Нерух А. Г. Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики / А. Г. Нерух, Н. А. Хижняк. – Харьков: НПО Тест-Радио, 1991. – 279 с.
100. Нерух А. Г. Движение границы двух диэлектриков в волноводе / А. Г. Нерух, Н. А. Хижняк // Журн. техн. физики. – 1976. – Т. 46, № 1. – С. 21-30.
101. Nerukh A. G. Evolutionary approach in transient electrodynamics problems / A. G. Nerukh // Radio Science. – 1995. – Vol. 30, No. 3. – P. 481-491.
102. Nerukh A. G. Volterra integral equations for nonstationary electromagnetic processes in time-varying dielectric waveguides / A. G. Nerukh, P. Sewell, T. M. Benson // Journal of Lightwave Technology. – 2004. – Vol. 22, No. 5. – P. 1408-1419. doi: 10.1109/JLT.2004.827667
103. Nerukh A. G. Fresnel's formulas in time domain / A. G. Nerukh // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2004. – Vol. 52, No. 10. – P. 2735-2741.
104. Nerukh A. Frequency change of partial spherical waves induced by time change of medium permittivity / A. Nerukh, T. Remayeva, N. Sakhnenko // Optical and quantum electronics. – 2009. – Vol. 41, No. 4. – P. 327-335.
105. Nerukh A. Alternative calculations of initial value problem for electromagnetic field in dielectric waveguide / A. Nerukh, H. Semenova, N. Sakhnenko // Optical and quantum electronics. – 2008. – Vol. 40, No. 11-12. – P. 943-956.
106. Федотов Ф. В. Числове дослідження нестационарних електродинамічних процесів в активних суцільних середовищах: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.03 / Ф. В. Федотов; Харк. нац. ун-т радіоелектрон. – Х., 2004. – 16 с.
107. Золотарьов Д. О. Розвиток методів дослідження електромагнітних імпульсів у плоскошаруватому нелінійному середовищі: Автореф. дис... канд.

- фіз.-мат. наук: 01.04.03 / Д. О. Золотарьов ; Харк. нац. ун-т радіоелектрон. – Х., 2012. – 16 с.
108. Сахненко Н. К. Нестационарні процеси у відкритих резонансних та хвильовідних структурах: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.04.03 / Н. К. Сахненко; Харк. нац. ун-т радіоелектрон. – Х., 2013. – 34 с.
 109. Dudorov S. Rectangular dielectric waveguide and its optimal transition to a metal waveguide: Thesis for the degree of Doctor of Science in Technology / S. Dudorov; Helsinki University of Technology Radio Laboratory Publications, Report S 254. – Helsinki, 2002. – 92 p.
 110. Дзедолік І. В. Нелінійні хвилі та імпульси у оптичних волокнах і резонаторах: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.04.05 / І. В. Дзедолік; Харківський національний ун-т ім. В.Н.Каразіна. - Х., 2009. - 31 с.
 111. Tretyakov O. A. The real-valued time-domain TE-modes in lossy waveguides / O. A. Tretyakov, M. Kaya // Progress in Electromagnetics Research. – 2012. – Vol. 127. – P. 405-426.
 112. Tretyakov O. A. Time-domain real-valued TM-modal waves in lossy waveguides / O. A. Tretyakov, M. Kaya // Progress in Electromagnetics Research. – 2013. – Vol. 138. – P. 675-696.
 113. Kochetov B. A. Interference interaction of counter-propagating pulses on a magneto-dielectric slab / B. A. Kochetov // Progress In Electromagnetics Research M. – 2013. – Vol. 32. – P. 201-213.
 114. Kochetov B. A. Interference spectra transformation of counter-propagating pulses propagating through a dielectric slab / B. A. Kochetov // Optics Communications. – 2014. – Vol. 323. – P. 96-99.
 115. Kochetov B. A. Lie group symmetries and Riemann function of Klein-Gordon-Fock equation with central symmetry / B. A. Kochetov // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2014. – Vol. 19, No. 6. – P. 1723-1728.
 116. Ultra-Wideband: Past, Present and Future. White Paper / Presented by the EUWB consortium. – 2011. – 79 p.
<http://www.bitgear.rs/pdf/EUWB-WhitePaper.pdf>
 117. Bennett C. L. Time-domain electromagnetics and its applications / C. Leonard Bennett, Gerald F. Ross // Proceedings of the IEEE. – 1978. – Vol. 66. – P. 299–318.

118. Ross G.F. A Time Domain criterion for the design of wideband radiating elements / G.F. Ross // IEEE Trans. on Antennas & Propagation. – 1968. – Vol. 16. – P. 355-356. doi: 10.1109/TAP.1968.1139174
119. Ross G.F. Base-band radiation and reception system / G.F. Ross, K.W. Robbins. – U.S. Patent 3,739,392 dated June 12, 1973.
120. Ultra Wideband: Circuits, Transceivers and Systems / Eds. Ranjit Gharpurey, Peter Kinget. – Springer US, 2010. – 199 p.
121. Ultra-wideband RF System Engineering / Eds. Thomas Zwick, Werner Wiesbeck, Jens Timmermann, Grzegorz Adamiuk. – Cambridge University Press, 2013. – 203 p.
122. Southworth G. C. Hyper-frequency Wave Guides – General Considerations and Experimental Results / G. C. Southworth // Bell. Systems Tech. J. – April 1936. – Vol. 15. – P. 284-309.
123. Barrow W. L. Transmission of Electromagnetic Waves in Hollow Tubes of Metal / W. L. Barrow // Proc. I.R.E. – October 1936. – Vol. 24. – P. 1298-1328.
124. Дробахін О. О. Розв'язок зворотної задачі для багатошарових діелектричних структур: [моногр.] / О. О. Дробахін, С. Г. Алексін. – Д.: Вид-во ДНУ, 2012. – 240 с.
125. Krugel E. The Physics of Interstellar Dust / Endrik Krugel. – IOP Publishing, 2003. – 584 p.
126. Кузьмичев В. М. Фактор ефективності поглинання тонкого металічного циліндра в мікроволновому діапазоні / В. М. Кузьмичев, Н. Г. Кокодій, Б. В. Сафронов, В. П. Балкашин // Радиотехніка і електроніка. – 2003. – Т. 48, № 11. – С. 1349-1351.
127. Rosa E. B. The Self and Mutual Inductances of Linear Conductors / E. B. Rosa // Bulletin of the Bureau of Standards. – 1908. – Vol. 4, No. 2. – P. 301. doi: 10.6028/bulletin.088
128. Rayleigh L. The dispersal of light by a dielectric cylinder / Lord Rayleigh // Phil. Mag. – 1918. – Vol. 36, P. 365–376.
129. Wait J. R. Scattering of a plane wave from a right circular dielectric cylinder at oblique incidence / J. R. Wait // Canadian Journal of Physics. – 1955. – Vol. 33. – P. 189–195.
130. Круг К. А. Основы электротехники в 2-х томах. Том 2. Теория переменных токов / К. А. Круг. – 6-е изд, Госэнергоиздат, 1946. — 634 С.

