Радіоастрономічний інститут
Національна академія наук України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

**Баннікова Олена Юріївна**

УДК 524.74+524.7-7,
524.7-42, 521.14

ДИСЕРТАЦІЯ

# ТОРОЇДАЛЬНІ СТРУКТУРИ В АСТРОФІЗИЧНИХ ОБ'ЄКТАХ

01.03.02 — астрофізика, радіоастрономія

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________________ О.Ю. Баннікова

Науковий консультант: Конторович Віктор Мусійович,
доктор фізико-математичних наук, професор

**Харків — 2019**

# АНОТАЦІЯ

*Баннікова О.Ю.* Тороїдальні структури в астрофізичних об'єктах.— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук наук за спеціальністю 01.03.02 — "астрофізика, радіоастрономія".— Радіоастрономічний інститут Національної академії наук України; Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

На даний час спостерігаються астрофізичні об'єкти, в яких присутні тороїдальні (кільцеві) структури. Найвідомішими прикладами є газопилові тори в активних ядрах галактик і кільцеві галактики. В рамках уніфікованої схеми відмінність у випромінюванні активних ядер галактик (АЯГ) пояснюється різною орієнтацією газопилового тора щодо спостерігача. Якщо АЯГ видно з ребра, то акреційний диск затінюється тором і виявляються надлишок в ІЧ діапазоні і область формування вузьких емісійних ліній (тип 2). Навпаки, якщо АЯГ орієнтоване під кутом, то виявляється максимум в спектрі, пов'язаний з випромінюванням акреційного диска і, поряд з вузькими лініями, область формування широких емісійних ліній (тип 1). Газопиловий тор в АЯГ, який також називають затінюючим тором, є резервуаром речовини, який живить акреційний диск, тому він грає істотну роль в активності центральних областей галактик. Однією з ключових особливостей затінюючого тора є його геометрично товста форма. Пропонувалися різні механізми, які здатні пояснити наявність вертикальної складової швидкості речовини в торі, проте до цього часу це питання залишається відкритим. Криві обертання найближчих АЯГ, отримані на найбільших радіоінтерферометрах VLA, VLBI, показали, що рух в цих областях некеплерівський, тобто рух речовини відмінний від руху в диску. Перші прямі спостереження газопилового тора були проведені на оптичному інтереферометрі VLT/MIDI, де було отримано розподіл температури для найближчих до нас сейфертовських галактик NGC 1068 і Circinus. Ці спостереження і подальший аналіз спектрального розподілу енергії показали, що речовина в торі повинна бути розподілена у

вигляді хмар. Крім того, підтвердилося, що затінюючий тор дійсно є геометрично товстим. Великий прорив в спостереженнях цих об'єктів пов'язаний з вступом в дію міліметрового інтерферометра ALMA. В 2018 році з'явилися перші спостереження затінюючого тора в цьому діапазоні для NGC 1068 з більш детальною структурою, що дозволило отримати додаткову інформацію про динаміку речовини в центральних областях АЯГ. В 2019 команда ALMA представила результати спостережень торів в семи АЯГ, а VLA опублікував результати виявлення тора в радіо галактиці Cygnus A. Маса затінюючого тора в АЯГ становить відсоток і вище від маси центральної надмасивної чорної діри. Це означає, що гравітуючи властивості тора можуть бути істотні та впливати як на його стійкість, так і на динаміку речовини в його околицях. Тому важливо враховувати гравітаційні властивості тора, які можуть відігравати суттєву роль в динаміці в таких системах.

Також дослідження гравітаційних властивостей тора важливі для розуміння та інтерпретації спостережних особливостей кільцевих галактик типу об'єкта Хога, які являють собою центральну галактику і кільце зореутворення навколо. При цьому маса кільця порівнянна з масою центральної галактики. Це означає, що істотну роль можуть грати гравітаційні сили з боку кільця (тонкий тор), які можуть впливати на розподіл речовини в подібних об'єктах. А саме, щілина, яка спостерігається в розподілі речовини в кільцевих галактиках, може бути результатом області існування нестійких орбіт, яка виникає внаслідок конкуренції між гравітаційними силами з боку центральної галактики і кільця. Також представляє інтерес дослідити ефекти гравітаційного лінзування для систем, де лінзою є кільцева галактика або об'єкт, що містить кільцеву гравітуючу структуру. У цьому випадку можливе виникнення кількох кілець Ейнштейна, які можуть бути критерієм для виявлення кільцевих структур темної речовини, формування яких може бути результатом зіткнень галактики або скупчень галактик.

Тороїдальні структури можуть виникати як результат наявності нестійкості в різних течіях, що може мати місце в об'єктах з акрецією і вітром. При цьому визначальним може бути вихровий рух, при якому формується тороїдальний (кільцевий) вихор. За наявності вісесиметричного потоку, що має місце для багатьох астрофізичних об'єктів з акрецією, можливе формування дипольного тороїдального вихору. Динаміка такого вихору може бути нетривіальною і залежати від характеру течії (стік або розбіжний потік), тому представляє інтерес досліджувати рух вихорів для розуміння можливого механізму формування компонентів джетів в астрофізичних об'єктах.

Головні результати, що були отримані у дисертації, є наступними:

1. На підставі отриманого нового інтегрального виразу для потенціалу однорідного кругового тора, який справедливий в довільній точці простору, показано, що зовнішній потенціал тора представляється потенціалом нескінченно тонкого кільця тієї ж маси аж до поверхні тора. Відмінності виникають поблизу осі симетрії тора і залежать від геометричного параметра. Отримані наближені вирази для потенціалу тора в його зовнішній і внутрішній областях. Показано, що внутрішній потенціал тора може бути представлений потенціалом циліндра і складовою, що містить гауссову кривизну поверхні тора ("потенціал кривизни").

2. Побудована динамічна модель затінюючого тора в активних ядрах галактик в межах задачі $N$ тіл при врахуванні гравітаційної взаємодії між хмарами. Вперше показано, що самогравітуючий товстий тор в полі центральної маси залишається стабільним, а рівноважний перетин має форму овалу з гаусовим розподілом густини, що узгоджується з даними спостережень. Таким чином спостережувану геометричну товщину затінюючого тора в АЯГ можна пояснити за рахунок руху хмар по нахиленим орбітам з розкидом по ексцентриситетам, що, в свою чергу, є результатом гравітаційної взаємодії центральної маси і хмар в торі.

3. Вперше показано, що в гравітаційному полі центральної маси і кільця замкнуті кругові орбіти існують тільки до певного радіуса, який відповідає останній стійкій орбіті, що була названа як "the outermost stable circular orbit (OSCO)" , за аналогією з ISCO в релятивістському випадку. Також існує область нестійкої рівноваги — "коло Лагранжа". Вперше виявлено існування області некругових орбіт між колом Лагранжа та OSCO, що може пояснити спостережувану щілину в розподілі зоряної густини в кільцевих галактиках. Показано, що в такій системі в меридіональній площині існують замкнуті

орбіти нових типів.

4. Виявлена істотна роль центральної маси в стабільності систем, що містять гравітуючий тор. Дослідження можливих траєкторій у внутрішньому потенціалі тора при наявності центральної маси показало, що існують принаймні два типи орбіт в супутній системі: гало і коробчаті орбіти. Показано можливе існування квазізамкнених гало-орбіт. Вперше показано, що в межах задачі про незбурений рух можливо сформувати тор, який ми назвали "тор Кеплера" , оскільки він є узагальненням кеплерівського диска.

5. В межах задачі N-тіл вперше показано, що геометрична товщина тора більше, якщо в початковому стані присутній розкид орбіт частинок не тільки за нахилами, а й за ексцентриситетами. Показано, що рівноважний розподіл хмар в торі, досягнутий за рахунок самогравітації, задовольняє умовам затінення акреційного диска в АЯГ. Показано, що спостережувану динаміку в NGC1068 можна пояснити особливостями руху хмар в торі за рахунок ефектів самогравітації. Отримано оціночні вирази для температури хмар внаслідок нагріву їх випромінюванням акреційного диску, які узгоджуються з даними спостережень.

6. Вперше досліджено ефекти гравітаційного лінзування на системі центральна маса і тор (в наближенні тонкого диска з отвором). Показано, що у даній системі можливе формування трьох кілець Ейнштейна. Два кільця Ейнштейна виникає в широкій області параметрів, при цьому яскравість кілець може істотно відрізнятися. Також може формуватися одне кільце Ейнштейна, яке може бути ідентичним випадку лінзування на точковій лінзі або, навпаки, мати істотну ширину і високу яскравість.

7. Вперше показано, що існують як аналогії, так і якісні відмінності динаміки дипольного тороїдального вихора в 3D від поведінки систем вихорів у 2D випадку. У збіжному (акреційному) потоці кільцеві вихори, так само, як і їх плоскі аналоги, прискорюються. У разі дипольного тороїдального вихору це призводить до викиду прискорених компонент, але при достатній потужності потоку відбувається захоплення кільцевих вихорів потоком. Показано, що інтеграл спіральності для тороїдального вихору з закруткою і максимумом швидкості на твірної вихору відрізняється від формули Моффата на

чисельний коефіцієнт.

8. Вперше показано, що в 2D, задача про пару вихорів в радіальному потоці допускає точне рішення: у збіжному потоці вихори в парі зближуються, але при цьому швидкість руху пари зростає. Вперше розглянуто динаміку дипольного тороїдального вихору в радіальному потоці в наближенні чотирьох плоских вихорів та показано, що в цьому випадку компоненти пар викидаються збіжним потоком, а швидкість викиду експоненціально збільшується. Основний результат, пов'язаний з прискоренням викидів, зберігається для більш складної течії (джерело і диполь, квадруполь), оскільки основний вплив має монопольна компонента, але присутні відмінності, які призводять до асиметрії викидів.

**Ключові слова**: активні ядра галактик, затінюючий тор, кільцеві галактики, гравітаційний потенціал, тороїдальний вихор, гравітаційне лінзування, задача $N$ тіл.

# ABSTRACT

*Bannikova E.Yu.* Toroidal structures in astrophysical objects.— Qualifying scientific work, the manuscript.

Thesis for the Doctor of Science degree in Physics and Mathematics, specialization 01.03.02 — "Astrophysics, radio astronomy".— Institute of Radio astronomy of NAS of Ukraine, V.N.Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

There are astrophysical objects possessing toroidal (ring) structures. The most famous examples are ring galaxies and dusty tori in active galactic nuclei (AGNs). In the framework of the unified scheme, the differences in the emission of AGNs are explained by the different orientation of the dusty torus relative to an observer. If the torus is seen edge-on, the accretion disk is obscured by the torus itself and the IR excess and the region of narrow lines are detected (type 2). On the contrary, if the torus is oriented at some angle, then we experience the maximum in the spectrum which is related with the accretion disk emission and the region of broad lines formation (type 1). Such a torus is named obscuring torus and it is a reservoir of matter feeding an accretion disk. Therefore, it plays an essential role in the AGN activity. One of the key features of an obscuring torus is its geometrically thick shape. Different mechanisms were proposed that could explain the presence of vertical components of the matter velocity in the torus but this question remains open up to this time. The rotation curves of the nearest AGNs observed by the largest radio interferometers VLA and VLBI showed that the motion in the torus is non-Keplerian, i.e. the motion of matter is different from that in the disk. The first direct observations of a dusty torus in nearest the Seyfert galaxies (NGC 1068 and Circinus) were obtained with help of an optical VLT/MIDI interferometer. These observations and further analysis of the spectral energy distribution showed that the matter in the torus should be distributed in the form of clouds. In addition, it was confirmed that the obscuring torus is geometrically thick. A major breakthrough in the observations of these objects is associated with the millimeter interferometer ALMA. In 2018, the first observation of the obscuring torus of NGC 1068 with a more detailed structure was made,

which allowed to obtain additional information on the dynamics of matter in the AGN central regions. In 2019, ALMA presented the detection of obscuring tori in seven AGNs and VLA provided the image of the torus in radio galaxy Cygnus A. The mass of the obscuring torus in AGNs can be a percent or even higher than the mass of the supermassive black hole. This means that the gravitational properties of the torus can be substantial and affect both its stability and the dynamics of the matter in its vicinity. Therefore, it is important to take into account the gravitational properties of the torus.

Also, the investigation of the gravitational properties of the torus is central for understanding and interpreting the observational features of Hoag-like ring galaxies, i.e. star forming rings encircling the bulges of their host galaxies. The mass of the ring is comparable to that of the galaxy. This means that the gravitational forces from the ring (thin torus) can play an essential role on the surrounding matter distribution. Namely, the gap observed in the matter distribution in ring galaxies may be the result of the existence of an open orbit region, which arises from the competition between gravitational forces from the central galaxy and the ring. It is also interesting to investigate the gravitational lensing effects on systems where the lens is a ring galaxy or an object containing a massive ring structure. In this case, three Einstein rings can form, which may provide a criterion for detecting ring structures of a dark matter, the formation of which may be the result of collisions of a galaxy or clusters of galaxies.

Toroidal structures may form as a result of the presence of instability in different flows, which may occur in objects with accretion and winds. In this case, the vortex movement can be essential and lead to the formation of a ring vortex. In the presence of an axisymmetric flow that can occur for many astrophysical objects with accretion, the formation of a dipole toroidal vortex is possible. The dynamics of such a vortex may be nontrivial and depends on the nature of the flow (converging or diverging); therefore, it is of interest to investigate the motion of vortexes in order to understand the possible mechanisms of formation for jet components in astrophysical objects.

The main original results of this dissertation are:

1. It is shown, on the basis of an exact integral expression for the potential of a

homogeneous circular torus, which is valid at any arbitrary point of space, that the outer potential of a torus can be represented with high accuracy by the potential of an infinitely thin ring of the same mass up to the torus surface. Approximate expressions for the torus potential in its outer and inner regions are obtained. It is shown that the inner potential of the torus can be represented by the potential of a cylinder and the term containing the Gaussian curvature of the torus surface ("potential of curvature").

2. A dynamical model of obscuring tori in AGNs is simulated within the framework of the N-body problem taking into account the gravitational interaction between the clouds. It is shown that a self-gravitating thick torus in the field of the central mass remains stable, and the equilibrium cross-section has an oval shape with Gaussian density distribution, which satisfies observations. It is shown that the observable geometric thickness of the obscuring torus in the AGNs can be explained by the motion of clouds in inclined orbits with a range of eccentricities, which is the result of the gravitational interaction of the central mass and the clouds in the torus.

3. It is shown that in a gravitational field of a central mass and a gravitating ring, closed circular orbits exist only to a certain radius corresponding to the last stable circular orbit, which we call "the outermost stable circular orbit (OSCO)"by analogy with the ISCO in the relativistic case. There is also a region of unstable equilibrium — the "Lagrangian circle". The existence of region with non-circular orbits between the Lagrangian circle and OSCO can explain the observed gap in the distribution of stellar density in ring galaxies. It is shown that in such a system there are closed orbits of new types in the meridian plane of the ring.

4. An essential role of the central mass in the stability of systems containing the gravitating torus is shown. Possible trajectories in the inner potential of the torus in the presence of a central mass were investigated which showed that there are at least two types of orbits in the co-moving system: halo and box orbits. It is shown that the quasi-closed halo-orbit exists in such a system. It is shown that within the framework of the problem of unperturbed motions, it is possible to form a torus, which we called "Keplerian torus since it is a generalization of the Keplerian disk.

5. It is shown in the framework of the N-body problem that the geometric thickness of the torus is larger if, in the initial conditions for the particle orbits, we introduce a distribution of both inclination and eccentricity. It is shown that the equilibrium distribution of clouds in the torus, achieved due to self-gravity, satisfies the conditions of obscuration of the accretion disk in the AGNs. It is shown that the observed dynamics in NGC 1068 can be explained by the peculiarities of the cloud motions in the torus due to the effects of self-gravity. Temperature of clouds as a result of heating by radiation of the accretion disk are obtained, which satisfy the observational data in IR band.

6. The effects of gravitational lensing on the system of a central mass and of a torus (in the approach of a thin disk with a hole) have been investigated. It is shown that in this system it is possible the formation of three Einstein rings. Two Einstein rings arise in a wide range of parameters with significantly different brightness. One Einstein ring is also formed, which can be identical to the case of lensing by a point mass, or, on the contrary, it may have a substantial width and high brightness.

7. It is shown that there are both analogies and qualitative differences in the dynamics of dipole toroidal vortexes in 3D from the behavior of vortex systems in the 2D case. In the convergent (accretion) flow, rings as well as their flat analogues are accelerated. In the case of a dipole toroidal vortex, this result leads to the component acceleration but the vortexes can collapse for some value of the flow power. It is shown that the integral of helicity for a toroidal vortex with a twist and a maximum of the velocity on the vortex generatrix is different from the known Moffat formula on the numerical coefficient.

8. It is shown that a problem of a pair of vortexes in a radial flow (in 2D case) allows an exact solution. In the converging flow, the vortexes in the pair approach each other with increasing speed. The dynamics of a dipole toroidal vortex in a radial flow in the approximation of four flat vortexes is considered. It is shown that in this case, the pair components are ejected by the convergent flow with exponentially increasing speed. It is shown that the main result associated with the acceleration of the outflows is kept for a more complicated flow (source and dipole, quadrupole), since the main influence has a monopole component of flow.

**Key words**: active galactic nuclea, obscuring torus, ring galaxy, gravitational potential, toroidal vortex, gravitational lensing, N-body problem.

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці у зарубежних наукових фахових виданнях*

1. **Bannikova E.Yu.** The structure and stability of orbits in Hoag-like ring systems // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. Vol. 476. P. 3269–3277. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

2. **Bannikova E.Yu.**, and Kotvytskiy A.T. Three Einstein rings: explicit solution and numerical simulation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 445. P. 4435–4442. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *У роботах, де дисертант є першим автором, автор брав активну участь у постановкі задачі, частині аналітичних обчислень, чисельних моделювань, аналізу результатів, написанні та підготовці статей до публікації, відповіді рецензентам.*

3. **Bannikova E.Yu.**, Vakulik V.G., Sergeev A.V. N-body simulation of a clumpy torus: application to active galactic nuclei // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 424. P. 820–829. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

4. **Bannikova E.Yu.**, Vakulik V.G., Shulga V.M. Gravitational potential of a homogeneous circular torus: new approach // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. Vol. 411. P. 557–564. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

5. **Bannikova E.Yu**. and Sergeyev A.V. Dynamics and formation of obscuring tori in AGNs // Frontiers in Astronomy and Space Sciences. 2017. Vol. 4, id.60. P. 1–6. (Видання входить до міжнародної наукометричної бази Web of Science.)

6. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Helicity of a toroidal vortex with swirl // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2016. Vol. 122. P. 769–775. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

7. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Acceleration and ejection of interacting ring vortices by radial flow // Physics Letters A. 2009. Vol. 373. P. 1856–1860. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

8. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Influence of Orbital Motion on the Collapse of Ring Vortices in an Accretion Flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2014. Vol. 119, №3. P. 584–589. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

9. Shkuratov Y.G., Konovalenko A.A., Zakharenko V.V., Stanislavsky A.A., **Bannikova E.Y.**, Kaydash V.G., Stankevich D.G., Korokhin V.V., Vavriv D.M., Galushko V.G., Yerin S.N., Bubnov I.N., Tokarsky P.L., Ulyanov O.M., Stepkin S.V., Lytvynenko L.N., Yatskiv Y.S., Videen G., Zarka P., Rucker H.O. A twofold mission to the moon: Objectives and payloads // Acta Astronautica. 2019. Vol. 154. P. 214–226. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

Шкуратов Ю.Г., Коноваленко А.А., Захаренко В.В., Станиславский А.А., **Банникова Е.Ю.**, Кайдаш В.Г., Станкевич Д.Г., Корохин В.В., Ваврив Д.М., Галушко В.Г., Ерин С., Бубнов И., Токарский П., Ульянов О., Степкин С., Литвиненко Л.Н., Яцкив Я.С., Вайдин Г., Зарка Р., Рюккер Х. Украинская миссия на луну: цели и полезная нагрузка // Космическая наука и технология. 2018. Т. 24(1). С. 3–30. (Видання входить до міжнародної наукометричної бази Web of Science.) *Автором були проведені чисельні експерименти по вибору орбіти супутника та розрахунки змін елементів обраної орбіти, підготовлені відповідні частини статей.*

10. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Collapse and backward motion of axisymmetric toroidal vortices in an accretion flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2013. Vol. 117, №2. P. 378–384. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

11. Spiniello C., Agnello A. Napolitano N.R., Sergeyev A.V., Getman F.I., Tortora C., Spavone M., Bilicki M., Buddelmeijer H., Koopmans L.V.E., Kuijken K., Vernardos G., **Bannikova E.**, Capaccioli M. KiDS-SQuaD: The KiDS Strongly lensed Quasar Detection project // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. Vol. 480. P. 1163–1173. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *Автор брав участь у обговоренні постановки задачі, аналізу проміжних і фінальних результатів.*

12. Sergeyev A., Spiniello C., Khramtsov V., Napolitano N. R., **Bannikova E.**, Tortora C., Getman F. I., and Agnello A. KiDS0239-3211: A New Gravitational Quadruple Lens Candidate // Research Notes of the AAS. 2018. Vol. 2, №4. article id.189. P. 1–4. *Автор брав участь у обговоренні постановки задачі, аналізу проміжних і фінальних результатів.*

13. **Bannikova E.Yu.**, Karnaushenko A.V., Kontorovich V.M., Shulga V.M. A new exact solution of Kompaneets equation for a shock front// Astronomy Reports. 2012. Vol. 56, №7. P. 496–503. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

14. Poslavsky S.A., **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Acceleration and ejection of ring vortices as a mechanism for formation of jet components in AGN // Astrophysics. 2010. Vol. 53. P. 174–188. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *Автор брав участь в постановці задачі, виконав частину аналітичних і числових розрахунків, обговорював результати роботи та запропонував астрофізичну інтерпретацію, підготував текст статті.*

15. Mikhailova M.S., **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Determining the Inclination of the Kiloparsec-Scale Jet of the Quasar 3C 273 Based on Competition of Mechanisms for the Knot X-ray Emission // Astronomy Reports. 2010. Vol. 54, №6. P. 531–538. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *Автор брав участь в формулюванні задачі, аналітичних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних ре-*

*зультатів, в написанні тексту статті.*

16. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., Reznik G.M. Dynamics of a vortex pair in radial flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2007. Vol. 105, №3. P. 542–548. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

17. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. A dipolar vortex model for the obscuring tori in active galactic nuclei // Astronomy Reports. 2007. Vol. 51, №4. P. 264–273. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

18. Михайлова М.С., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Излом в энергетическом спектре релятивистских электронов в джете квазара 3С273, определяемый по интенсивности излучения джета в радио-, оптическом и рентгеновском диапазонах // Вопросы атомной науки и техники. 2008, № 4. С. 128–132. (Видання входить до міжнародної наукометричної бази Web of Science.) *Автор брав участь в формулюванні задачі, аналітичних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті.*

*Наукові праці у наукових фахових виданнях України*

19. **Банникова Е.Ю.** Распределение облаков в затеняющем торе активных ядер галактик // Радиофизика и радиоастрономия. 2015. Т.20, N3. С. 191 – 204. .

20. Ткачов В.Н., Захаренко В.В., Васильева Я.Ю., Царин Ю.А., **Банникова Е.Ю.**, Илюшин В.В., Саваневич В.Е., Герасименко О.В., Анненков А.Б., Кулишенко С.Ф., Кулишенко Д.Ф. Использование грид-технологий в решении задач радиофизики и радиоастрономии // Радиофизика и радиоастрономия. 2013. Т. 18. С. 176–188. *Автор брав участь в обговоренні ідеї статті, провів числове моделювання в рамках задачі N-тіл для самогравітуючого тора, написав відповідний розділ статті.*

21. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Тороиальный вихрь как структурный элемент активных ядер галактик // Радиофизика и радиастрономия.

2006. Т. 11, №1. С. 42–48.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

*Праці конференцій*

22. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Dipole-vortex structure of the obscuring tori in active galactic nuclei // Black Holes from Stars to Galaxies - Across the Range of Masses, editors V.Karas and G.Matt: Proceedings of the International Astronomical Union, 21–25 August 2006, Prague, №238, 2006. P. 323–324.

23. Mikhailova M., **Bannikova E.Yu.** Distribution of X-ray emission from jet knots of 3C273, 14th Young Scientist's Conference on Astronomy and Space Physics: Proceedings of Contributed Papers, 23–27 April 2007, Kyiv, 2007. P. 64–67. *Автор брав участь в формулюванні задачі, аналітичних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті.*

24. Karnaushenko A., **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Frequency dependence of radio images of jet knots and supernova remnants // 14th Young Scientist's Conference on Astronomy and Space Physics, Proceedings of Contributed Papers, 23–27 April 2007, Kyiv, 2007. P. 36–39. *Автор брав участь в формулюванні задачі, в чисельних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті.*

25. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Ускорение и выброс тороидального вихря как механизм образования компонент джетов активных ядер галактик // Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность: Сборник трудов международной конф. под ред. Н.С. Ерохина, 23–25 ноября 2009, Москва: ЛЕНАНД, 2009. С. 304–309.

26. **Bannikova E.Yu.**, Karnaushenko A.V., Kontorovich V.M., Shulga V.M. Interaction of the Supernova Remnant with Molecular Cloud // Proceedings of the 16th Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics, 27 April–2

May 2009, Kyev, 2009. P. 20–23.

27. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Взаимодействие ударного фронта с молекулярным облаком // Astronomy and Beyond: Proceedings of the 10th G. Gamow International Summer School, 23–28 August 2010, Odessa, 2010. P. 132–134.

28. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Шульга В.М. Внешний и внутренний гравитационный потенциал однородного кругового тора // Astronomy and Beyond: Proceedings of the 10th G. Gamow International Summer School, 23–28 August 2010, Odessa, 2010. P. 79–82.

29. Пославский С.А., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Движение вихревой пары в стационарном центральном потоке со знакопеременной радиальной скоростью // Тараповские чтения: Сборник материалов международной научной конференции, 21-25 апреля 2008 г., Харьков, 2008. С. 126–127. *Автор брав участь в постановці задачі, виконав частину аналітичних і чисельних розрахунків, та підготував текст статті.*

30. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Спиральность кольцевого вихря, закрученного вокруг своей оси // Современные проблемы естественных наук: Сборник тезисов докладов международной конф. "Тараповские чтения-2016" , 17–22 апреля 2011 г., Харьков, 2016. С. 79–80.

31. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В. М., Пославский С. А. Динамика точечных и кольцевых вихрей в потоках с особенностями // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Труды XVIII Международного симпозиума, 26–28 июня 2017 г., Харьков, 2017. С. 36–39.

*Тези та презентації доповідей на конференціях*

32. **Bannikova E.Yu.**, Sergeyev A.V., Akerman N. Hidden properties of AGNs and ring galaxies // Second Italy-Ukraine Meeting in Astronomy "Multiwavelength Astrophysics from Radio to Gamma Rays" , Kharkiv, Ukraine, 23–25 September, 2018, the presentation of the talk is posted on webpage of the meeting: http://www.astron.kharkov.ua/conference/ItUk2018/index.php

33. **Bannikova E.Yu.** Astrophysical Research // Italy-Ukraine Meeting in Astronomy, Rome, Italy, 22 March, 2018, the presentation of the talk is posted on webpage of the meeting: https://indico.ict.inaf.it/event/675/

34. **Bannikova E.Yu.** Dynamics and formation of obscuring tori in AGNs // Quasars at all epochs: Book of abstracts of International Conference, 2–7 April, 2017, Padova, 2017. P. 60.

35. **Bannikova E.Yu.** Self-gravitating tori in astrophysical objects // Seminar of INAF-Astronomical Observatory of Padova, 30 March 2017
URL: http://www.oapd.inaf.it/index.php/it/component/eventlist/details/427-seminario-dr-ssa-elena-bannikova.html

36. **Bannikova E.Yu.**, V.M. Kontorovich, Poslavskii S.A. Influence of a vortex motion on global rotation of Hoag's object // Фізичні явища в твердих тілах: Матеріали XIII Міжнародної конференції, 5–8 грудня 2017, Харків, ХНУ, 2017. С. 98.

37. **Bannikova E.Yu.** Lagrangian ring and region of unstable orbits in ring galaxies // Astronomy and beyond: Book of Abstract of International Gamow conference, 13–20 August 2017, Odessa, 2017. P. 9.

38. **Bannikova E.Yu.** and Kotvytsky A.T. Gravitational lensing effects on a homogeneous ring with a central mass // Astronomy and beyond: Book of Abstract of International Gamow conference, 13–20 August 2017, Odessa, 2017. P. 9.

39. **Банникова Е.Ю.** Формирование газопылевого тора в активных ядрах галактик // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Тезисы докладов XXXIII международной конференции, 19–22 апреля 2016, Пущино, 2016. С. 7.

40. **Bannikova E.Yu.** Evolution of obscuring tori in active galactic nuclei // All wave astronomy. Shklovsky-100: Book of abstract of International conference, 20–22 June 2016, Institute of Space Research, Moscow, 2016. P. 11.

41. **Bannikova E.Yu.** Lagrangian ring // Multi-spin Galaxies: Book of

abstract of International conference, 26–30 September 2016, Special Astrophysical Observatory of RAS, Nizhnij Arkhyz, 2016. P. 26.
URL: https://www.sao.ru/hq/multispin16/program.html

42. **Bannikova E.Yu.** Clouds distribution in obscuring tori of active galactic nuclei // Astrophysics and cosmology after Gamov: Program and abstracts of 5-th G.Gamov Memorial International Conference dedicated to 111-th anniversary of George Gamov, 16–23 August, 2015, Odessa, 2015. С. 30.

43. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. О возможности возвратных движений в активных ядрах галактик // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Программа и тезисы докладов конференции, 22–25 апреля 2014 г., Пущино, 2014. С. 5.

44. **Банникова Е.Ю.**, Котвицкий А.Т. Три кольца Эйнштейна: точное решение и численное моделирование // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Программа и тезисы докладов конференции, 22–25 апреля 2014 г., Пущино, 2014. С. 8.

45. **Bannikova E.Yu.** N-body simulation of a dusty torus in AGN // The European Week of Astronomy and Space Science: Book of abstracts of the International conference, 30 June–4 July 2014, Geneva, 2014. Abstract 00058.

46. **Bannikova E.Yu.** and Kotvitskiy A.T. Three Einstein rings: explicit solution and numerical simulation // The European Week of Astronomy and Space Science: Book of abstracts of the International conference, 30 June–4 July 2014, Geneva, 2014. Abstract 00059.

47. **Банникова Е.Ю.**, Котвицкий А.Т. Три кольца Эйнштейна: точное решение и численное моделирование // Астрофизика высоких энергий: Сборник тезисов международной конференции, 22–25 декабря, 2014, Москва, 2014. С. 34.

48. **Bannikova E.Yu.** N-body simulation of a self-gravitating torus: application to active galactic nuclei // Dynamics and kinetic theory of self-

gravitating systems: Abstract Book of International Workshop, 4–8 November 2013, Henri Poincare Institute, Paris, 2013. P. 8.

49. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Динамика кольцевого вихря в осесимметричном потоке с распределенными особенностями на оси симметрии // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Сборник тезисов международной конф., 1–31 мая 2012, Харьков, 2012. С. 26.

50. **Bannikova E.Yu.**, Vakulik V.G., Sergeev A.V., Shulga V.M. Dynamics of clouds in dusty tori of Active Galactic Nuclei // Astronomy and Space Physics: Book of abstract of International Conference, 22–25 May 2012, Kyiv, 2012. P. 5.

51. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Шульга В.М. Равновесное сечение самогравититрующего тора: применение к активным ядрам галактик // Astronomy and beyond: Book of Abstract of 12th International Gamow conference, 20–26 August 2012, Odessa 2012. С. 27.

52. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Сергеев А.В., Шульга В.М. Динамика облаков в газопылевых тора активных ядер // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Тезисы докладов XXIX конференции, 17–19 апреля 2012, Пущино, 2012. С. 7.

53. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г. Газопылевые торы в активных ядрах галактик: новые результаты // Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра: Тезисы докладов Всеросийсской астрономической конференции, 24–27 декабря 2012, Институт космических исследований РАН, Москва, 2012. С. 28.

54. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Движение кольцевых вихрей в центральном радиальном потоке // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Сборник тезисов междунар. конф. 17–22 апреля 2011, Харьков: Апостроф, 2011. С. 18.

55. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А Ускорение и

захват тороидальных вихрей аккреционным потоком // Совет РАН по нелинейной динамике: Программа XIX научной сессии, Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, 20–21 декабря 2010, Москва, 2010. С. 2.

56. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Форма ударного фронта остатка сверхновой при взаимодействии с молекулярным облаком // От эпохи Галилея до наших дней: Тезисы докладов Всероссийской астрономической конференции, 12–19 сентября 2010, Специальная астрофизическая обсерватория, Нижний Архыз, 2010. С. 88.

57. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Шульга В.М. Гравитационный потенциал однородного кругового тора // От эпохи Галилея до наших дней: Тезисы докладов Всероссийской астрономической конференции, 12–19 сентября 2010, Специальная астрофизическая обсерватория, Нижний Архыз, 2010. С. 122.

58. Пославский С.А., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Асимметрия ускорения выбросов вихрей в аккреционном потоке с дипольной составляющей // Совет РАН по нелинейной динамике: Программа XIX научной сессии, 21–22 декабря 2009, Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН Москва, 2009. С. 4. *Автор брав участь в постановці задачі, виконав частину аналітичних і числових розрахунків, обговорював результати роботи та запропонував астрофізичну інтерпретацію, підготував текст статті.*

59. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Взаимодействие остатка сверхновой с молекулярным облаком // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Программа конференции, 21–23 апреля 2009, Пущино, С. 5.

60. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Точное решение уравнение Компанейца для ударного фронта применительно к взаимодействию остатка сверхновой с молекулярным облаком // Программа Научной сессии Совета по нелинейной динамике РАН, 22–23 февраля 2008, Москва, Институт океанологии РАН, С. 2.

61. Михайлова М.С., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М.Физическая ин-

терпретация и геометрические следствия рентгеновского излучения в узлах джета 3C273 // Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра: Тезисы докладов конференции, 24–26 декабря 2007, Институт космических исследований РАН, Москва, 2007. С. 24.

62. **Bannikova E.Yu.** and Kontorovich V.M. Vortex ring acceleration and ejection by the convergent radial stream as a model of AGN jet components formation // Book of Abstract of International Lyapunov Memorial Conference, 24–30 June 2007, Kharkiv, 2007. P. 8–9.

63. **Bannikova E.Yu.** Vortex ring ejection as a model of AGN jet components formation // Abstract Book of XXXVII Young European Radio Astronomers Conference, 4–7 September 2007, Bordeaux, 2007. P. 13.

Також доповіді за результатами дисертації були представлені на семінарах в Обсерваторії в Падуї, Італія, фізичний факультет Університету Падуї, Італія; НДІ астрономії ХНУ ім. В.Н. Каразіна; Радіоастрономічного інституту НАН України.

*Навчальний посібник*

64. **Баннікова О.Ю.**, Конторовіч В.М. Теоретична астрофізика // Навчально-методичний посібник. Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2010. 80 с.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

| | |
|---|---|
| АЯГ | Активне ядро галактики |
| VLT | Very Large Telescope |
| VLBI | Very Long Baseline Interferometry |
| VLA | Very Large Array |
| ALMA | Atacama Large Millimeter/submillimeter Array |
| BLR | Broad Line Region |
| NLR | Narrow Line Region |
| НМЧД | Надмасивна чорна діра |
| Sy | Сейфертівська галактика |
| СРЕ | Спектральний розподіл енергії |

РОЗДІЛИ 2, 3

| | |
|---|---|
| $\psi$ | Функція тока |
| Г | Інтенсивність вихору |
| $\varphi$ | Кут (в полярній с.к.) |
| $\rho$ | Об'ємна густина |

РОЗДІЛИ 4, 5, 6

| | |
|---|---|
| $\varphi$ | Гравітаційний потенціал |
| $\rho$ | Нормована радіальна координата |

# ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Астрофізичні об'єкти з тороїдальними структурами є досить поширеним явищем. Важливим структурним елементом активних ядер галактик (АЯГ) є газопиловий оптично товстий тор, який оточує центральну область активного ядра. Залежно від його орієнтації щодо спостерігача пояснюється поділ АЯГ (як більш потужних радиогалактик і квазарів, так і слабших сейфертовських галактик) на різні типи в межах уніфікованої схеми, в якій структура цих об'єктів однакова. А саме, центральна надмасивна чорна діра оточена акреційним диском, відповідальним за більш жорстке випромінювання, в околиці якого генеруються космічні струмені – джети, що породжують радіовипромінювання. При цьому потужність випромінювання акреційного диска залежить від маси чорної діри. Газопилової тор в АЯГ називають затінюючим тором, тому що він може приховувати центральну область АЯГ (2-й тип – радіогалактики та Sy2) або, навпаки, випромінювання акреційнного диска може бути доступно спостерігачеві (1-й тип – квазари та Sy1). Пилові тори в АЯГ відіграють істотну роль, поставляючи речовину в акреційний диск, що забезпечує значне енерговиділення центральних областей активних галактик. Маючи малі відносні масштаби та з урахуванням віддаленості АЯГ, довгий час затінюючі тори не були доступні прямим спостереженнями. Пряме виявлення тора в найближчих до нас сейфертовських галактиках стало можливим завдяки технологічним досягненням, а саме, використанню ІЧ- камери MIDI на VLT і вступу в дію найбільшого радіоінтерферометра ALMA, що працює в міліметровій області спектра. Результати спостережень підтвердили геометричну товщину тора та його значну масу. Ще починаючи з ідеї уніфікованої схеми, запропонованої Р. Антонуччі, обговорювалися механізмі, які здатні пояснити геометрично товсту форму тора. Значна маса тора показала, що необхідно враховувати його гравітаційні властивості. Урахування самогравітації тора для інтерпретації спостережних даних обговорювалося давно, проте гравітаційні властивості тора практично не досліджувалися навіть у межах класичної теорії потенціалу. Питання, що пов'язані з формуванням, стабільністю, динамікою речовини в торі є найбільш важливими для розуміння фізичних властивостей АЯГ. Тут важливий як аналітичний підхід, так і сучасні чисельні методи, що здатні моделювати гравітуючі системи, які складаються з великого числа об'єктів. Знання гравітаційних властивостей тора також важливо для дослідження кільцевих галактик. Яскравим представником кільцевих галактик є об'єкт Хога, який складається з центральної галактики та кільця зореутворення. В галактиках типу об'єкта Хога маса кільця порівнянна з масою центральної галактики, що також свідчить про необхідність врахування гравітаційних властивостей тора. Відзначимо, що кільце є окремим випадком тора, коли його малий радіус істотно менше великого. Зіткнення зоряних і галактичних систем може призводити до формування кілець темної матерії, які можуть залишатися стабільними протягом досить довгого часу. Працюючи як гравітаційні лінзи, вони можуть приводити до важливих ефектів, вивчення яких у свою чергу може пролити світло на розподіл речовини, включаючи темну матерію, в об'єктах, що містять кільцеві структури. Як рухається речовина в тороїдальних об'єктах, що являють собою суцільне середовище, але при цьому характеризуються істотною гравітацією, також залишається відкритим. Скоріш за все, істотну роль тут може грати не тільки орбітальний рух, який врівноважує стиснення тора вздовж великого радіуса, але й вихровий рух, здатний компенсувати стиск вздовж малого радіуса за рахунок наявності відцентрових сил. Таким чином, дослідження тороїдальних вихорів можливо дасть змогу зрозуміти рух в торі як гравітуючому об'єкті.

З іншого боку, наявність осесиметричної течії в протилежних напрямках у багатьох астрофізичних об'єктах на малих масштабах може призводити до формування тороїдальних вихорів. Динаміка тороїдальних вихорів в таких спеціальних системах може показувати цікаві властивості, такі як викид вихрових компонент. Це в свою чергу може бути використано як додатковий механізм виникнення компонент викидів в об'єктах, де величини магнітного поля недостатньо для забезпечення значних викидів. Все це показує, що дослідження тороїдальних структур в межах задач класичної теорії потенціалу та гідродинаміки, а також з використанням чисельних експериментів та встановлення їх взаємодії з іншими компонентами в астрофізичних об'єктах є актуальними до теперішнього часу. Такі дослідження дадуть можливість виявити нові фізичні властивості цих об'єктів і, відповідно, інтерпретувати багато спостережних даних щодо астрофізичних об'єктів з тороїдальними структурами.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у відділі Міліметрової астрономії та у в відділі Космічної радіофізики Радіоастрономічного інституту НАН України та є складовою частиною наступних проектів:

- ✓ "Розповсюдження та розсіяння електромагнітних хвиль в навколоземному та космічному середовищах"№ держреєстрації 0111U000062
- ✓ "Фундаментальні властивості фізичних систем мікро- і макросвіту"№ держреєстрації 0109 U 005856 (2009 — 2010 рр.)
- ✓ "Дослідження космічної речовини методами багатохвильової радіоспектроскопії"№ держреєстрації 0107U001043 (2007 — 2009 рр.)

а також сумісно в НДІ астрономії Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна в рамках бюджетных тем:

- ✓ "Астрофізика позагалактичних об'єктів: гравітаційно-лінзовані квазари та активні ядра галактик" № держреєстрації 0119U002528 (2019 — 2021 рр.), відповідальний виконавець
- ✓ "Дослідження гравітаційних лінз: космологічні параметри та фізика позагалактичних об'єктів" № держреєстрації 0116U000829 (2016 — 2018 рр.), відповідальний виконавець

Автор був керівником гранту НАН України для молодих вчених "Взаимодействие остатка сверхновой с молекулярным облаком"(2009 — 2010 рр.)

Автор також взяв участь у цільовій програмі НАН України "Астрофізичні та космологічні проблеми прихованої маси і темної енергії Всесвіту" (шифр "Космомікрофізика")

- ✓ № держреєстрації 0107U007813 (2007 — 2009 рр.);
- ✓ № держреєстрації 0110U004538 (2010 р.);

- ✓ № держреєстрації 0111U003978 (2011 р.).

**Мета та завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є дослідження гравітаційних і гідродинамічних властивостей тороїдальних структур в астрофізичних об'єктах і використання результатів для інтерпретації спостережних даних активних ядер галактик, квазарів, кільцевих галактик. Для досягнення поставленої мети сформульовані наступні ключові задачі:

- ✓ дослідити динаміку вихорів в радіальному потоці в 2D і 3D випадках для різного типу течії та з урахуванням орбітального руху в вихорі;
- ✓ отримати новий інтегральний вираз для гравітаційного потенціалу тора та знайти аналогії з потенціалами елементарних тіл;
- ✓ отримати аналітичні наближені вирази потенціалу тора в зовнішній та внутрішній областях, зручні для їх використання в задачах динаміки галактик;
- ✓ дослідити динаміку частинки в зовнішньому гравітаційному потенціалі тора з урахуванням центральної маси та розв'язати задачу про існування стійких і замкнутих орбіт;
- ✓ запропонувати вирішення проблеми спостережуваної щілини між центральною галактикою та кільцем в кільцевих галактиках типу об'єкта Хога;
- ✓ розв'язати задачу про знаходження рівноважної форми самогравітуючого тора в гравітаційному полі центральної маси та провести чисельні експерименти для різних початкових умов і параметрів системи в межах задачі $N$ тіл;
- ✓ вирішити проблему спостережуваної геометричної товщини газопилового тора в активних ядрах галактик;
- ✓ отримати основні фізичні характеристики для газопилового тора в межах уніфікованої моделі активного ядра галактики: взаємодія з джетами, підживлення акреційного диска, зовнішня акреція;

✓ дослідити ефекти гравітаційного лінзування для системи, де лінзою є кільцева галактика (тор і центральна маса).

**Об'єктом дослідження** є затіняючі газопилові тори активних ядер галактик, кільцеві галактики.

**Предметом дослідження** є динаміка в гравітаційному полі тора та центральної маси, стабільність самогравітуючого тора, випромінювання торів і джетів, динаміка тороїдальних вихорів та їх роль у формуванні компонент джетів, ефекти гравітаційного лінзування.

**Методи дослідження.** Для розв'язання поставлених задач використовувалися аналітичні обчислення, методи математичної фізики, чисельне моделювання, алгоритми задачі $N$ тіл з використанням технології CUDA паралельних обчислень на GPU, метод трасування променів.

**Наукова новизна одержаних результатів.**

1. На підставі отриманого нового виразу для гравітаційного потенціалу тора вперше показано, що зовнішній потенціал тора представляється потенціалом нескінченно тонкого кільця тієї ж маси аж до поверхні тора, а відмінності існують поблизу його осі симетрії та залежать від геометричного параметра.

2. Вперше показано в межах задачі $N$ тіл, що самогравітуючий товстий тор в полі центральної маси залишається стабільним, а рівноважний перетин має форму овалу з гаусовим розподілом густини.

3. Вперше виявлено існування області некругових орбіт між колом Лагранжа та останньою стійкою круговою орбітою, що здатне пояснити спостережувану щілину в розподілі зоряної густини в кільцевих галактиках.

4. Виявлено нові аспекти ролі центральної маси в стабільності самогравітуючого тора. Вперше показано, що у потенціалі тора при наявності центральної маси існують як регулярні, так і замкнені орбіти нових типів. Показана можливість формування стійкого тора Кеплера, який є узагальненням кеплеровского диска.

5. Вперше побудовано динамічну модель затінюючого тора в активних яд-

рах галактик та показано, що спостережувану динаміку ядра галактики NGC 1068 можна пояснити особливостями руху хмар в торі за рахунок ефектів самогравітації.

6. Вперше показано, що в гравітаційно-лінзовій системі "центральна маса та тор" формується одно, два або три кільця Ейнштейна в залежності від поверхневої густини в диску, що дозволить ідентифікувати тороїдальні структури при пошуку лінзових систем в існуючих та нових оглядах неба.

7. Вперше виявлена принципова різниця між динамікою кільцевих вихорів в радіальному потоці в 2D та 3D випадках, а саме, в достатньо потужному акреційному потоці відбувається колапс вихору. Показано, що спіральність для вихору з закруткою (орбітальним рухом) відрізняється від відомої формули Моффата для зачеплених вихорів.

8. На підставі отриманого аналітичного рішення задачі динаміки кільцевих вихорів в радіальному потоці у 2D та 3D випадках показано, що вихори прискорюються акреційним потоком та викидаються в протилежних напрямках, формуючи компоненти джетів в активних ядрах галактик.

**Практичне значення отриманих результатів.** Дослідження гравітаційного потенціалу тора, що проведені в даній дисертації, дають можливість значно спростити багато задач, де необхідне урахування гравітаційного поля тора. Отримані наближені вирази для потенціалу тора в зовнішній та внутрішній областях можна використовувати в задачах динаміки, фактично зводячи ці задачі до аналітичного розгляду. Результати дослідження динаміки в гравітаційному полі тора та центральної маси можна використовувати для інтерпретації спостережних даних в кільцевих галактиках, а саме за спостережними розмірами щілини в об'єктах типу об'єкту Хога можна оцінювати відносну масу кільця. Отримані аналітичні вирази можна використовувати в майбутньому для подібного аналізу при наявності значних статистичних даних для кільцевих галактик. Крім того, існування кола Лагранжа й OSCO орбіти в таких системах і аналогія з ISCO в релятивістських системах розширює загальне розуміння гравітаційних властивостей таких систем. Запропонований тор Кеплера, як узагальнення диска Кеплера, може становити інтерес навіть у межах навчальних програм. Тор Кеплера дуже зручний для того, щоб навчати студентів моделювати системи з великою кількістю частинок, прищепити вміння використовувати кеплерівські елементи та зрозуміти зручність супутньої системи координат. Результати, що пов'язані з чисельним моделюванням тора, мають широке застосування, оскільки в принципі показано, що подібні структури можуть бути стабільні, а досліджена динаміка дає можливість інтерпретувати як наявні на даний момент дані спостережень, так і ті, які будуть отримані з великою роздільною здатністю в майбутньому. Динамічна модель затінюючого тора з урахуванням його самогравітації, яка запропонована в дисертації, дозволяє використовувати її для інтерпретації спостережуваних особливостей динаміки пилових торів в активних ядрах галактик. При цьому можливо пояснити не тільки геометричну товщину тора в АЯГ, але також і наявність некеплерівського руху. Результати дослідження кільцевих вихорів можуть бути використані як додатковий механізм формування компонент джетів. Результати, що пов'язані з гравітаційним лінзуванням, можна використовувати для інтерпретації спостережень, де присутні більше ніж одне кільце Ейнштейна або радіально витягнуті зображення. Це, у свою чергу, дасть можливість відновити розподіл речовини в гравітаційних лінзах, які містять кільцеві структури. Успішність застосування методів машинного навчання для пошуку нових гравітаційних лінз за сучасними оглядам неба, з урахуванням виявлених ефектів лінзування на розглянутої ситеме, дозволять використовувати їх в майбутньому (при вступі до ладу космічних телескопів LSST і Euclid) для пошуку об'єктів з тороїдальними (кільцевими) структурами.

**Особистий внесок автора** є вагомим на всіх етапах. Роботи [4, 73] автором написані самостійно. У роботах [74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 6, 83, 84], де здобувач є першим автором, він брав активну участь у постановках задач, виконав частину аналітичних обчислень та чисельних моделювань, аналіз результатів, брав участь у написанні та підготовці статей до публікації, а також у відповідях рецензентам. В роботі [222] автором проведені чисельні експерименти з вибору орбіти супутника та розрахунки змін елементів обраної орбіти, підготовлені відповідні частини статей. В [61] автором проведені числові розрахунки стійкості орбіти супутника та підготовлені відповідні частини статей. В роботі [203] автор брав участь в постановці задачі, виконав частину аналітичних і чисельних розрахунків, обговорював результати роботи та запропонував астрофізичну інтерпретацію, а також підготував текст статті. В роботі [57] автор брав участь в обговоренні ідеї статті, провів чисельні моделювання задачі $N$ тіл для самогравітуючого тора, написав відповідний розділ статті. В роботах [183, 184] автор брав участь в формулюванні задачі, аналітичних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті. В роботах [225, 220] автор брав участь у обговоренні постановки задачі, аналізу проміжних і фінальних результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи представлені у 35 доповідях на таких вітчизняних і міжнародних наукових конференціях:

- ✓ Second Italy-Ukraine Meeting in Astronomy "Multiwavelength Astrophysics from Radio to Gamma Rays" (Kharkiv, Ukraine, 23-25 September, 2018);
- ✓ Italy-Ukraine Meeting in Astronomy (Rome, Italy, 22 March, 2018);
- ✓ International Conference "Quasars at all epochs" (Padova, Italy, 2-7 April, 2017);
- ✓ XVIII Міжнародний симпозіум "Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики" , (Харків, Україна, 26–28 червня, 2017);
- ✓ XIII Міжнародна конференція "Фізичні явища в твердих тілах" (Харків, Україна, 5-8 грудня, 2017);
- ✓ International Gamow conference "Astronomy and beyond" (Odessa, Ukraine, 13-20 August, 2017) - 2 доповіді;
- ✓ XXXIII Всеросийской конференции "Актуальные проблемы внегалактической астрономии" (Пущино, Россия, 19-22 апреля, 2016);

✓ International conference "All wave astronomy. Shklovsky-100" (Moscow, Russia, 20-22 June, 2016);

✓ International conference "MULTI-SPIN GALAXIES-2016" (Nizhnij Arkhyz, Russia, 26-30 September, 2016);

✓ 5-th Gamov Memorial International Conference dedicated to 111-th anniver sary of George Gamov "Astrophysics and cosmology after Gamov: progress and perspectives" (Odessa, Ukraine, 16–23 August, 2015);

✓ Конференция "Актуальные проблемы внегалактической астрономии" (Россия, Пущино, 22-25 апреля, 2014) - 2 доповіді;

✓ international conference "The European Week of Astronomy and Space Science" (Switzerland, Geneva, 30 June - 4 July, 2014) - 2 доповіді;

✓ Международная конференция "Астрофизика высоких энергий" (Москва, Россия, 22-25 декабря, 2014);

✓ Participation in trimester "N body gravitational dynamical systems From N=2 to infinity..." in Henri Poincaré Institute, Part of trimester "Dynamics and kinetic theory of self-gravitating systems"(Paris, France, 20 Octoder -3 November, 2013);

✓ International Workshop "Dynamics and kinetic theory of self-gravitating systems" (Paris, France, 4-8 November, 2013);

✓ Международная конференция "Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях" (Харьков, Украина, 1-31 мая, 2012);

✓ International Conference "Astronomy and Space Physics" (Kyiv, Ukraine, 22-25 May, 2012);

✓ International Astronomical Gamow Conference (Odessa, Ukraine,August 20-26, 2012);

✓ XXIX конференция "Актуальные проблемы внегалактической астрономии" (Пущино, Россия, 17-19 апреля, 2012);

✓ Всеросийсской астрономической конференции "Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра" (Москва, Россия, 24-27 декабря, 2012);

✓ Международная конференция "Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях" (Харьков, Украина, 2011);

✓ XIX Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Россия, 20-21 декабря, 2010);

✓ Всероссийская астрономическая конференция "От эпохи Галилея до наших дней" (Нижний Архыз, Россия, 12-19 сентября, 2010) - 2 доповіді;

✓ 10-th International Gamow's Summer School (Odessa, Ukraine, 23-28 August, 2010) - 2 доклада;

✓ XVIII Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Россия, декабрь, 2010);

✓ Конференции "Актуальные проблемы внегалактической астрономии" (Пущино, Россия, 21 – 23 апреля, 2009);

✓ Научная сессия Совета по нелинейной динамике РАН (Москва, Россия, 22-23 февраля, 2008);

✓ Конференции "Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра" (Москва, Россия, 24-26 декабря, 2007);

✓ International Lyapunov Memorial Conference (Kharkiv, Ukraine, 24-30 June, 2007);

✓ XXXVII Young European Radio Astronomers Conference (Bordeaux, France, 4-7 September, 2007);

✓ 24ая конференция "Актуальные проблемы внегалактической астрономии" (Пущино, Россия, 24-26 апреля 2007) - 2 доклада;

✓ XIX Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Россия, декабрь, 2006).

**Публікації.** Результати дисертації опубліковані у 63 наукових працях: 21 статті у міжнародних і вітчизняних виданнях, 10 — у працях конференцій та 32 тезисів конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, восьми розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи складає 337 сторінки. Дисертація містить 128 рисунків, 3 таблиці та список використаних джерел з 244 найменувань на 24 сторінках.

# РОЗДІЛ 1

# ТОРОЇДАЛЬНІ СТРУКТУРИ В АСТРОФІЗИЧНИХ ОБ'ЄКТАХ (ОГЛЯД)

Деякі астрофізичні об'єкти виявляють тороїдальні структури. Такими є кільцеві галактики, де навколо центральної галактики спостерігається кільце зореутворення. У АЯГ це газопилові тори, які відіграють істотну роль в підживленні акреційного диска і забезпечують спостережувану високу світність АЯГ. Подібні тороїдальні структури можуть мати значну масу і, отже, створювати істотне гравітаційне поле, впливаючи на динаміку речовини. Інший тип — це кільцеві вихори, які можуть виникати в результаті нестійкості в акреційному потоці при наявності підкручення. Також подібні вихори можуть формуватись в атмосферах планет. Тороїдальні структури як астрофізичні об'єкти стали досліджуватися недавно завдяки прориву в області спостережної астрономії, тому багато питань ще залишаються відкритими. У цьому розділі будуть розглянуті дані спостережень і теоретичні моделі, пов'язані з тороїдальними структурами в різних астрофізичних об'єктах.

## 1.1 Газопилові тори в АЯГ

### *1.1.1 Уніфікована схема АЯГ: передумови*

Активні ядра галактик (АЯГ) містять чотири основні класи об'єктів: сейфертівські галактики, радіогалактики, квазари і блазари. Головною особливістю АЯГ є потужне випромінювання, яке генерується в центральних областях і пов'язане з процесом акреції речовини на надмасивну чорну діру (НМЧД). Крім того, в АЯГ виявляються протяжні структури — джети, які формуються в околиці чорної діри і можуть досягати величезних масштабів, виходячи за межі батьківської галактики. АЯГ характеризуються потужним випромінюванням, яке часто можна порівняти з еддінгтонівською світністю, яка є граничною світністю для АЯГ. Межа на світність виникає з простих фізичних міркувань. Для роботи центральної машини необхідно, щоб реалізовувалася акреція речовини на центральну надмасивну чорну діру. При цьому акреційний диск, що формується, є джерелом випромінювання і, відповідно, виникає сила тиску випромінювання ($F_{acc}$), яка працює проти сил гравітації ($F_{gr}$). Таким чином, акреція може здійснюватися, якщо сила тиску випромінювання менша від сил гравітації з боку центральної чорної діри. Рівність $F_{acc} = F_{gr}$ і дає верхню межу на випромінювання АЯГ (еддінгтонівська світність $L_{Edd}$), яка залежить тільки від маси чорної діри:

$$L_{Edd} = 10^{38}\frac{M}{M_\odot}\,\text{ерг/с}, \tag{1.1}$$

де $M$ – маса НМЧД, $M_\odot$ – маса Сонця. Таким чином, знаючи спостережувану світність АЯГ можна оцінити масу НМЧД. З іншого боку, якщо можливо оцінити масу НМЧД іншими способами (по ширині ліній або по кривим обертання на підставі мазерного випромінювання), то з урахуванням (1.1) можна оцінити, яку частку від еддінгтонівської світності становить спостережна світність. Отже, можна отримати інформацію про темп акреції. Дійсно, з відомої формули зв'язку маси спокою з енергією $E = Mc^2$, формально розділивши ліву і праву частину на масштаб часу, і враховуючи коефіцієнт ефективності перетворення маси спокою у випромінювання $\eta$, ми отримуємо відомий зв'язок між світністю $L$ і темпом акреції речовини $\dot{M} = dM/dt$ на НМЧД:

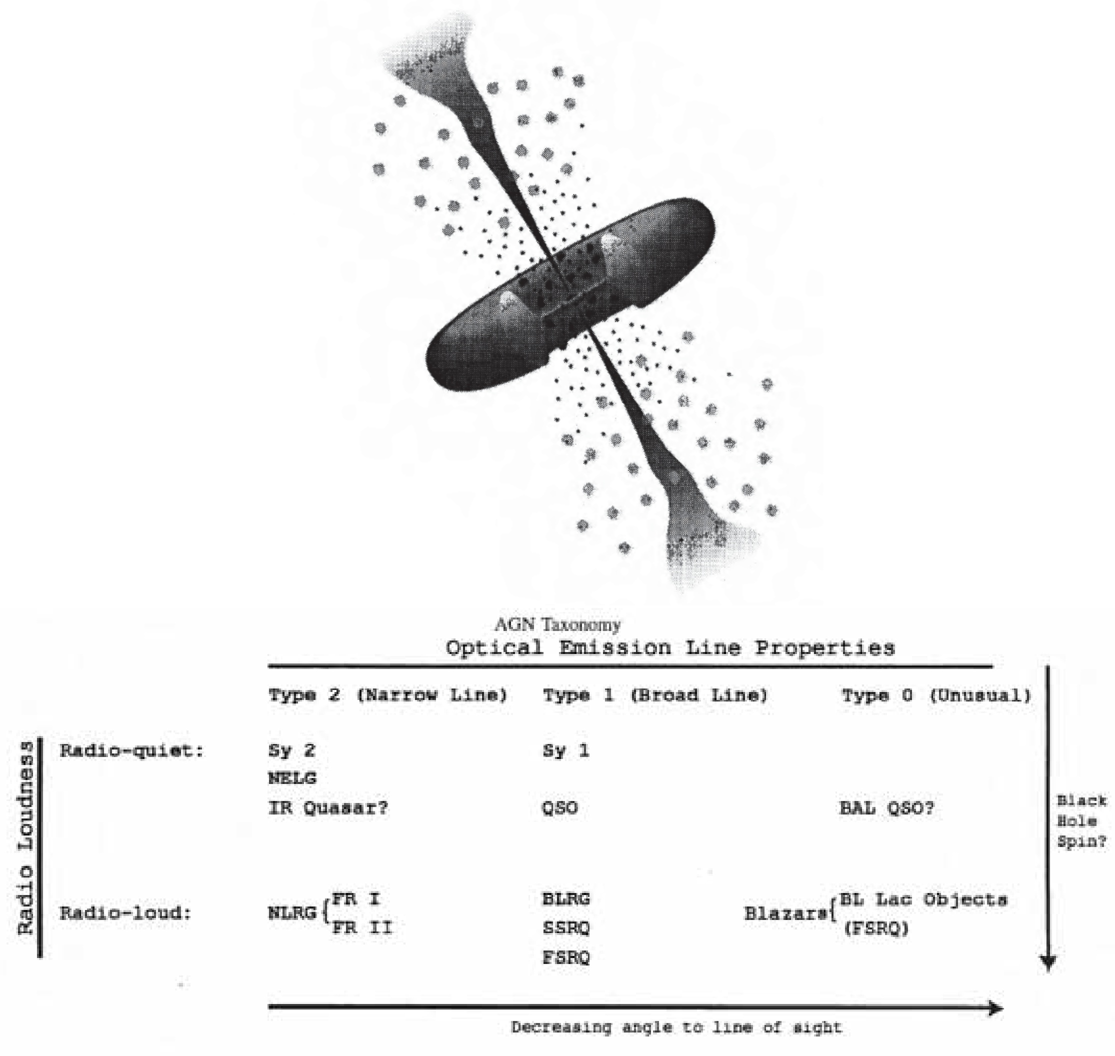
$$L = \eta\dot{M}c^2. \tag{1.2}$$

Коефіцієнт $\eta \approx 0.4$ в (1.2) набуває максимального значення для механізму дискової акреції речовини на керрівську чорну діру [62], що і є одним з основних аргументів пояснення потужного енерговиділення в АЯГ. З вищесказаного зрозуміло та з (1.1), що в залежності від маси НМЧД активні ядра будуть мати різну світність. Так, наприклад, енерговиділення квазарів, радіогалактик і блазарів пов'язано з генерацією випромінювання в гравітаційному полі НМЧД великих мас, аж до $10^{10}M_\odot$ [224]. У той час як сейфертівські галактики належать до класу об'єктів, в яких маси НМЧД менше і, отже, світність цих об'єктів нижче.

Найближчими і найбільш вивченими АЯГ є сейфертівські галактики. Світність центральної компактної області типової сейфертівської галактики може досягати 30 відсотків від світності всієї зоряної складової галактики і кілька десятків відсотків від еддінгтонівської світності. Однак, незважаючи на наявність загальних ознак сейфертівських галактик, в їх спектрах спостерігаються й істотні відмінності. У деяких з них (Sy1) виявляються вузькі і широкі емісійні лінії і надлишок випромінювання в УФ/оптичному діапазоні. У той час як в інших сейфертівських галактиках (Sy2) спостерігаються тільки вузькі лінії і надлишок випромінювання в ІЧ діапазоні (див., наприклад, огляди [106, 191, 192, 197]). Широкі лінії формуються в хмарах, які розташовані поблизу акреційного диска, а швидкості їх руху можуть досягати 10000 км/с [191]. Вузькі лінії формуються в хмарах, які рухаються з меншими швидкостями, а область формування таких ліній може досягати значних відстаней — від 10 пк до 100 пк. У астрофізичну термінологію увійшли такі скорочення, як BLR — Broad Line Region (область формування широких ліній) і NLR — Narrow Line Region (область формування вузьких ліній). Зі спостережних даних і моделювання випливає, що швидкі хмари мають маси порядку $10^{-8}M_{\odot}$, в той час як повільні хмари більш масивні і, можливо, значення маси досягає $\sim 10M_{\odot}$ [191]. Перші спостереження хмар (BLR), що знаходяться поблизу НМЧД у квазарі 3C 273, були отримані на VLTI з використанням нової камери GRAVITY, яка має настільки високу чутливість, що здатна зареєструвати випромінювання хмар на масштабах акреційного диска з радіусом 150 світлових днів [147] (відстань до 3C 273 близько 550 Мпк).

При дослідженні континууму і емісійних ліній в найближчій до нас сейфертівській галактиці NGC1068 (Sy2 тип) Р. Антонуччі і Дж. Міллер виявили, що в розсіяному (поляризованому) світлі з'являлися широкі емісійні лінії, тобто ядро NGC 1068 демонструвало властивості Sy1 типу [69]. Тому автори висловили припущення, яке послужило базисом для уніфікованої схеми, про те, що центральна машина оточена оптично товстим тором. Він блокує пряме випромінювання від акреційного диска, що у властивостях виявляється як Sy2 тип, якщо тор видно з ребра. Але в поляризованому світлі, який приходить до спостерігача за рахунок розсіювання, виявляються властивості Sy1, що говорить про одну й ту ж фізичну природу ядер цих галактик. Фактично вже в цій роботі Р. Антунуччі і Дж. Міллер узагальнили ці властивості на всі сейфертівські галактики. Але повністю уніфікована схема (УС) була сформульована та обґрунтована в роботі [70].

Таким чином, ідея УС заснована на твердженні, що структура сейфертівських галактик 1 і 2 типів однакова, а відмінність виникає внаслідок різної орієнтації газопилового оптично товстого тора щодо спостерігача. Таким чином, якщо тор видно з ребра, то відбувається повне затінення центральної машини (випромінювання акреційного диска) і області формування широких емісійних ліній ("тип 2"). При цьому спостерігається надлишок в ІЧ спектрі, пов'язаний з випромінюванням пилового тора. Навпаки, якщо тор орієнтований під досить великим кутом до променя зору, випромінювання акреційного диска (надлишок в оптичній або УФ області спектра) і область формування широких ліній стають доступними спостерігачеві ("тип 1"). Тобто центральна



AGN Taxonomy

Optical Emission Line Properties

| | Type 2 (Narrow Line) | Type 1 (Broad Line) | Type 0 (Unusual) |
|---|---|---|---|
| Radio-quiet: | Sy 2<br>NELG<br>IR Quasar? | Sy 1<br>QSO | BAL QSO? |
| Radio-loud: | NLRG{FR I<br>FR II | BLRG<br>SSRQ<br>FSRQ | Blazars{BL Lac Objects<br>(FSRQ) |

Radio Loudness

Black Hole Spin?

Decreasing angle to line of sight

Рис. 1.1. Рисунки з роботи [233]. *Верхній*: структура АЯГ в рамках УС. *Нижній*: таблиця типів АЯГ з розподілом за їх властивостями. Тут включені як радіотихі, так і радіогучні АЯГ.

машина в таких об'єктах захована усередині пилового тора, тому іноді подібні об'єкти називають Hidden Broad Line Region (HBLR), відрізняючи їх від АЯГ, в яких активність пов'язана з вибуховими процесами, які виникають при взаємодії із зоряним оточенням. Дійсно, деякі об'єкти можуть не задовольняти УС, тобто відсутність широких ліній може бути пов'язана з фізичними процесами, що відбуваються в ядрі. Такі об'єкти називають non-HBLR, і, скоріш за все, вони знаходяться на стадії злиття [230]. Таким чином, два класи цих об'єктів (HBLR і non-HBLR) можуть являти собою активні ядра на різній стадії еволюції.

Надалі уніфіковану схему поширили на радіогучні АЯГ: радіогалактики, квазари і блазари [233], хоча раніше передумови для узагальнення УС на радіогучні АЯГ були зроблені в [68]. На рис. 1.1 представлені оригінальні рисунки з роботи М. Урри і П. Падовані [233]. Верхній рисунок, який представляє уніфіковану схему активного ядра, є найбільш цитованим. Існують його різні варіанти в кольорі, але ми спеціально приводимо його першу версію. Точки поблизу центральної області символізують швидко рухомі хмари, які формують BLR, а кола з великим діаметром і розташовані далі — хмари, що рухаються з меншою швидкістю, де формуються NLR. У центрі розташована НМЧД, оточена акреційним диском, який в свою чергу оточений газопиловим тором. На цій схемі тор зображений менш товстим, в порівнянні зі схемою на рис. 1.2. Також показані джети, які розташовані перпендикулярно екваторіальній площині тора. На рис. 1.1 представлена також таблиця АЯГ, які класифіковані за їх спостережуваними ознаками. В першу чергу це класифікація за потужністю випромінювання в радіодіапазоні на два класи: радіогучні і радіотихі АЯГ, а також по спостережуваній ширині ліній в спектрах. Зауважимо, що тут також присутня номенклатура радіогучних АЯГ, а саме радіогалактики, які, в свою чергу, поділяються на два класи FR I і FR II (класифікація Фанарофф–Райлі) по спостережуваному розподілу радіовипромінювання в джетах. Так, якщо джет колімований і закінчується радіолобами (з гарячими плямами на головній ударній хвилі), то такі радіогалактики відносять до FR I типу. І, навпаки, якщо інтенсивність джетів максимальна до ядра з подальшим спаданням на периферії, то це FR II. Також в таблиці присутні класи АЯГ, такі як NLRG (Broad-Line Radio Galaxies) і BLRG (Broad-Line Radio Galaxies). Сучасне уявлення уніфікованої схеми, яка включає всі класи АЯГ, показано на рис. 1.2 з роботи [105].

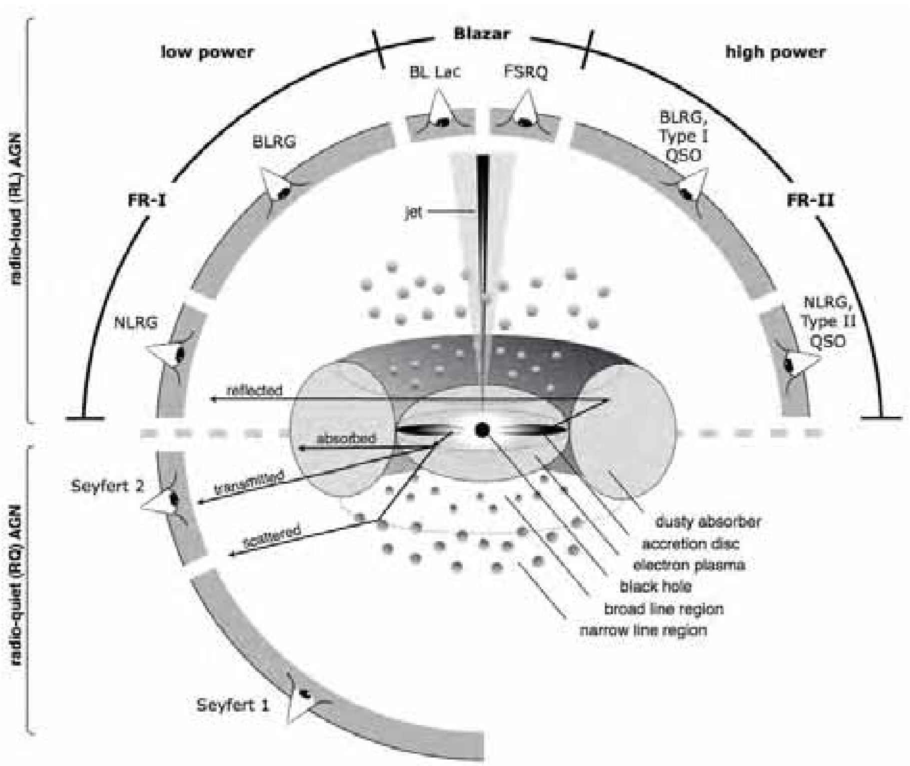


Рис. 1.2. Схема активного ядра галактики в рамках уніфікованої схеми з роботи [105].