131. Robinson S. E. Environmental Noise Cancellation for Biomagnetic Measurements / Stephen E. Robinson // Book Section in Advances in Biomagnetism / Eds. Samuel J. Williamson, Manfred E Hoke, Gerhard E. Stroink, Makoto E Kotani. – US: Springer, 1989. – P. 721–724. doi: 10.1007/978-1-4613-0581-1_162
132. Sita G. Time varying filters for estimation of evoked potentials / G. Sita, R.V.S. Sastry, A.G. Ramakrishnan // Proceedings of the First Regional Conference 14th Conference of the Biomedical Engineering Society of India on Engineering in Medicine and Biology Society, 15-18 Feb 1995, New Delhi. – 1995. – P. 3/33-3/34. doi: 10.1109/RCEMBS.1995.532963
133. Rüders F. Frequency dependent gradiometry: A new noninvasive method of improved noise cancellation applied to magnetocardiography / F. Rüders, M. Bick, H. Soltner, D. Selbig, H. Bousack // Diomedizinische Teclinik. – 1997. – Vol. 42, suppl. 1. – P. 231-234.
134. Andrae W. Magnetism in Medicine: a handbook / Eds. W. Andrae, H. Nowak. – Berlin: Wiley-VCH, 1998. – pp. 455.
135. Malmivuo J. Bioelectromagnetism – Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Field / Jaakko Malmivuo, Robert Plonsey. – New York: Oxford University Press, 1995. – pp. 482.
136. Wikswo J. P. SQUID Magnetometers for Biomagnetism and Nondestructive Testing: Important Questions and Initial Answers / J. P. Wikswo // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 1995. – Vol. 5, No. 2. – P. 74-120.
137. Becker W. First experiences with a multichannel software gradiometer recording normal and tangential components of MEG / W. Becker, V. Diekmann, R. Jurgens, C. Kornhuber // Physiological Measurement. – 1993. – Vol. 14, No. 4A. – P. A45. doi:10.1088/0967-3334/14/4a/008
138. Yoshida T. Calibration system for a multichannel squid magnetometer / T. Yoshida, M. Higuchi, T. Komuro, H. Kado // Proceedings of the 16th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 1994. Engineering Advances: New Opportunities for Biomedical Engineers, 3-6 Nov 1994. – vol. 1. – pp. 171-172. doi: 10.1109/IEMBS.1994.411802
139. Каценеленбаум Б. З. Симметричное и несимметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра / Б. З. Каценеленбаум // Журнал технической физики. 1949. Т. 19. № 10. С. 1168–1181.
140. Jablonski T. F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides / T. F. Jablonski // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – V. 11. № 4. – P. 1272–1282.

141. Su C. C. Analysis of unbounded dielectric waveguides using the surface integral equations method / Su C. C. // IEE Proceedings, part J: Optoelectronics. – 1989. – Vol. 136, No. 3. – P. 166-168.
142. McDougall M. J. Infinite elements for the analysis of open dielectric waveguides / M. J. McDougall; J. P. Webb // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1989. – Vol. 37, No. 11. – P. 1724-1731.
143. Kochetov B. A. Applying Mode Basis to investigate a homogeneous waveguide filled bi-isotropic medium with constant parameters / B. A. Kochetov, V. R. Tuz // Proceedings of 2nd International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS'2008), 21-26 September 2008, Pamplona (Spain). – P. 1-3.
144. Taflove A., Hagness S. C. Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method. – 2nd edition. – Norwood (MA, USA): Artech House, 2000. – 852 p.
145. Time Domain Electromagnetics / Edited by Rao S. M. – San Diego (CA, USA): Academic Press, 1999. – 372 p.
146. Zhao G. and Liu Q. H. The unconditionally stable pseudospectral time-domain (PSTD) method // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. – November 2003. – Vol. 13, № 11. – P. 475-477.
147. Liu Q. H. The PSTD algorithm: a time-domain method requiring only two cells per wavelength // Microwave Optical Technology Letters. – June 1997. – Vol. 15, № 3. – P. 158–165.
148. Rozzi T., Pierantoni L., and Farina M. Eigenvalue Approach to the Efficient Determination of the Hybrid and Complex Spectrum of Inhomogeneous, Closed Waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – March 1997. – Vol. 45, № 3. – P. 345-353.
149. Silvestre E. et al. Analysis of Inhomogeneously Filled Waveguides Using a Bi-Orthonormal-Basis Method // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – April 2000. – Vol. 48, № 4. – P. 589-595.
150. Przybyszewski P., Mielewski J., and Mrozowski M. A New Class of Eigenfunction Expansion Methods for Fast Frequency-Domain Analysis of Waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Feb. 2002. – Vol. 50, № 2. – P. 558-563.
151. Хармут Х. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.

152. Harmuth H. F. Nonsinusoidal Waves for Radar and Radio Communication / H. F. Harmuth. – New York: Academic, 1981.
153. Harmuth H. F. Antennas and Waveguides for Nonsinusoidal Waves / H. F. Harmuth. – New York: Academic, 1984.
154. Harmuth H. F. Radiation of Nonsinusoidal Electromagnetic Waves / H. F. Harmuth. – New York: Academic, 1990.
155. Harmuth H. F. Transmission of Information by Orthogonal Functions / H. F. Harmuth. – New York : Springer, 1970. – 325 p.
156. Federal Communications Commission. “First report and order, revision of part 15 of the commission’s rules regarding ultra-wideband transmission systems.” – FCC, Washington, DC, ET Docket 02-48, April 22, 2002.
157. Federal Communications Commission. “Spectrum policy task force report.” – FCC, Washington, DC, ET Docket 02-135, 2002.
158. Barrett T. W. History of Ultra Wideband Communications and Radar // Microwave Journal. – January 2001. – Vol. 44, № 1. – P. 22-56.
159. Иммореев И. Я. Сверхширокополосная локация: основные особенности и отличия от традиционной радиолокации // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Том 2, № 1. – С. 81–88.
160. Van Cappellen W. A., de Jongh R. V., and Ligthart L. P. Potentials of ultra-short-pulse time-domain scattering measurements // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – August 2000. – Vol. 42, № 4. – P. 35-45.
161. Yarovoy A. G., Ligthart L. P. Ultra-Wideband Technology Today // Proc. 15th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications. – Warsaw (Poland), 2004. – Vol. 2, P. 456-460.
162. Манькин И. А., Школьников В. Г. Сверхширокополосные сигналы в СВЧ системах // Обз. по электр. техн. Сер. 1. Электроника СВЧ. – 1983. – Вып. 3(926). – С. 1-52.
163. Adams J. C., Gregokch W., Capots L., Liccardo D. Ultra-Wideband for Navigation and Communications // Proc. IEEE Aerospace Conf. – 2001. – Vol. 2. – P. 2/785-2/785.
164. Наносекундные электромагнитные импульсы и их применение / В. С. Белкин, В. А. Бухарин, В. К. Дубровин и др.; Под ред. В. В. Крымского. – Челябинск: Изд-во ЦНТИ, 2001. – 110 с.

165. Stenholm G. J., Rothwell E. J., Nyquist D. P., Kempel L. C., and Frasch L. L. E-pulse diagnostics of simple layered materials // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – December 2003. – Vol. 51, № 12. – P. 3221-3227.
166. Immoreev I. J., Samkov S. V. Ultra-Wideband (UWB) Radar for the Remote Measuring of Main Parameters of Patient's Vital Activity // Radio Physics and Radio Astronomy. – Dec. 2002. – Vol.7, No.4. – P. P. 404-407.
167. Hagness S. C., Taflove A., and Bridges J. E. Three-Dimensional FDTD Analysis of a Pulsed Microwave Confocal System for Breast Cancer Detection: Design of an Antenna-Array Element // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – May 1999. – Vol. 47, № 5. – P. 783-791.
168. Scheers B. Ultra-Wideband Ground Penetrating Radar, with Application to the Detection of Anti Personnel Landmines: Ph.D. thesis / Université Catholique de Louvain, Laboratoire D'Hyperfréquences. – Louvain-la-Neuve (Belgium), March 2001. – 277 p.
169. Андрианов В. А. Подповерхностная радиолокация слоисто-неоднородного грунта планеты // Радиотехника и электроника. – 1992. – Том 37, № 11. – С. 1937-1948.
170. Пивненко С. Н. Взаимодействие ограниченных в пространстве нестационарных полей с диэлектрическими и металлодиэлектрическими структурами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. – Харьков, 1999. – 140 с.
171. Dogaru T., Carin L. Time-domain sensing of targets buried under a rough air-ground interface // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1998. – Vol. 46, № 3. – P. 360-372.
172. Carin L., Geng N., McClure M., Sichina J., and Nguyen L. Ultra-wide-band synthetic-aperture radar for mine-field detection // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – February 1999. – Vol. 41. – P. 18-33.
173. Morey R. M. Continuous subsurface profiling by impulse radar // Proceedings of the Engineering Foundation Conference on Subsurface Exploration for Underground Excavation and Heavy Construction, Aug. 1974. – P. 213-232.
174. Daniels D. J., Gunton D. J., Scott H. F. Introduction to subsurface radar // IEE Proceedings, pt. F. – Aug. 1988. – Vol. 135. – P. 278-320.
175. Peters L., Jr., Daniels J. J., Young J. D. Ground penetrating radar as a subsurface environmental sensing tool // IEEE Proceedings. – Dec. 1994. – Vol. 82. – P. 1802-1822.
176. Daniels D. J. Surface-Penetrating Radar. – London: IEE Press, 1996. – 324 P.