Таким чином, УС впорядкувала різноманіття АЯГ, що виявляється різними спостережними ознаками, а також прояснила основні фізичні процеси, що призводять до цього різноманіття. Ключову роль в УС грає газопиловий тор, який також називають затінюючим. Зі статистичних даних випливало, що для пояснення спостережуваних властивостей активних ядер, тор повинен бути геометрично товстим [216]. Геометрично товстий газопиловий тор, який здатний існувати протягом довгого часу, здавався неймовірним об'єктом. Припускаючи, що тор складається з суцільного середовища, він повинен вироджуватися в диск. Гіпотеза про існування подібних об'єктів в центральних областях АЯГ довгий час зазнавала критики, велися пошуки механізмів, які здатні підтримувати подібну геометрично товсту структуру (див. розділ 1.1.7). Але важливим кроком в затвердженні цієї гіпотези стали перші прямі спостереження затінюючих торів в найближчих до нас АЯГ.

### *1.1.2 Спостереження тора в NGC 1068 за допомогою VLTI*

Затінюючий тор в АЯГ складається в основному з пилу (суміш силікатів і графіту), тому максимум його випромінювання припадає на інфрачервону (ІЧ) область спектра. Ця область є не дуже зручною для спостережень, оскільки роздільна здатність падає з довжиною хвилі, а масштаби затінюючих торів досить малі (близько парсека). З урахуванням віддаленості галактик, це знаходиться на межі роздільної здатності в інфрачервоній області. Саме тому, для дослідження затінюючих торів в АЯГ потрібні телескопи з великим діаметром дзеркала, в тому числі і оптичні інтерферометри, такі як VLTI (чотири 8-метрових телескопа, розташованих в Чилі високо в горах).

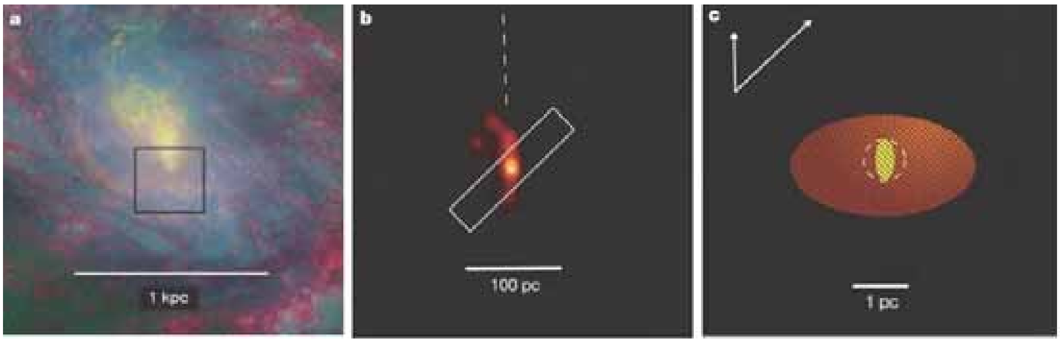


Рис. 1.3. (а) Оптичне зображення Sy2 галактики NGC 1068, отримане за допомогою телескопа Хаббл. Чорна рамка вказує положення активного ядра. (б) Зображення NGC 1068 отримане одним телескопом VLTI за допомогою інфрачервоної камери MIDI на довжині хвилі 8.7 мкм. Показана структура пилу на арксекундних масштабах. (с) Розподіл температури в ядрі NGC 1068, який містить гарячу компоненту (жовта область) і більш протяжну теплу компоненту (червона область). Всі три рисунки наведено з роботи [163].

Створення нової камери, що працює в ближньому ІЧ діапазоні (MIDI), дозволило значно поліпшити роздільну здатність в цій області спектра і отримати нові дані спостережень для найближчої до нас Sy2 галактики NGC 1068 [163]. Те, що ця галактика відноситься до АЯГ 2-го типу, означає, що для спостерігача тор видно з ребра, і таким чином він закриває акреційний диск. Галактика NGC 1068, як уже згадувалося вище, є однією з найбільш вивчених галактик та знаходиться на відстані 14.4 Мпк ($z = 0.0037$, 1 arcsec відповідає 70 пк). Один телескоп VLT забезпечує роздільну здатність в 100 мілліарксекунд, що, з урахуванням відстані до галактики, становить в лінійних масштабах 7 пк. Просторова роздільна здатність двох телескопів в режимі інтерферометрії VLTI близько 10 мілліарксекунд на довжині хвилі 10 мкм, що дозволило зареєструвати теплове випромінювання від пилу, що приходить до нас з масштабів менше 1 пк в NGC 1068. Виявлений розподіл ІЧ випромінювання задовольняє двохкомпонентній моделі (рис. 1.3): гаряча (центральна) з температурою $T = 800$ K і тепла з $T = 300$ K. Гаряча компонента має наступні розміри: довжина 1.35 пк, а ширина 0.45 пк; масштаби теплої компоненти — $3 \times 4$ пк. Спостереження підтвердили геометричну товщину тора для NGC1068: відношення висоти до великого радіуса тора $h/r \gtrsim 0.6$. Передбачається, що гаряча центральна компонента – це внутрішня межа тора, нагріта випромінюванням від акреційного диска, а тепла компонента – це безпосередньо тіло тора [205, 212, 122]. Спостереження внутрішньої області тора означає, що розподіл речовини в ньому істотно неоднорідний, тобто близько до клочкової структурі. Таким чином, випромінювання від внутрішньої границі тора, яка безпосередньо нагрівається випромінюванням від акреційнного диска, може проникати між хмарами, які, по всій видимості, складають основний об’єм тора.

Через кілька років були проведені повторні спостереження тора в NGC 1068 на тому ж інструменті (VLTI/MIDI) з кращою якістю [205]. У цій же роботі проводилися порівняння зі спостереженнями в інших діапазонах. Так, було виявлено, що гаряча компонента колінеарна з диском мегамазерного випромінювання $H_2O$ (див. розділ 1.1.4), а кут між площиною диска і віссю радіоджета становить $\sim 45^\circ$ (рис. 1.4), що є нетиповим випадком, оскільки орієнтація джета повинна збігатися з вектором кутового моменту в диску. У цій же роботі були запропоновані інтерпретації неортогональності мазерного диска і осі джета. Перша з них – це вплив самогравітації на тонкий диск, яка в рамках моделі [176] призводить до вигнутого диску і до субкеплерівських швидкостей в ньому. Друга інтерпретація пов’язана з асиметрією у зовнішній акреції. Така асиметрія, у свою чергу, може бути результатом недавнього злиття (minor merging) [144]. Спостереження в K-смузі на NTT (ESO New Technology Telescope) показали [228], що динамічна маса в межах радіусу 50 пк становить близько $6.5 \times 10^8 M_\odot$, що може бути на порядок вище, ніж маса НМЧД, яка оцінена по мазерному випромінюванню в рамках моделі [176]. При цьому 7% від світності ядра $10^{11}L_{\odot}$ NGC 1068 виникає за рахунок випромінювання зоряного населення, вік якого порядку $(5 \div 16) \times 10^8$ років [228]. Вплив потенціалу зоряного скупчення в найближчій околиці АЯГ в NGC 1068 також припускається як одне з можливих пояснень некеплерівського обертання, яке було визначено завдяки мазерному випромінюванню. В [140] було запропоновано пояснення асиметричного формування розподілу яскравості в $H_2$, припускаючи, що комптонівська товста речовина розташована дуже близько до центральної частини АЯГ і нахилена щодо великомасштабної тороїдальної структури на кут близько 30°, що узгоджується з даними спостережень в оптичному діапазоні [205]. Асиметрія в спостережуваному спектрі може бути пояснена наявністю оптично товстих хмар. Ті, які знаходяться ближче до нас, опромінюються центральною машиною, але спостерігач бачить орієнтовану до нього більш холодну частину хмари. Навпаки, хмари з протилежного боку центральної машини звернені до спостерігача більш нагрітою частиною, що може призводити до спостережуваної асиметрії в розподілі інтенсивності [140].

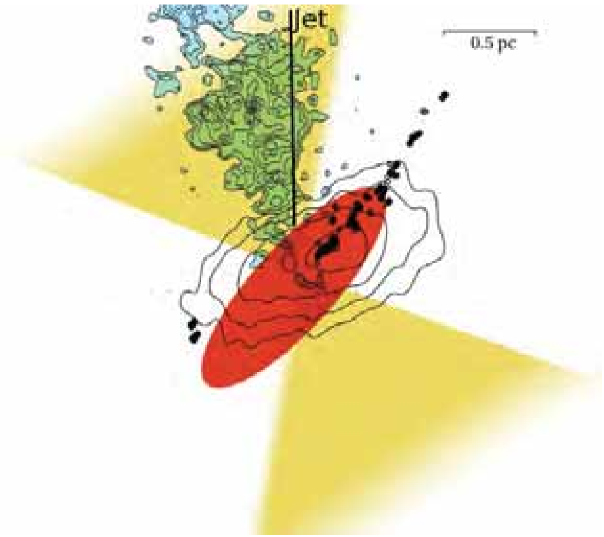


Рис. 1.4. Багатохвильовий розподіл інтенсивності в центрі NGC 1068. Рисунок з роботи [205].

На рис. 1.4 наведена парсекова структура ядра NGC 1068 за результатами спостережень в різних діапазонах електромагнітного спектра. Червоним показана гаряча компонента за спостереженнями VLTI/MIDI в ближньому ІЧ діапазоні, з центру якої спостерігається ланцюжок $H_2O$ мегамазерів по радіоспостереженню на VLA (Very Long Array) та контінуум на частоті 5 ГГц [139]. Конуси іонізованої речовини (жовтий колір на рис. 1.4) отримані зі спектроскопії [116], а ізофоти зображення HST [OIII] показані синім [128] і зменшені в 100 разів для того, щоб продемонструвати орієнтацію конусів.

### *1.1.3 Спостереження тора в Circinus за допомогою VLTI*

Надалі було отримано спостережний розподіл температури в затінюючому торі в іншій близькій Sy2 галактиці Circinus [231]. Відстань до цієї галактики 4 Мпк (1 arcsec $\sim$ 20 пк) [132]. У цій галактиці спостерігаються всі прояви активного ядра: конуси іонізованої речовини (ветра), джети та радіолоби, які перпендикулярні до галактичного диску, а також до кільця зореутворення, яке присутнє в цій галактиці.

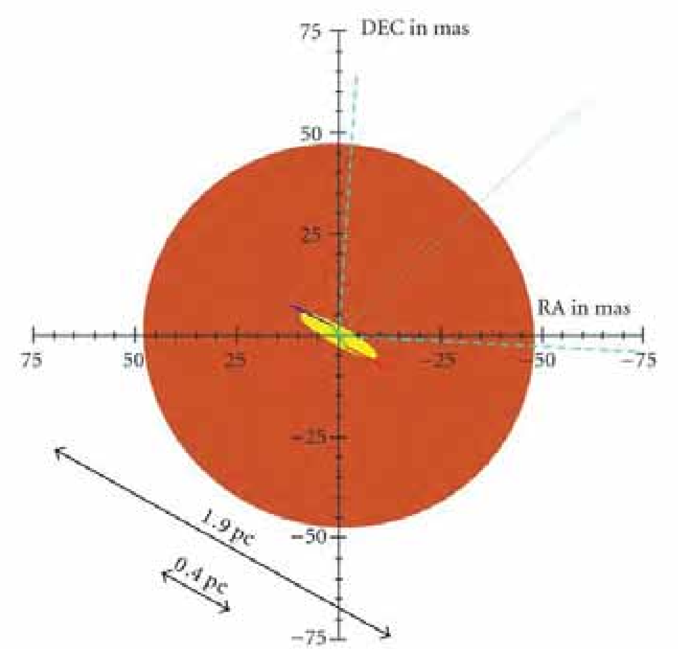


Рис. 1.5. Схема розподілу випромінювання в центральній області Circinus: тепла компонента з температурою $\sim 330K$, що має витягнуту форму (жовтий), оточена більш холодною компонентою з температурою $\sim 300K$ (коричневий). Мазерне випромінювання вказано синьою і червоною лініями. Синьою лінією вказана вісь симетрії викидів. Рисунок з роботи Трістрам та ін. [231].

У радіодіапазоні було виявлене випромінювання $H_2O$ мазерів на масштабах $\sim$ 0.4 пк, яке пов'язують з навколоядерним диском [150]. Крива обертання мазерних спотів задовольняє кеплерівському руху і дає оцінку маси центральної чорної діри $M_{\mathrm{SMBH}} < 1.7 \times 10^6 M_{\odot}$. Спостереження MIDI/VLTI (та ж конфігурація, що і для NGC 1068) були проведені в роботі [231]. Спостереження показують, що в Circinus присутні дві компоненти в випромінюванні пилу: більш масштабна тепла компонента з радіусом $r_{out} = 1$ пк, з температурою $T_{out} = 300$ K і компактна компонента з радіусом $r_{in} = 0.2$ пк і з температурою $T_{in} = 330$ K (рис. 1.5) [231]. Ці результати інтерпретуються як теплове випромінювання пилу від геометрично товстого тора, що оточує внутрішню дискову структуру. Так само, як і у випадку NGC1068, щоб пояснити стратифікацію в температурі, припускається, що речовина в торі являє собою газопилові хмари (рис. 1.6). Таким чином, випромінювання, що формується в горлі тора, проникає між хмарами і досягає спостерігача. Різниця температур в торі в Circinus значно менша, ніж в NGC1068.

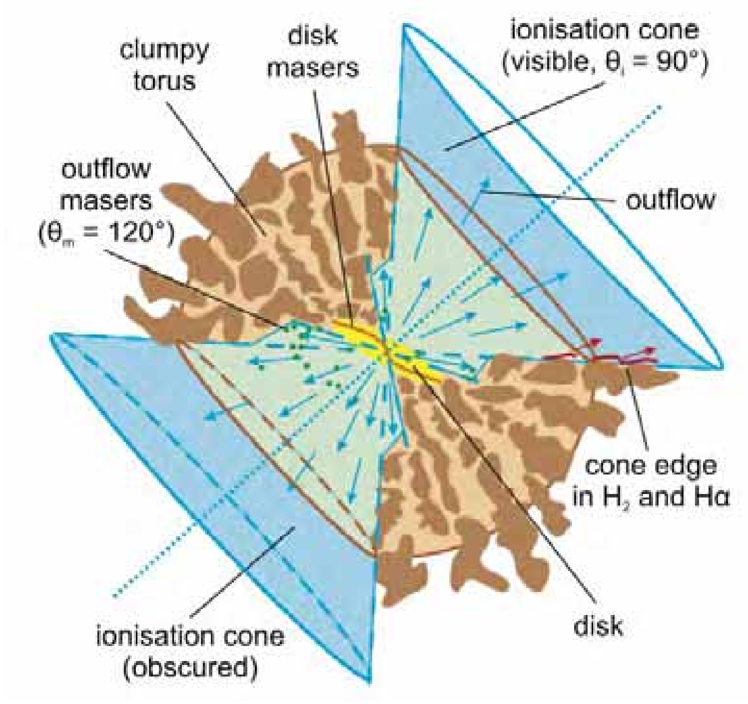


Рис. 1.6. Схема АЯГ в Circinus. Рисунок з роботи Тристрам та ін. [231].

Додатковий аргумент на користь клампованого розподілу речовини в торі витікає з наступних міркувань. Передбачається, що силікатні особливості повинні з'явитись в емісійних лініях на промені зору, де температура середовища зменшується від високих значень. Це відноситься безпосередньо до внутрішньої границі тора (поблизу акреційного диска) і, отже, така поведінка очікується і спостерігається для сейфертівських галактик 1 типу. В протилежному випадку, коли вздовж променя зору розподілений холодний пил, силікатні особливості з'являються в поглинанні, що відповідає сейфертівським галактикам 2 типу. Таким чином, зменшення силікатних особливостей в лініях поглинання (та присутність силікатів в емісійних лініях) в ядрах типу Sy2 означає, що все більше силікатного випромінювання може просвічуватися через об'єм тора, тобто ядро в Circinus є захованим Sy1 типом (див. [231] з обговоренням і посиланнями) аналогічно тому, як це було зроблено Р. Антонуччі для NGC 1068. Крім того, для безперервного середовища температура буде спадати уздовж радіуса швидше, оскільки випромінювання буде істотно поглинатись зовнішніми шарами пилу. При клампованому середовищі спадання температури буде менш крутим, що якраз співпадає з даними спостережень. Світність пилу в межах $r < 2$ пк становить $L_{dust} \approx 5 \times 10^9 L_\odot$ [231]. У цій же роботі автори отримали значення світності при акреції, припускаючи, що тільки половина випромінювання акреційного диска бере участь в нагріванні речовини в торі, тому що інша частина випромінювання виноситься вітром. Таким чином, світність акреційного диска для цієї галактики $\approx 10^{10} L_\odot$. Якщо в якості оцінки маси НМЧД взяти результат по кривій обертання мазерних джерел $M_{SMBH} = 1.7 \times 10^6 M_\odot$ [150], то еддінгтонівська світність, відповідно до (1.1), дорівнює $\approx 5.6 \times 10^{10} L_\odot$. Таким чином, світність ядра Circinus становить близько 20 відсотків від еддінгтонівської світності [231]. Зовнішня пилова компонента фактично має сферичну форму. Однак для пояснення спостережуваних конусів з іонізованою речовиною [180] кут розкриву для них повинен складати близько $90^\circ$. Це означає, що реальний розподіл речовини відповідає товстому тору, розташованому з ребра. При цьому відношення висоти тора до радіуса $h/r \sim 1$. Передбачається, що структура тора (з вузьким горлом) дозволяє колімувати викиди, що і спостерігається.

Порівняння двох випадків NGC 1068 і Circinus показує, що є схожість в структурі ядер, але є також і відмінності. Схожість пов'язана з тим, що в обох випадках спостерігається геометрично товстий тор, що узгоджується з УС. Також присутні дві компоненти в розподілі температури, що побічно вказує на кламповану структуру речовини в торі, тобто тор складається з газопилових хмар. Також спостерігається в обох галактиках мегамазерне випромінювання. Однак є відмінності, пов'язані з різними значеннями температур у внутрішніх компонентах, а також в орієнтації ланцюжка мегамазерів щодо гарячої компоненти в ядрі. Так, в NGC 1068 гаряча компонента збігається з мегамазерним диском в орієнтації і масштабах і інтерпретується як внутрішня межа тора, яка нагріта приблизно до температур сублімації пилу. У Circinus компактна компонента інтерпретується як дископодібна структура в центрі і відділена від геометрично товстого тора. Ця структура збігається з обертовим диском мазерного випромінювання.

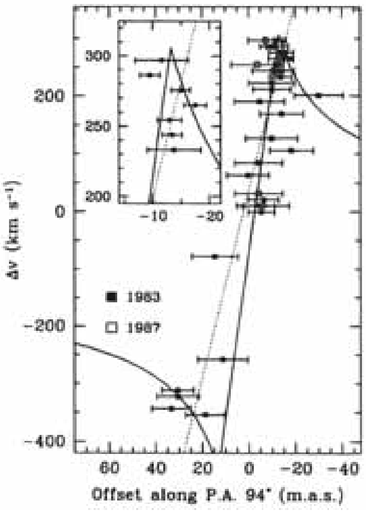
### *1.1.4 Мегамазерне випромінювання в АЯГ*

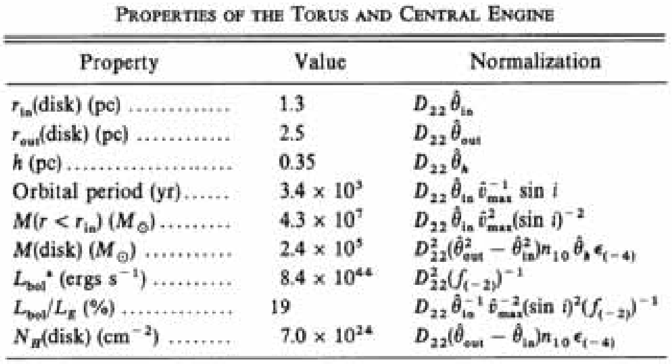
Однією з особливостей АЯГ є мегамазерне випромінювання в лініях молекули $H_2O$, яке спостерігається на довжині хвилі 1.35 см (22 ГГц). Мегамазерне випромінювання несе важливу інформацію про динаміку речовини в областях його формування. Це пов'язано з тим, що мазерне випромінювання є вузькспрямованим, що проявляється як локалізовані області випромінювання. Швидкості мазерних плям визначаються по розширенню лінії (ефект Доплера) і в більшості випадків це не становить труднощів. Набагато складніше визначити точне положення мазерних плям для таких далеких об'єктів, як центральні області АЯГ. Для цього потрібне залучення інтерферометрів з наддовгими базами або міжконтинентальні інтерферометри, роздільна здатність яких дозволяє отримати положення джерел з високою точністю. Такі спостереження були проведені на інтерферометрах VLBA, VLBI, VLA для найближчих АЯГ і на даний момент це межа, оскільки для досягнення ще більшої роздільної здатності необхідно використовувати космічні інтерферометри, подібні Радіоастрону[1]. Розвиток космічної радіоастрономії в майбутньому дозволить прояснити багато питань, пов'язаних з центральними областями АЯГ, але навіть грунтуючись на наявних результатах спостережень наземних інтерферометрів можна отримати важливу інформацію саме про динаміку речовини, що фактично неможливо отримати іншими методами.

Ранні спостереження мазерного випромінювання в NGC1068 були прове-

---

[1] Примітка 1. Слід зазначити, що в міліметровій області спектру роздільна здатність телескопа EHT (Event Horizon Telescope) порівнянна з горизонтом подій НМЧД в нашій галактиці і в M87, що дозволило отримати першу фотографію чорної діри (див. посилання на офіційному сайті https://eventhorizontelescope.org/). Частиною EHT є інтерферометр ALMA, який представив прямі спостереження затінюючих торів та відкрив нову епоху в дослідженні околиці чорних дір і центральних областей АЯГ.





PROPERTIES OF THE TORUS AND CENTRAL ENGINE

| Property | Value | Normalization |
|---|---|---|
| $r_{in}$(disk) (pc) ............ | 1.3 | $D_{22}\,\hat{\theta}_{in}$ |
| $r_{out}$(disk) (pc) ............ | 2.5 | $D_{22}\,\hat{\theta}_{out}$ |
| $h$ (pc) ...................... | 0.35 | $D_{22}\,\hat{\theta}_h$ |
| Orbital period (yr)...... | $3.4 \times 10^3$ | $D_{22}\,\hat{\theta}_{in}\,\hat{v}_{max}^{-1}\sin i$ |
| $M(r < r_{in})$ $(M_\odot)$......... | $4.3 \times 10^7$ | $D_{22}\,\hat{\theta}_{in}\,\hat{v}_{max}^{2}(\sin i)^{-2}$ |
| $M$(disk) $(M_\odot)$ ........... | $2.4 \times 10^5$ | $D_{22}^2(\hat{\theta}_{out}^2 - \hat{\theta}_{in}^2)n_{10}\,\hat{\theta}_h\,\epsilon_{(-4)}$ |
| $L_{bol}$* (ergs $s^{-1}$) .......... | $8.4 \times 10^{44}$ | $D_{22}^2(f_{(-2)})^{-1}$ |
| $L_{bol}/L_E$ (%) ............... | 19 | $D_{22}\,\hat{\theta}_{in}^{-1}\,\hat{v}_{max}^{-2}(\sin i)^2(f_{(-2)})^{-1}$ |
| $N_H$(disk) (cm$^{-2}$) ........ | $7.0 \times 10^{24}$ | $D_{22}(\hat{\theta}_{out} - \hat{\theta}_{in})n_{10}\,\epsilon_{(-4)}$ |

Рис. 1.7. Крива обертання та таблиця параметрів тора і центральної машини за спостереженнями мазерного випромінювання на VLA з роботи [134].

дені на VLBI з субміліарксекундною роздільною здатністю. Коротко наведемо результати спостережень і відповідні висновки з роботи [149]. Мазери з червоним зміщенням розподілені в дузі, масштабом 0.6 пк з позиційним кутом 45°. Вважається, що ці мазери виникають на внутрішній межі тора, який, в свою чергу, розташований практично з ребра. Мазери приходять з 4 клампів з вертикальною складовою швидкості порядку 100 км/с. Мінімальний радіус, на якому спостерігається мазерне випромінювання, порядку 0.4 пк і близький до радіусу сублімації пилу. Дійсно, графітові гранули з розміром менше 0.05 мкм сублімують на радіусі $R_{sub} \sim 0.4 \times (L/10^{45})^{0.5}$ пк [99] (див. також підрозділ 1.1.6). Якщо прийняти світність $L_{bol} = 6 \times 10^{44}$ ерг/с $= 0.6 L_{45}$ [200], то $R_{sub} \sim 0.3$ пк. З кривої обертання в межах радіусу 0.65 пк, маса НМЧД $\sim 10^7 M_\odot$, припускаючи орбітальну швидкість 250 км/с. Тоді світність центральної машини становить 50 відсотків від еддінгтонівскої світності. Ця маса виявилася нижчою, ніж та, яка була визначена по руху молекулярних хмар $\sim 2 \times 10^8 M_\odot$ за межами радіуса 30 пк [229]. Крива обертання виявляється субкеплерівською $V \propto r^{-0.3}$ для області 0.4 пк $< r <$0.65 пк. Як зазначено авторами цієї статті [149], суттєвою може бути самогравітація тора.

В цьому ж році іншою групою [134] були опубліковані результати спостережень мазерного випромінювання молекул OH і $H_2O$ на VLA. На рис. 1.8 показана схема центральної області NGC 1068 з роботи [137]. Джерела ма-

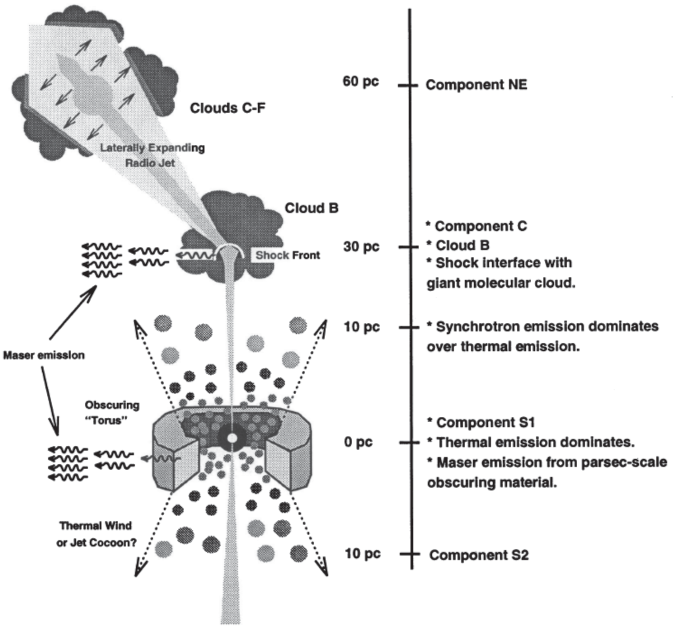


Рис. 1.8. Схема центральної області NGC 1068 з роботи [137].

зерного випромінювання $H_2O$ ототожнюються з компактною областю радіовипромінювання в континуумі S1. Для системи "центральна машина + тор" в межах моделі кеплерівського диска були отримані основні характеристики, які наведені в таблиці на рис. 1.7. Видно, що маса НМЧД близька до оцінки, наведеної в [149], однак масштаби тора більші. Також крива обертання за цими спостереженнями виявилася ближче до кеплерівської (рис. 1.7, *зліва*). Поверхнева густина (column density) за результатами спостережень $\sim 10^{25}$ см$^{-2}$, що узгоджується з вимогою ослаблення рентгенівського випромінювання. Концентрація $n(H_2) > 10^7$ см$^{-3}$.

Також були проведені радіоспостереження NGC 1068 з допомогою VLBA і MERLIN, де було виявлено джерело S1 в континуумі [137, 136], в якому присутній ланцюжок $H_2O$ мазерів. На рис. 1.9 показано розподіл інтенсивності радіовипромінювання в центральній області з роботи [139], де видно збільшення інтенсивності вздовж джета на деякій відстані від ядра (С компонента). За певний проміжок часу (в порівнянні з попередніми спостереженнями), інтенсивність випромінювання в компоненті С змінилася. Зміна інтенсивності в С компоненті інтерпретується як змінність, яка може виникати за рахунок еволюції ударної хвилі при взаємодії джета з молекулярною хмарою

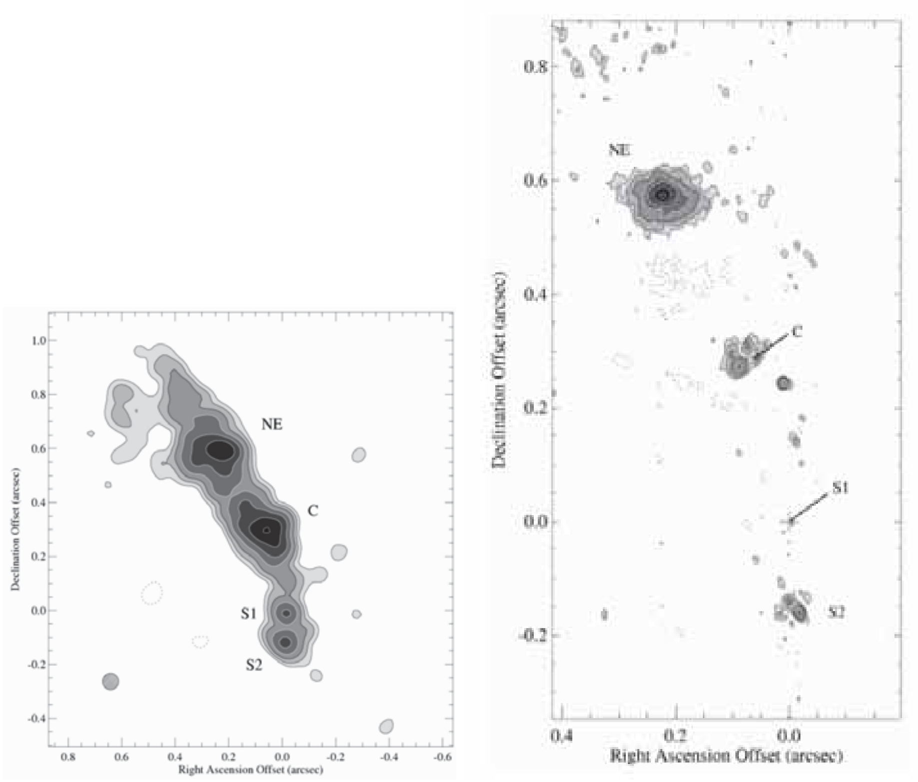


Рис. 1.9. Контури радіовипромінювання NGC 1068 на 5 ГГц, отримані на MERLIN (*зліва*) і на VLBA (*праворуч*) з роботи [139].

[139]. Це може призводити до формування мазерного випромінювання $H_2O$, оскільки для генерації мазерного випромінювання на цьому переході потрібно зіштовхувальне накачування, тобто, необхідна в якості джерела збудження молекули ударна хвиля. Часовий інтервал між змінністю близько 330 днів, що дає діаметр джерела $\leq 0.6$ пк, з відповіднии кутовим розміром 8 мілліарк-секунд. Зауважимо, що більш пізні спостереження 2004 року [139] виявили ідентичну структуру, яка спостерігалася в 1996 році [137]. Тому тут ми наводимо схему центральної області NGC 1068 (рис. 1.8) з [137], яка досі залишається актуальною в поясненні особливостей радіовипромінювання в цьому об'єкті. У радіоджерелі S1 спостерігається ланцюжок мазерів (рис. 1.10), що підтвердило більш ранні спостереження, представлені в роботах [137, 149]. Значення швидкості досягають 300 км/с. До сьогодні залишається неясним, чи є цей ланцюжок мазерів індикатором диска, або це частина тора. Активно цитуються дві моделі, які інтерпретують дані спостережень мазерного випромінювання [176, 157], в яких крива обертання, яка отримана по мазерному випромінюванню, пояснюється впливом самогравітації диска. Основне

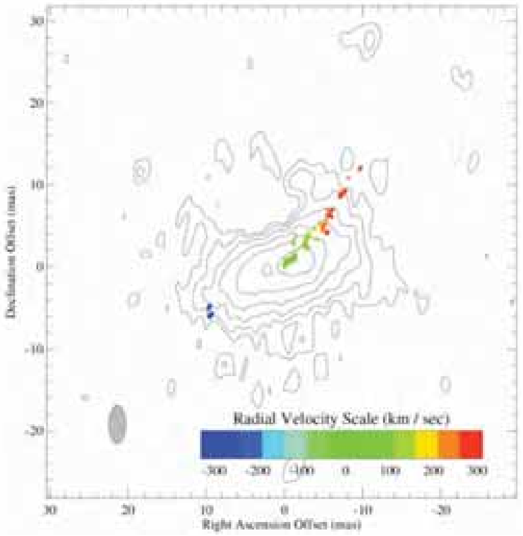


Рис. 1.10. Положення мазерних плям (кольорові кола) щодо радіовипромінювання на 5 ГГц джерела S1 в NGC 1068 з роботи [139]. Колір вказує значення радіальних швидкостей відносно систематичної швидкості батьківської галактики (1150 км/с).

припущення цих моделей полягає в тому, що навколишнє середовище в диску суцільне і, використовуючи результати для дискової моделі Шакури-Сюняєва [221], автори отримують оцінку маси НМЧД, яка приблизно узгоджується з результатами, отриманими на основі простої моделі кеплерівського диска, а маса самого диска (масштаби парсека) виявляється співставною з масою НМЧД. Однак вплив клампованності середовища і тороїдального розподілу речовини повинен бути істотним. Крім того, такий масивний диск повинен призводити до нестійкості і, з точки зору механіки, подібна система навряд чи може існувати як стабільна. Це вказує на необхідність врахування гравітаційного поля тора, що досліджено в дисертації.

### *1.1.5 Прямі спостереження тора за допомогою ALMA*

З початком роботи нового інтерферометра Atacama Large Millimeter Array (ALMA), що працює в міліметровому діапазоні довжин хвиль, з'явилися нові можливості для дослідження центральних областей АЯГ. ALMA є великим досягненням в радіоастрономії. Він складається з 66 антен діаметром 12 метрів (деякі з них мають діаметр 7 метрів). Цей комплекс працює в режимі інтерферометра, змінюючи свою базу до 16 км, досягаючи високої роздільної здатності на довжинах хвиль від 0.32 мм до 3.6 мм [1].

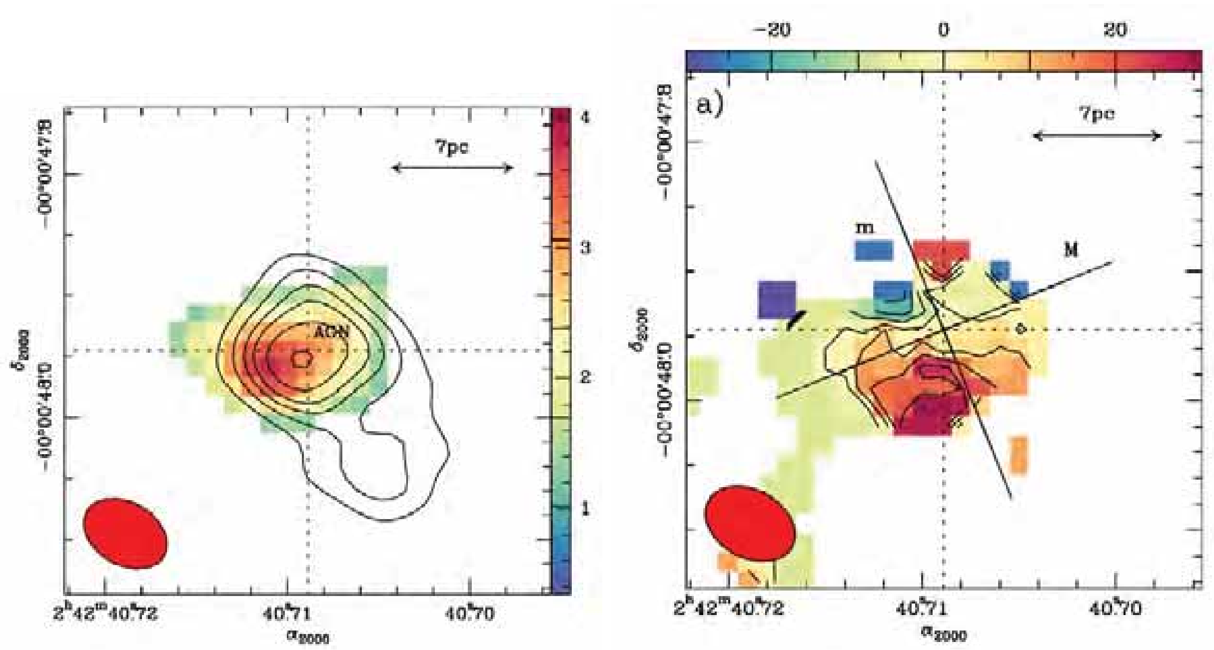


Рис. 1.11. *Зліва*: випромінювання молекули CO (6-5) (в кольорі) від тора в NGC 1068 за спостереженнями ALMA. Одиниці шкали кольорів в Ян км с$^{-1}$ beam$^{-1}$. *Справа*: розподіл швидкостей в CO. Кольором показаний розкид швидкостей (-30 км/с, 30 км/с). Лінії $M$ і $m$ вказують орієнтації великої і малої півосей тора в CO. Рисунки з роботи [142].

У 2016 році були опубліковані перші спостереження ядра NGC 1068 в молекулярних лініях CO (6-5) і безперервне випромінювання на 432 мкм з навколоядерного диска розміром 300 пк з просторовим розділенням $\sim$ 4 пк [142]. Навколоядерний диск оточує центральне ядро галактики, в якому, в свою чергу, присутній газопиловий тор.

ALMA виявив CO випромінювання від просторово розділеного тора з діаметром $10 \pm 1$ пк і співвідношення малої до великої осі $0.5 \pm 0.1$, який ототожнюється із затінюючим тором [142]. При цьому орієнтація тора збігається з джерелом S1 в радіоконтинуумі, який був виявлений раніше [139]. На рис. 1.11 (*зліва*) показано розподіл інтенсивності випромінювання в молекулі CO. Також в [142] була оцінена маса газопилового тора $M_{torus}^{gas} = (1 \pm 0.3) \times 10^5 M_{\odot}$, де з ранніх спостережень витікало, що маса пилу становить $M_{torus}^{dust} \sim 1600 M_{\odot}$ в межах 2 кпк (див. посилання в [143]). Слід зазначити, що спектральний розподіл енергії задовольняє двом комбінаціям параметрів в рамках алгоритму

---

[1] Примітка 1. Див. на офіційному сайті https://www.almaobservatory.org/en/about-alma-at-first-glance/

BayesClumpy tool [72], який використовувався в аналізі даних в [142]. А саме, $M_{torus}^{gas} = (0.9 \pm 0.3) \times 10^5 M_\odot$, $R_{torus} = 4 \pm 1$ пк та $i = 66^\circ \pm 5$. Якщо ж, слідуючи раннім спостереженням, прийняти кут нахилу меншим, то комбінація параметрів інша: $M_{torus}^{gas} = (0.6 \pm 0.3) \times 10^5 M_\odot$, $R_{torus} = 2 \pm 1$ пк та $i = 34^\circ \pm 3$. Таким чином, з цих спостережень випливає, що маса тора становить близько 1 відсотка від маси НМЧД, якщо прийняти масу НМЧД $M_{\rm SMBH} = 10^7 M_\odot$ з аналізу мазерного випромінювання (див. [157, 176]). Було виявлено, що істотні некругові рухи накладаються на повільне обертання тора. Для пояснення такого руху пропонується механізм Papaloizou–Pringle нестабільності (PPI) [199], в рамках якого передбачається, що в самогравітуючому торі в АЯГ повинні виникати неосесиметричні нестабільності [166, 170], а також нестійкості можуть виникати внаслідок зовнішньої акреції [118]. Слід зазначити, що нестійкість Papaloizou-Pringle (PP) виникає в безперервному середовищі. Однак умова затінення і спостережуваний розподіл температури в торі в АЯГ (див. підрозділи 1.1.2 та 1.1.6) вимагає істотно дискретного середовища (рух хмар), що не узгоджується з основним положенням виникнення PP нестійкості.

Також спостереження тора були проведені з високою кутовою роздільною здатністю $0.1'' - 0.2''$ в лініях молекул HCN ($J = 3 - 2$) і HCO $^+$ ($J = 3 - 2$) [159]. На підставі фотометричних спостережень в ІЧ і субміліметрових довжинах хвиль, а також з урахуванням моделі клампованого тора, зовнішній розмір тора в NGC1068 оцінений як $20^{+6}_{-10}$ пк [159], що збігається з результатами спостережень в [143], в той час як в середньому ІЧ розмір тора становить менше кількох парсек. Маса тора, яка була отримана в рамках цих спостережень, збігається з масою, отриманою в [143], тобто $\sim 10^5 M_\odot$. В околиці ядра виявлено радіовипромінювання в континуумі, яке може бути пов'язане з формуванням зірок в південно-східній частині АЯГ.

Результати наступного циклу спостережень на ALMA тора в NGC 1068 з кутовим розділенням $0.04'' - 0.07''$ в лініях молекул HCN ($J = 3 - 2$) і HCO$^+$ ($J = 3 - 2$) були опубліковані у 2018 році [160]. Фактично, роздільна здатність збільшилася в кілька разів, в порівнянні з ранніми результатами [159]. Це, у свою чергу, дозволило зафіксувати динаміку речовини в торі. Площина

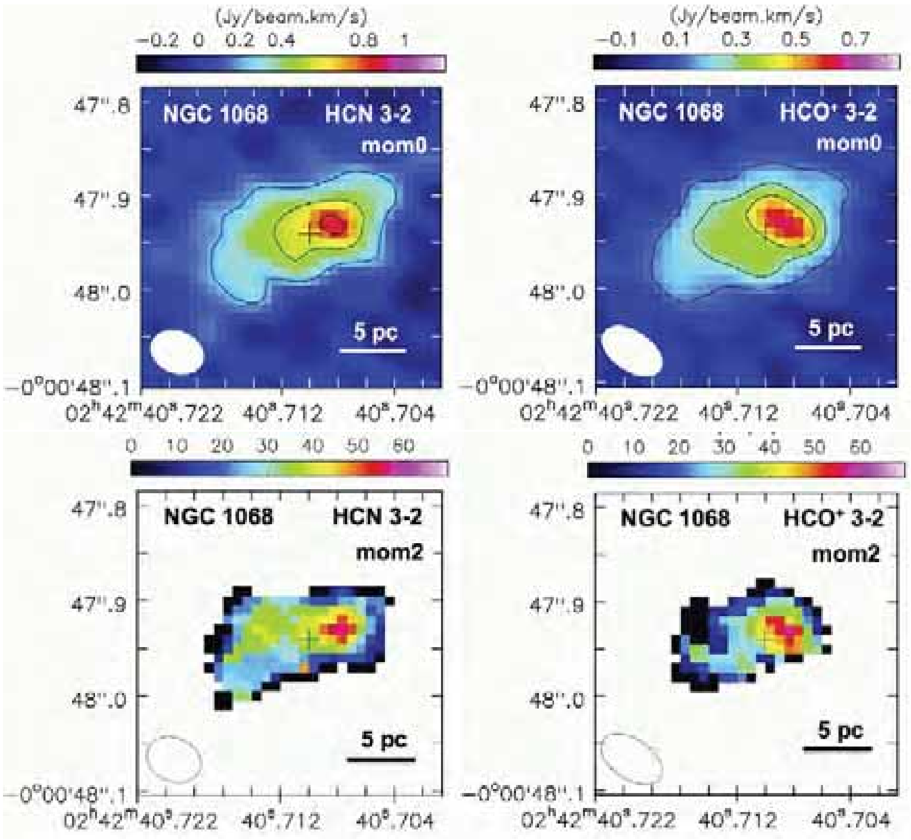


Рис. 1.12. *Зверху*: інтегральна інтенсивність в ядрі NGC 1068. *Знизу*: дисперсія швидкості. Хрест позначає положення НМЧД. Рисунки з роботи [160].

тора орієнтована в напрямку схід–захід. Один з несподіваних результатів – це те, що випромінювання в молекулах розподілено неосесиметрично, тобто західна частина тора випромінює більш інтенсивно і дисперсія швидкостей тут вище, ніж в східній частині (рис.1.12). Автори цієї роботи [160] пропонують пояснення такої асиметрії, яке пов'язане з асиметрією зовнішньої акреції з батьківської галактики.

Також одним з несподіваних результатів спостережень ALMA була оцінка маси НМЧД [160]. Спостережувана швидкість на відстані 3 пк виявилася достатньо низькою $V_{obs} = 20$ км/с. Навіть з урахуванням кута нахилу тора $i = 34^\circ$ орбітальна швидкість $v_{orb} = 36$ км/с. Якщо припускати, що рух виключно кеплерівський, то маса НМЧД виявляється рівною $9 \times 10^5 M_\odot$ [159], що на порядок нижче значення, отриманого за мазерним випромінюванням [157, 176] або по оптичним даним [200]. Крім того, така низька маса не відповідає типовим масам НМЧД в АЯГ: за величиною вона навіть нижче, ніж маса НМЧД в центрі Галактики, $M_{\rm SgrA} \approx 4.15 \times 10^6 M_\odot$ [148], яка не є активною. У розділі 7 ми обговоримо, що така низька швидкість при більш високому значенні маси НМЧД може бути пояснена в рамках моделі, в якій враховується тороїдальний розподіл речовини і відхилення від кеплерівського обертання.

У 2018 році спостереження на ALMA галактики NGC 5643 також виявили масивний молекулярний тор ($M(\mathrm{H}_2) = 1.1 \times 10^7 M_\odot$) [67]. Масштаби тора в лінії CO$(2-1)$ приблизно 26 пк [67], що в два-три рази більше в порівнянні з тором в NGC 1068 (масштаби $\approx 7-10$ пк [142]), виявленим також за допомогою ALMA. Кінематика в ядерній області в NGC 5643 демонструє некруговий рух з максимальною амплітудою 100 км/с/$\sin(i)$ всередині області $\approx 0.2''$ (16 пк).

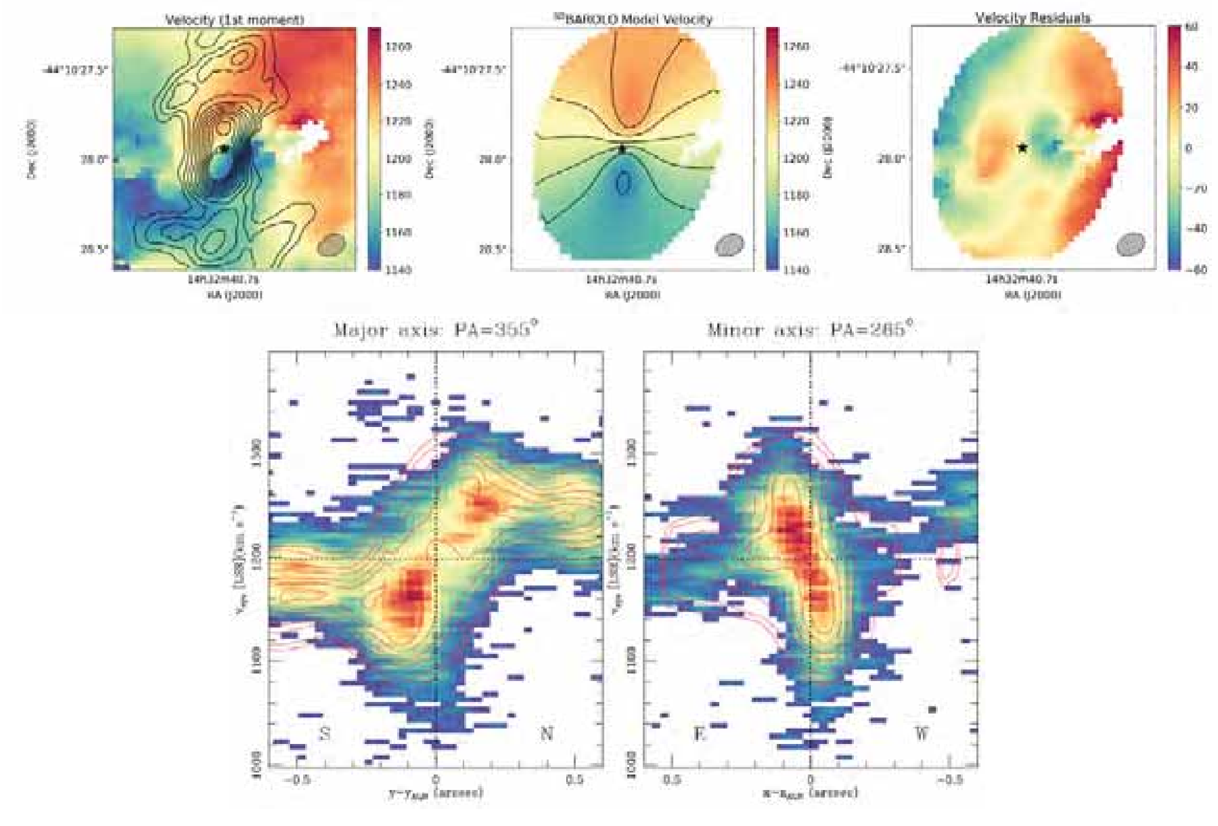


Рис. 1.13. *Зверху*: поле швидкостей в ядрі NGC 5643. Зліва чорними контурами показані ізофоти інтегральної інтенсивності ліній CO$(2-1)$. Модель поля швидкостей після врахування радіальної компоненти швидкості. Праворуч – залишкове поле швидкостей, яке залишилося після врахування моделі з спостережуваним полем швидкостей. Вертикальна шкала показує швидкість в км/с. *Знизу*: діаграма положення-швидкість для ядерної області, яка отримана апертурою з розміром $0.2''$. Рисунки з роботи [67].

Також відзначимо, що в 2019 році ALMA представила спостереження затінюючих торів для семи АЯГ [115], тор в Cygnus A нещодавно був виявлений за допомогою спостережень на VLA [113]. Це безумовний прорив в спостережній астрономії, який відкриває нову епоху у вивченні цих унікальних об'єктів.

Прямі спостереження газопилового тора в найближчих сейфертівських галактиках NGC 1068 та Circinus (VLTI/MIDI+ALMA) і NGC 5643 (ALMA) підтверджують геометричну товщину тора і його клампована структуру, що вимагає теоретичної інтерпретації. Затінюючі тори в АЯГ можна назвати унікальними об'єктами, оскільки геометрично товстий тор, стабільний протягом тривалого часового інтервалу, явище рідкісне. Оцінка маси тора показує, що він може мати значну масу — від 1 до 10 відсотків від маси НМЧД. Здавалося б, що внаслідок самогравітації, в припущенні суцільного середовища, подібний об'єкт повинен сколапсувати в диск, тому впродовж останніх 20 років велася активна дискусія про можливі механізми, які здатні пояснити існування таких об'єктів. З'являлися роботи, в яких в якості затінюючої структури пропонувалися пилові вітри, які також можуть відігравати суттєву роль в динаміці АЯГ [126, 127, 120]. Але на цей момент уніфікована схема і затінюючий тор є усталеною парадигмою. У розділах 6, 7 цієї дисертації буде розглянута задача про динаміку і стабільність масивного тора в гравітаційному полі центральної маси і застосування до АЯГ, де можна буде побачити, що товстий тор може бути стабільний внаслідок руху хмар в ньому по нахиленим орбітам з розкидом по ексцентриситетам. Такий рух є наслідком початкових умов і подальшого впливу самогравітації в торі.

У наступних підрозділах будуть розглянуті моделі розподілу енергії в торі та механізми, які були запропоновані різними групами для розв'язання проблеми геометрично товстого тора.

### *1.1.6 Моделювання спектрального розподілу енергії тора в АЯГ. Розподіл хмар в торі.*

Навіть не спираючись на дані спостережень, із загальних фізичних міркувань можна зробити висновки про структуру тора в АЯГ. Ми наведемо міркування з роботи Дж. Кроліка 1988 року [171]. Якщо речовина в торі являє собою суцільне середовище, то верхню межу температури газу можна оцінити, припускаючи, що вся кінетична енергія руху перетворюється в теплову. У цьому випадку температура газу ($T \approx 10^6$ K) на кілька порядків вище температури сублімації пилу, тому було висловлено припущення [171], що речовина в торі повинна бути розподілена у вигляді хмар. Фактично через 20 років перші спостереження тора в NGC 1068 [163, 205] показали істотну стратифікацію в розподілі температури (див. підрозділ 1.1.2), що говорить на користь того, що тор складається з хмар. Крім того, дослідження мегамазерного випромінювання в декількох найближчих сейфертовських галактиках побічно підтвердило клампованy структуру тора [149], також як і спостереження в середньому ІЧ діапазоні [163] і в субміліметровому [159, 160].

Проблема у виявленні хмар в торі пов'язана, в першу чергу, з відносно малими масштабами пилового тора і, тим більше, хмар в ньому, які складно розділити в інфрачервоному та/або міліметровому діапазонах сучасними інструментами. Тому важливу інформацію про розподіл речовини в торі отримують зі спільного моделювання і аналізу ІЧ спектрів найближчих об'єктів. В роботах [189] була досліджена задача переносу випромінювання в торі, що складається зі статичних сферичних хмар однакового радіуса з великою оптичною товщиною. Попередньо, ідея про те, що розподіл інтенсивності для дискретного і для безперервного середовищ повинні відрізнятися один від одного була висловлена в роботі [231]. Фізичне пояснення досить просте: випромінювання може проникати крізь середовище, що складається з хмар і, як наслідок, може спостерігатися стратифікація в розподілі температури, що має місце як в NGC 1068, так і в Circinus. При цьому на кінцевий розподіл енергії в спектрі впливає розмір хмар і їх число, оскільки вони відіграють роль затінюючих об'єктів. У моделюванні спектра [189] хмари поділялися на два класи. Хмари, які безпосередньо нагріваються за рахунок випромінювання акреційного диска, мають більш високу температуру на стороні, оберненій до центральної машини, і нижчу — на протилежному боці. Хмари, розташовані далі від центральної машини, нагріваються дифузним випромінюванням від інших хмар, тому що ближчі хмари будуть блокувати випромінювання від акреційного диска. Результати розв'язку рівняння переносу показали [189], що для болометричної світності NGC 1068 $\sim 2 \times 10^{45}$ ерг/с, температура пилу в оптично товстих хмарах на відстані $r = 2$ пк становить 960 K на освітленій стороні і тільки 247 K на темній стороні, спадаючи до значень 209 K на 3 пк. Ці значення збігаються з даними спостережень, що є непрямим доказом того, що тор в АЯГ складається з хмар. Основний висновок, який був зроблений в [189], полягає в тому, що для клампованого середовища різні температури пилу можуть співіснувати на одній і тій же відстані і, з іншого боку, температура темної сторони хмари поблизу акреційного диска може бути такою ж, як температура яскравого боку далекого від центральної машини хмари.

У наступній роботі Ненковой та ін. [190], моделювалась задача про перенесення випромінювання в торі з радіальним і гауссовим розподілом хмар, де параметрами були кількість хмар вздовж променя зору і їх повне число. Порівняння результатів цього моделювання зі спостережуваним розподілом енергії в ІЧ діапазоні узгоджується з моделлю, в якій розподіл хмар в перетині тора гауссів і між тором і областю формування широких емісійних ліній немає різкого розмежування. Схема розподілу хмар показана на рис. 1.14. При цьому на промені зору в екваторіальній площині має бути близько 5–

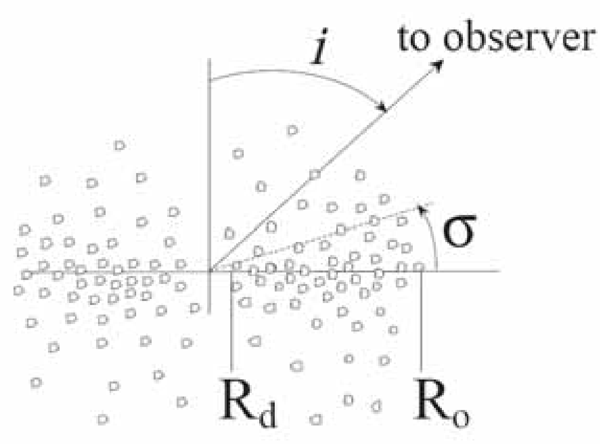


Рис. 1.14. Схема розподілу хмар в затінюючому торі АЯГ. Рисунок з роботи [190].

10 хмар, а сумарне число хмар в торі порядку $10^4 - 10^5$. Відзначимо, що у всіх моделях, що запропоновані, розглядається статичний розподіл хмар, а форма перетину тора закладається із загальних міркувань. У розділі 6 буде показано, що подібний гауссів розподіл хмар в торі природним чином виникає в межах задачі $N$ тіл. При цьому число хмар вздовж променя зору в екваторіальній площині збігається з тим, яке закладається як параметр в

моделюванні переносу випромінювання.

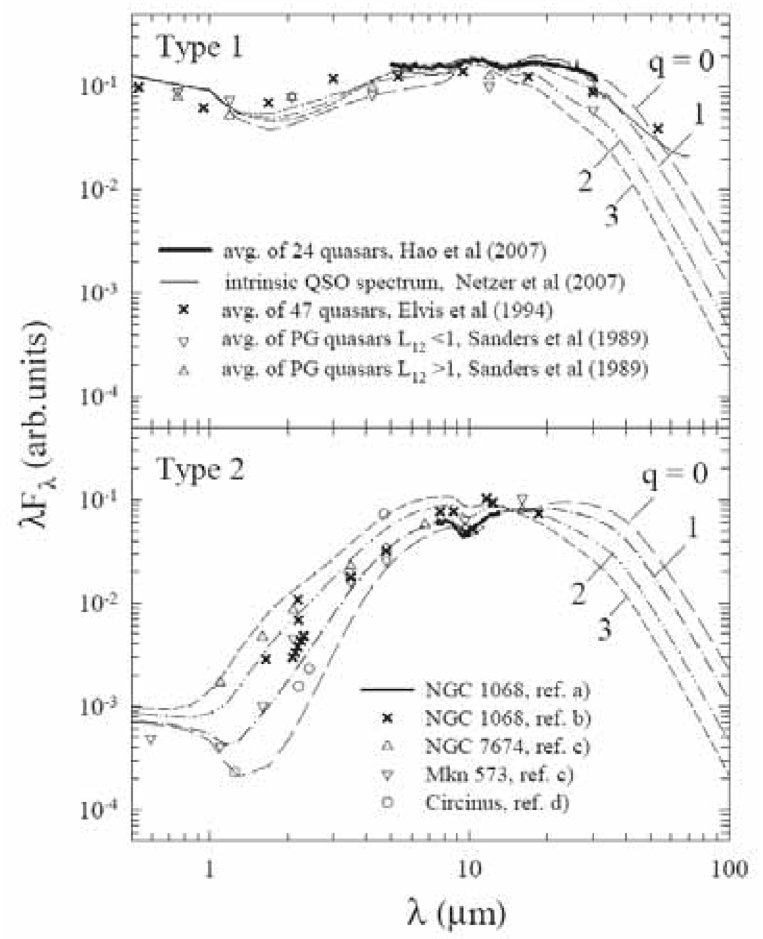


Рис. 1.15. Розподіл густини енергії в спектрі з моделювання і по спостережним даним для ряду квазарів і сейфертівських галактик. Рисунок з роботи [190], посилання на спостереження наведені також в цій статті.

На рис. 1.15 показані криві спектрального розподілу енергії (СРЕ) в ІЧ діапазоні для тора з гаусовим розподілом хмар в його перерізі. Параметрами є оптична товщина хмари ($\tau_V = 30$), число хмар вздовж променя зору в екваторіальній площині ($N_0 = 5$), радіальна довжина тора ($R_0 = YR_d$ і $Y = 30$) в радіусах сублімації пилу ($R_d$), параметр $q = 1 - 3$ радіального розподілу в степеневому законі $r^{-q}$, ширина розподілу ($\sigma = 30°$). Радіус сублімації, згідно [99] і [190] (див. також [121]) залежить від світності центрального джерела і температури сублімації пилу $T_{sub}$:

$$R_{sub} \backsimeq 0.4 \left(\frac{L}{10^{45}\,\text{ерг/с}}\right)^{1/2} \left(\frac{1500\text{K}}{T_{sub}}\right)^{2.6} \text{пк.} \tag{1.3}$$

З рисунка 1.15 видно, що СРЕ, отримане в рамках даної моделі, досить добре узгоджується зі спостережними даними для АЯГ. Тип 1 АЯГ відповідає

$i = 0^\circ$ і центральна область видима для спостерігача, а СРЕ має плоский вигляд. При цьому точки відповідають спостережним даним квазарів. Для типу 2 АЯГ ($i = 90^\circ$) і порівняння з сейфертівськими галактиками 2 типу також показують добру відповідність.

В роботі [213] була розглянута задача про перенесення випромінювання в 3D моделі розподілу хмар в торі, на відміну від 2D випадку в [189, 190]. Тут відносна щільність хмар задавалась за степеневим законом уздовж радіуса $\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0(r/1\text{пк})^\alpha$ з розміром хмари $R_{cl} = a_0(r_{cl}/1\text{пк})^\beta$, де $\alpha$ і $\beta$ – параметри моделі.

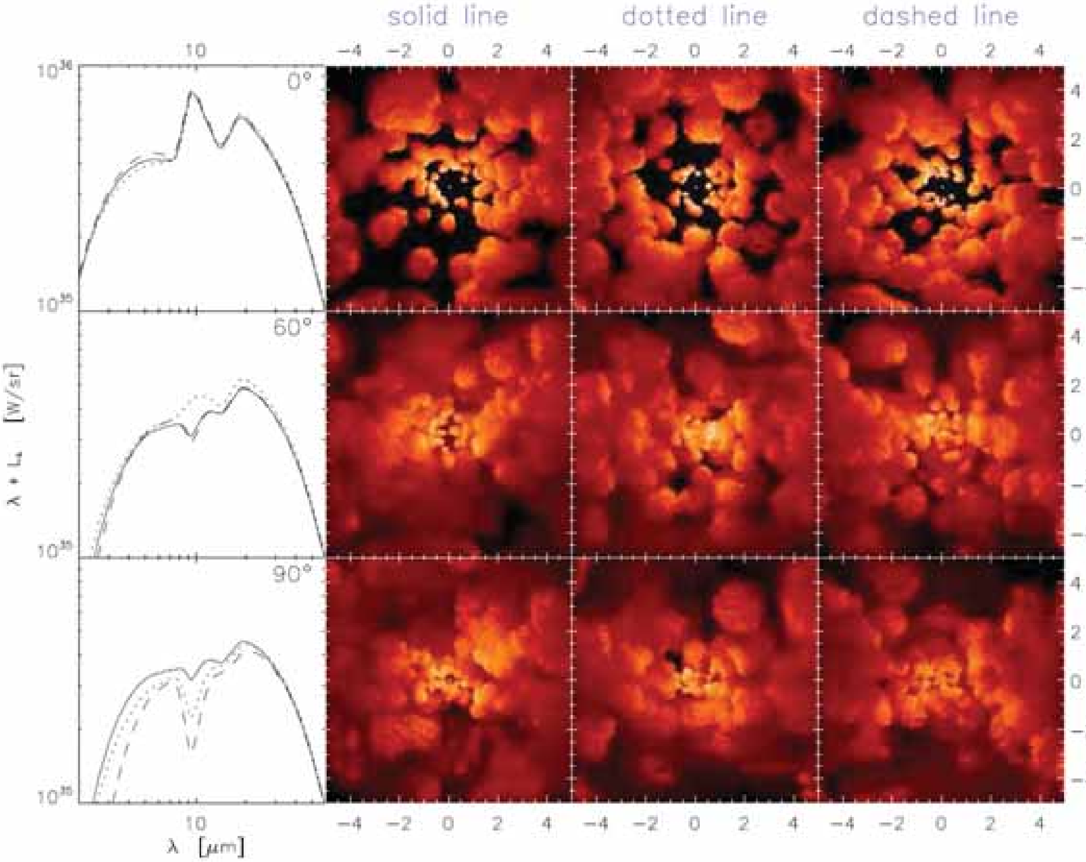


Рис. 1.16. Модельний СРЕ для тора з різним множником заповнення (filling factor) і для різного кута між променем зору та віссю симетрії тора $i$. Рисунок з роботи [213].

На рис. 1.16 з роботи [213] показано розподіл хмар (для різного параметра заповнення) і результуючий СРЕ. Видно, що при $i = 0$, тобто коли спостерігач бачить акреційний диск (тип 1 АЯГ), спектри практично не відрізняються (верхній ряд). При $i = 60^\circ$ проявляються відмінності в спектрі, а при орієнтації тора з ребра при $i = 90^\circ$ ці відмінності виявляються визначальними.

При цьому видно, що на довжинах хвиль близько 9.7 мкм виникає ямка в СРЕ, що збігається зі спостереженнями (див. рис. 1.15). У даній моделі були отримані основні характеристики для Circinus: внутрішній радіус тора $R_{in} = 0.6$ пк, зовнішній радіус тора $R_{out} = 30$ пк, половинний кут розкриття тора $\theta_{open} = 65°$, повне число хмар $N_{cl} = 500$, радіус хмари $R_{cl} = 0.2$ пк, $\alpha = -0.5$, $L_{disk}/L_{edd} \approx 0.3$. Слід зазначити, що таке мале число хмар може бути пов'язано з вибором великого радіуса хмари. При зменшенні радіусу хмари число хмар має бути більшим [190].

В роботах [141] були змодельовані властивості випромінювання клампованого тора в рамках CAT3D моделі переносу випромінювання і результати моделювання порівнювалися з MIR (середня ІЧ область) спектроскопією 56 близьких сейфертівських галактик. На рисунку 1.17 з роботи [141] представлена схема розподілу хмар в торі і основні параметри моделі. На відміну від попередніх подібних моделювань, де використовувався склад пилу, близький до міжзоряного (47% графітів і 53% силікатів), в цій моделі враховувався склад близький до реального. А саме, графітові гранули можуть витримувати більш високі температури, ніж силікатні гранули. Причому перші здатні нагріватися до температур $\approx 1900-2000$ K, а другі сублімують при $\approx 800-1200$ K, в залежності від густини.

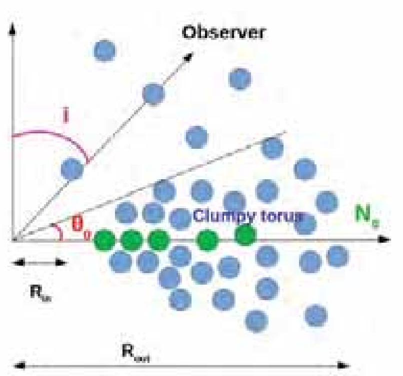


Рис. 1.17. Схема тора, що складається з хмар, в 3DCAT моделі з роботи [141]. На схемі вказані основні параметри, присутні в моделі.

У цій моделі передбачається, що силікати сублімують при температурі вище 1250 K. Це означає, що всі хмари на відстані ближче, ніж відповідна температура, вже не містять силікати, що враховується в ефективності поглинання і розсіяння при моделюванні. Додатково, найгарячіший пил при температурах $T \simeq 1900$ K буде містити тільки найбільші графітові гранули. Це означає, що мінімальний розмір гранул збільшується в порівнянні з типовим міжгалактичним середовищем (МГС) від 0.025 мкм до 0.075 мкм. У свою чергу це веде до врахування того, що маленькі гранули охолоджуються менш ефективно і будуть досягати температури сублімації на більшій відстані, ніж великі гранули. Тому графіти матимуть вищу радіаційну здатність, що призводить до зміщення СЕД NIR (ближнього ІЧ) – MIR (середнього ІЧ) в блакитну область. Таке урахування дозволило більш точно відтворити СРЕ в торі АЯГ, в порівнянні з попередніми моделями, в яких розглядався типовий склад МГС [189, 190, 213].

Основний висновок полягає в тому, що представлення речовини в торі у вигляді хмар узгоджується з спостережними СРЕ більшості галактик. При цьому кількість хмар в екваторіальній області більше, ніж під кутом. Як буде видно з запропонованої моделі в розділах 6 – 7, такий розподіл хмар формується за рахунок самогравітації в торі. Перспективним тут є можливість порівняння в даному випадку показника степені в разі радіального закону розподілу хмар в торі отриманим в рамках задачі $N$ тіл. Якщо у всіх представлених в цьому підрозділі моделях розподіл хмар в торі закладалося в якості параметра, то підключення реального розподілу з урахуванням самогравітації дозволить знайти пояснення, чому саме такий розподіл хмар в торі задовольняє спостережуваний СРЕ. Це питання ми обговоримо в розділі 7.

### *1.1.7 Проблема геометричної товщини тора в АЯГ*

Уже в рамках уніфікованої схеми АЯГ виникло питання, пов'язане з основним механізмом, який здатний підтримувати геометричну товщину тора. Для того, щоб тор залишався товстим, величина вертикальної компоненти швидкості хмар повинна бути порядку орбітальної [171]. Отже, повинен існувати механізм, який призводить до збільшення вертикальної складової швидкості хмар. Наприклад, наявність магнітного поля може призводити до пружних зіткнень між хмарами і, як наслідок, до збільшення вертикальної складової. Однак значних магнітних полів в торі не виявлено. У роботах [171, 100] були запропоновані моделі тора, що складається з дискретних хмар і, з теоретичних міркувань, були зроблені висновки про фізичні умови в цих областях. В [171] обговорювалося питання про конфайнмент хмар в торі, ідея котрого полягає в наступному. При зіткненні хмар може відбуватися злипання, тобто дві хмари можуть зібратися в одну. При цьому кількість хмар формально може зменшуватися за рахунок цього механізму. З іншого боку, при русі хмари, особливо при проходженні перицентра або при близьких зближеннях, хмара буде відчувати приливне розтягнення, що може привести до її фрагментації. Часовий інтервал цих двох ефектів приблизно однаковий і дорівнює середньому орбітальному періоду [171], тобто ці два процеси урівноважують один одного. Як результат, сумарне число хмар в торі залишається постійним. У цій же роботі були проведені оцінки надходження речовини з тора на центр за рахунок ефектів дисипації при зіткненні хмар. У цьому випадку неминуче частина хмар на внутрішній межі тора буде створювати стік в акреційний диск, оскільки частина кінетичної енергії хмар при зіткненнях буде дисипувати в випромінювання внаслідок нагріву. Тому істотна зовнішня акреція із зоряної складової галактики, яка, в свою чергу, буде підживлювати тор. Таким чином, дана структура може залишатися стабільною на тривалому часовому інтервалі.