177. Tatotian J., Franceschetti G., Giri D., Gibbs G. Through-the-Wall Imaging using Impulse SAR // Book of Abstracts of the International Conference “Euro Electromagnetics” (EUROEM 2004). – Magdeburg (Germany), 12-16 July, 2004. – P. 148.
178. Rothwell E. J., Chen K. M., Nyquist D. P., and Ross J. E. Time-domain imaging of airborne targets using ultra-wideband or short-pulse radar // IEEE Transactions on Antennas and Propagation – March 1995. – Vol. 43, № 3. – P. 327-329.
179. Black D. L. An overview of impulse radar phenomenon // Proceedings of the IEEE 1992 National Aerospace and Electronics Conference (NAECON). – 18-22 May 1992. – Vol. 1, P. 320-326.
180. Baum C. E. From the electromagnetic pulse to high-power electromagnetics // Proceedings of IEEE. – June 1992. – Vol. 80. – P. 789-817.
181. Herlemann H., Koch M., Sabath F. UWB Antenna for Artillery Applications // Book of Abstracts of the International Conference “Euro Electromagnetics” (EUROEM 2004). – Magdeburg (Germany), 12-16 July, 2004. – P. 149.
182. Giri D. V. JOLT: A Highly Directive, Very Intensive, Impulse-Like Radiator // Book of Abstracts of the International Conference “Euro Electromagnetics” (EUROEM 2004). – Magdeburg (Germany), 12-16 July, 2004. – P. 19.
183. Arjavalasingam G., Pastol Y., Halbout J.-M. and Kopcsay G. V. Broad-Band Microwave Measurements with Transient Radiation from Optoelectronically Pulsed Antennas // Transactions on Microwave Theory and Techniques. – May 1990. – Vol. 38, № 5. – P. 615-621.
184. Giri D. V. and Baum C. E. Reflector IRA Design and Boresight Temporal Waveforms // Sensor Simulation Notes. – 1994. – Note 365.
185. Marengo E. A., Devaney A. J., and Heyman E. Analysis and characterization of ultrawideband scalar volume sources and the fields they radiate // IEEE Transactions on Antennas and Propagation – July 1997. – Vol. 45, № 7. – P. 1098-1106.
186. Marengo E. A., Devaney A. J., and Heyman E. Analysis and characterization of ultrawide-band scalar volume sources and the fields they radiate: Part II—Square pulse excitation // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – February 1998. – Vol. 46, № 2. – P. 243-250.
187. Baum C. E. Some characteristics of planar distributed sources for radiating transient pulses // Sensor and Simulation Notes. – March 1970. – Note 100.

188. Zaiping N. Radiation Characteristics of Traveling-Wave Antennas Excited by Nonsinusoidal Currents // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – Feb. 1983. – Vol. 25, № 1. – P. 24-31.
189. Zucker F. J. Surface- and leaky-wave antennas // Antenna Engineering Handbook. – New York: McGraw-Hill, 1961, p. 16-24.
190. Walter C. H. Traveling Wave Antennas. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 342 p.
191. Пустовой Я. И. Излучение сверхширокополосных колебаний апертурной антенной с круглым раскрывом // Доповіді НАН України. – 1995. – № 7. – С. 52-54.
192. Зернов И. В., Пустовой Я. И. Характеристики направленности круглых апертурных антенн при излучении несинусоидальных сигналов // Доповіді НАН України. – 1995. – № 9. – С. 46-48.
193. Содин Л. Г. Импульсное излучение антенны (электромагнитный снаряд) // Радиотехника и электроника. – 1991. – Том 36, № 5. – С. 1014-1022.
194. Содин Л. Г. Характеристики импульсного излучения антенн (электромагнитного снаряда) // Радиотехника и электроника. – 1992. – Том 37, № 5. – С. 849-857.
195. Содин Л. Г. Импульсное излучение антенны с круглой апертурой, возбужденной единичным скачком тока (переходная диаграмма) // Радиотехника и электроника. – 1992. – Том 37, № 10. – С. 1783-1787.
196. Крымский В. В. Теоретическое и экспериментальное исследование излучателей несинусоидальных волн: Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук: 01.04.03. – Харьков ХГУ, 1993. – 384 с.
197. Крымский В. В. Антенны несинусоидальных волн. – Челябинск: Изд-во ЦНТИ, 2004. – 133 с.
198. Ziolkowski R. W. Localized transmission of electromagnetic energy // Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 39, № 4. – P. 2005-2033.
199. Ziolkowski R. W. Localized wave physics and engineering // Phys. Rev. A. – 1991. – Vol. 44, № 6. – P. 3960-3984.
200. Ziolkowski R. W., Lewis D. K., Cook B. D. Evidence of localized wave transmission // Phys. Rev. Lett. – 1989. – Vol. 62, № 2. – P. 147-150.
201. Ziolkowski R. W., Lewis D. K. Verification of localized wave transmission effect // J. Appl. Phys. – 1990. – Vol. 68, № 12. – P. 6083-6086.

202. Ziolkowski R. W. Properties of electromagnetic beams generated by ultra-wide bandwidth pulse-driven arrays // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1992. – Vol. 40, № 8. – P. 888-905.
203. Soergel W., Waldschmidt C., Wiesbeck W. Transient Radiation from a Linear UWB Antenna Array // Proc. Int. Symposium on Electromagnetic Theory (URSI EMTS'04). – Pisa (Italy), May 23-27, 2004. – P. 1254-1256.
204. Holter H. and Steyskal H. Some experiences from FDTD analysis of infinite and finite multi-octave phased arrays // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – December 2002. – Vol. 50, № 12. – P. 1725-1731.
205. Chang K., Li M., Yun T., and Rodenbeck C. T. Novel low-cost beam-steering techniques // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – May 2002. – Vol. 50, № 5. – P. 618-627.
206. Yun T. et al. A 10- to 21-GHz, low-cost, multifrequency, and full-duplex phased-array antenna system // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – May 2002. – Vol. 50, № 5. – P. 641-650.
207. Lee J. J. et al. Photonic wideband array antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – September 1995. – Vol. 43, № 9. – P. 966-982.
208. Baum C. E. Transient arrays // Ultra-wideband, Short-pulse Electromagnetics 3, C. E. Baum, L. Carin, and A. P. Stone, Eds. – Plenum: New York, 1997. – P. 129-138.
209. McGrath D. T. and Baum C. E. Scanning and impedance properties of TEM horn arrays for transient radiation // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – March 1999. – Vol. 47, № 3. – P. 469-473.
210. Лисицын В. П., Домашенко Г. Д., Уткин М. И. Нестационарное электромагнитное поле решетки TEM-рупоров // Радиотехника и электроника. – 1992. – Том 37, № 11. – С. 1954-1959.
211. Farr E. G. and Baum C. E. Time Domain Characterization of Antennas with TEM Feeds // Sensor and Simulation Notes. – 1998. – Note 426.
212. Baum C. E. and Farr E. G. Extending the definitions of antennas gain and radiation pattern into the time domain // Sensor Simulation Notes. – 1992. – Note 350.
213. Shlivinski A., Heyman E., and Kastner R. Antenna characterization in the time domain // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – July 1997. – Vol. 45, № 7. – P. 1140-1149.
214. Soergel W., Waldschmidt C., Wiesbeck W. Transient Responses of a Vivaldi Antenna and a Logarithmic Periodic Dipole Array for Ultra Wideband Communi-