Однак питання, пов'язане з поясненням геометричної товщини тора, залишалося відкритим. Було запропоновано ряд моделей. Дж. Кролік в [172] запропонував механізм, в рамках якого геометрична товщина тора пояснюється тиском ІЧ-випромінювання, яке має максимальне значення на внутрішній границі тору. Саме в цій області відбувається безпосереднє нагрівання хмар випромінюванням акреційного диска. При цьому тиск випромінювання може ефективно підтримувати товщину тора при значеннях болометричної світності $\sim (0.03 - 1) \times L_{Edd}$. У припущенні суцільного середовища було отримано розподіл густини в перетині тора, при цьому форма перетину така, що він має максимальну висоту поблизу внутрішньої межі тора і спадає до зовнішньої [172].

Також було запропоновано ряд моделей, в яких вертикальна складова швидкості хмар може бути обумовлена, головним чином, навколишнім зоряним населенням, яке і є основним "постачальником" пилової речовини в центральні області АЯГ [212, 214, 237]. Для розв'язання проблеми товстого тора були також запропоновані сценарії, в яких роль затінюючої структури грає вітер [127, 126, 120]. Безумовно, вітер грає дуже важливу роль в АЯГ і, по всій видимості, він формується на внутрішній границі тора, де тиск випромінювання від акреційного диска істотний, що і дає додатковий імпульс речовині рухатися в напрямку від ядра. Підживлення вітру може здійснюватися за рахунок хмар, що надходять з газопилового тора. Інша ідея полягає в наявності вихрового руху в торі, що також здатний підтримувати його геометричну товщину [83]. Замагнічений тор, як модель для затінюючого тора в АЯГ, було запропоновано в [119]. Цікаво, що проблема, яка пов'язана з розв'язком задачі утримання плазми тороїдальним магнітним полем елегантно застосовується для задач астрофізики. У цій роботі використовувався 3D опис наближеного розв'язку МГД для проблеми тороїдальної рівноваги в токамаках.

Незважаючи на різноманіття пропонованих моделей, практично всі вони мають обмеження. Найчастіше середовище в торі розглядалося у вигляді суцільного середовища. Такий підхід зручний тим, що дозволяв використовувати відомі розв'язки в рамках гідродинаміки. Однак таке наближення відмовляє, коли ми переходимо до дискретного середовища (розподіл хмар), що вимагають спостережені дані. Пояснення вертикальної складової швидкості хмар за рахунок наявності зовнішньої акреції і можливих вибухів наднових передбачає особливі умови для того, щоб зберегти осесиметричність системи. Вітри, як єдина затінююча структура, також не задовольняють результатам спостережень ALMA, в яких тор був безпосередньо розділений і було виявлено орбітальний рух. Крім того, криві обертання в АЯГ, отримані на ранніх етапах досліджень, інтерпретувалися в рамках моделі диска. Спираючись на всю сукупність спостережних даних стає зрозуміло, що необхідно будувати модель тора, яка повинна враховувати відхилення форми перетину тора від випадку диска; урахування того, що середовище складається з хмар; урахування самогравітації в торі і гравітаційний вплив з боку центральної маси. У дисертації буде запропонована подібна динамічна модель тора з урахуванням всіх цих факторів.

## 1.2 Кільцеві галактики

Кільцеві галактики є незвичайними з точки зору морфології об'єктами, які являють собою кільцевий розподіл речовини навколо центральної галактики. На зображеннях видно (рис. 1.18), що центральна галактика має жовтий колір, а колір кільця — блакитний. Це означає, що в кільці відбуваються процеси зореутворення, в той час як центральна галактика складається з більш старих зірок. Існує окремий клас об'єктів, так звані галактики з полярними кільцями (PRG – polar ring galaxy), в яких кільце розташоване в площині, перпендикулярній площині диска хазяйської (центральної) галактики [239, 207]. На рис. 1.18 показані кільцеві галактики з каталогу [186], який містить 275 галактик.

Можливим сценарієм формування кільцевих галактик є зіткнення двох галактик[1]. Чисельні моделювання показують, що при сильному центральному ударі, тобто проходженні однієї галактики крізь іншу, формується кільце яке розширюється [110]. Форма деяких кільцевих галактик показує, що вони дійсно зазнали зіткнення, особливо якщо в околиці галактики спостерігаються залишки події зіткнення (див. яскравий приклад галактики Arp 147 за спостереженнями телескопу ім. Хаббла [161] та моделювання [146]). Однак для деяких кільцевих галактик така гіпотеза не працює, оскільки в околиці немає слідів зіткнень. Тому вважається, що подібна структура таких галактик може виникнути в результаті акреції холодного газу з філаментів міжгалактичного середовища [111, 187] або з галактиці-донора [110, 162].

Одним з унікальних об'єктів серед кільцевих галактик є об'єкт Хога, який був виявлений в 1950 р. і названий на честь його першовідкривача Артура Хога [155]. Ця галактика розташована таким чином, що кільце зореутворення розташоване в площині, практично перпендикулярній променю зору [195]. Зі спостережних даних випливає, що маса кільця порівнянна з масою центральної галактики (близько 1/3). На оптичному зображенні, отриманому за

---

[1] Примітка 1. Кільцеві структури в галактиках є частим явищем і їх утворення може бути пов'язано з різними механізмами (див., наприклад, оглядову частину в [30], а також доповіді конференціях "Multi-spin galaxies 2014, 2016"). Тут ми обмежуємося певним типом кільцевих структур, маса яких порівнянна з масою центральної галактики.

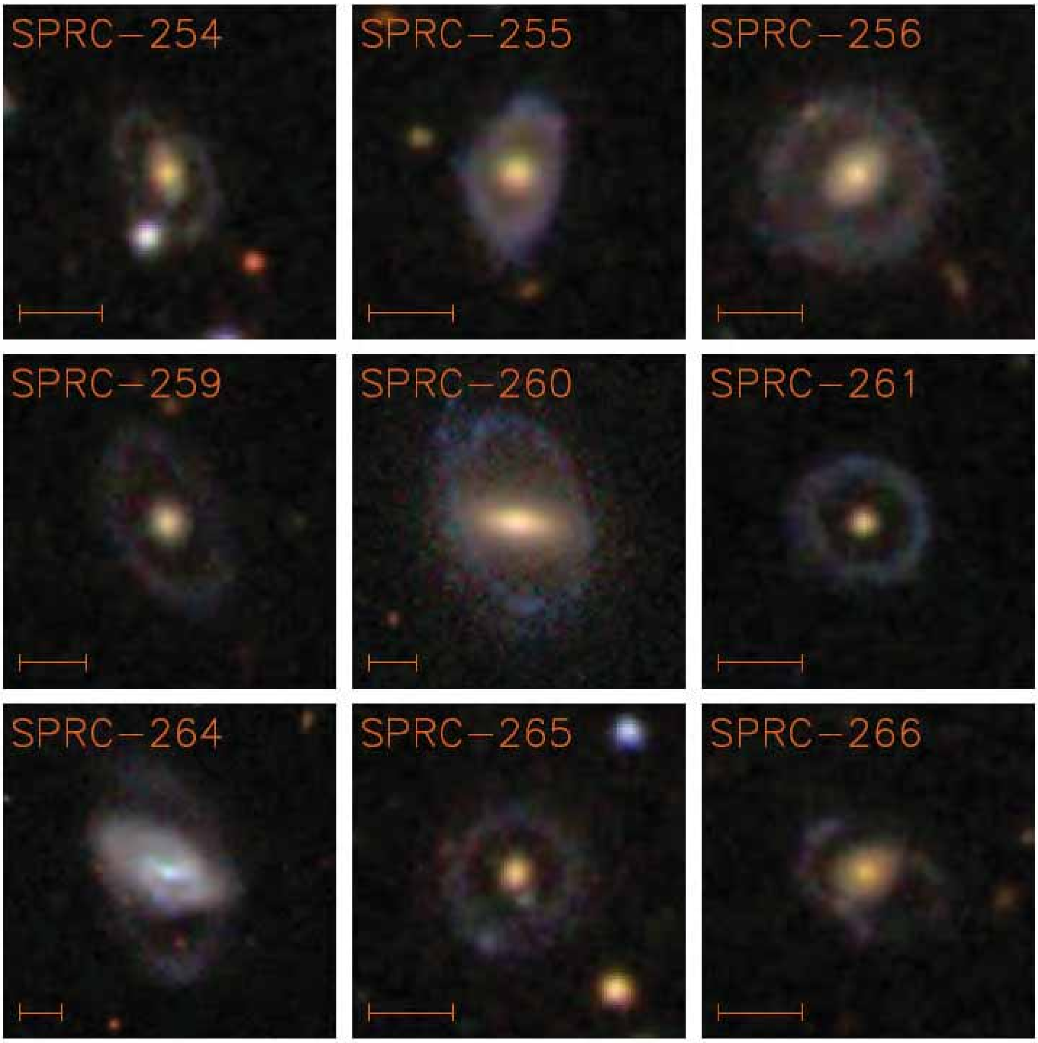


Рис. 1.18. Оптичні зображення галактик з каталогу Моісєєв та ін. [186]. Комбінація зображень складена з $i$, $g$, $r$ фільтрів відповідно до даних каталогу SDSS DR8. Масштабна смуга відповідає кутовому розміру 10 кут.сек.

допомогою телескопа ім.Хаббла (HST), видно, що між центральною галактикою і кільцем присутня область, яка показує практичну відсутність зоряної складової (рис.1.19). На зображенні, отриманому на 6 метровому телескопі БТА [131], видно зменшення яскравості в цій області (рис.1.19), що також підтверджується спостережуваним профілем яскравості (рис. 1.20).

Цікава історія обговорення механізму формування об'єкта Хога. Сам Хог, і надалі Р. Оконнелл та ін. [195] висловили припущення, що кільце навколо галактики є кільцем Ейнштейна, яке формується за рахунок ефектів гравітаційного лінзування. Однак ця гіпотеза практично відразу була виключена, оскільки червоні зсуви галактики і кільця збігаються [217]. Також був виключений сценарій зіткнення галактик, типовий для багатьох кільцевих га-

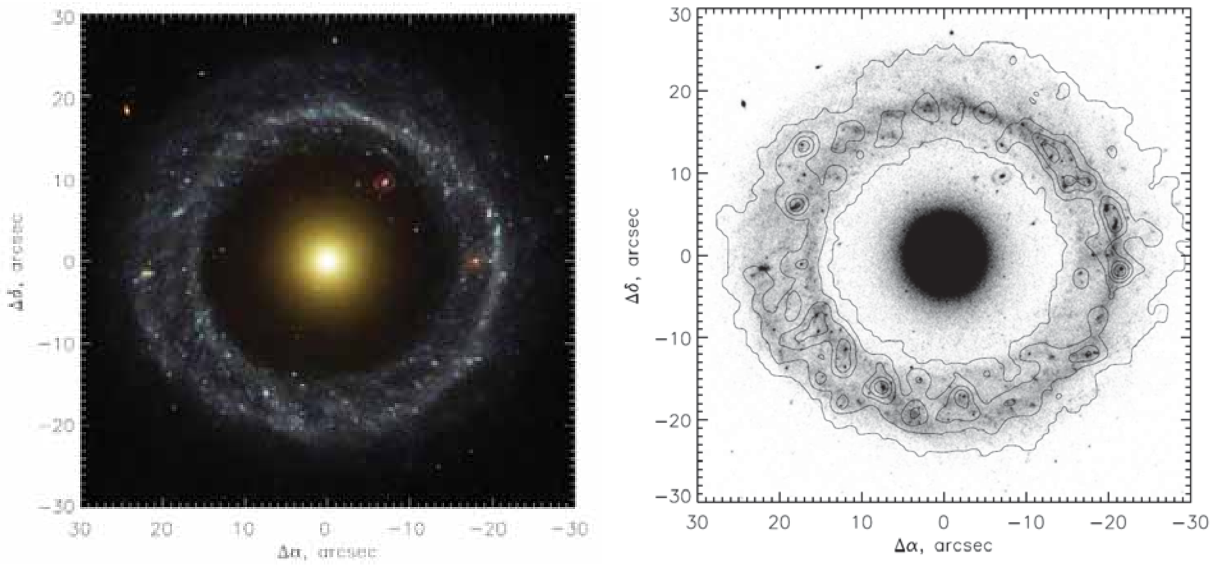


Рис. 1.19. *Зліва*: Hubble Heritage WFPC2 colour image of Hoag's Object (Image credit: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team). *Справа*: контурами показано розподіл інтенсивності випромінювання в лінії H$\alpha$ по результатам спостережень на БТА (контури), сірий фон — HST F606W. Рисунок з роботи [131].

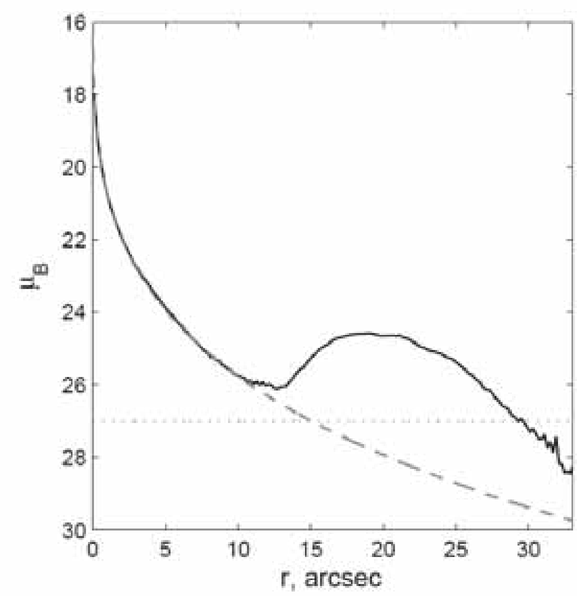


Рис. 1.20. Азимутальний усереднений профіль об'єкта Хога. Пунктирна лінія показує екстраполяцію центральної галактики законом Вокулера $r^{-1/4}$. Рисунок з роботи [131].

лактик, оскільки в результаті зіткнення повинні спостерігатися істотні відмінності у швидкостях центральної галактики і кільця. Однак відмінності у швидкостях між ядром і кільцем складають тільки близько 1 км/с [217]. У роботах [195] і [112] було показано, що кільце не може бути розсіяним світлом від ядра і що щілина між кільцем і ядром не пов'язана з ефектом затінення пилом. Спостереження з високою роздільною здатністю [217, 131] підтримують ці два висновки. Також було висловлено припущення, що кільце в об'єкті Хога може бути сформовано за рахунок сильної нестійкості бару в диску [112]. Дійсно, існують моделі, в рамках яких кільцеві структури можуть виникати в галактиках з баром, при цьому внаслідок нестійкості перемичка між баром і зовнішньою частиною зникає. Ця гіпотеза також не знаходить підтримки, оскільки центральна галактика сферична (профіль підкоряється закону Вокулера) і ніяких ознак наявності диска не виявляється [217]. На даний момент спостереженням відповідає гіпотеза холодної акреції міжгалактичного філамента [131]. Кільцеві галактики, типу об'єкта Хога, унікальні ще й тим, що маса кільця порівняна з масою центральної галактики. Це означає, що гравітаційне поле кільця може бути істотним, а часом і визначальним в динаміці речовини в таких об'єктах. Практично всі вони містять щілину між центральною галактикою і кільцем, що також може вказувати на суттєві гравітаційні сили з боку кільця. У розділі 5 буде розглянуто особливості руху частинки в потенціалі центральної маси і кільця (тонкий тор), де буде показано, що дана система має низку цікавих властивостей, які можуть пояснювати наявність щілини в розподілі речовини в кільцевих галактиках. Крім того, подібна система цікава з точки зору аналогії з релятивістським випадком — наявність останньої стійкої орбіти.

Як буде видно далі, гравітаційні властивості тора виявляються найчастіше нетривіальними. Вплив самогравітації, особливо для випадку, коли маса тора істотна, може привести до наявності руху по малому контуру (див. розділ 5). З точки зору кінематики такий рух подібний вихровому руху. Тому методи і результати, пов'язані з дослідженням тороїдальних вихорів можуть дати додаткову інформацію про динаміку та стійкість таких систем.

## 1.3 Кільце темної матерії в скупченні галактик Cl 0024+17

Кільцеві структури можуть бути присутні не тільки в баріонній речовині, при певних умовах кільце може сформуватися також і в темній матерії.

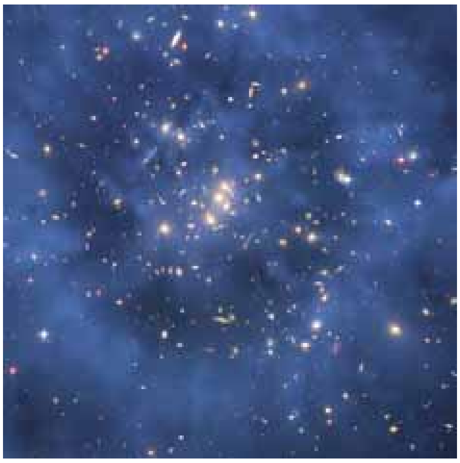


Рис. 1.21. Кільце темної речовини в скупченні галактик Cl0024+17 (синій колір). Рисунок з сайту Hubble Space Telescope за результатами роботи [164].

Прикладом є скупчення галактик Cl0024 + 17, в якому за допомогою ефектів гравітаційного лінзування було відновлено розподіл темної матерії [164]. При цьому використовувалися галактики, зображення яких істотно змінилися внаслідок ефектів сильного гравітаційного лінзування і велика кількість фонових галактик, які за рахунок ефектів слабкого лінзування змінили еліптичність та орієнтацію. Зображення поля галактик було отримано на телескопі ім.Хаббла. На підставі спільного рішення системи рівнянь гравітаційного лінзування, було відновлено розподіл маси в скупченні-лінзі [164], який показав збільшення густини як до центральної частини, так і до периферії (рис.1.21 з сайту Hubble Space Telescope [1]). Формування кільцевого розподілу темної матерії інтерпретується як результат зіткнення двох скупчень (див. також обговорення в розділі 8). Чисельне моделювання в межах задачі $N$ тіл зіткнення двох сферично симетричних скупчень темної речовини (зіткнення уздовж променя зору) показали, що в цьому випадку формується кільце. При цьому маса одного зі скупчень значно менша від маси другого. Як відзначають автори роботи [164], таке кільце подібно колам на воді, що виникають від кинутого каменя. З іншого боку, подібний механізм використовується для пояснення структури деяких кільцевих галактик. Питання про формування складних структур в темній матерії все ще залишаються відкритими (див. також обговорення в розділі 8). Відомі скупчення галактик, які демонструють несферичний розподіл темної матерії, наприклад, скупчення "куля" , що

---

Примітка 1. https://www.spacetelescope.org/images/heic0709a/

також може свідчити про результат зіткнення. Проте, можна припустити, що оскільки темна матерія є практично бездисипативною, сформована кільцева структура може існувати протягом довгого часу. Одним з цікавих питань є наступне: чи може в кільцевих галактиках темна речовина також мати кільцеву структуру, особливо в тих галактиках, де кільце баріонної речовини сформувалося в результаті зіткнення. Для розуміння таких явищ необхідно досліджувати ефекти гравітаційного лінзування, де лінзою можуть бути об'єкти, що містять кільцеву структуру. Цьому буде присвячено розділ 8 даної дисертації.

## 1.4 Тороїдальні вихори в астрофізичних об'єктах

У попередніх розділах розглядалися астрофізичні об'єкти, в яких тор характеризується гравітаційними властивостями (АЯГ, кільцеві галактики). У наступних розділах ми подивимося на тороїдальні структури як на гідродинамічні об'єкти, в яких основний рух відбувається по малому контуру. При цьому особливий інтерес становить взаємодія вихорів з потоком, в якому вони рухаються. Такі задачі мають цікаві застосування як до атмосфер планет, так і до активних ядер галактик.

### *1.4.1 Вихори в атмосферах планет*

На відміну від атмосфери Землі, де вихрові утворення характеризуються малим часом життя, на інших планетах вихори можуть зберігати свою структуру довгий час.

Прикладом може служить відома Червона пляма на Юпітері, яка являє собою довгоіснуючий вихор, який підкручується з обох сторін течіями в атмосфері. Також система вихорів присутня на Сатурні в Гексагоні. Подвійний вихор на південному полюсі Венери, виявлений космічним апаратом Venus Express (рис.1.22 з сайту European Space Agency https://www.esa.int/ spacein images/ Images/2006/06/), також є унікальним утворенням. Цей подвійний вихор був зареєстрований радянським апаратом "Венера" багато років тому, а підтвердження його існування за допомогою Venus Express показало, що це утворення досить стабільне, а рух вихорів відбувається навколо полюса.

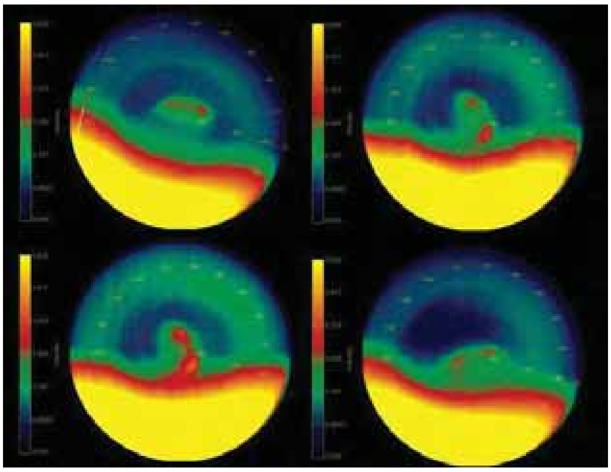


Рис. 1.22. 4 зображення, Venus Express, які отримані з 12 по 19 квітня 2006 року (з сайта ESA).

У розділі 2 буде розглянута задача про динаміку пари точкових вихорів в потоці, результати якої можна застосувати до вихорів на Венері.

### *1.4.2 Компоненти джетів в АЯГ*

Інший приклад динаміки вихорів пов'язаний з об'єктами, в яких присутня осесиметрична течія. Такими об'єктами є активні ядра галактик, в центральних областях яких присутня як акреція, так і витікання (вітер). АЯГ також характеризуються наявністю джетів, які виникають в безпосередній околиці чорної діри. Виникненню джетів присвячена велика кількість робіт (див., наприклад, монографії [59, 20]). У більшості з них визначальну роль відіграє сильне магнітне поле [102, 103, 177], або "зовнішнє" , або яке виникає внаслідок розвитку нестійкостей в плазмі акреційного диска. Це поле служить направляючою для руху частинок під дією електромагнітних, відцентрових і гравітаційних сил, дозволяючи їм рухатися проти сили тяжіння і нести обертальний момент, що необхідно для ефективної акреції, відповідальної за активність ядра (див. обговорення і посилання в оглядах [178, 108, 185, 179]). З огляду на складності проблеми використовуються не тільки аналітичні, а й потужні обчислювальні методи [198, 234]. В той самий час, сама можливість існування сильних магнітних полів в акреційних дисках в околицях чорних дір не цілком зрозуміла (див. обговорення в [59], с.180).

Насправді на малих (парсекових для АЯГ) відстанях від ядра спостерігається поява окремих компонент радіоджетів, які можуть мати навіть надсвітлові швидкості [236] [1]. Одне з припущень може бути пов'язано з тим, що компоненти джетів можуть формуватися за рахунок появи вихрових утворень в акреційному потоці з подальшим викидом.

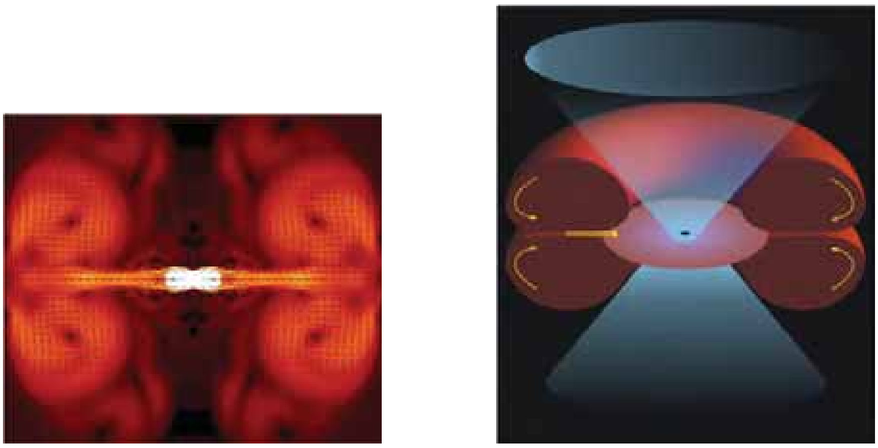


Рис. 1.23. Приклад дипольного тороїдального вихору. *Зліва:* результати МГД моделювання для пульсара [117].) *Справа:* схема тороїдального вихору в акреційному потоці (масштаби вихору значно менше масштабів затінюючого тора) [83].

На рис.1.23 показані приклади дипольного тороїдального вихору. Рисунок зліва демонструє результат релятивістського МГД моделювання для випадку слабкого тороїдального магнітного поля зі застосуванням до пульсару в Крабовидній туманності [117]. В даному випадку лінії струму спрямовані від диска. Рисунок справа показує схему дипольного вихору із циркуляцією, яка спрямована в бік акреційного потоку. Така структура може відповідати вихровому утворенню в акреційному потоці АЯГ. Формування такого вихору в разі суцільного середовища може бути результатом підкручення за наявності двох типів руху (акреції і вітру) [6, 83]. В межах моделі дипольного тороїдального вихору, розглянутого в розділі 2 і 3, буде показано, що наявність акреційного потоку здатна приводити до викиду компонент вихору зі швидкістю, яка залежить від потужності стоку.

Слід зауважити, що дослідження кільцевих систем з вихровим рухом також важливо для розуміння динаміці в гравітуючому торі. Нижче ми побачимо, що в масивному торі для компенсації стиску по малому радіусу необхідний

---

Примітка 1. Цей ефект, який називають ефектом релятивістської аберації, пов'язаний з тим, що кут між променем зору та спостерігачем малий і при русі частинок зі швидкістю, близькою до швидкості світла, "видима" швидкість здається вище швидкості світла [25].

вихровий рух. Тому дослідження тороїдальних вихорів також важливо для загального розуміння процесів в гравітуючому торі.

# ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Тороїдальні структури спостерігаються в астрофізичних об'єктах різних типів. В активних ядрах галактик це затінюючі тори, які відіграють істотну роль в підживленні акреційного диска і в забезпеченні акреції. Дані спостережень показують, що затінюючі тори складаються з хмар, а їх розподіл гауссів зі згладженими межами. При цьому газопилові тори мають істотну геометричну товщину, фактично плавно переходячи до області формування вітрів. Маса тора може досягати від 1 до 10 відсотків від маси НМЧД, що вимагає урахування гравітаційних властивостей таких об'єктів. Крім того, актуальною є побудова динамічної моделі затінюючого тора в АЯГ, яка здатна пояснити геометричну товщину тора, задовольнити умовам затінення АЯГ, а також взяти до уваги не тільки самогравітацію тора, а й взаємодії між хмарами. Подібна модель буде запропонована і детально досліджена в розділах 6 – 7. Для побудови такої моделі необхідно в першу чергу дослідити гравітаційний потенціал тора в рамках класичної теорії потенціалу і цьому буде присвячений розділ 4. Це необхідно як для аналізу кривих обертання АЯГ, так і для коректної інтерпретації чисельних експериментів. Наприклад, дослідження руху пробної частинки у внутрішньому потенціалі тора дозволить, як буде видно в розділі 6, правильно інтерпретувати результати задачі $N$ тіл при дослідженні рівноважної форми самогравітуючого тора.

Іншим типом об'єктів з кільцевою структурою є кільцеві галактики. Ці об'єкти відрізняються тим, що маса кільця порівнянна з масою центральної галактики, що також вказує на необхідність врахування гравітаційного впливу кільця (тонкого тора). Результати дослідження гравітаційного потенціалу тора (розділ 4) дозволять розглянути задачу про рух частинки в такій системі фактично на аналітичному рівні (розділ 5), а унікальні властивості системи, які будуть виявлені, здатні пояснити спостережувану щілину між центральною галактикою і кільцем в об'єкті Хога. Крім того, працюючи як гравітаційна лінза, об'єкти, які містять кільцеву структуру, можуть призводити до цікавих ефектів гравітаційного лінзування, які розглянуті в розділі 8. Виникнення декількох кілець Ейнштейна в такій системі, можливо, дозволить в майбутньому знаходити в оглядах неба нові системи, які мають кільцеві структури.

Як буде видно нижче, для об'єктів з істотною масою тора, порівняною з центральною масою, важливим стає не тільки орбітальний рух в торі, а й рух по його малому контуру, який необхідний для компенсації стиснення по малому радіусу за рахунок відцентрових сил. Це, фактично, аналог вихрового руху, який добре вивчений в задачах гідродинаміки. Тобто в подібних системах вихровий рух може з'явитися як результат самогравітації. Тому незалежне дослідження динаміки тороїдальних вихорів з урахуванням орбітального руху, а також пошук додаткових інтегралів, може давати інформацію про стійкість таких систем, що буде розглянуто в розділах 2 – 3. З іншого боку, тороїдальні (кільцеві) вихори можуть мати нетривіальну динаміку в системах, де існує осесиметрична течія, тобто в таких об'єктах, як АЯГ і мікроквазари, що у свою чергу дозволить знайти нові можливі механізми формування компонент джетів.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [4, 6, 16, 74, 79, 82, 83, 84, 85, 86].

# РОЗДІЛ 2

# ДИНАМІКА ТОРОЇДАЛЬНОГО ВИХОРУ У РАДІАЛЬНОМУ ПОТОЦІ (2D ВИПАДОК)

Взаємодія кільцевих вихорів з потоками становить значний інтерес і має численні застосування як до атмосферних явищ, так і в астрофізичних системах. У 2008 році виповнилося 150 років класичнії роботі Германа Гельмгольца [153], що стала тим фундаментом, на якому почала будуватися теорія вихорів. Один з журналів присвятив увесь свій випуск цьому ювілею, де можна знайти багато корисних посилань [71]. Переклади двох основних робіт Гельмгольца (1858 р. і 1868 р.) були також недавно перевидані [24]. Дослідженню вихорів присвятив ряд робіт Анрі Пуанкаре. В курсі лекцій "Теорія вихорів" [50] він не тільки викладає основні результати Г.Гельмгольца і Г.Кірхгофа, але також наводить і власні результати, багато з яких залишилися незавершеними. Теорії вихорів присвячені розділи багатьох монографій, де можна знайти відповідні посилання на статті, присвячені цим цікавим об'єктам, наприклад, [33, 40, 38, 18, 48, 54, 39, 58].

Динаміку вихорів зручно розглядати в плоскому (2D) випадку. Дуже гарну аналогію навів А.Зоммерфельд [33]: "Під час веслування можна помітити, що в тому місці, де весло виходить з води, утворюються маленькі поглиблення — "вихрові западини" , — які пробігають по поверхні води. Вони являють собою кінці вихрових дуг, які утворюються слідом за веслом при його проходженні через воду. ... Ця пара вихрових воронок пробігає по воді з такою ж швидкістю, з якою відбувається поступальний рух вихрової дуги, яка їх з'єднує." Такою аналогією А. Зоммерфельд демонстрував, що для дослідження динаміки кільцевих вихорів достатньо застосовувати наближення плоских вихорів [33]. Дійсно, розглянуту в цьому прикладі вихрову дугу можна представити у вигляді частини кільцевого вихору, розділеного меридіональною площиною. З іншого боку, розсікаючи кільцевий вихор меридіональною площиною, ми зводимо задачу до пари плоских вихорів з циркуляціями, рівними по модулю, але протилежними за знаком. При цьому дані вихори розташовані симетрично щодо осі руху. Розглядаючи задачу в такому наближенні, ми можемо скористатися основними теоремами і рівняннями для плоских вихорів, які дозволяють розглянути задачу аналітично.

У цьому розділі ми досліджуємо динаміку одиночного і дипольного кільцевого вихору в радіальному (збіжному і розбіжному) потоці. При цьому, як було зазначено вище, ми будемо розглядати їх у вигляді системи точкових вихорів. Таке наближення дозволить отримати аналітичні вирази, досліджувати задачу в гамільтоновому та лагранжевому формалізмі, а також визначити ряд цікавих динамічних властивостей.

## 2.1 Плоскі вихори в радіальному потоці

Як зазначалося на початку розділу, у двовимірній гідродинаміці кільцевий вихор моделюється парою точкових вихорів з різними знаками циркуляції і розташованими симетрично щодо осі руху. Такі вихори називають "парою вихорів" [40]. За відсутності потоку рух пари відбувається рівномірно і прямолінійно вздовж осі симетрії [33, 40], при цьому швидкість компоненти вихрової пари визначається виразом

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi R}, \tag{2.1}$$

де $R$ — відстань між точковими вихорами (або в тривимірному випадку — діаметр кільцевого вихору), $\Gamma$ — циркуляція (див. нижче). При цьому видно, що чим менша відстань $R$, тим більша швидкість вихору. Такий зв'язок підтверджується експериментами з кільцевими вихорами (наприклад, кільцевий вихор, який створюється курцем). Чим більший радіус кільцевого вихору, тим повільніше він рухається. Для системи декількох вихорів існує цікавий ефект, названий "чехарда вихорів". Цей ефект докладно розглянуто в монографії А. Зоммерфельда "Механика деформируемых сред" [33]. Нехай рухається вихрове кільце радіусом $R_1$ зі швидкістю $V_1$, згідно (2.1). Через деякий час запускається друге кільце з меншим радіусом $R_2 < R_1$ і зі швидкістю $V_2 > V_1$. Такий вихор наздожене перший вихор і проскочить крізь нього. На цьому етапі взаємодія вихорів призведе до того, що швидкість першого вихору збільшиться $V_1 > V_2$, тобто зменшиться його радіус $R_1 < R_2$. Цей процес при низькій дисипації може повторюватися багато разів.

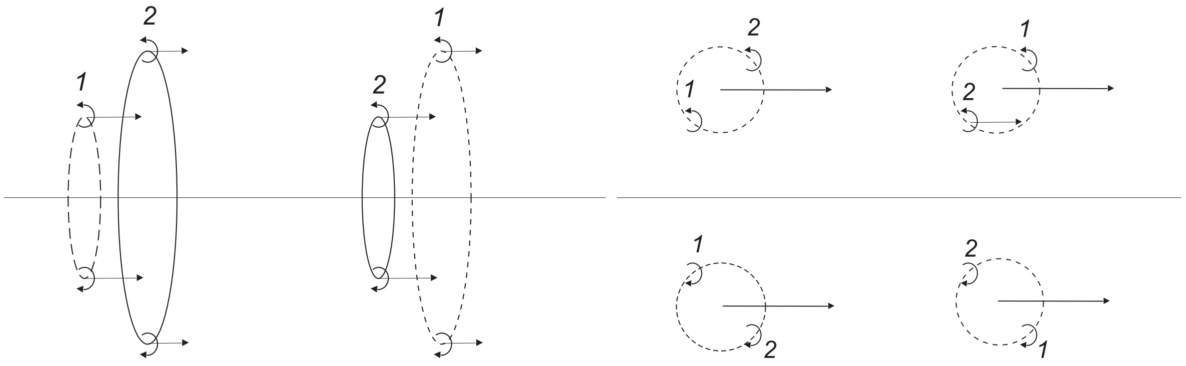


Рис. 2.1. Схема руху в ефекті "чехарда вихорів". *Зліва*: 3D представлення (див. [33]); *справа*: 2D представлення (рух плоских вихорів).

При описі плоскими вихорами, ми пропонуємо уявлення чехарди вихорів у вигляді двох типів рухів: 1) обертання компонент з різних пар по колу і 2) поступальний рух центрів цих кіл уздовж осі загального руху. Такий опис феноменологічно моделює чехарду кільцевих вихорів [1].

Наведемо основні рівняння для плоских вихорів, які ми будемо використовувати в подальшому дослідженні. Дотримуючись виведенню, наведеного в [36], отримаємо рівняння збереження завихренності у двовимірному випадку з теореми Томсона збереження циркуляції:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \tag{2.2}$$

де циркуляція швидкості $\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$. Використовуючи теорему Стокса і враховуючи малість контуру, отримуємо $\Gamma = \oiint \mathrm{rot}\mathbf{v} d\mathbf{s} \approx \mathrm{rot}\mathbf{v}\delta\mathbf{s}$, де $\delta\mathbf{s} = \delta x\, \delta y\, \mathbf{e}_z$, та $\mathbf{e}_z$ одиничний вектор уздовж осі $z$. Тоді $\Gamma = \mathrm{rot}\mathbf{v}\, \delta x\, \delta y\, \mathbf{e}_z$ і

$$\Gamma = \mathrm{rot}_z \mathbf{v} \delta s.$$

Похідна від циркуляції

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{rot}_z \mathbf{v}) \cdot \delta s + \mathrm{rot}_z \mathbf{v} \frac{d\delta s}{dt}. \tag{2.3}$$

Врахуємо умову нестисливості, що призводить до рівняння неперервності у вигляді

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \tag{2.4}$$

і

$$\frac{d\delta s}{dt} = \delta v_x \delta y + \delta v_y \delta x = \delta s \left( \frac{\delta v_x}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta x} \right) = \delta s \, \mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \tag{2.5}$$

---

[1] Примітка 1. Ця ідея виникла на основі порівняння з рухом планет по епіциклам і деферентам в картині світу Птолемея.

Підставляючи (2.5) в (2.3) і з урахуванням (2.2), остаточно одержуємо рівняння збереження завихренності у двовимірному випадку:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{rot}_z\,\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\triangledown). \tag{2.6}$$

Визначимо швидкість течії через функцію струму $\psi$ таким чином, щоб вона задовольняла рівнянню неперервності (2.4), тобто

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тоді

$$\mathrm{rot}_z\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_z = \triangle\psi\mathbf{e}_z.$$

Застосування другої частини субстанціональної похідної дає:

$$(\mathbf{v}\triangledown)\mathrm{rot}_z\,\mathbf{v} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \triangle\psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \triangle\psi}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z = J(\psi, \triangle\psi)\mathbf{e}_z,$$

де $J(\alpha, \beta)$ — якобіан. Підставляючи отримані вирази в (2.6), отримуємо рівняння для функції струму на площині:

$$\frac{\partial \triangle\psi}{\partial t} + J(\psi, \triangle\psi) = 0. \tag{2.7}$$

Оскільки ми розглядаємо рух вихорів в потоці, виділимо в функції струму регулярну компоненту $\psi_r$, що описує потік, і сингулярну $\psi_s$ компоненту, що описує точкові вихори

$$\psi = \psi_r + \psi_s, \qquad \psi_s = \frac{1}{2\pi}\sum_m \Gamma_m \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|, \tag{2.8}$$

де $\Gamma_m$ — інтенсивність $m$-го вихору, а $r_m$ — його радіус-вектор. На рис.2.2, як приклад, показана схема довільно розташованих двох вихорів з протилежними за знаком циркуляціями. Тут використовується рівняння Кірхгофа (див. нижче), а також підхід, розвинений Г.М.Резніком в роботі [209]. Сингулярна компонента задовольняє рівнянню Пуассона [2, 46]

$$\triangle\psi_s = \sum_m \Gamma_m \delta(x - x_m)\delta(y - y_m). \tag{2.9}$$

Підставляючи (2.8) до (2.7), отримуємо рівняння для функції струму

$$\frac{\partial \triangle\psi_r}{\partial t} + J(\psi_s + \psi_r, \triangle\psi_r) = 0, \tag{2.10}$$

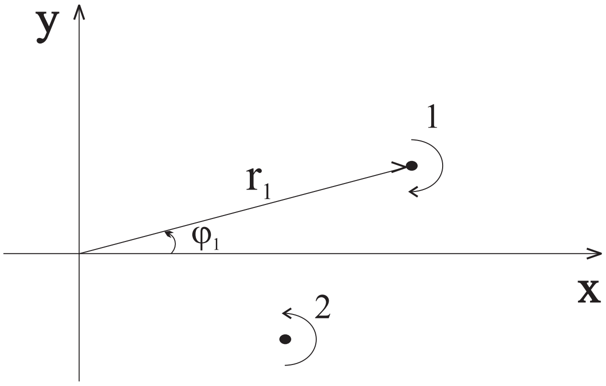


Рис. 2.2. Два точкових вихору в декартових і полярних координатах. Напрями стрілок відповідають $\Gamma_1 < 0$ , $\Gamma_2 > 0$.

і вирази для компонент швидкості $m$-го вихору (рівняння Кірхгофа для руху вихорів):

$$\dot{x}_m = - \left. \frac{\partial(\psi_r + \psi_s^m)}{\partial y} \right|_{r=r_m}, \qquad \dot{y}_m = \left. \frac{\partial(\psi_r + \psi_s^m)}{\partial x} \right|_{r=r_m}, \tag{2.11}$$

де $\psi_s^m$ — функція струму $\psi_s$ без вкладу $m$-го вихору. Виберемо регулярну компоненту $\psi_r$, що описує радіальний розбіжний потік з джерелом в початку координат [1], у вигляді

$$\psi_r = -Q\phi, \qquad Q = \mathrm{Const} > 0. \tag{2.12}$$

Тоді завихреність потоку обертається в нуль:

$$\triangle\psi_r = \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\phi^2} = 0. \tag{2.13}$$

Рівняння (2.10) задовольняється тотожно, а (2.11) дають з урахуванням (2.12):

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= - \left. \frac{\partial\psi_s^m}{\partial y} \right|_{r=r_m} + Q\frac{x_m}{r_m^2}, \\ \dot{y}_m &= - \left. \frac{\partial\psi_s^m}{\partial x} \right|_{r=r_m} + Q\frac{y_m}{r_m^2}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Рівняння (2.14) є рівняннями руху довільно розташованих вихорів в радіальному потоці з потужністю $Q$. У разі двох вихорів (рис. 2.2) рівняння (2.14)

---

[1] Примітка 1. Зауважимо, що наближення нестисливої рідини, яке використовується, відмовляє на малих відстанях від джерела (стоку) радіальної течії, які визначаються величиною швидкості звуку.

набувають вигляду

$$\dot{x}_1 = -\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_{12}}{r_{12}^2} + Q\frac{x_1}{r_1^2}, \qquad \dot{y}_1 = \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_{12}}{r_{12}^2} + Q\frac{y_1}{r_1^2}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_{12}}{r_{12}^2} + Q\frac{x_2}{r_2^2} \qquad \dot{y}_2 = -\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_{12}}{r_{12}^2} + Q\frac{y_2}{r_2^2}. \tag{2.15}$$

Тут $(x_{12}, y_{12}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, $\mathbf{r}_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Рівняння руху (2.15) описують динаміку двох вихорів з довільно заданими координатами в радіальному потоці з постійною потужністю.

## 2.2 Рівняння руху одиночного кільцевого вихору в радіальному розбіжному потоці

Для дослідження динаміки одиночного тороїдального вихору, якому у 2D описі відповідає пара точкових вихорів (рис. 2.3), необхідно задати відповідні початкові координати компонент. Нехай $\Gamma_2 = -\Gamma_1$ (вихрова пара) і вихори в початковий момент розташовані симетрично щодо осі $x$ (рис. 2.3). Тоді $x_{12} = 0$, $y_2 = -y_1$ і достатньо стежити за рухом одного з компонентів пари $y = y_1 > 0$, для якого (2.15) приводяться до вигляду:

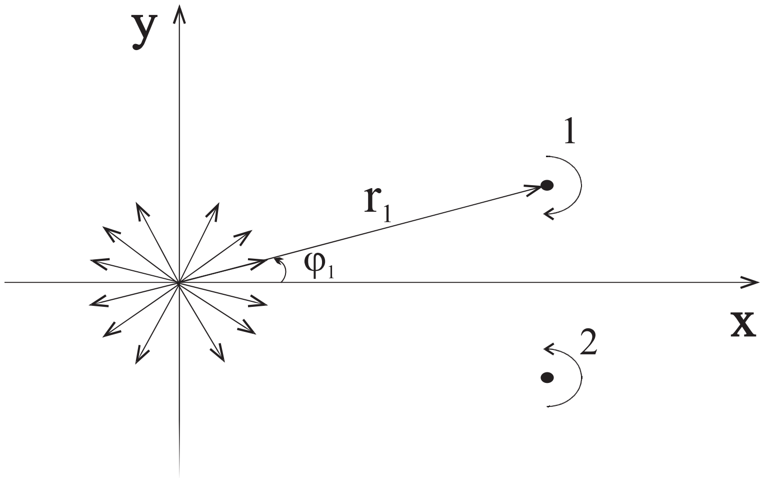


Рис. 2.3. Пара вихорів в розбіжному радіальному потоці.

$$\dot{x} = -\frac{\Gamma}{4\pi y} + Q\frac{x}{r^2}, \qquad a)$$

$$\dot{y} = Q\frac{y}{r^2}. \qquad b) \tag{2.16}$$

Тут $x = x_1 = x_2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Gamma = \Gamma_2 > 0$. Як відомо [40], за відсутності потоку така пара рухається поступально зі швидкістю $\Gamma/(4\pi y)$ в негативному напрямку осі $x$. З (2.16 b) слідує, що $\dot{y} > 0$, тобто для розбіжного потоку відстань між вихорами збільшується, а взаємодія між ними (перший член в (2.16 a) зменшується.

### *2.2.1 Гамільтонова формулювання і інтегрування рівнянь*

Можна виписати гамільтоніан $H$ для довільної системи вихорів, що задовольняє (2.14):

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{m \neq n} \Gamma_m \Gamma_n \ln r_{mn} - Q \sum_m \Gamma_m \operatorname{arcctg} \left( \frac{x_m}{y_m} \right). \tag{2.17}$$

Для цього достатньо помножити рівняння (2.14) на $\Gamma_m$ і перевірити, що

$$\dot{x}_m \frac{\partial H}{\partial x_m} + \dot{y}_m \frac{\partial H}{\partial y_m} = 0, \qquad m = 1, 2, .., \tag{2.18}$$

в силу чого

$$\Gamma_m \dot{x}_m = -\frac{\partial H}{\partial y_m}, \qquad \Gamma_m \dot{y}_m = \frac{\partial H}{\partial x_m}. \tag{2.19}$$

Вихідні рівняння для пари вихорів, що рухається симетрично щодо джерела, яке поміщено в початок координат (рівняння (2.16)), в декартових координатах приводяться до канонічної форми

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.20}$$

з гамільтоніаном $H$, який явно не залежить від часу:

$$H(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln y - Q \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}. \tag{2.21}$$

Його значення – "енергія" $E$ (перший інтеграл системи (2.16)) параметризує траєкторію пари, що може бути записано у вигляді

$$E = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln y - Q \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, \tag{2.22}$$

де фаза руху по траєкторії $\Phi \equiv \operatorname{arcctg}(x/y)$ дорівнює

$$\Phi = \frac{\Gamma}{4\pi Q} \ln y - \frac{E}{Q}. \tag{2.23}$$

У залежності від співвідношення між параметрами вихору і вітру, можливий випадок зворотного руху пари між $x_-$ і $x_+$, де

$$x_\pm = y\frac{2\pi Q}{\Gamma}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{\Gamma}{2\pi Q}\right)^2}\right). \tag{2.24}$$

У точках $x_\pm$ похідна $\dot{x}$ змінює знак. Це означає, що траєкторія руху вихору містить точки повороту. Для існування цих точок повороту повинна виконуватися нерівність

$$(2\pi Q/\Gamma)^2 \geq 0. \tag{2.25}$$

При $\Gamma > 0$ пара рухається в негативному напрямку осі $x$. Нескінченності відповідають значення фази $\Phi$, рівні

$$\begin{aligned} &\Phi = 0+, \quad \text{при} \quad x = +\infty, \\ &\Phi = \pi - 0, \quad \text{при} \quad x = -\infty. \end{aligned} \tag{2.26}$$

При $\Gamma < 0$ пара рухається в позитивному напрямку осі $x$. Аргумент котангенса лежить при цьому в інтервалі $(-\pi, 0)$ і нескінченності відповідають значення фази $\Phi$, рівні

$$\begin{aligned} &\Phi = 0-, \quad \text{при} \quad x = -\infty, \\ &\Phi = -\pi + 0, \quad \text{при} \quad x = +\infty. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Зручно розглядати рух вихорів в полярних координатах: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi = \operatorname{arcctg}(x/y)$ . У цьому випадку рівняння (2.16) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} &\dot{r} = -\frac{\Gamma}{4\pi r} + \frac{Q}{r}, \qquad a) \\ &\dot{\varphi} = \frac{\Gamma}{4\pi r^2}. \qquad\qquad b) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ці рівняння також можна записати в гамільтоновій формі

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi}, \qquad \tilde{H} = \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\xi + \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\sin^2\varphi - 2Q\varphi, \tag{2.29}$$

де $\xi = r^2$, а гамільтоніан $\tilde{H}(\xi, \varphi)$ вдвічі більший за гамільтоніан $H(x, y)$ для тієї ж системи в декартових координатах: $\tilde{H} = 2H$. Таким чином, рівняння руху Гамільтона в цих координатах набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2Q - \frac{\Gamma}{2\pi}\text{ctg}\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Gamma}{4\pi\xi}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Мінімальна відстань до центру (джерела) $r_*$ досягається при значенні полярного кута $\varphi_* = \text{arcctg}(4\pi Q/\Gamma)$. Рівняння траєкторії $r(\varphi)$, яка параметризована значенням гамільтоніана, явно розв'язується відносно відстані до центру

$$\xi(\varphi) \equiv r^2(\varphi) = \exp\left(\frac{8\pi}{\Gamma}E + \frac{8\pi Q}{\Gamma}\varphi - \ln\sin^2\varphi\right), \tag{2.31}$$

де $\tilde{E} = 2E$, а $E$ визначається формулою (2.22). Рівняння (2.28 б) з урахуванням (2.31) інтегрується в квадратурах

$$t - t_0 = \frac{4\pi}{\Gamma}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi_1 \exp(2(\mu + \lambda\varphi_1) - \ln\sin^2\varphi_1), \tag{2.32}$$

$$\text{де} \quad \mu = \frac{4\pi E}{\Gamma}, \quad \lambda = \frac{4\pi Q}{\Gamma}$$

і $t(\varphi)$ виражається через елементарні функції. Обернення цієї функції, а також визначення відстані як функції часу $r(t)$ може бути зроблено чисельно. Повертаючись до рівняння траєкторії в декартових координатах

$$x = y\,\text{ctg}\left[\frac{\Gamma}{4\pi Q}\ln y - \frac{E}{Q}\right], \tag{2.33}$$

знайдемо відстань між компонентами пари на нескінченному віддаленні від джерела. Відповідно до (2.27)

$$y_{+\infty} = \exp\left(\frac{4\pi E}{\Gamma}\right), \qquad y_{-\infty} = \exp\left(\frac{4\pi(E + \pi Q)}{\Gamma}\right). \tag{2.34}$$

Відстань між вихорами в парі збільшується після проходження області потоку в $2\exp(4\pi^2 Q/\Gamma)$ разів.

### *2.2.2 Здування компонент вихрової пари потоком*

Виберемо значення енергії так, щоб потрапити на необхідну траєкторію. Наприклад, для траєкторії зі зворотним рухом повинна виконуватися умова

(2.25). Розглядаючи (2.24) спільно з рівнянням траєкторії представимо його у вигляді

$$x_\pm = y_\pm \frac{2\pi Q}{\Gamma}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{\Gamma}{2\pi Q}\right)^2}\right), \qquad (2.35)$$

де $y_\pm$ визначимо згідно

$$y_\pm = \exp\left(\frac{4\pi}{\Gamma}(E + Q\,\mathrm{arcctg}\Psi_\pm)\right), \qquad (2.36)$$

через значення фази

$$\Psi_\pm = \frac{2\pi Q}{\Gamma}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{\Gamma}{2\pi Q}\right)^2}\right). \qquad (2.37)$$

Вибираємо відповідне значення $y_0$, що потрапляє в допустимий інтервал, який визначається граничними значеннями (2.34) і досить близьке до положення точки повороту. З рівняння траєкторії знаходимо відповідне йому значення $x_0$ і будуємо чисельно траєкторію і відповідний їй графік як $x(y)$. Звертаючи графік, знаходимо потрібну функцію $y(x)$.

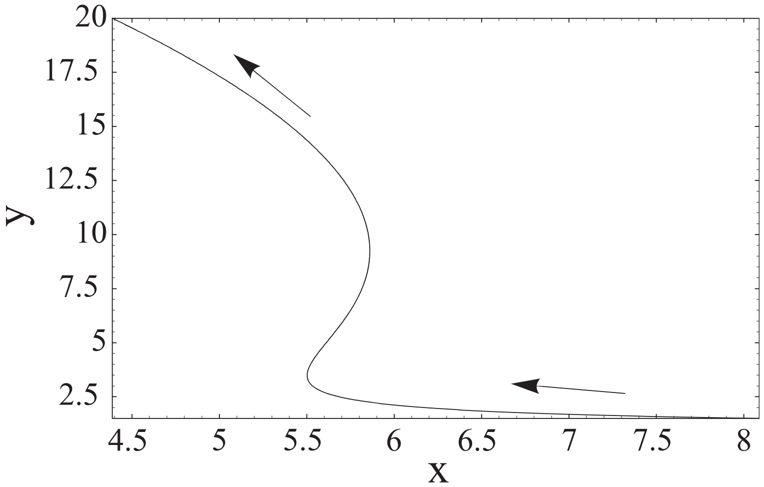


Рис. 2.4. Траєкторія вихору в області "позаднього" руху. Пара приходить справа. Обрані параметри $Q = 1$, $\Gamma = 2\pi - 0.6$, $E = 0$ відповідають траєкторії, що проходить через точку $x_0 = 6.17$, $y_0 = 2$.

З рис. 2.4 видно, що вихорова пара, яка приходить з позитивної нескінченності по $x$, в міру наближення до джерела вітру розходиться і в певній частини траєкторії при відповідних параметрах може здійснювати дійсно зворотній рух. Після чого, опинившись на досить великій відстані від джерела вітру, де вплив його слабшає, пара продовжує рух в колишньому напрямі, який

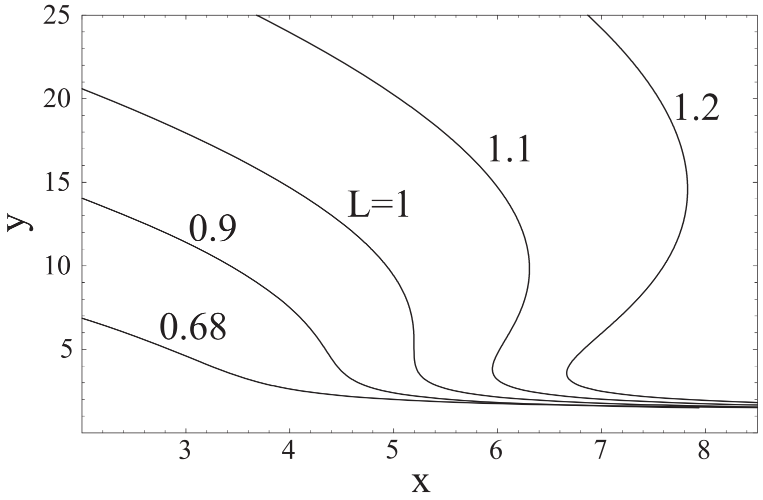


Рис. 2.5. Траєкторії вихору при різних значеннях безрозмірного параметра $L = 2\pi Q/A$ та $E = 0$. Крива, яка відповідає значенню $L = 1$, розділяє області зі зворотним рухом вихору ($L > 1$) і руху без точок повороту ($L < 1$).

визначається знаком циркуляції. Вона виходить на асимптотику на негативній нескінченності зі зміненою (збільшеною відповідно до (2.34)) відстанню між компонентами.

Можна також побудувати траєкторії вихорів в центральному потоці, чисельно розв'язуючи диференціальні рівняння пари (2.16), використовуючи згадані значення $x_0$ і $y_0$ як початкові значення. Сімейство траєкторій, що містять і не містять область зворотного руху, показано на рис.2.5.

### *2.2.3 Прискорення вихрової пари радіальним збіжним потоком*

Нехай радіальний потік є збіжним (рис. 2.6). В цьому випадку в наведе-

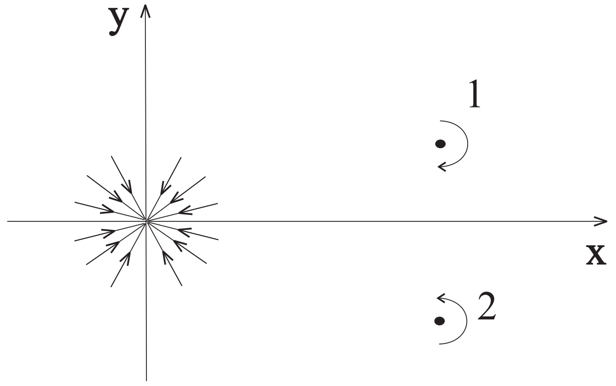


Рис. 2.6. Пара вихорів в збіжному потоці (схема в декартових осях).

них рівняннях $Q < 0$ і його зручно замінити згідно $Q = -P = \mathrm{const} < 0$. При цьому вираз для регулярної компоненти функції струму переписується у вигляді

$$\psi_r = -Q\varphi = P\varphi. \tag{2.38}$$

Тоді згідно (2.16 б) $\dot{y} < 0$ і відстань між вихорами зменшується. Відстані між компонентами пари на нескінченності відповідно до (2.26) мають вигляд

$$y_{+\infty} = \exp\left(\frac{4\pi E}{\Gamma}\right), \quad y_{-\infty} = \exp\left(\frac{4\pi(E - \pi P)}{\Gamma}\right). \tag{2.39}$$

З (2.39) слідує, що після проходження повз стоку відстань між центрами вихорів зменшується в $2\exp(4\pi^2 P/\Gamma)$ разів. Слідуючи тій же схемі, що і вище, знаходимо траєкторію руху пари.

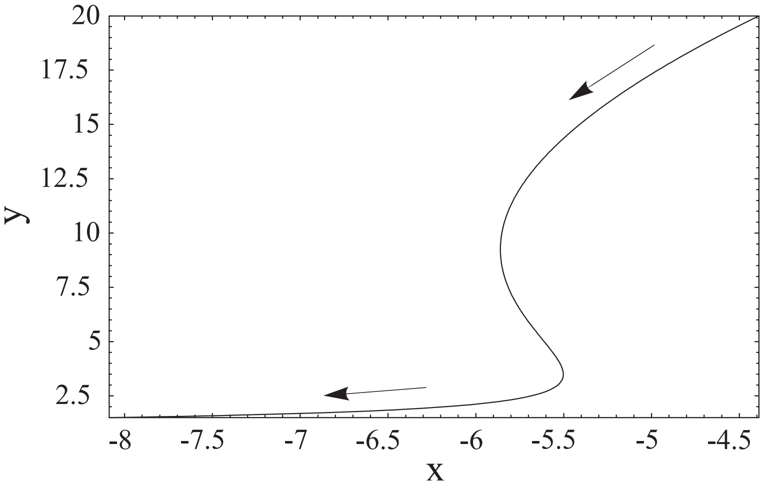


Рис. 2.7. Траєкторія вихору (компонента пари) в області "позаднього" руху. Пара приходить справа. Обрані параметри відповідають $P = -Q = 1$, $\Gamma = 2\pi - 0.6$, $E = 0$.

Видно, що відстань між компонентами пари, що приходить з нескінченності, зменшується, а в певній частині траєкторії поблизу стоку при відповідних параметрах вихори можуть здійснювати зворотний рух (рис. 2.7). При цьому, опинившись на досить близькій відстані від стоку, пара набуває додаткової швидкості завдяки зменшенню відстані між її компонентами і, пройшовши другу точку повороту, продовжує рух з більшою швидкістю в колишньому напрямі, який визначається знаком циркуляції. Пара виходить на асимптотику на негативній нескінченності зі зменшеною відстанню між компонентами і, відповідно, зі швидкістю руху, яка збільшується. У розглянутому прикладі (рис. 2.7) швидкість пари, "викинутої" з області стоку, збільшилася на три порядки. Цей результат представляє інтерес, оскільки показує, що пара вихорів може набувати значну швидкість, прискорюючись стоком, при цьому кінцева швидкість залежить від відношення потужності стоку до інтенсивності вихору. Надалі ми побачимо, що така ситуація зберігається для випадку дипольного вихору, при урахуванні тривимірного випадку і для більш складної течії.

### *2.2.4 Лагранжевій опис*

Загальний вираз для лагранжіана має вигляд: $\tilde{L} = p\dot{q} - \tilde{H}$, де узагальнений імпульс $p$ в полярних координатах є $\xi$, а узагальнена координата $q = \varphi$. Тоді $\tilde{L} = \xi\dot{\varphi} - \tilde{H}$ і, з урахуванням (2.30), з точністю до константи $\tilde{L} = -\tilde{H}$.

Гамільтоніан в полярних координатах (2.29) можна представити у вигляді $\tilde{H} = \tilde{K}(\xi) + \tilde{U}(\varphi)$, де $\varphi$, кінетична енергія $\tilde{K}(\xi) = \Gamma \ln \xi/(4\pi)$, а потенціальна $\tilde{U}(\varphi) = \Gamma \ln \sin^2 \varphi/(4\pi) - 2Q\varphi$. Тоді лагранжіан системи

$$\tilde{L}(\dot{\varphi}, \varphi) = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \dot{\varphi} - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \sin^2 \varphi + 2Q\varphi + \mathrm{const}, \tag{2.40}$$

де узагальнена швидкість $\dot{\varphi} = \Gamma/(4\pi\xi)$ обернено пропорційна імпульсу $\xi$. Рівняння траєкторії ми можемо отримати, розв'язуючи рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi}.$$

З урахуванням виразу для $\tilde{L}(\dot{\varphi}, \varphi)$, рівняння Лагранжа зводиться до

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = 2\mathrm{ctg}\varphi - \frac{8\pi}{\Gamma} Q. \tag{2.41}$$

Ми можемо також представити це рівняння у вигляді:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = F(\varphi)\dot{\varphi}, \tag{2.42}$$

де $F(\varphi) = 2\mathrm{ctg}\varphi - 8\pi Q/\Gamma$. Тоді

$$d \ln \dot{\varphi} = \int F(\varphi) d\varphi. \tag{2.43}$$

Після інтегрування одержуємо:

$$d \ln \frac{\dot{\varphi}}{C_1} = 2 \ln \sin \varphi - \frac{8\pi Q \varphi}{\Gamma}. \tag{2.44}$$

Інтегруючи ще раз, отримуємо розв'язок у вигляді

$$(t - t_0) = C \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \sin^{-2} \varphi \times \exp\left(\frac{8\pi Q \varphi}{\Gamma}\right), \tag{2.45}$$

який відповідає отриманому вище (2.32) в рамках гамільтонового підходу, де $C = 1/C_1 = 4\pi \exp(8\pi E/\Gamma)/\Gamma$.

## 2.3 Вихори одного знака в радіальному потоці

Розглянемо два вихори одного знака з рівною за величиною циркуляцією в радіальному потоці, розташованих симетрично щодо джерела (рис. 2.8).

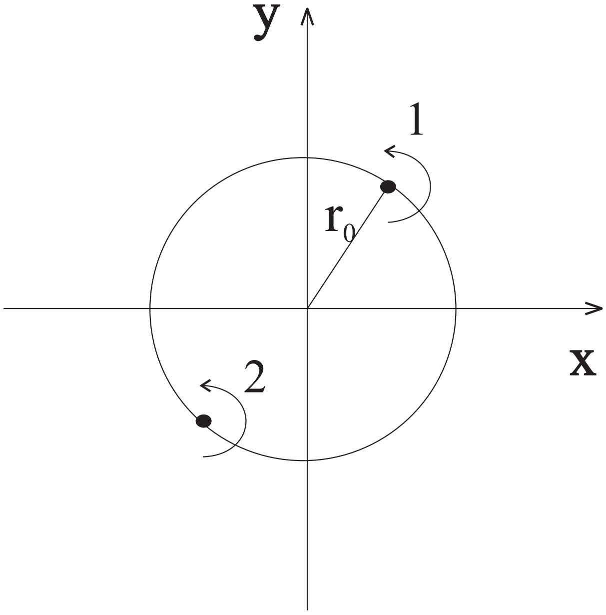


Рис. 2.8. Початковий стан для двох вихорів одного знака з $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. За відсутності потоку вихори рівномірно обертаються по колу.

Як відомо [46], за відсутності потоку відстань $2r_0$ між вихорами зберігається і вони обертаються навколо центру завихреності з кутовою швидкістю $\Gamma/(2\pi r_0^2)$. При наявності потоку рівняння руху (2.16) приймають вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{y}{r^2} + Q\frac{x}{r^2}, \qquad a) \\ \dot{y} &= \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{x}{r^2}Q\frac{y}{r^2}, \qquad b) \end{aligned} \tag{2.46}$$

де $y = y_1 = -y_2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. Із системи (2.46) отримуємо $r^2 = 2Qt + r_0^2$, тобто відстань між вихорами в розбіжному потоці лінійно зростає з часом (рис. 2.9а). Для збіжного потоку відстань між вихорами за кінцевий час $t = r_0^2/2P$ обертається в нуль (рис.2.9б). При цьому кутова швидкість обертання вихорів необмежено зростає. Для розв'язання системи (2.46) зручно ввести

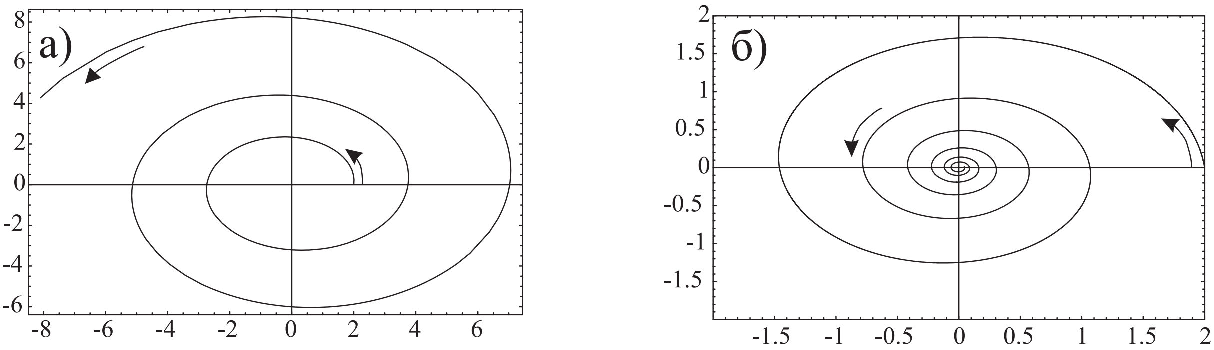


Рис. 2.9. Траєкторії руху однієї з компонент системи двох вихорів з рівними інтенсивностями $\Gamma = 4\pi$ для випадків: а) розбіжного радіального потоку $Q = 0.1$ і б) збіжного потоку з $P = -Q = 0.1$.

комплексну координату $w = x + iy$. Тоді $|w|^2 = r^2$ і (2.46) набуває вигляду

$$\frac{\dot{w}}{w} = \left(Q + \frac{\Gamma}{4\pi}i\right)\frac{1}{|w|^2} = \left(Q + \frac{\Gamma}{4\pi}i\right)(2Qt + r_0^2)^{-1}. \tag{2.47}$$

Інтегруючи рівняння (2.47), отримуємо

$$w = w_0\left(1 + \frac{2Qt}{r_0^2}\right)^{\left(1+i\frac{\Gamma}{4\pi Q}\right)/2}, \tag{2.48}$$

де $w_0$ — початкове значення комплексної координати. У граничному випадку $Q \to 0$ розв'язок описує рівномірне обертання. Для того щоб це побачити, введемо нову змінну $\eta = 2Qt/r_0^2$:

$$w^2 = w_0^2\left[(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}\right]^{i\frac{\Gamma t}{2\pi r_0^2}}. \tag{2.49}$$

Враховуючи що $\lim_{\eta\to 0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} = e$, отримуємо $w \to w_0 \exp(i\Gamma t/(2\pi r_0^2))$.

У полярних координатах цей рух виглядає особливо просто. Легко бачити, що вираз для миттєвої кутової швидкості набуває вигляду ($\tilde{H} = \Gamma \ln \xi/(4\pi) - 2Q\varphi$)

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\Gamma}{4\pi(2Qt + r_0^2)}, \tag{2.50}$$

звідки

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma}{8\pi Q}\ln\left(1 + \frac{2Q}{r_0^2}t\right) + \varphi(0), \tag{2.51}$$

тобто траєкторія являє собою логарифмічну спіраль. Граничний перехід при $Q \to 0$ стає очевидним.

## 2.4 Вихори в радіальному потоці, що обертається

Обертання потоку можна врахувати, якщо ми введемо додатковий доданок у виразі для регулярної компоненти функції струму $\psi_r = -Q\varphi + \psi_r^\Omega$, де $\psi_r^\Omega = \Omega r^2/2$ — відповідає твердотілому обертанню потоку з кутовою швидкістю $\Omega$. Тоді рівняння руху двох вихорів (2.15) в термінах комплексних координат $w = x + iy$ приймають вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - i\Omega w_1 &= \frac{i\Gamma_2}{2\pi r_{12}^2}(w_1 - w_2) + \frac{Q}{r_1^2}w_1, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - i\Omega w_2 &= -\frac{i\Gamma_2}{2\pi r_{12}^2}(w_1 - w_2) + \frac{Q}{r_1^2}w_2. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Переходячи в обертову систему координат за допомогою перетворення $w = w'e^{i\Omega t}$, і з огляду на те, що $r^2 = |w|^2 = |w'|^2$, а $r_{12}^2 = |w_1 - w_2|^2 = |w_1' - w_2'|^2$, отримуємо для $w'$ рівняння для вихорів в чисто радіальному потоці без обертання, що дозволяють використовувати отримані вище результати.

## 2.5 Дипольний тороїдальний вихор як симетрична система з чотирьох вихорів

В даному розділі розглянуто додатковий механізм формування викидів за рахунок кінематики взаємодії вихорів, що не вимагає впливу магнітного поля. Істотну роль в цьому процесі відіграє радіальний потік, здатний впливати на швидкість викиду. При цьому, великі швидкості компонент, які викидаються, як це не парадоксально на перший погляд, набуваються в збіжному потоці. Роль такого потоку в АЯГ може відігравати акреційний диск. Формування вихрових особливостей в диску може бути наслідком наявності вітрів, що діють у двох протилежних полярних напрямках і здатних привести до додаткової підкрутки речовини в акреційному потоці [6, 83]. Як результат, можливе формування дипольного тороїдального вихору [83], рух якого, в найпростішому вигляді, можна представити як рух двох протилежно обертових кільцевих вихорів в радіальному потоці. За відсутності потоку ця задача нагадує класичну задачу Гельмгольця [40] про взаємодію кільцевого вихору зі стінкою, паралельною площині, в якій лежить вихор. Стінка може бути замінена дзеркальним зображенням вихору, і задача зводиться до взаємодії протилежно обертових вихрових кілець. Однак в нашому випадку напрямок обертання протилежний тому, який відповідає наближенню вихору до стінки, і який розглядалося Гельмгольцем. (Наш варіант відповідав би віддаленню вихору від стінки.)