- cation // Proc. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – Columbus (Ohio, USA), June 2003. – Vol. 3, P. 592-595.
215. Arjavalingam G., Pastol Y., Halbout J.-M., Robertson W. M. Optoelectronically-pulsed antennas: characterization and applications // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – Feb. 1991. – Vol. 33, № 1. – P. 7-11.
 216. Rumsey V. H. Frequency independent antennas // IRE National Convention Record. – March 1957. – P. 114-118.
 217. Harrison C. W., and Williams C. S. Transients in wide-angle conical antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – March 1965. – Vol. 13. – P. 236-246.
 218. Brown G. H. and Woodward O. M. Jr. Experimentally determined radiation characteristics of conical and triangular antennas // RCA Rev. – Dec. 1952. – Vol. 13. – P. 425-452.
 219. Maloney J. G., Smith G. S. Optimization of a conical antenna for pulse radiation: an efficient design using resistive loading // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1993. – Vol. 41, № 7. – P. 940-947.
 220. Shlager K. L., Smith G. S., Maloney J. G. Optimization of bow-tie antennas for pulse radiation // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – July 1994. – Vol. 42, № 7. – P. 975-982.
 221. Lestari A. A., Yarovoy A. G., Ligthart L. P. Analysis and Design of Improved Antennas for GPR // Subsurface Sensing Technologies and Applications. – 2002. – Vol. 3, № 4. – P. 295-326.
 222. Shlager K. L., Smith G. S., Maloney J. G. TEM horn antenna for pulse radiation: an optimized design // Digest of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – 1995. – Vol. 1. – P. 228-231.
 223. Chaung L., Chang T. and Burnside W. D. An Ultrawide-Bandwidth Tapered Resistive TEM Horn Antenna // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Dec. 2000. – Vol. 48, № 12, P. 1848-1857.
 224. Li X., Hagness S. C., Choi M. K., and van der Weide D. W. Numerical and experimental investigation of an ultrawideband ridged pyramidal horn antenna with curved launching plane for pulse radiation // IEEE Antennas Wireless Propagation Letters. – 2003. – Vol. 2, № 2. – P. 259-262.
 225. Wu T., King R. The cylindrical antenna with nonreflecting resistive loading // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – May 1965. – Vol. 13, № 3. – P. 369-373.

226. Maloney J. G., Smith G. S. A study of transient radiation from the Wu-King resistive monopole-FDTD analysis and experimental measurements // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1993. – Vol. 41, № 5. – P. 668-676.
227. Montoya T. P., Smith G. S. Resistively-loaded Vee antennas for short-pulse ground penetrating radar // Digest of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – 1996. – Vol. 3. – P. 2068-2071.
228. Garcia I. S., Bretones A. R., Martin R. G. Pulse-receiving characteristics of V-dipole antennas with resistive loading // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 1998. – Vol. 40, № 2. – P. 174-176.
229. Пат. 5,467,099 США, МКИ H01Q 13/10. Resonated notch antenna: Пат. 5,467,099 США, МКИ H01Q 13/10 Mark E. Bonebright, Jhon R. Glabe (Calif., USA); MvDonnel Douglas Corporation (Huntington Beach, Calif., USA). – № 158,057; Заявл. 24.11.1993; Опубл. 14.11.1995, HKI 343/767. – 7 с.
230. Younan N. H., Cox B. L., Taylor C. D., and Prather W. D. An Exponentially Tapered Transmission Line Antenna // Sensor Simulation Notes. – 1994. – Note 369.
231. Younan N. H., Cox B. L. Gigahertz Analysis of the Ellipticus Antenna // Sensor Simulation Notes. – 1990. – Note 325.
232. Gorobets N. N., Dumin A. N., Dumina O. A. About radiation of short pulses by wire antenna of finite length // Radio Physics and Radio Astronomy. – 2002. – Vol. 7, № 4. – P. 372-374.
233. Gorobets N. N., Shavorykina J. Yu., Nechosa A. V. Radiation of videopulse by finite length dipole antenna // Proc. International conference “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory” (MMET 94). – Kharkov (Ukraine), September 10-13, 1994. – P. 119-122.
234. Gibson P. J. The Vivaldi aerial // Proc. 9th European Microwave Conf. – Brighton (UK), 1979. – P. 101-105.
235. Yngvesson K. S. et al. Endfire Tapered Slot Antennas on Dielectric Substrates // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Dec. 1985. – Vol. 33, № 12. – P. 1392-1400.
236. Sugawara S., Maita Y., Adachi K., Mori K., Mizuno K. Characteristics of a MM-wave tapered slot antenna with corrugated edges // IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest, 7-12 June 1998. – Vol. 2, P. 533-536.

237. Mirshekar-Syahkal D. and Wang H. Y. Single and coupled modified V-shaped tapered slot antennas // Digest of 1998 IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. – June 1998. – Vol. 36. – P. 2324-2327.
238. Frayne P. G., Leggetter A. J. Wideband measurements on Vivaldi traveling wave antennas // IEE Colloq. on Multi-Octave Microwave Circuits. – 8 Nov. 1991. – P. 5/1-5/6.
239. Масалов С. А., Почанин Г. П., Ротарь С. В. Нагруженная щелевая антенна для излучения видеоимпульсов наносекундного диапазона // Научное приборостроение в ММ и СубММ диапазонах радиоволн. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники АН Украины. – 1992. – С.55-62.
240. Heidemann R., Pfeiffer Th., Jäger D. Optoelectronically pulsed slot-line antennas // Electronic Letters. – 28 April 1983. – Vol. 19, № 9. – P. 316-317.
241. Janaswamy R. and Schaubert D. H., and Pozar D. M. Analysis of the TEM-mode linearly tapered slot antenna // Radio Science. – 1986. – Vol. 21, № 5. – P. 797-804.
242. Janaswamy R. and Schaubert D. H. Analysis of the Tapered Slot Antenna // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Sept. 1987. – Vol. 35, № 9. – P. 1058-1065.
243. Stockbroeckx B. Space wave and surface wave radiation in the Vivaldi antenna: Ph.D. dissertation. / Catholic Univ. Louvain. – Louvain-la-Neuve (Belgium), 1998. – 174 p.
244. Fourikis N., Lioutas N., Shuley N. V. Parametric study of the co- and cross-polarisation characteristics of tapered planar and antipodal slotline antennas // IEE Proceedings H: Microwaves, Antennas and Propagation. – Feb. 1993. – Vol. 140, № 1. – P. 17-22.
245. Langley J. D. S., Hall P. S., and Newham P. Balanced antipodal Vivaldi antenna for wide bandwidth phased arrays // IEE Proc.–Microwave. Antennas Propag. – April 1996. – Vol. 143, № 2. – P. 97-102.
246. Holter H., Chio T., and Schaubert D. H. Experimental results of 144-element dual-polarized endfire tapered-slot phased arrays // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – November 2000. – Vol. 48, № 11. – P. 1707-1718.
247. Yun T. and Chang K. A low-cost 8 to 26.5 GHz phased array antenna using a piezoelectric transducer controlled phase shifter // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – September 2001. – Vol. 49, № 9. – P. 1290-1298.

248. Yuan C. and Chen Z. On the modeling of conducting media with the unconditionally stable ADI-FDTD method // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Aug. 2003. – Vol. 51, № 8. – P. 1929-1938.
249. Yuan C. and Chen Z. Efficient computation of thin-layer structures with the unconditionally stable ADI-FDTD method // Proc. of IEEE MTT-S International Microwave Symposium. 2003. – Vol. 2, P. 1133-1136.
250. Zheng F., Chen Z., and Zhang J. A finite-difference time-domain method without the Courant stability conditions // IEEE Microwave and Guided Wave Letters. – Nov. 1999. – Vol. 9, № 11. – P. 441-443.
251. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах / Сиренко Ю. К. – Харьков: «ЭДЭНА», 2003. – 363 с.
252. Soergel W., Pivit F., Wiesbeck W. Comparison of Frequency Domain and Time Domain Measurement Procedures for Ultra Wideband Antennas // Proc. Antenna Measurement Technique Association Symposium. – Irvine (California, USA), Oct. 2003. – P. 72-65.
253. Phatak D. S. and Defonzo A. P. Dispersion Characteristics of Optically Excited Coplanar Striplines: Pulse Propagation // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – May 1990. – Vol. 38, № 5. – P. 651–654.
254. Hansnarn G., Dienes A. and Whinnery J. R. Dispersion of Picosecond Pulses in Coplanar Transmission Lines // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1986. – Vol. 34, № 6. – P. 738-741.
255. Bouchard P., Gagne R. R. J. and Lavoie J.-L. Transients on Lossless Exponential Transmission Lines Using Allen's Method // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1993. – Vol. 41, № 6. – P. 1178-1182.
256. Lundstedt J. Condition for Distortionless Transmission Line with a Nonuniform Characteristic Impedance (Short Papers) // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1995. – Vol. 43, № 6. – P. 1386-1389.
257. Stapelfeldt R. and Young F. J. The Short Pulse Behavior of Lossy Tapered Transmission Lines // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1961. – Vol. 9, № 4. – P. 290-296.
258. Kralj D., Lin Mei, Teng-Tai Hsu, and Carin L. Short-Pulse Propagation in a Hollow Waveguide: Analysis, Optoelectronic Measurement, and Signal Processing // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – September 1995. – Vol. 43, № 9. – P. 2144-2150.