### 2.5.1 Симетрична система з чотирьох вихорів: постановка задачі

Розглянемо спочатку систему чотирьох вихорів, розташованих довільно щодо центру радіального потоку (рис.2.10).

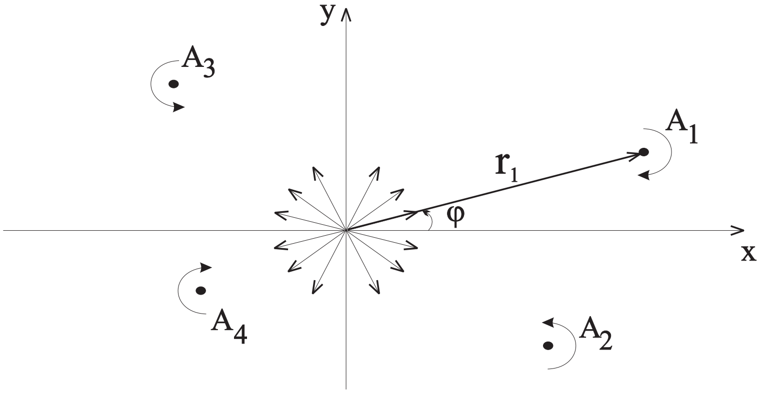


Рис. 2.10. Приклад розташування чотирьох вихорів в радіальному потоці з джерелом або стоком на початку координат. Тут $A \equiv \Gamma$.

Сингулярна компонента функції струму одного (1-го) з системи чотирьох вихорів, що рухається під впливом потоку та інших вихорів, з урахуванням формули (2.6), має вигляд

$$\psi_s^1 = \frac{1}{2\pi}\left[\Gamma_2 \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| + \Gamma_3 \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3| + \Gamma_4 \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}_4|\right], \tag{2.53}$$

що, з урахуванням (2.14), призводить до наступних рівнянь руху для 1-го вихору

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{2\pi}\left[\Gamma_2\frac{y_{12}}{r_{12}^2} + \Gamma_3\frac{y_{13}}{r_{13}^2} + \Gamma_4\frac{y_{14}}{r_{14}^2} + Q\frac{x_1}{r_1^2}\right], \\ \dot{y}_1 &= -\frac{1}{2\pi}\left[\Gamma_2\frac{x_{12}}{r_{12}^2} + \Gamma_3\frac{x_{13}}{r_{13}^2} + \Gamma_4\frac{x_{14}}{r_{14}^2} + Q\frac{y_1}{r_1^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Рівняння для інших вихорів виглядають аналогічно.

У випадку, що нас цікавить, чотирьох вихорів в потоці, що утворюють дві симетричні вихрові пари (рис. 2.11), які імітують рух дипольного тороїдаль-

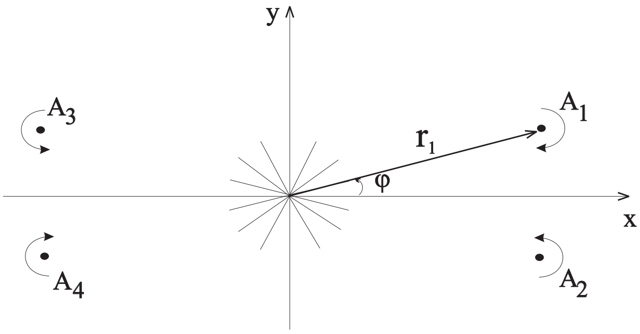


Рис. 2.11. Схема розташування чотирьох вихорів в радіальному потоці — симетричний випадок.

ного вихору, виконуються умови симетрії:

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma_3 = \Gamma_2 = -\Gamma_1 = -\Gamma_4, \\ |\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_3| = |\mathbf{r}_4| = |\mathbf{r}|. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Таку задачу можна розглядати як задачу про лобове зіткнення еквівалентних вихрових пар при врахуванні впливу потоку. За відсутності потоку розв'язок цієї задачі добре відомий: вихори весь час залишаються в вершинах прямокутника, сторони якого змінюються з часом, розлітаючись, зрештою, під прямим кутом до напрямку первинного руху. В результаті зіткнення пари "обмінюються" партнерами. Їх швидкість на вильоті за відсутності потоку дорівнює швидкості на вльоті, так само як і відстані між компонентами пар [40, 151].

Повернемося тепер до задачі про вплив потоку на їх рух. Досить розглянути рівняння руху тільки одного з чотирьох вихорів, що рухається під впливом трьох інших вихорів і потоку, які, після урахування (2.55), зводяться до

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = -\frac{\Gamma}{4\pi y}\frac{x^2}{r^2} + Q\frac{x}{r^2}, \\ \dot{y}_1 = \frac{\Gamma}{4\pi x}\frac{y^2}{r^2} + Q\frac{y}{r^2}\ . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Ці рівняння мають гамільтонову структуру (2.14) з гамільтоніаном

$$H = \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{xy}{r} - Q\cdot\mathrm{arcctg}\frac{y}{x}, \tag{2.57}$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — відстань від джерела, розташованого на початку координат, до центру вихору. Власне значення гамільтоніана ("енергію вихору") позначимо через $E$. У розбіжному потоці ($Q > 0$) згідно (2.56) $\dot{y} > 0$ — вихори, що становлять пару, віддаляються один від одного. По координаті $x$ є одна точка повороту. Після її проходження характер руху істотно змінюється — відбувається обмін компонентами пар, які стикаються. Траєкторія виходить на вертикальну асимптоту, яка відповідає координаті $x_\infty$. Це половинна відстань між новими партнерами в парі на великій відстані від центру. Новій відстані між компонентами відповідає нове значення швидкості пари. В даному випадку розбіжного потоку воно зменшується. Як і в попередньому розділі, зручно розглянути ці зміни в полярних координатах.

### *2.5.2 Система з чотирьох вихорів в "полярних" канонічних змінних*

Як і в попередньому розділі, рух зручно розглядати в канонічно пов'язаних "полярних" координатах $\varphi$ і $\xi \equiv r^2$, де $\varphi$ — полярний кут, а $r$ — відстань до центру. У них рівняння мають вигляд:

$$\dot{\xi} = -\frac{\Gamma}{\pi}\cot 2\varphi + 2Q\ , \qquad \dot{\varphi} = \frac{\Gamma}{4\pi\xi}\ . \tag{2.58}$$

Гамільтоніан в полярних координатах дорівнює

$$\tilde{H} = \frac{\Gamma}{4\pi}\ln(\xi\sin^2 2\varphi) - 2Q\varphi, \tag{2.59}$$

Видно, що задовольняється співвідношення $\tilde{H} = 2H$, де $H$ — гамільтоніан (2.57) в прямокутній системі координат [84]. Рівняння траєкторії вихору, параметризовано енергією $E$, розв'язується відносно $r$:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sin 2\varphi}\exp\left\{\frac{4\pi}{\Gamma}(E + Q\varphi)\right\}. \tag{2.60}$$

При $\varphi$, який прагне до нуля або $\pi/2$, $r$ прямує до нескінченності. Це відповідає приходу вихору в складі пари з нескінченно віддаленої точки по $x$ і розсіювання його вже в складі іншої пари із заміненим партнером уздовж осі $y$. При цьому параметром вихору, який приходить з нескінченності, є його циркуляція $\Gamma$ і координата горизонтальної асимптоти (половина відстані між компонентами пари), які визначають його "початкову" швидкість. Відповідно, для вихору, що минає уздовж осі $y$ після розсіювання з "перезарядженням" обчислюваним параметром є положення асимптоти $v_\infty$, яка визначає швидкість пари на нескінченності. (Циркуляція вихору в даній бездисипативній моделі не змінюється). У термінах кілець (або тонких торів) цей рух відповідає спочатку стисненню тора уздовж великої осі в основному за рахунок впливу другого тора, що входить в дипольний вихор, а після точки повороту — руху в основному ізольованого вихрового кільця. Друге кільце рухається дзеркально симетрично. Вирази для асимптот мають вигляд

$$y_\infty = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{4\pi E}{\Gamma}\right) \ , \quad x_\infty = y_\infty \exp\left(\frac{2\pi^2 Q}{\Gamma}\right). \tag{2.61}$$

На рис. 2.12 показані траєкторії 1-го і 3-го вихорів, що рухаються симетрично щодо осі $x$. Видно, що точка повороту по $x$, якій відповідає кут

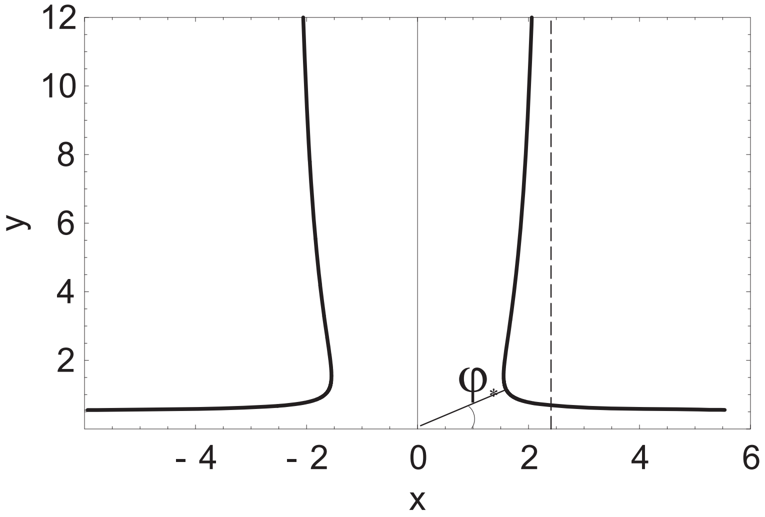


Рис. 2.12. Траєкторії 1-го і 3-го вихорів в розбіжному потоці для наступних параметрів: $\Gamma = 4\pi$, $Q = 1$, $E = 0$. Пунктиром позначена асимптота $x = x_\infty$.

$$\varphi_* = \arctan(4\pi\mathrm{Q}/\Gamma). \tag{2.62}$$

Підставляючи $\varphi_*$ в рівняння (2.60) і переходячи до декартових координатах, отримуємо координати точки повороту:

$$x_* = \frac{1}{2}\sqrt{1+q^2}\exp\left(\frac{4\pi E}{\Gamma} + q\varphi_*\right), \quad y_* = \frac{x_*}{q}, \tag{2.63}$$

де $q = 4\pi Q/\Gamma$. При $q \to 0 \quad x_* \to y_\infty$, $y_* \to \infty$ — точка повороту прагне до кута $\pi/2$. Інтегруючи рівняння руху (2.60), отримуємо неявний вираз для закону руху

$$t - t_0 = \frac{4\pi}{\Gamma}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi_1}{\sin^2 2\varphi_1}\exp\left\{\frac{8\pi}{\Gamma}(E + Q\varphi_1)\right\}. \tag{2.64}$$

Час проходження вихору до точки повороту отримується звідси підстановкою $\varphi = \varphi_*$.

### *2.5.3 Рух в збіжному радіальному потоці*

У збіжному потоці ($P = -Q > 0$) розгляд аналогічний. Для першого вихору:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\Gamma}{4\pi y}\frac{x^2}{r^2} - P\frac{x}{r^2}, \\ \dot{y}_1 &= \frac{\Gamma}{4\pi x}\frac{y^2}{r^2} - P\frac{y}{r^2} \ . \end{aligned} \tag{2.65}$$

В цьому випадку $\dot{x} < 0$, що відповідає монотонному зближенню пар, а єдина точка повороту є тепер по координаті $y$:

$$\varphi_* = \arctan(4\pi P/\Gamma). \tag{2.66}$$

Координати точки повороту в збіжному потоці:

$$x_* = \frac{1}{2p}\sqrt{1+p^2} \cdot \exp\left(\frac{4\pi E}{A} + p\varphi_*\right), \quad y_* = p \cdot x_*, \tag{2.67}$$

де $p = 4\pi P/\Gamma$. При $p \to 0 \quad x_* \to \infty$, $y_* \to y_\infty$, що відповідає $\varphi_* \to 0$.

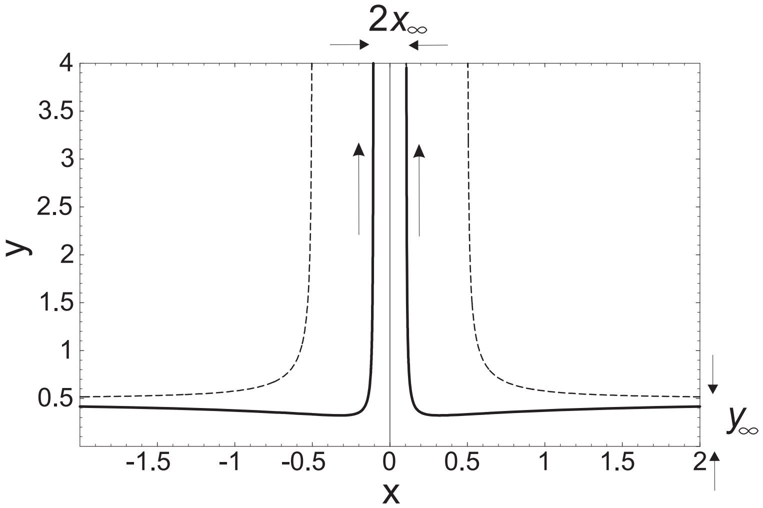


Рис. 2.13. Траєкторії 1-го і 3-го вихорів в збіжному потоці ($P = -Q > 0$). Стрілки вказують напрямок руху. Є точка повороту по $y$, якій відповідає кут $\varphi_* = \arctan(4\pi P/\Gamma)$. Для порівняння наведено траєкторії цих же вихорів за відсутності потоку ($P = 0$) — пунктирна крива [40].

Величина відношення відстаней між компонентами вихорів на виході і вході зменшується експоненціально по параметру, що визначається відношенням потужності збіжного потоку до інтенсивності вихорів

$$\frac{y_\infty}{x_\infty} = \exp\left(\frac{2\pi^2 P}{\Gamma}\right), \tag{2.68}$$

де $2y_\infty$ — відстань між компонентами вихрової пари на "вході" , а $2x_\infty$ — на "виході" (рис. 2.13). При цьому експоненціально по тому ж параметру зростає швидкість вихрових пар, які викидаються, по відношенню до значення їх швидкості на "вході":

$$\frac{V_y^\infty}{V_x^\infty} = \exp\left(\frac{2\pi^2 P}{\Gamma}\right). \tag{2.69}$$

Руху пар в бік центру на початковому етапі еволюції відповідає стиснення вихрових кілець в результаті їх взаємодії, супутньої дипольної конфігурації (див. рис.2.14).

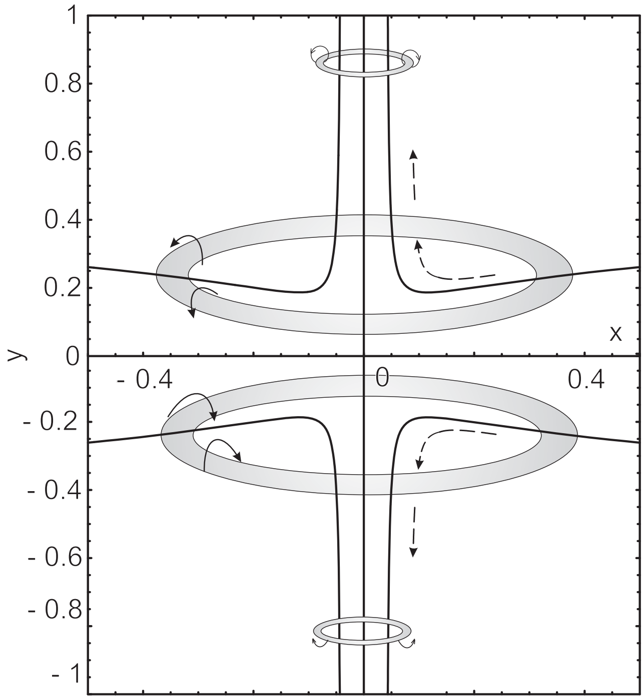


Рис. 2.14. Траєкторії всіх чотирьох компонентів вихрових пар в збіжному потоці. Їх руху відповідає стиснення і викид вихрових кілець, що утворюють дипольну структуру.

В результаті "зіткнення" пар відбувається обмін партнерами. Рух нових пар в напрямку, ортогональному початковому руху, відповідає власному руху стиснених під час попередньої фази кілець, взаємодією яких вже можна знехтувати.

## 2.6 Динаміка вихорів в потоці з особливістю: постановка задачі

Розглянемо рух системи точкових вихорів на фоні течії [210], викликаної нерухомою точковою особливістю, яка поміщена на початку координат.

$$w_r = C_0 \ln z + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + ... \, . \tag{2.70}$$

Обмежимося випадком фонового потоку, симетричного відносно осі $Ox$. Тоді всі коефіцієнти $C_k$ ряду (2.70) потрібно вважати дійсними, оскільки вісь $Ox$ повинна бути лінією струму. Представляючи комплексний потенціал через звичайний потенціал швидкості $\varphi$ і функцію струму $\psi$ у вигляді

$$w_r = \varphi_r + i\psi_r, \tag{2.71}$$

в полярних координатах $(r,\, \theta)$, таких що $z = r \exp i\theta$, для функції струму отримуємо вираз

$$\psi_r = C_0\theta - \frac{C_1}{r}\sin\theta - \frac{C_2}{r^2}\sin 2\theta - ... \, . \tag{2.72}$$

Радіальна та азимутальна компоненти швидкості фонового потоку визначаються умовами

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}, \quad V_\theta = -\frac{\partial\psi_r}{\partial r}. \tag{2.73}$$

Зауважимо, що комплексний потенціал виду (2.70) дозволяє отримати на деякій окружності $z = R$ довільний (в даному випадку — симетричний відносно осі $Ox$) розподіл радіальної складової швидкості:

$$V_r(R,\theta) = f(\theta), \qquad \theta \in [0;\pi]. \tag{2.74}$$

Дійсно, з (2.72) — (2.74) слідує

$$f(\theta) = \frac{C_0}{R} - \frac{C_1}{R^2}\cos\theta - \frac{2C_2}{R^3}\cos 2\theta - ... \, , \tag{2.75}$$

тобто $C_k$ можуть бути знайдені за коефіцієнтами ряду Фур'є функції $f(\theta)$:

$$C_0 = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)d\theta, \quad C_k = -\frac{2R^{k+1}}{\pi k}\int_0^\pi f(\theta)\cos k\theta d\theta \quad k = 0, 1, 2... \, . \tag{2.76}$$

Таким чином, поєднуючи на початку координат джерело, диполь, квадруполь та ін. з інтенсивностями $C_0$, $C_1$, $C_2$, ..., можна отримати заданий розподіл радіальної складової швидкості на колі $z = R$. Це дозволяє у зовнішній області кільця описати течію с довільним розподілом радіальної швидкості, в тому числі комбінацію вітру та акреції, типових для АЯГ [1].

Надалі окремо буде вивчений випадок, коли у фоновому потоці є дві осі симетрії: $Ox$ і $Oy$. Тоді слід покласти $C_{2k+1} = 0$ $(k = 0, 1, 2, ...)$. Функція струму в цьому випадку має вигляд

$$\psi_r = C_0\theta - \frac{C_2}{r^2}\sin 2\theta - \frac{C_4}{r^4}\sin 4\theta - ... \ , \qquad (2.77)$$

і довільний розподіл радіальної фонової швидкості $V_r$ може бути "створено" в першому квадранті $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ на дузі кола $z = R$ за допомогою відповідного вибору коефіцієнтів $C_0$, $C_2$, $C_4$,... .

### *2.6.1 Особливість диполь + квадруполь*

Динаміка вихрової пари в радіальному потоці від нерухомого точкового джерела (стоку), розташованого на осі пари, вивчена в [84] і детально розглянута в попередніх розділах. Розглянемо подібну задачу в разі особливості типу "диполь + квадруполь" (рис.2.15).

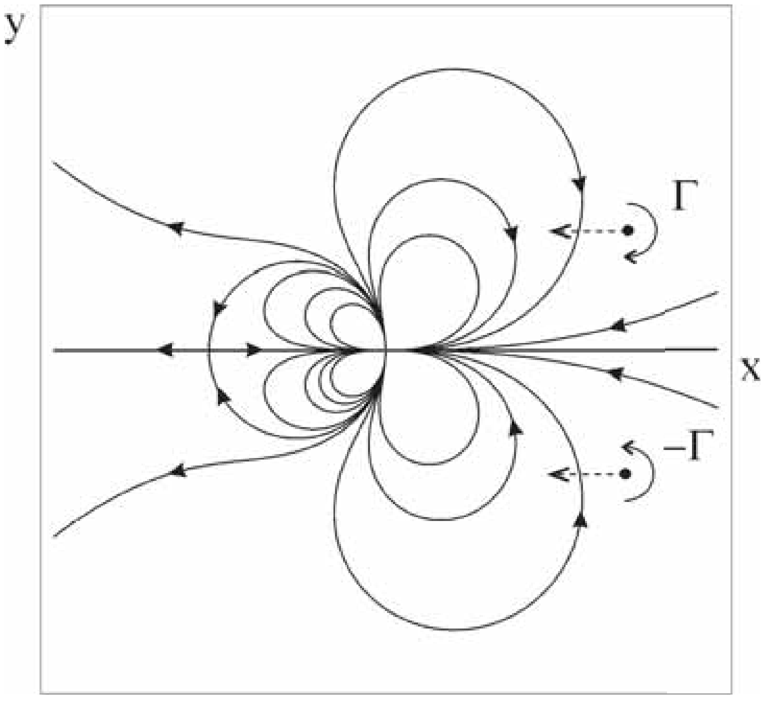


Рис. 2.15. Схема руху пари вихорів в потоці "диполь + квадруполь".

---

[1] Примітка 1. Усередині кільця досить малого радіуса пропонований опис стає непридатним, тому що швидкості там можуть стати надзвуковими і наближення нестисливої рідини втрачає сенс. Крім того, у випадку АЯГ в цій області можуть грати головну роль ефекти гравітації, в'язкості, випромінювання та ін. Тому траєкторії вихорів не повинні наближатися занадто близько до центру системи.

Функція струму для течії від такої особливості має вигляд

$$\psi_r = -\frac{C_1}{r}\sin\theta - \frac{C_2}{r^2}\sin 2\theta = -\frac{C_1 y}{x^2+y^2} - \frac{2C_2xy}{(x^2+y^2)^2}. \tag{2.78}$$

Якщо вихори — компоненти пари розташовані симетрично щодо осі $Ox$ в точках $(x,\, y)$ і $(x,\, -y)$, то власна (обумовлена взаємодією вихорів в парі і не пов'язана з наявністю фонового потоку) швидкість кожного з них є

$$\mathbf{V}_s = (\Gamma/(4\pi y), 0), \tag{2.79}$$

де $\Gamma$ — інтенсивність вихору з верхньої півплощини, $y$ — його ордината. Тоді динаміка даної пари вихорів описується рівняннями

$$\dot{x} = \frac{\Gamma}{4\pi y} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial \psi_r}{\partial x}. \tag{2.80}$$

Як випливає ще з робіт Гельмгольца, сам на себе точковий вихор не діє. Детальний аналіз можна знайти у Сеффмена [54]. В той самий час усуненню особливості на осі вихору відповідають прості та фізично очевидні способи регуляризації: усереднення по нескінченно малому колу, яке оточує особливість, перехід від рівнянь зі зникаюче малою в'язкістю (див., наприклад, розв'язок для вихору, наведений в [22]).

Рівняння (2.80) можуть бути записані в гамільтоновій формі:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H = \frac{\Gamma}{4\pi}\ln y - \frac{C_1 y}{x^2+y^2} - \frac{2C_2xy}{(x^2+y^2)^2}. \tag{2.81}$$

У «квазіполярних» координатах $\xi = x^2 + y^2$, $\theta = \operatorname{arcctg}(x/y)$ гамільтоновість рівнянь зберігається:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H_p}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = -\frac{\partial H_p}{\partial \xi}, \quad H_p = 2H = \frac{\Gamma}{8\pi}\ln(\xi\cdot\sin^2\theta) - C_1\frac{\sin\theta}{\sqrt{\xi}} - C_2\frac{\sin 2\theta}{\xi}. \tag{2.82}$$

Оскільки гамільтоніан $H$ явно не залежить від часу, то його лінії рівня $H = E = \mathrm{const}$ збігаються з траєкторіями можливих рухів компоненти вихрової пари, що знаходиться у верхній координатній півплощині (траєкторії другого вихору симетричні траєкторіям першого щодо осі $Ox$). Фазовий портрет даної системи (рис. 2.16) має особливу точку типу "сідло". Її координати $(\xi_*, \theta_*)$

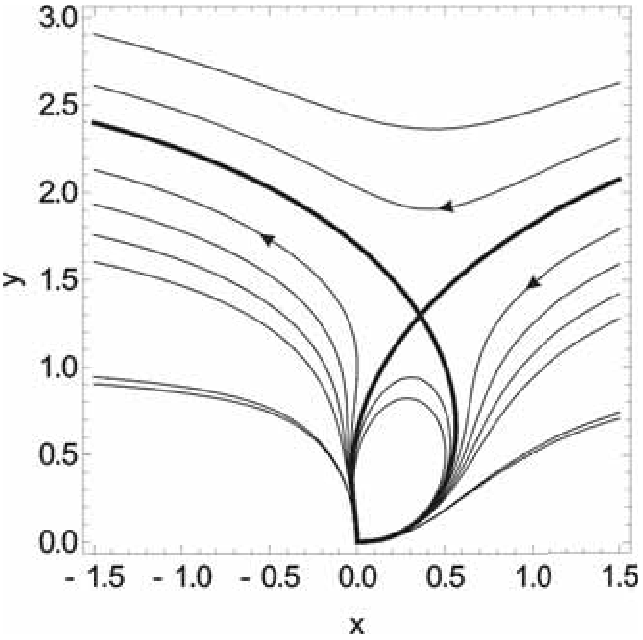


Рис. 2.16. Фазовий портрет у верхній півплощині пари вихорів в потоці "диполь + квадруполь" $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $\Gamma = -4\pi$. Жирною лінією виділена сепаратриса.

визначаються умовами $\dot{\xi} = 0$ і $\dot{\theta} = 0$, або

$$\begin{gathered} \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{ctg}\theta_* - 2C_1\frac{\cos\theta_*}{\sqrt{\xi_*}} - 2C_2\frac{\cos 2\theta_*}{\xi_*} = 0 \ , \\ \frac{\Gamma}{4\pi\xi_*} + C_1\frac{\sin\theta_*}{\xi_*^{3/2}} + 2C_2\frac{\sin 2\theta_*}{\xi_*^2} = 0. \end{gathered} \tag{2.83}$$

Детальний аналіз фазового портрету (особливі точки, сепаратриси) наведено в статті [203]. Остаточний висновок може бути сформульовани таким чином. Якщо вихорова пара знаходиться в потоці від нерухомої точкової особливості "диполь + квадруполь" , і має спільну з нею вісь симетрії $Ox$, то існує тільки одне, причому нестійке, положення рівноваги цієї пари. Квазіполярні координати точки спокою ($\xi_*$, $\theta_*$) вихору — компонента пари, що знаходиться у верхній півплощині, визначаються з системи (2.83). В окремому випадку диполя ($C_2 = 0$) точка спокою потрапляє на вісь $Oy$ ($\theta_* = \pi/2$) (рис. 2.17). У разі квадруполя ($C_1 = 0$) отримуємо $\theta_* = \pi/3$ (якщо $\Gamma C_2 < 0$) або $\theta_* = 2\pi/3$ (якщо $\Gamma C_2 > 0$).

Сепаратрисні траєкторії, що проходять через точку спокою і початок координат, розбивають координатну площину на області, що відповідають трьом можливим типам руху:

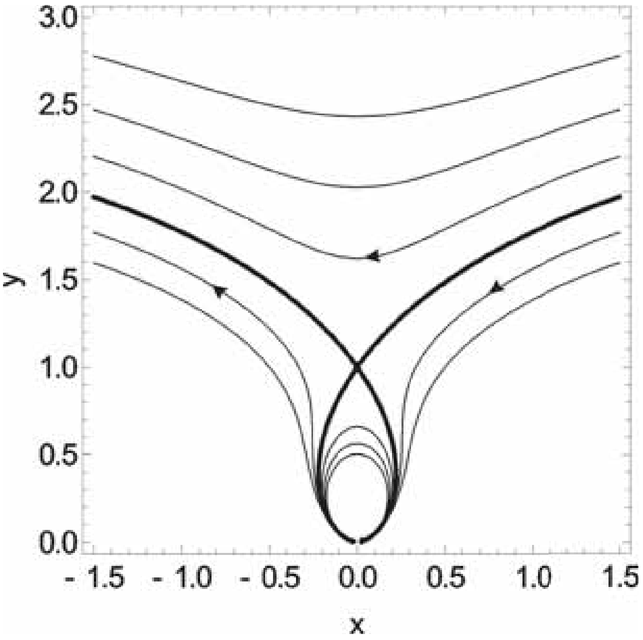


Рис. 2.17. Фазовий портрет у верхній півплощині пари вихорів в дипольному потоці $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, $\Gamma = -4\pi$. Жирною лінією виділена сепаратриса.

необмеженому руху, коли вихори приходять з нескінченності та знову йдуть до нескінченності вздовж осі $Ox$;

напівобмеженого руху, коли вихорова пара, яка приходить з нескінченності (що йде на нескінченність), поглинається (викидається) точковою особливістю в початку координат;

обмеженому руху, що починається і закінчується в особливій точці.

### *2.6.2 Особливість джерело + квадруполь + ...*

Розглянемо динаміку системи двох вихрових пар в потоці від нерухомої точкової особливості за умови наявності двох осей симетрії (рис. 2.18). Цей випадок може трактуватися також як рух точкового вихору всередині прямого кута (сторони якого є непроникними "стінками"), у вершині якого знаходиться зазначена гідродинамічна особливість. Функція струму для течії від особливості (розміщеній на початку координат) представляється у вигляді (2.77), а гамільтоніан системи вихорів — у вигляді

$$H = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_0 \operatorname{arcctg}\frac{y}{x} - C_2 \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \dots \,, \qquad (2.84)$$

де $\Gamma$ і $(x,\, y)$ — це інтенсивність і координати вихору, що знаходиться в першому квадранті. Як і раніше, рівняння $H = E = \text{const}$ визначає траєкторії

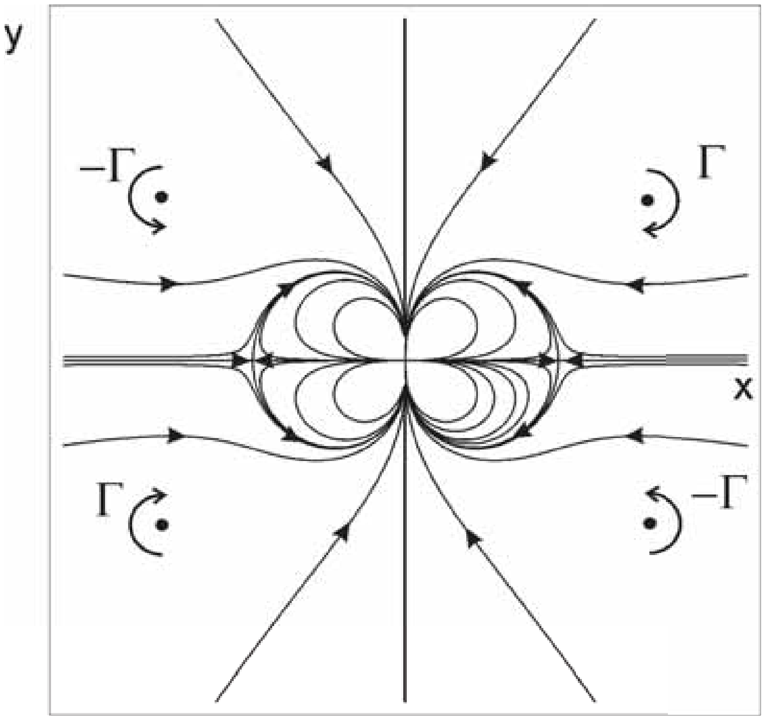


Рис. 2.18. Схема руху двох вихрових пар в потоці "стік + квадруполь".

вихорів. Причому, якщо рух необмежено, то вихрові пари приходять з нескінченності уздовж однієї осі, обмінюються компонентами і йдуть вздовж іншої осі знову на нескінченність. Для асимптотичних значень $x_\infty$ і $y_\infty$ координат вихору, що рухається в першому квадранті, маємо співвідношення

$$x_\infty = y_\infty \exp(-2\pi^2 C_0/\Gamma), \tag{2.85}$$

що збігається з результатом для чисто радіального потоку (див. попередні розділи та в [84, 82]) .

Таким чином, отримано важливий висновок про те, що співвідношення $y_\infty/x_\infty$ граничних відстаней між елементами вихрових пар на нескінченності визначається тільки інтенсивністю $C_0$ джерела (стоку) і не залежить від мультипольних складових нерухомої особливості, розташованої на початку координат. Оскільки швидкість поступального руху пари вихорів обернено пропорційна відстані між ними, то для відношення асимптотичних значень швидкості пар, які приходять з нескінченності $V_-$ і йдуть на нескінченність $V_+$, отримуємо значення

$$V_-/V_+ = \exp(-2\pi^2 C_0/\Gamma). \tag{2.86}$$

Очевидно, що від джерела ($C_0 > 0$) вихрові пари йдуть з меншою швидкістю, а від стоку ($C_0 < 0$) — з більшою швидкістю, ніж приходять ($\Gamma < 0$). Таким чином, отримані розв'язки підтверджують основний результат [84, 82] про прискорення викидів акреційним потоком для загального випадку симетричної течії.

Якщо мультипольні складові в особливості відсутні ($C_2 = C_4 = ... = 0$, чисто радіальний потік), то в полярних координатах рівняння траєкторії вихору виписується в явній формі та збігається з отриманим в [84])

$$r = \frac{2}{\sin 2\theta} \exp \frac{4\pi(E - C_0\theta)}{\Gamma}. \tag{2.87}$$

Якщо $C_2 \neq 0$, а всі інші мультипольні поправки дорівнюють нулю (випадок особливості "джерело + квадруполь"), то за умови $\Gamma_2 < 0$ розглянута система має одне нестійке положення рівноваги (рис. 2.19).

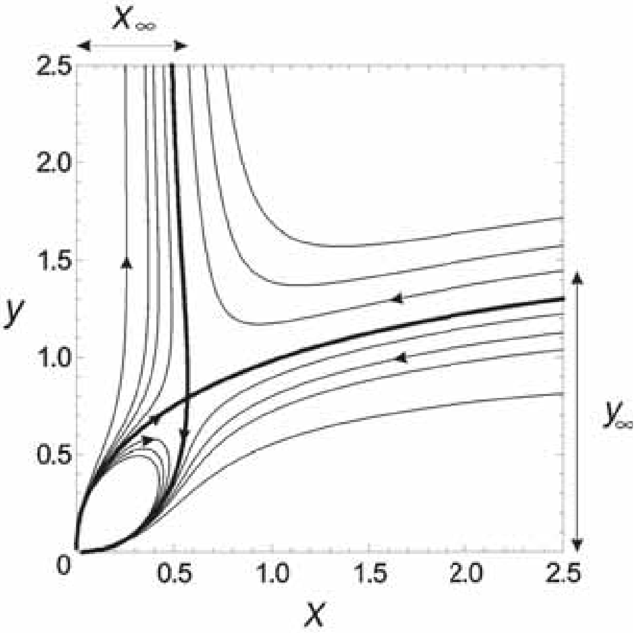


Рис. 2.19. Фазовий портрет в першому квадранті для чотирьох вихорів в потоці "стік + квадруполь" $C_0 = -1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $\Gamma = -4\pi$. Жирна лінія — сепаратриса.