259. Omar A. S. and Kamel A. H. Network theoretical transient analysis of signal transmission over evanescent modes // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – March 2003. – Vol. 51, № 3. – 595–605.
260. Fedotov F. V., Nerukh A. G., Benson T. M., Sewell Ph. Numerical Solution to Nonlinear Problems in Dielectric Waveguides via Resolvent Method // Proc. of International Conference on Advanced Optoelectronic and LASERS (CAOL-2003). – Alushta (Ukraine). – 2003. – P. 173-175.
261. Федотов Ф. В. Численное исследование нестационарных электродинамических процессов в активных сплошных средах: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.04.03. – Харьков, 2004. – 160 с.
262. Емельянов К. М. Метод эволюционной рекурсии в исследовании электромагнитных полей в средах с меняющимися во времени параметрами: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.04.03. – Харьков, 2001. – 157 с.
263. Веселов Г. И., Раевский С. Б. Слоистые металлодиэлектрические волноводы. – М.: Радио и связь, 1988. – 248 с.
264. Ozkar M. and Mortazawi A. An inhomogeneous waveguide transformer with hard walls for the excitation of quasi-optical amplifiers // Digest of IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. – Orlando (Florida, USA), July 11-16, 1999. – Vol. 37, P. 958-961.
265. Ruvio G., Kildal P., and Maci S. Modal propagation in ideal soft and hard waveguides // Digest of IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. – Columbus (Ohio, USA), 22 - 27 June 2003. – Vol. 41, P. 438-441.
266. Егоров Ю. В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. – М.: Сов. радио, 1967. – 216 с.
267. Нефёдов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
268. Резонансное рассеяние волн. Том 2. Волноводные неоднородности / Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
269. Кириленко А. А., Сенкевич С. Л. Резонансные явления в прямоугольных волноводах с двухслойными диэлектрическими вставками // Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых волн. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 91-99.,

270. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: В 2 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 1. – 382 с.
271. Бергер М. Н., Капилевич Б. Ю. Прямоугольные волноводы с диэлектриками. – М.: Сов. радио, 1973. – 254 с.
272. Chang C. T. M., Dawson J. W. Propagation of electromagnetic waves in a partially dielectric filled circular waveguides // J. Appl. Phys. – 1970. – Vol. 41, № 11. – P.4493-4500.
273. Cafsey K. F. On Inhomogeneously Filled Rectangular Waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Aug. 1973. – Vol. 21, № 8. – P. 566-567.
274. Tsandoulas G. N. Propagation In Dielectric-Lined Square Waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – May 1975. – Vol. 23, № 5. – P. 406-410.
275. Findakly T. K. and Haskal H. M. On the Design of Dielectric Loaded Waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Jan. 1976. – Vol. 24, № 1. – P. 39-43.
276. Bardi I., Biro O., Preis K., and Richter K. R. Nodal and edge element analysis of inhomogeneously loaded waveguides // IEEE Transactions on Magnetics. – March 1993. – Vol. 29, № 2. – P. 1466-1469.
277. Dillon B. M., Webb J. P. A comparison of formulation for the vector finite element analysis of waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and techniques. – February 1994. – Vol. 42, № 2. – P. 308-316.
278. Hidaka T. Computer-Aided Renormalized Perturbation Method for the Inhomogeneously Loaded Waveguide // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Feb. 1972. – Vol. 20, № 2. – P. 180-181.
279. Jablonskii T. Spectral properties of the operators describing EM wave propagation in anisotropic dielectric guiding structures with arbitrary transversal inhomogeneity // Proc. International Conference “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory” (MMET 02). – Kyiv (Ukraine), September 10-13, 2002. – P.141-149.
280. Jablonski T. F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides / T. F. Jablonski // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – V. 11. № 4. – P. 1272–1282.
281. Jablonski T. F. and Sowinski M. J. Analysis of dielectric guiding structures by the iterative eigenfunction expansion method // IEEE Transactons on Microwave Theory and Techniques. – Jan. 1989. – Vol. MTT-37, № 1. – P. 63-70.

282. Polstyanko S. V., Dyczij-Edlinger R., and Jin-Fa Lee. Fast Frequency Sweep Technique for the Efficient Analysis of Dielectric Waveguides // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – July 1997. – Vol. 45, № 7. – P. 1118-1126.
283. Jian Yang, Ulf Carlberg, Per-Simon Kildal, and Malcolm Ng Mou Kehn A Fast Mode Analysis for Waveguides of Arbitrary Cross Section With Multiple Regions by Using a Spectrum of Two-Dimensional Solutions and Asymptotic Waveform Evaluation // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – June 2004. – Vol. 52, № 6. – P. 1615-1621.
284. Третьяков О. А. Волноводные эволюционные уравнения // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 34, № 5. – С. 917-926.
285. Борисов В. В. Неустановившиеся поля в волноводах. – Л.: Изд. ЛГУ, 1991. – 156 с.
286. Манькин И. А. Возбуждение волноводов нестационарными сторонними токами // Радиотехника и электроника. – 1979. – Том. 24, № 4. – С. 682-690.
287. Karbowiak E. Propagation of transients in waveguides // Proc. IEE, pt. C. – 1957. – Vol. 104. – P. 339-349.
288. Davidovich M. Towards Nonstationary Excitation Theory in Computational Electromagnetics // Proc. 10th International conference on “Mathematical Methods in Electromagnetic Theory” (MMET’04). – Dnipropetrovsk (Ukraine), September 14-17, 2004. – P. 309-311.
289. He S., Strom S., and Weston W. Time-Domain Wave-Splitting and Inverse Problems. – Oxford: Oxford University Press, 1998.
290. Gustafson M. Wave Splitting in Direct and Inverse Scattering Problems. – Lund: University Press, 2000.
291. Третьяков О. А. Методические указания для самостоятельной работы студентов радиофизического факультета по теме «Основные положения спектрального метода в электродинамике». – Харьков: Издательский центр ХГУ, 1983. – 80 с.
292. Третьяков О. А. Метод модового базиса // Радиотехника и электроника. – 1986. – Т. 31, № 6. – С. 1071-1082.
293. Tretyakov O. A. Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory // Hashimoto M., Idemen M., Tretyakov O. A. Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory. – Tokyo: Science House Co, Ltd, 1993. – 572 p.

294. Tretyakov O. A. The Evolutionary Approach to Analytical Study of Electromagnetic Phenomena in the Time Domain // 2001 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory. – Victoria (Canada), May 13–17, 2001. – P. 111.
295. Tretyakov O. A. A Set of Exact Analytical Solutions in Time Domain for UWB electromagnetic Signals in Waveguides // Proc. of International Conference EUROEM'2000. – Edinburgh (England), 30 May - 2 June 2000. – P. 125.
296. Третьяков О. А., Чумаченко С. В. Колебания в резонаторе с нестационарным диэлектриком // Радиофизика и радиоастрономия. – 1997. – Т. 2, № 2. – С. 222-229.
297. Назыров З. Ф., Шматько А. А. Метод модового базиса в задачах электродинамики с кусочно-неоднородными нестационарными средами // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33, № 5. – С. 1042-1049.
298. Адонина А. И., Слюсарев А. И. Векторная задача для неоднородных, нестационарных, анизотропных сред // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40, № 8. – С. 1176-1183.
299. Адонина А. И., Слюсарев А. И. Волновые уравнения для нестационарных неоднородных сред // Вісник ХНУ, “Радіофізика та електроніка”. – 2004. – № 646, Вип. 2. – С. 166-170.
300. Третьяков О. А., Думин А. Н. Излучение нестационарных электромагнитных полей плоским излучателем // Электромагнитные волны & электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 12-22.
301. Думин А. Н., Катрич В. А., Колчигин Н. Н., Пивненко С. Н., Третьяков О. А. Дифракция нестационарной ТЕМ-волны на открытом конце коаксиального волновода // Радиофизика и радиоастрономия. – 2000. – Т. 5, № 1. – С. 55-66.
302. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
303. Shvartsburg A. B. Impulse Time-Domain Electromagnetics of Continuous Media. – Boston: Birkhäuser, 1999. – 168 p.
304. Schantz H. G. Electromagnetic Energy around Hertzian Dipoles // IEEE AP Magazine. – Apr. 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 50–62.
305. IEEE Std. 145-1993. IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas. – (Revision of IEEE Std. 145-1983); Approved March 18, 1993. – IEEE Standards Board, 1993. – 32 p.

306. Balanis C. A. Antenna Theory: Analysis and Design, 2nd Edition. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1997. – 942 p.
307. Perov A. O., Sirenko Yu. K., Yashina N. P. Explicit conditions for virtual boundaries in initial boundary value problems in the theory of wave scattering // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 1999. – Vol. 13, № 10. – P. 1343-1371.
308. Stockbroeckx B. and Vander Vorst A. Electromagnetic Modes in Conical Transmission Lines with Application to the Linearly Tapered Slot Antenna // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – March 2000. – Vol. 48, № 3. – P. 447-455.
309. Tang Y. P., Li Z. and Tang S. Y. Transient Analysis of Tapered Transmission Lines Used as Transformers for Short Pulses // Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Nov. 1995. – Vol. 43, № 11. – P. 2573-2578.
310. Gupta K. C., Garg R., and Bahl I. J. Microstrip Lines and Slotlines, 2nd ed. – Norwood, MA: Artech House. – 1996. – 564 p.
311. Wadel B. C. Transmission Line Design Handbook. – Norwood, MA: Artech House. – 1991. – 422 p.
312. Numerical recipes in C: the art of scientific computing / William H. Press et al. – 2nd ed. – Cambridge: Cambridge university Press, 1992. – 994 p.
313. Thorvaldsen T. A comparison of the least squares method and the Burg method for autoregressive spectral analysis // IEEE Transaction on Antennas and Propagation. – July 1981. – Vol. 29, № 7. – P. 675-679.
314. Carriere R. and Moses R. L. High Resolution Radar Target Modeling Using a Modified Prony Estimator // IEEE Transaction on Antennas and Propagation. – Jan. 1992. – Vol. 30, № 1. – P. 13-18.
315. Вовк С. М. Відновлення фінітних сигналів, спотворених системами з обмеженою шириною смуги пропускання: Автореферат дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.03. / Дніпропетровський державний університет. – Дніпропетровськ, 1996. – 16 с.
316. Gershberg R. W. Super-resolution through error energy reduction // Optica Acta. – 1974. – Vol. 21. – P. 709-720.
317. Papoulis A. A new algorithm in spectral analysis and bandlimited extrapolation // IEEE Trans. CAS. – 1975. – Vol. 22. – P. 691-695.

318. Sarkar T. K. Using the Matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials / T. K. Sarkar and O. Pereira // *IEEE Antennas Propagat. Mag.* – 1995. – vol. 37. – pp. 48-55.
319. Sarkar T. K. Application of the matrix pencil method for estimating the SEM (singularity expansion method) poles of source-free transient responses from multiple look directions / T. K. Sarkar and O. Pereira // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* – 2000. – vol. 48. – P. 612 - 618.
320. Hämäläinen M. Magnetoencephalography — theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain / Matti Hämäläinen, Riitta Hari, Risto J. Ilmoniemi, Jukka Knuutila, and Olli V. Lounasmaa // *Rev. Mod. Phys.* – 1993. – Vol. 65, No. 2. – P. 413-497. doi: 10.1103/RevModPhys.65.413
321. Schreiber T. Nonlinear noise reduction for electrocardiograms / T. Schreiber, D. T. Kaplan // *Chaos.* – 1995. – Vol. 6. – P. 87-92.
322. Schreiber T. Processing of Physiological Data / Thomas Schreiber // *Book Section in Nonlinear Analysis of Physiological Data* / Eds. H. Kantz, J. Kurths, G. Mayer-Kress. – Springer Berlin Heidelberg, 1998. – P. 7-21.
323. Robinson S. E. Comparison of SAM and MUSIC performance for unaveraged MEG / S. E. Robinson, J. Vrba // *Proceedings of 12th International conference on biomagnetism (Biomag 2000)*, HUT, Espoo, Finland. – 2000. – P. 685-688.
324. Vrba J. Differences between synthetic aperture magnetometry (SAM) and linear beamformers / J. Vrba, S. E. Robinson // *Proceedings of 12th International conference on biomagnetism (Biomag 2000)*, HUT, Espoo, Finland. – 2000. – P. 681-684.
325. Sorrentino A. Dynamic filtering of static dipoles in magnetoencephalography / Alberto Sorrentino, Adam M. Johansen, John A. D. Aston, Thomas E. Nichols, Wilfrid S. Kendall // *Annals of Applied Statistics.* – 2013. – Vol. 7, No. 2. – P. 955-988. doi: 10.1214/12-AOAS611
326. Sekihara K. Adaptive Spatial Filters for Electromagnetic Brain Imaging / Kensuke Sekihara, Srikatan S. Nagarajan. – Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2008. – 245 p.
327. Chu L.J. Physical Limitations of Omni-Directional Antennas / L. J. Chu // *Journal of Applied Physics.* – 1948. – Volume 19, Issue 12. – P. 1163-1175.

328. McLean J.S. A Re-Examination of the Fundamental Limits on the Radiation Q of Electrically Small Antennas / J. S. McLean // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1996. – Vol. 44, No. 5. – P. 672-676.
329. Schantz H. The Art and Science of Ultra-Wideband Antennas / Hans Schantz. – Artech House, 2005. – 331 p.
330. Luk K. M. Dielectric Resonator Antennas (Antennas Series) / Eds. K. M. Luk, K. W. Leung, J. R. James. – London: Research Studies Press LTD, 2003.
331. Kerschen G. Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition / G. Kerschen, J. C. Golinval // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 249, No. 5. – P. 849-865.
332. Sternnickel K. Nonlinear noise reduction for magnetocardiograms using wavelet transforms / K. Sternnickel. – U.S. Patent Application 10/487,513. – 2004.
333. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory / Hermann Weyl // Duke Mathematical Journal. – 1940. – Vol. 7, No. 1. – P. 411-444. doi:10.1215/S0012-7094-40-00725-6
334. Кисунько Г. В. Электродинамика полых систем / Г. В. Кисунько, – Ленинград: ВКАС, 1949 – 426 с.
335. Durnin J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J. J. Miceli, J. H. Eberly // Physical Review Letters. – 1987. – Vol. 58, No. 15. – P. 1499-1501.
336. Gori F. Bessel-gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics communications. – 1987. – Vol. 64, No. 6. – P. 491-495.
337. Siviloglou G. A. Accelerating finite energy Airy beams / G. A. Siviloglou, D. N. Christodoulides // Optics Letters. – 2007. – T. 32. – №. 8. – C. 979-981.
338. Chong A. Airy–Bessel wave packets as versatile linear light bullets / A. Chong, W. H. Renninger, D. N. Christodoulides // Nature photonics. – 2010. – Vol. 4, No. 2. – P. 103-106.
339. Балалаев С. А. Бездифракционные свойства гипергеометрических пучков, формируемых фазовыми дифракционными оптическими элементами : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.04.05 / Балалаев Сергей Анатольевич – Самара, 2010. – 155 с.
340. Kotlyar V. V. Hypergeometric modes / V. V. Kotlyar, R. V. Skidanov, S. N. Khonina, V. A. Soifer // Optics letters. – 2007. – Vol. 32, No. 7. – P. 742-744.

341. Hansen W. W. A new type of expansion in radiating problems / W. W. Hansen // *Phys. Review.* – 1935. – Vol. 47, No. 2. – P. 139-143.
doi: 10.1103/PhysRev.47.139
342. Bouwkamp C. J. On multipole expansions in the theory of electromagnetic radiation / C. J. Bouwkamp, H. B. G. Casimir // *Physica.* – 1954. – Vol. 20, No. 1. – P. 539-554.
343. Bailin L. L. Exterior electromagnetic boundary value problems for spheres and cones / L. L. Bailin, Samuel Silver // *IRE Transactions on Antennas and Propagation.* – 1956. – Vol. 4, No. 1. – P. 5-16. doi: 10.1109/IRETAP.1956.6366290
344. Borisov V. V. Electromagnetic field of a current with arbitrary time dependence distributed on the surface of a sphere / V. V. Borisov // *Radiophysics and Quantum Electronics.* – 1976. – Vol. 19, Iss. 12. – P. 1291-1298.
345. Борисов В. В. Возбуждение непериодических полей в коническом рупоре / В. В. Борисов // *Радиотехника и электроника.* – 1985. – Т. 30, № 3. – С. 443-447.
346. Coilin R. E. Dyadic Green's function expansions in spherical coordinates / R. E. Coilin // *Electromagnetics.* – 1986. – Vol. 6, No. 3. – P. 183-207.
347. Shlivinski A. Time domain near field analysis of short pulse antennas. Part I: Spherical wave (multipole) expansion / A. Shlivinski and E. Heyman // *IEEE Trans. Antennas and Propagat.* – 1999. – Vol. 47. – P. 271-279.
348. Nevels R. The time domain Green's function and propagator for Maxwell's equations / Robert Nevels, Jaehoon Jeong // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* – 2004. – Vol. 52, No. 11. – P. 3012-3018.
349. Сологуб В.Г. Дифракция сферических волн на конических поверхностях специального вида / В. Г. Сологуб, Т. И. Харчевникова // *Радиотехника.* – 1972. – Вып. 20. – С. 52-57.
350. Дорошенко В. А. Теорія дифракції електромагнітних хвиль на неоднорідних конічних структурах : автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.04.03 / Харківський національний університет радіоелектроніки. – Харків, 2005. – 32 с.
351. Дорошенко В. А. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах. Монография / В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко. – Москва: Физматлит, 2009. – 272 с.
352. Гошин Г. Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях / Г. Г. Гошин. – Томск: Издательство Томского университета, 1987. – 128 с.

353. Tretyakov O. Modal basis method in radiation problems / O. Tretyakov, A. Dumin, O. Dumina, V. Katrich // Proc. Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET – 2004), Ukraine (Dnepropetrovsk). – 2004. – P. 312-314.
354. Dumin O. M. Propagation of spherical transient electromagnetic wave through radially inhomogeneous medium / O. M. Dumin, O. O. Dumina, V. O. Katrich // Proc. Int. Conf. on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS – 2006), Ukraine (Sevastopol), 2006, 18-22 September. – P. 276-278.
355. Бутрым А. Ю. Импульсные сигналы в волноводах с неоднородным заполнением и в расширяющихся щелевых антеннах (анализ во временной области): Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.03 / Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина. – Харьков, 2005. – 189 с.
356. Шестопалов В. П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений / В. П. Шестопалов. – Киев: Наукова думка, 1992. – 240 с.
357. Samaddar S. N. Biconical antennas with unequal cone angles / S. N. Samaddar // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – February 1998. – Vol. 46. – P. 181-193.
358. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. Введение в теорию / В. В. Шевченко. – М.: Наука, 1969, – 191 с.
359. Polyanin A. D. Handbook of linear Partial Differential Equations for engineers and scientists / A. D. Polyanin. – London: Chapman & Hall/CRC Press, 2002. – 800 p.
360. Gradshteyn I.S. Table of Integrals, Series, and Products / I. S. Gradshteyn, I.M. Ryznik edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. – Academic Press Elsevier, Translated from Russian by Scripta Technica Inc . Seventh Edition. 2007. – 1163 p.
361. Goubau G. Surface waves and their Application to Transmission Lines/ G. Goubau // Journal of Applied Physics. – 1950. – Vol. 21. – P. 1119-1128.
362. Akalin T. Single-wire transmission lines at terahertz frequencies / T. Akalin // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2006. – Vol. 54, Iss. 6. – P. 2762-2767.
363. Yu Wenhua. Parallel Finite-Difference Time-Domain Method / Wenhua Yu, Raj Mittra. – Artech House, Inc., 2006. – 262 p.
364. Pemper Y. Moving Coordinate Frame FDTD Analysis of Long Range Tracking of Pulsed Fields in Graded Index Waveguides / Y. Pemper, V. Lomakin, E. Heyman, R. Kastner, R. W. Ziolkowski // Progress in Electromagnetics Research. – 2000. – Vol. 26. – P. 133-164.

365. Li Yong. Application of Moving Coordinate FDTD Method on Electromagnetic Pulses Propagation / Yong Li, Jianguo Wang // PIERs Proceedings, Xi'an, China, March 22-26, 2010. – P. 192-195.
366. Zayats A.V. Nano-optics of surface plasmon polaritons / A.V. Zayats, I.I. Smolyaninov, A.A. Maradudin // Physics Reports, – 2005. – Vol. 408. – P. 131-314.
367. Annan A.P. Radio interferometry depth sounding: Part I Theoretical discussion / A.P. Annan // Geophysics. – 1973. – Vol. 38. – P. 557.-580.
368. McGowan R.W. Experimental study of the surface waves on a dielectric cylinder via terahertz impulse radar ranging / R.W. McGowan, R.A. Cheville, D.R. Grischkowsky // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2000. – Vol. 48, No. 3, – P. 417-422.
369. Baumgartner F. A geometric optics model for high-frequency electromagnetic scattering from dielectric cylinders / F. Baumgartner, J. Munk, J. Deniels // Geophysics. – July-August 2001. – Vol. 66, No. 4. – P. 1130-1140.
370. Inada H. Backscattered Short Pulse Response of Surface Waves from Dielectric Spheres / H. Inada // Applied Optics. – 1974. – Vol. 13. – P. 1928-1933.
371. Orfanidis S. J. Electromagnetic Waves and Antennas / S. J. Orfanidis. – Rutgers University, 2008.– 785 p.
372. Rothwell E. Electromagnetics / E. Rothwell, M. J. Cloud, – Taylor & Francis, 2001. – 560 p.
373. Mittra R. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves / R. Mittra, S. Lee. – New York: University of Illinois, 1971. – 572 p.
374. Uher J. Waveguide components for antenna feed systems: theory and CAD / J. Uher, J. Bornemann, U. Rosenberg, – Boston: Artech House, 1993. –476 p.
375. Kirilenko A.A. The mode-matching technique and fast numerical models of arbitrary coordinate waveguide objects / A.A. Kirilenko, V.I. Tkachenko, L.A. Rud, D.Y. Kulik // Quasi-optical Control of Intense Microwave Transmission In ed. by Hirshfield, J.L. Michael, I. Petelin. – Netherlands: Springer, 2005.–P.41-53.
376. Kirilenko A.A. General Scheme of the Mode-Matching Technique as a Basis for Generalized Solutions to the Internal Boundary-Value Problems / A.A. Kirilenko, D.Yu. Kulik, V.I. Tkachenko // Telecommunications and Radio Engeneering. – 2003. – Vol. 60, No. 12, – 159-170.

377. Luo S. An efficient modal FDTD for absorbing boundary conditions and incident wave generator in waveguide structures / S. Luo, Z. Chen // Progress In Electromagnetic Research. – 2007. – Vol. 68. – P. 229-246.
378. Gustafsson B. Time-Dependent Problems and Difference Methods/ B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, J. Oliger, – New York: Willey-Interscience, 1995. – 642 p.
379. Pozar D.M. Microwave Engineering / D.M. Pozar, –New York: University of Massachusetts at Amherst, Second Edition, 1998. – 720 p.
380. Marcuvitz N. Waveguide Handbook / N. Marcuvitz, –Peter Peregrinus Ltd, 1993. – 428 p.
381. Briks T.A. Dispersion compensation using single-material fibers / T. A. Briks, D. Mogilevtsev, J. C. Knight, P. St. J. Russell // IEEE Photonic Technology Letters.-1999.-Vol. 31.-P. 674–676.
382. Monro T.M. Exploring optical Properties of Holey Fibers / T.M. Monro, N.G.R. Broderik, D.J. Richardson // Conference Proceedings in Nanoscale Linear and Nonlinear Optics, 2-14 Jule, 2001, – Erice, Italy, 2001. – Vol. 560, – P. 123-128.
383. Hayes M.J. A Nonlinear Optical Preamplifier for Sensing Applications / M.J. Hayes // IEEE Transactions on Circuits and Systems – 2002. – Vol. 49, № 1. – P. 1–9.
384. Lowe D. Layout Optimization for Erbium-Doped Waveguide Amplifiers / D. Lowe, R. R. A. Syms, W. Huang // Journal of Lightwave Technology. – 2002. – Vol. 20, № 3. – P. 454–462.
385. Lawrence J. S. Nonlinear Dynamics of a Laser Diode with Optical Feedback Systems Subject to Modulation / J. S. Lawrence, D. M. Kane // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 2002. – Vol. 38, № 2. – P. 185-192.
386. Yabu T. All-Optical Logic Gates Containing a Two-Mode Nonlinear Waveguide / T. Yabu, M. Geshiro, T. Kitamura, K. Nishida, S. Sawa // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 2002. – Vol. 38, № 1. – P. 37–46.
387. Wexler A. Solution on waveguide discontinuities by modal analysis / A. Wexler // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1967. – Vol. 15, № 9, – p. 508–517.
388. Kirienko A. Data preprocessing for generalized mode-matching method/ A. Kirilenko, D. Kulik // Proceedings of the 9th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, 2002. – p. 535-539.

389. Астанин Л. Ю. Очерк истории использования сверхширокополосных радиолокационных сигналов: их описание и обработка / Л. Ю. Астанин // Радиотехника. -2009. - № 3. – С. 37-45.
390. Астанин Л. Ю. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений / Л. Ю. Астанин, А. А. Костылев. – М.: Радио и связь ,1989. – 192 с.
391. Calvo M. L. Optical Waveguides: From Theory to Applied Technologies / M. L. Calvo, V. Lakshminarayanan. – London: CRC, January 19, 2007, – 424 p.
392. Hesthaven J. Spectral Methods for Time-Dependent Problems / J. Hesthaven, S. Gottlieb, D. Gottlieb, – Cambridge: University Press, January 2007, – 284 p.
393. Stratton J. Electromagnetic theory / J. Stratton. – New York : McGraw-Hill, 1941. – 615 pp.
394. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
395. Мандельштам Л. И. Некоторые вопросы, связанные с возбуждением и распространением электромагнитных волн в трубах / Л. И. Мандельштам // Журнал технической физики. – 1945. – Т. 15, № 9. – С. 461.
396. Кисунько Г. В. К задаче возбуждения радиоволновода / Г. В. Кисунько // Журнал технической физики. – 1946. – Т. 16. – С. 565.
397. Самарский А.А. О возбуждении радиоволноводов. I / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов // Журнал технической физики. – 1947. – Т. 17, Вып. 11. – С. 1283-1296.
398. Самарский А. А. О представлении поля в волновode в виде суммы полей ТЕ и ТМ / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов // Журнал технической физики. – 1948. – Т. 18. № 7. – С. 959-970.
399. Cerillo M. Transient phenomena in waveguides / M.Cerillo // Electronics Tech. Rep. 33, MIT Research Lab., 1948. – 206 p.
400. Cohn G.I. Electromagnetic transients in waveguides / G. I. Cohn // Proc. Nat. Electronics Conf. – 1952. – Vol. 8. – P. 284-295.
401. Cotte M. Propagation of a pulse in a waveguide / M. Cotte // Onde Elec. – 1954. – Vol. 34. – P. 143-146.
402. Elliott R. S. Pulse Waveform Degradation Due to Dispersion in Waveguide / R. S. Elliott // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1957. – Vol. 5. – P. 254-257.
403. Namiki M. On the transient phenomena in the wave guide / M. Namiki and K. Horiuchi // J. Phys. Soc. Japan, Vol. 7, 190-193, 1952.

404. Infeld L. Contributions to the theory of wave guides / L. Infeld, J. R. Pounder, A. F. Stevenson, W. Z. Chien, J. L. Synge // Canadian Journal of Research. – 1949. – Vol. 27a, No. 4. – P. 69. doi: 10.1139/cjr49a-008
405. Gajewski R. On transients in wave guides / R. Gajewski // Bull. Acad. Polon. Sci. – 1955. – Vol. IV, Iss. 3. – P. 29–34.
406. P. Stenius and B. York. On the propagation of transients in waveguides. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 37(2), 39–44, 1995.
407. Lindell I.V. Time-domain study of generalized transmission lines / I.V. Lindell, P. Puska, and K.I. Nikoskinen // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1996. – Vol. 29, No. 9. – P. 2501.
doi: 10.1088/0022-3727/29/9/040
408. L.E. Vogler. An exact solution for waveform distortion of arbitrary signals in ideal waveguides. Rad. Sci., 5(12), 1469–1474, 1970.
409. Bernekorn P. Propagation of transient electromagnetic waves in inhomogeneous and dispersive waveguides / Peter Bernekorn, Anders Karlsson, and Gerhard Kristensson // Technical Report LUTEDX/(TEAT-7039). – 1995. – 23 p.
<http://lup.lub.lu.se/record/530337>
410. Родионов В. М. Зарождение радиотехники / В.М. Родионов. — М.: Наука, 1985. — 240 с.
411. Балюк Н. В. Мощный электромагнитный импульс: воздействие на электронные средства и методы защиты / Н.В. Балюк, Л.Н. Кечиев, П.В. Степанов. — М.: Группа ИДТ, 2008. — 478 с.
412. Baum C. E. EMP simulators for various types of nuclear EMP environments: an interim categorization / C. E. Baum // IEEE Trans. Electromagn. Compat. — 1978. — Vol. 20, No. 1. — P. 35-53.
413. Kennaugh E. The Use of Impulse Response in Electromagnetic Scattering Problems / E. Kennaugh, R. Cosgriff // IRE International Convention Record. – 1958. - Vol. 6 – P. 72-77. doi: 10.1109/IRECON.1958.1150701
414. Baum C. E. From the electromagnetic pulse to high-power electromagnetics / Baum C. E. // Proc. IEEE. – 1992. – Vol. 80, No. 6. – P. 789-817.
415. Baum C. E. Radiation of impulse-like transient fields // Sensor and Simulation Notes / ed. C.E. Baum. — USA, New Mexico, Kirtland: Air Force Research Laboratory, Directed Energy Directorate, 1989. — No. 321.

416. Baum C. E. Impulse radiating antenna / C.E. Baum, E.G. Farr // *Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics* / ed. H. Bertoni et al. — N.Y.: Plenum Press, 1993. — P. 139-147.
417. Ефремов А. М. Мощный источник сверхширокополосного излучения с мультимегавольтным эффективным потенциалом / А.М. Ефремов, В.И. Кошелев, Б.М. Ковальчук, В.В. Плиско, К.Н. Сухушин // Доклады 1-й Всероссийской микроволновой конференции. Россия, Москва: Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 27-29 ноября 2013. — М., 2013. - С. 197-201.
418. Прищепенко А.Б. Взрывы и волны. Взрывные источники электромагнитного излучения радиочастотного диапазона / А. Б. Прищепенко. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 208 с.
419. Kravtsova E. I. Optimizing a HIRA system for high voltage, UWB operation / E.I. Kravtsova, I.I. Magda, O.G. Melezhik, V.S. Mukhin, V.G. Sinitsin // 2012 6th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS), 17-21 Sept. 2012. — P. 88-90.
420. Berdin S. A. High-Power Ultra-Wideband Radiation Source / S.A. Berdin, N.P. Gadetski, N.I. Gaponenko, E.I. Kravtsova, I.I. Magda, V.S. Mukhin // 17th International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology (CriMiCo 2007), 10-14 Sept. 2007. — P. 636-638.
421. Финкельштейн М. И. Радиолокация слоистых земных покровов / М. И. Финкельштейн, В.Л. Мендельсон, В.А. Кутев / под ред. М. И. Финкельштейна. — М.: Сов. радио, 1977. — 176 с.
422. Kardo-Sysoev A. F. Ultra wide band solid state pulsed antenna array / A. F. Kardo-Sysoev, S.V. Zazulin, I.A. Smirnova, A.D. Frantsuzov, A.N. Flerov // *Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 5* / eds P.O. Smith and S.R. Cloude. — N.Y.: Plenum Press, 2002. — P. 343-349.
423. Moharam M. G. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction / M. G. Moharam and T. K. Gaylord // *J. Opt. Soc. Am.* — 1981. — Vol. 71. —P. 811-818.
424. Nosich A.I. Foundations of the theory of open waveguides / A. I. Nosich // *Journal of Telecommunications and Information Technology*. 2000. — No. 1-2. — P. 42-45.
425. Boriskina S. V. Highly Efficient Full-Vectorial Integral Equation Solution for the Bound, Leaky and Complex Modes of Dielectric Waveguides / S. V. Boriskina, T. M. Benson, P. Sewell, A. I. Nosich // *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. — December 2002. — Vol. 8, No. 6. — P. 1225-1232.