Квазіполярні координати точки спокою в першому квадранті визначаються з системи, аналогічної (2.83):

$$\frac{\Gamma}{\pi}\mathrm{ctg}2\theta_* + 2C_0 - 4C_2\frac{\cos 2\theta_*}{\xi_*} = 0, \qquad \frac{\Gamma}{4\pi\xi_*} + 2C_2\frac{\sin 2\theta_*}{\xi_*^2} = 0. \tag{2.88}$$

Розв'язок даної системи має вигляд

$$\xi_* = \frac{24\pi C_2 \mathrm{sign}\Gamma}{\sqrt{9\Gamma^2 + 16\pi^2 C_0^2}}, \qquad \theta_* = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{3\Gamma}{4\pi C_0}\right). \tag{2.89}$$

### 2.6.3 *Диполь, вісь якого є віссю симетрії течії*

У разі руху двох вихрових пар в потоці від диполя потужності $C_1$ з віссю симетрії $Oy$ (цьому відповідає заміна $C_1 \to iC_1$ в (2.75)) рівняння динаміки вихорів можна виразити через координати двох вихорів у вигляді

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad \dot{y}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}. \tag{2.90}$$

$$H = \frac{C_1 x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{C_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right) -$$
$$-\frac{\Gamma}{4\pi} \ln\left((x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln x_1 + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln x_2 \, .$$

Вихор, що переміщається в першому квадранті (2.20), має інтенсивність Γ і координати $(x_1,\, y_1)$, а вихор в четвертому квадранті — інтенсивність $(-\Gamma)$ і координати $(x_2,\, y_2)$.

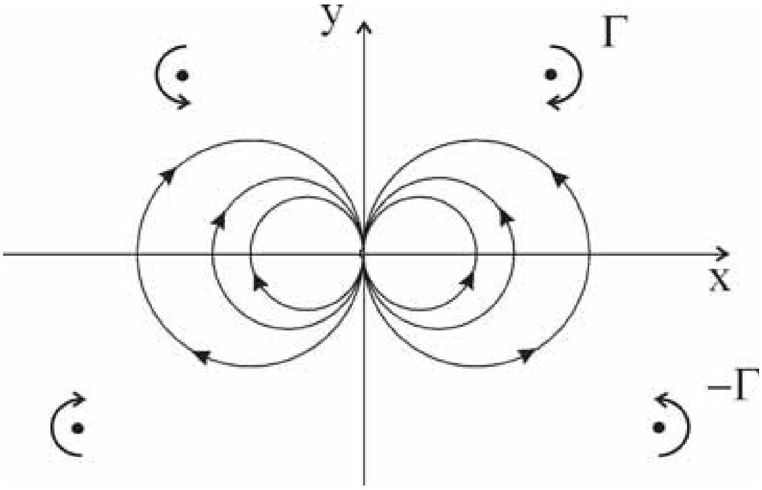


Рис. 2.20. Схема руху чотирьох вихорів в дипольному потоці з віссю симетрії $Oy$.

Вихори, що знаходяться в лівій півплощині, мають параметри $(-\Gamma)$, $(-x_1,$ $y_1\ )$ і Γ, $(-x_2,\, y_2\ )$. Відзначимо, що в наведеному записі канонічних рівнянь спряжені змінні $x_2$ і $y_2$ помінялися ролями в порівнянні з парою $x_1$, $y_1$: роль "узагальненого імпульсу" виконує координата $x_2$.

З першого інтеграла $H = E = \mathrm{const}$ неважко отримати зв'язок між асимптотичними значеннями $y_\infty$, $x_{1\infty}$, $x_{2\infty}$ половини відстаней між елементами вихрових пар, які приходять з нескінченності уздовж осі $Ox$ $(y_\infty)$ і йдуть на нескінченність вздовж осі $Oy$ $(x_{1\infty}$ і $x_{2\infty})$:

$$x_{1\infty} x_{2\infty} = y_\infty^2. \tag{2.91}$$

(Потужність диполя входить неявно через відмінність асимптотик $x_{1\infty}$ і $x_{2\infty}$). При наявності в початку координат джерела (стоку) потужності $C_0$ зазначений зв'язок набуває вигляду

$$x_{1\infty}x_{2\infty} = y_\infty^2 \exp\left(-\frac{4\pi^2 C_0}{\Gamma}\right). \tag{2.92}$$

Зауважимо, що співвідношення (2.92) залишається справедливим і в тому випадку, якщо в початку координат є мультиполі більш високих порядків. Дипольна течія вносить асиметрію в рух, і викинутим в протилежних напрямках кільцевим вихорам різного радіусу відповідають різні швидкості.

## 2.7 Застосування до астрофізичних об'єктів

Як вже було зазначено раніше, в АЯГ спостерігаються спалахи, що супроводжуються викидами окремих компонент джетів. Деякі з них демонструють релятивістський рух, який виявляється у вигляді так званих надсвітлових джерел. У мікроквазарів, поряд з надсвітловими, спостерігаються і нерелятивістські компоненти. Лише на досить великій відстані від центру окремі компоненти, мабуть, зливаються в безперервний струмінь. В рамках розглянутої задачі викид окремих компонент уздовж осі АЯГ може бути пов'язаний з формуванням дипольних вихорів в акреційному потоці [83]. При цьому спільна роль вітру і аккерції, діюча в протилежних напрямках, може забезпечити підкручення речовини і виникнення вихрового руху [6]. Викинуті компоненти в цьому випадку є кільцевими вихорами, прискореними збіжним радіальним (акреційним) потоком. Викид кілець уздовж осі симетрії дипольного вихору є прямим наслідком як динаміки самих кілець, так і їх взаємодії. Роль потоку полягає в передачі кільцям додаткової енергії, що проявляється в прискоренні вихрових кілець, які викидаються, збіжним потоком.

Можна навести попередні оцінки здійсненності умови прискорення вихорів

$$V_+/V_- = \exp(2\pi^2 C_0/\Gamma) \gg 1 \tag{2.93}$$

для трьох типових випадків, в яких утворюються викиди: активних ядер галактик, мікроквазарів і молодих зоряних об'єктів. Потужність двовимірного стоку $P \equiv -C_0 > 0$ зв'яжемо з тривимірним темпом акреції $\dot{M}$ таким співвідношенням:

$$\dot{M} = 2\pi R \rho P, \tag{2.94}$$

де $R$ — радіус (або характерний масштаб) акреційнного диска, $\rho$ — його густина на відстані $R$ від центру. Це співвідношення стає очевидним (при зроблених вище застереженнях), якщо врахувати, що $P$ — об'єм, який втікає в центр в одиницю часу; тобто, це об'єм, що припадає на одиницю довжини в напрямку, ортогональному 2D-площині. Вважаючи викинуті компоненти вихровими кільцями (торами), для оцінки абсолютної величини циркуляції $A \equiv -\Gamma > 0$ можемо відповідно до (2.20) прийняти (вважаючи логарифмічний фактор [33] в виразі для швидкості кільця $\simeq 2\pi$)

$$A \approx r_+ V_+, \tag{2.95}$$

де $V_+$ — швидкість викиду, а $r_+$ — його поперечний розмір. В результаті для оцінки умови прискорення вихорів потоком маємо (опускаючи множник 2):

$$\dot{M} > \rho R V_+ r_+. \tag{2.96}$$

У разі АЯГ [45, 174], для грубої оцінки [1], швидкість викиду можна прийняти рівною швидкості світла. Масштаб $r_+$ на відстані 1 пк від центру оцінимо як $r_+ \simeq 3 \cdot 10^{16}$ см, що відповідає куту розкриву джета 0.5°. Для циркуляції маємо [83]

$$A \approx 10^{27} \left( \frac{r_+}{3 \times 10^{16} \text{см}} \right) \frac{\text{см}^2}{\text{с}}. \tag{2.97}$$

Темп акреції, відповідний еддінгтонівскій світності при масі чорної діри $M_{BH}$ в центрі АЯГ, дорівнює

$$\dot{M}_{Edd} \approx 6 \times 10^{25} \, \frac{M_{BH}/M_{\odot}}{10^8} \frac{\text{г}}{\text{с}}. \tag{2.98}$$

При густині $\rho \approx 10^{-18}$ г/см$^3$ на відстані від центру $10^4$ гравітаційних радіусів, що відповідає концентрації $n \simeq 10^6$см$^{-3}$, потужність двовимірного акреційного потоку

$$P = \frac{\dot{M}_{Edd}}{2\pi R \rho} \approx 5 \times 10^{25} \left( \frac{10^6 \text{см}^{-3}}{n} \right) \left( \frac{3 \times 10^{17} \text{см}}{R} \right) \frac{\text{см}^2}{\text{с}}. \tag{2.99}$$

---

[1] Примітка 1. Враховуючи, що Лоренц-фактори викидів в АЯГ досягають значень 10 - 20 [45], тому для більш точного опису необхідно залучати релятивістську теорію вихорів.

дорівнює $P \simeq 5 \times 10^{25}$см$^2$с$^{-1}$. Умова $2\pi^2 P > A$, таким чином, може бути виконана при відповідних параметрах АЯГ.

У разі мікроквазарів [182, 185], для яких $M_{BH} \simeq 3M_\odot$, еддінгтонівскій межі відповідає темп акреції $\dot{M}_{Edd} \approx 3 \times 10^{-8} M_\odot$/рік, що при $R \simeq 10^2 R_\odot$ і концентрації $n \simeq 10^{10}$см$^{-3}$ призводить до потужності потоку $P \simeq 10^{19}$см$^2$с$^{-1}$. Зауважимо, що масштаб спостережуваних компонент джетів і, отже, оцінка циркуляції при цьому того ж порядку, що і для викидів в АЯГ. Тому тільки потужна надеддінгтонівська акреція може привести до виконання умови (2.93) і прискоренню вихорів. Однак вихідні розміри компонент в разі мікроквазарів є зоряними. Це означає, що вони пройшли в своїй шкалі масштабів значно більший шлях, ніж викиди АЯГ. При цьому неминуче розпливання вихорів за рахунок в'язкості, взаємодії з середовищем та ін. Тому оцінка циркуляції, що отримується, в разі мікроквазарів, швидше за все, є сильно завищеною. Втім, суттєво можуть відрізнятися від обраних і параметри потоку.

Для молодих зоряних об'єктів [23], зіставляючи викидам об'єкти Хербіга-Аро, швидкості яких досягають 100 км/сек, а розміри порядку $10^{13}$см, отримуємо для циркуляції оцінку $A \simeq 10^{20}$см$^2$с$^{-1}$. При тому ж еддігтонівскому по порядку величини темпі акреції, що і для мікроквазарів $P \simeq 10^{19}$см$^2$с$^{-1}$, отримуємо можливість прискорення вихорів при відповідних параметрах молодих зоряних об'єктів.

В реальності необхідне врахування стисливості, релятивізму, магнітних полів. Але головне в даному розгляді – це природне виникнення викидуваних з центральної області компонент, те, що становить основні труднощі, які долають різними способами в існуючих теоріях. Відзначимо, що на відміну від дисипативних структур, вихори, як відомо, здатні практично без втрат долати значні відстані в середовищі. Їм не потрібно пробивати в ньому тунелі та, мабуть, не буде потрібно особливих умов для колімації компонент. Дуже важливою є задача про взаємодію компонент між собою. Цікаво з'ясувати, чи можливі тут режими, які вперше обговорювалися Гельмгольцем, при яких виникає обгін і проскакування кілець одне крізь одне. Особливий інтерес представляє орбітальний рух в кільці. Створюючи відцентрову силу, воно впливає на швидкість стиснення кілець. В той самий час, при викиді, вихрове кільце з орбітальним рухом забирає обертальний момент, сприяючи акреції. Урахування орбітального руху, природно вимагатиме переходу від розгляду руху точкових вихорів в площині до руху кілець в просторі, що буде розглянуто в наступному розділі.

# ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Показано, що на площині (2D) задача про пару вихорів в радіальному потоці допускає точний розв'язок. При певному співвідношенні між параметрами виникають області «позаднього» руху. В розбіжному потоці відстань між компонентами пари збільшується, але цілісність пари не порушується. У збіжному потоці вихори в парі зближуються, а швидкість руху пари зростає. В обох випадках пара йде на нескінченність з області потоку, змінивши відстань між компонентами на кінцеву величину. Для вихорів одного знака з рівними інтенсивностями відстань між вихорами лінійно залежить від часу. У розбіжному потоці вони необмежено віддаляються один від одного. У збіжному потоці відстань між ними обертається в нуль за кінцевий час. Задача про рух вихорів у обертових потоках з радіальним рухом може знайти якісні геофізичні застосування. Спостережуване обертання двох вихорів навколо південного полюса Венери може бути описано в рамках розглянутого підходу при наявності в районі полюса меридіонального потоку.

Розглянуто динаміку дипольного тороїдального вихору в радіальному потоці в наближенні чотирьох плоских вихорів. Показано, що в цьому випадку компоненти пар викидаються акреційним потоком. При цьому швидкість викиду збільшується експоненціально в порівнянні з початковою і залежить від відношення циркуляції вихору до потужності стоку.

Досліджено вплив на динаміку вихорів більш складного потоку (джерело і диполь, квадруполь). Показано, що основний результат, пов'язаний з прискоренням викидів, зберігається для більш складного потоку, оскільки основний вплив має монопольна компонента. Однак присутні відмінності в характері динаміки вихорів в порівнянні з попереднім випадком монопольного потоку.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [6, 8, 11, 14, 78, 82, 83, 84, 6, 85, 98, 98, 203].

# РОЗДІЛ 3

# ДИНАМІКА ТОРОЇДАЛЬНИХ ВИХОРІВ В РАДІАЛЬНОМУ ПОТОЦІ В 3D ВИПАДКУ ТА ІНТЕГРАЛ СПІРАЛЬНОСТІ

У попередньому розділі було показано, що на відміну від класичного випадку у відсутності потоку [40], урахування радіального потоку призводить до суттєвих відмінностей [84, 82]. У розбіжному потоці відстань між компонентами пари збільшується, а швидкість руху сповільнюється, а в збіжному потоці ситуація змінюється на протилежну: зменшення відстані між компонентами пари призводить до збільшення їх швидкості. В певній області параметрів вихор може здійснювати зворотний рух. Також була розглянута система з двох дзеркально симетричних кільцевих вихорів (дипольне вихрове кільце) у зв'язку з астрофізичними застосуваннями. В [82] досліджувалася динаміка дипольного тороїдального вихору в радіальному потоці в 2D описі. У цьому наближенні дипольне вихрове кільце можна уявити чотирма точковими вихорами. Добре відомо, починаючи з роботи В.Греблі [151], що в результаті лобового зіткнення компоненти пар міняються місцями, а нові пари розлітаються під прямим кутом до напрямку руху з вихідними за величиною швидкостями. Присутність центрального радіального потоку призводить до ефекту або уповільнення (розбіжний потік), або прискорення (збіжний потік) і як результат компоненти пар розлітаються в протилежні сторони [82]. При цьому швидкість пари, яка викидається, в збіжному (акреційному) потоці залежить від відношення потужності потоку до інтенсивності вихору і може досягати великих значень. В [203] було показано, що ефект прискореного викиду вихрової пари в певному сенсі зберігається і для більш складної акреційнної течії: швидкості викинутих пар визначаються тільки монопольною складовою потоку. Ці рішення можуть інтерпретуватися як рух і розпад на складові дипольного тороїдального вихору. З цієї точки зору в [82, 203] у 2D-описі показано, що дипольне вихрове кільце в акреційному потоці стискається по великому радіусу і, розпадаючись, породжує двосторонній викид складових його кільцевих вихорів по осі симетрії системи.

В даному розділі ми розширимо наш розгляд на 3D випадок. Це важливо для застосування результатів до реальних астрофізичних об'єктів, оскільки, як буде показано нижче, викиди (або колапс) компонент вихору стоком залежать від певних умов. Для розв'язання задачі ми будемо використовувати відповідний осесиметричний опис кільцевих (тороїдальних) вихорів. Обговорення подібного розгляду можна знайти в оглядах [46, 181, 48, 210]. Як буде видно нижче, поведінка 3D-моделі відрізняється від поведінки їхніх аналогів в плоскій 2D-моделі. Схоже, що при сильному збіжному потоці виникає колапс із затягуванням вихорів в область стоку. При параметрах, близьких до умов колапсу, можливий назадній рух між точками повороту. Також ми розглянемо вплив орбітального руху та інтеграл спіральності, який є додатковим інтегралом, що говорить про стійкість системи.

## 3.1 Дипольний тороїдальний вихор в потоці

Розглянемо задачу про динаміку дипольного тороїдального вихору в радіальному потоці, представляючи дипольний вихор як систему двох кільцевих вихорів. Рівняння для великого радіуса $R(t)$ тонкого кільцевого вихору і його положення щодо осі симетрії $Z(t)$ при наявності співвісних йому вихорів були отримані ще Г. Гельмгольцом [153]. В.Дайсон показав [123], що цим рівнянням відповідає інтеграл енергії, завдяки чому в наступних роботах їм була надана гамільтонова форма.

### *3.1.1 Гамільтонове формулювання задачі*

Функція струму Стокса радіального потоку, в якому рухається дипольний вихор, має вигляд

$$\psi = \frac{Q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \tag{3.1}$$

Тут, як і в попередньому розділі, $Q$ — потужність джерела, розташованого на початку координат. (В разі збіжного "акреційнного" потоку ми будемо використовувати також позитивну потужність стоку $P = -Q > 0$). В силу симетрії задачі, досить розглянути рівняння руху для одного кільцевого вихору з пари в півпросторі $z > 0$ з великим радіусом $R$ і $z$ -координатою $Z$,

$$\dot{R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial Z}, \qquad \dot{Z} = \frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial R}, \tag{3.2}$$

з функцією Гамільтона $H$

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi}\ln\frac{8R}{e^{7/4}a(R)} - \frac{\Gamma R}{4\pi}C(k) + \frac{P}{4\pi}\frac{Z}{\sqrt{Z^2 + R^2}}, \tag{3.3}$$

тут $C(k)$ являє собою введену ще Гельмгольцем комбінацію еліптичних інтегралів

$$C(k) = \left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k), \tag{3.4}$$

де $K(k)$ і $E(k)$ — повні еліптичні інтеграли першого і другого роду, відповідно, а $k$ — їх модуль:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}, \tag{3.5}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} d\alpha\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}, \tag{3.6}$$

$$k^2 = \frac{R^2}{R^2 + Z^2}. \tag{3.7}$$

Вираз для гамільтоніана (3.3) отримано з

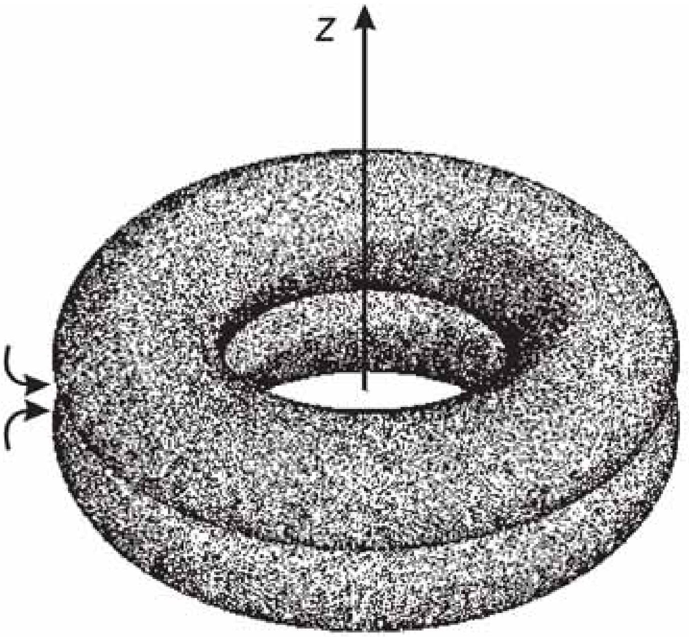


Рис. 3.1. Схема дипольного тороїдального вихору. Дві компоненти вихору є дзеркальним відображенням один одного щодо площини симетрії $z = 0$. Стрілками вказано напрямок вихрового руху.

$$H = 2\pi U + \sum_i \frac{\Gamma_i^2 R_i}{2}\left(\ln\frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4}\right) + 2\pi\sum_i \Gamma_i \psi(Z_p, R_p), \tag{3.8}$$

де

$$U = 2\pi\sum_{i\neq j}\Gamma_i\Gamma_j\sqrt{R_iR_j}\left[\left(\frac{2}{k_{ij}} - k_{ij}\right)K(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}E(k_{ij})}\right] \tag{3.9}$$

$$k_{ij}^2 = \frac{4R_iR_j}{(R_i+R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2},$$

а відповідні рівняння руху

$$\dot{R}_i = -\frac{1}{2\pi\Gamma_i R_i}\frac{\partial H}{\partial Z_i}, \qquad \dot{Z}_i = \frac{1}{2\pi\Gamma_i R_i}\frac{\partial H}{\partial R_i}, \tag{3.10}$$

$\Gamma_i$ — інтенсивність $i$-го вихору, $Z_i$ — координати їх центрів. У разі дипольного вихору, $\Gamma_1 = -\Gamma_2 \to \Gamma$, тобто враховується, що співвісні кільцеві вихори, що становлять дипольний тороїдальний вихор, мають рівні радіуси і протилежні, але рівні за модулем циркуляції (рис.3.1). Ми припускаємо, що динаміка вихору відбувається зі збереженням його об'єму при однорідній завихреності [46], тобто

$$Ra^2(R) = \beta^2 = \text{const}, \tag{3.11}$$

де $a(R)$ — малий радіус кільця, а константа $\beta$ визначається початковою умовою $\beta = a_0\sqrt{R_0}$. Таким чином, ми не враховуємо можливу зміну густини в ядрі вихору [60].

### *3.1.2 Зв'язок початкових умов і параметрів викида вихору*

Руху вихору по траєкторії відповідає сталість функції Гамільтона $H = \text{const}$, яка і фіксує обрану траєкторію. Початковим станом вважатимемо вихор радіусу $R_0 \gg a_0$. Кільцеві вихори при цьому знаходяться один від одного на малій відстані $2Z_0$, що задовольняє умові $R_0 \gg Z_0 > a_0$. Цьому відповідають асимптотики еліптичних інтегралів [1], що входять в гамільтоніан (3.3), при $k \to 1$:

$$K(k\to 1) \to \frac{1}{2}\ln\frac{16}{1-k^2}, \quad E(1) = 1. \tag{3.12}$$

Компонента, яка викинута в позитивному напрямку осі симетрії $z$, на великих відстанях $Z_\infty \gg R_\infty$ описується асимптотиками інтегралів при $k \to 0$:

$$K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{K(k) - E(k)}{k} \to k\frac{\pi}{4} \to 0. \tag{3.13}$$

Використовуючи співвідношення (3.12) — (3.14), знаходимо асимптотики функції Гамільтона для початкового ($R \to \infty$, $k \to 1$) і кінцевого ($Z \to +\infty$, $k \to 0$) станів кільцевого вихору ($z > 0$).

1) При $R \to \infty$ для $C(k \to 1)$ отримуємо

$$C(k) \to K(k) \to \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-k^2} \approx \ln \frac{4R_0}{Z_0}. \tag{3.14}$$

Відповідно, гамільтоніан зводиться до вигляду

$$H = \frac{\Gamma R_0}{4\pi} \ln \frac{2Z_0}{e^{7/4} a(R_0)} + \frac{P}{4\pi} \frac{Z_0}{R_0}. \tag{3.15}$$

Останній доданок в силу малості $Z_0/R_0 \ll 1$ можна опустити. Зв'язок між $R_0$ і $Z_0$ координатами кільця набуває вигляду

$$Z_0 \approx \frac{e^{7/4}}{2} a(R_0) \exp\left(\frac{4\pi H}{\Gamma R_0}\right). \tag{3.16}$$

2) Після проходження області стоку для радіуса кільця $R_\infty$ маємо

$$R_\infty \ln \frac{8R_\infty}{e^{7/4} a_\infty} = \frac{1}{\Gamma}(4\pi H - P), \quad Z_\infty \gg R_\infty. \tag{3.17}$$

Рівняння (3.17) можна представити у вигляді $x \ln x = y$, яке за умови $\ln y \gg 1$ має наближений аналітичний розв'язок $x = y/\ln y$. Відносна похибка цього розв'язку $\ln(\ln y)/\ln y$ проходить через максимум при $y = e^e$ і прагне до нуля при $\ln y \to \infty$. Це дає можливість привести явні вирази для радіуса вихору як функції його координати і параметрів, які визначаються початковими умовами.

### *3.1.3 Критична потужність потоку*

З виразу (3.17) видно, що розв'язок з відходом вихорів на нескінченність існує тільки якщо потужність потоку не перевищує критичного значення

$$P_{cr} = 4\pi H. \tag{3.18}$$

Найбільша швидкість кілець, які викидаються, досягається при $P \to P_{cr} - 0$. При перевищенні критичного значення потужності стоку вихор затягується потоком в стік і колапсує. Це якісно відрізняє осесиметричний $3D$ розв'язок від розглянутих в попередньому розділі аналогічних плоских $2D$ задач [84, 83, 82]. Природа цієї відмінності полягає в тому, що відстань між точковими вихорами, що імітують кільцевий вихор, може бути як завгодно малою і, відповідно, власна швидкість вихору — як завгодно великою. В $3D$ випадку найменша відстань регулюється умовою $R \geq a(R)$ (для тонкого вихору $R \gg a$) і, таким чином, завжди кінцева (і визначається заданими початковими умовами). В той самий час швидкість течії поблизу стоку зростає необмежено обернено пропорційно квадрату відстані, завдяки чому вихор затягується в особливість в разі акреційного потоку (див. рис.3.2).

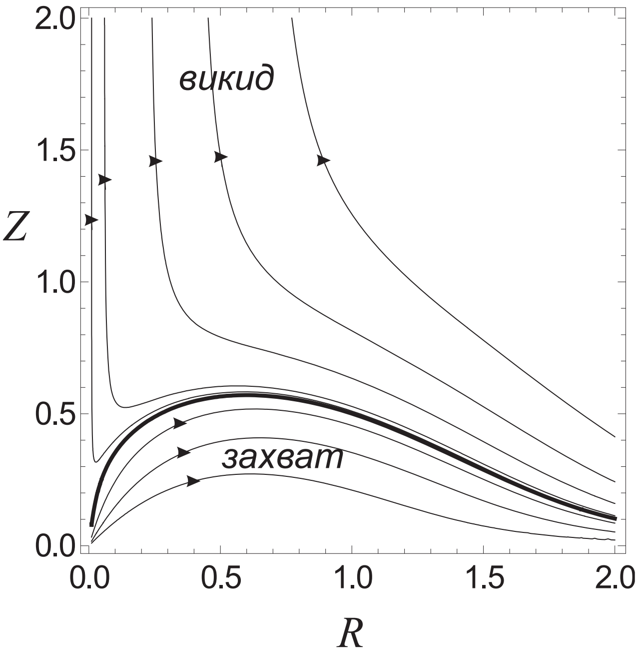


Рис. 3.2. Лінії рівня гамільтоніана, відповідні траєкторії однієї з компонент дипольного тороїдального вихору з $\Gamma = -2\pi$ і $\beta = 10^{-3}$, який рухається в збіжному потоці з потужністю стоку $P = 2\pi$. Видно область захоплення вихорів і сепаратриса, відповідна критичному значенню гамільтоніана.

У плоскому $2D$ випадку швидкість течії і швидкість вихору зростають по одному і тому ж закону — обернено пропорційно відстані. Наявність в цьому випадку явно знайдених точок повороту [84, 82] показує, що власна швидкість вихору перевищує швидкість течії, що завжди призводить в $2D$ випадку до викиду компонент. В $3D$ розгляді при потужності, що наближається до критичної, відмовляє наближення тонкого вихору. Для ілюстрації використаємо наближений аналітичний розв'язок (див. розділ 3.1.2). У міру зростання потужності стоку $P$, радіус кільця на великих відстанях від нього збільшується відповідно до

$$R_\infty \approx \frac{2}{3}\frac{L_\infty}{\ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{8}{e^{7/4}\beta}\right)^{2/3} L_\infty\right]}, \qquad L_\infty = \frac{1}{\Gamma}(4\pi H - P), \tag{3.19}$$

а його швидкість зростає:

$$\dot{Z}_\infty \approx \frac{\Gamma}{4\pi R_\infty}\ln\frac{8R_\infty}{e^{1/4}a_\infty}. \tag{3.20}$$

При $P \to P_{cr} = 4\pi H$, $L_\infty \to 0$ і радіус кільця зменшується настільки, що наближення тонкого кільця, яке використовувалось, не виконується. Мабуть, істинного колапсу при цьому не відбувається (пор. з обговоренням загальної проблеми колапсу в гідродинаміці в огляді [32]). Природно вважати, що вихор стає компактним. Аналітично цей перехід описати не вдається, однак чисельно перехід від тонкого вихору до вихору Хілла було простежено в роботі [194].

## 3.2 Одиночний кільцевий вихор в радіальному потоці

Для одиночного кільцевого вихору в потоці потужності $Q = \text{const}$, який описується функцією струму (3.1), гамільтоніан системи має вигляд

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi}\ln\frac{8R}{e^{7/4}a(R)} - \frac{Q}{4\pi}\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}. \tag{3.21}$$

З рівнянь руху вихрового кільця в канонічній формі (3.2) знаходимо:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{\Gamma}{4\pi R}\ln\frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} + \frac{Q}{4\pi}\frac{Z}{(R^2+Z^2)^{3/2}}, \\ \dot{R} &= \frac{Q}{4\pi}\frac{R}{(R^2+Z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Розглянемо рух вихрового кільця з Γ в збіжному потоці ($P = -Q > 0$). Далеко від стоку кільце рухається в сторону спадаючих значень $z$ (рис.3.3). З (3.22) видно, що в збіжному потоці протягом усього часу руху радіус вихрового кільця зменшується. На рис. 3.4 наведено рівні гамільтоніана (3.21), що відповідають різним траєкторіям руху вихрового кільця в площині ($Z$, $R$). Сепаратриса, на якій $H = -P/(4\pi)$, відокремлює траєкторії, що потрапляють в стік (при $-4\pi H < P$), від траєкторій, що йдуть на нескінченність

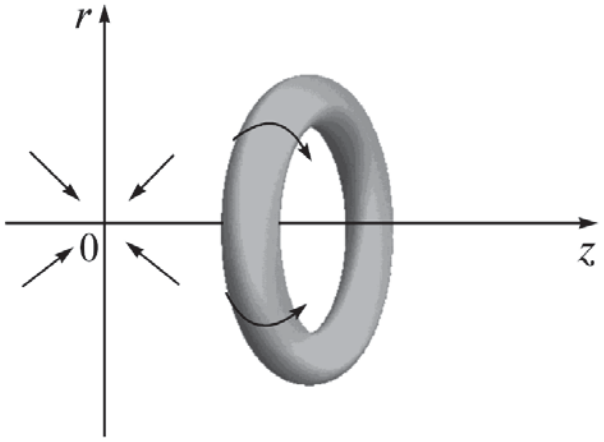


Рис. 3.3. Одиночний кільцевий вихор в фоновому радіальному потоці, центр якого знаходиться в початку координат. При $\Gamma < 0$ вихор рухається справа наліво уздовж осі $z$.

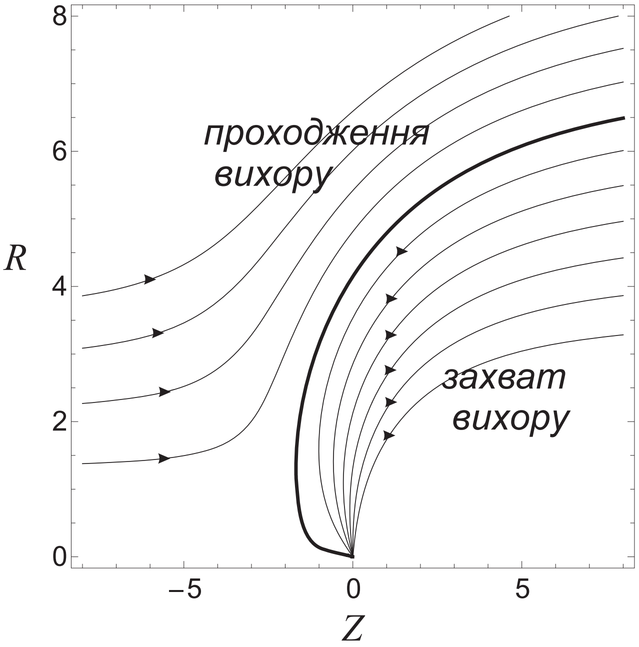


Рис. 3.4. Траєкторії одиночного кільцевого вихору (рівні гамільтоніана $H = \mathrm{const}$) в акреційному потоці з параметрами $P = -Q = 4\pi$, $\Gamma = 0.02P$. Сепаратриса виділена жирною кривою.

$(-\pi H > P)$. Така поведінка безпосередньо випливає з (3.1). У загальному випадку умова захоплення має вигляд: $-4\pi H \mathrm{sign}(\Gamma) < P$.

Розглянемо асимптотики при $Z \to \pm\infty$ нескінченної в обидві сторони траєкторії кільця із заданим значенням гамільтоніана $H$. Вираз (3.21) (з урахуванням умови збереження об'єму кільця) при $Z \to +\infty$ і $R \to R_+$

набуває вигляду

$$H = \frac{\Gamma R_+}{4\pi} \ln \frac{8R_+^{3/2}}{\beta e^{7/4}} - \frac{Q}{4\pi}. \tag{3.23}$$

З іншого боку, при $Z \to -\infty$ і $R \to R_-$ отримаємо

$$H = \frac{\Gamma R_-}{4\pi} \ln \frac{8R_-^{3/2}}{\beta e^{7/4}} + \frac{Q}{4\pi}. \tag{3.24}$$

Звідси знаходимо зв'язок між $R_+$ і $R_-$ у вигляді

$$R_- \ln \frac{8R_-^{3/2}}{\beta e^{7/4}} + \frac{Q}{4\pi} = R_+ \ln \frac{8R_+^{3/2}}{\beta e^{7/4}} - \frac{Q}{4\pi}. \tag{3.25}$$

Швидкість центру кільцевого вихору, що рухається в збіжному потоці, збільшується від початкового значення

$$\dot{Z}_+ \simeq \frac{\Gamma}{4\pi R_+} \ln \frac{8R_+^{3/2}}{\beta e^{1/4}}$$

до значення на виході з потоку

$$\dot{Z}_- \simeq \frac{\Gamma}{4\pi R_-} \ln \frac{8R_-^{3/2}}{\beta e^{1/4}}.$$

(Внесок від потоку $\triangle \dot{Z}_{\simeq} \pm Q/(4\pi Z_\pm^2)$ на великих відстанях дуже малий).

Таким чином, кільце стискається збіжним потоком ($R_- < R_+$), а його швидкість зростає

$$\frac{V_-}{V_+} \approx \frac{R_+ \ln(8R_-^{3/2}/\beta e^{1/4})}{R_- \ln(8R_+^{3/2}/\beta e^{1/4})}. \tag{3.26}$$

З рівнянь руху (3.22) випливає, що на траєкторіях можуть бути присутні точки повернення, в яких напрямок руху центру кільця змінюється на прямо протилежний. У цих точках $\dot{Z} = 0$, тобто

$$\frac{\Gamma}{4\pi R_+} \ln \frac{8R_+^{3/2}}{\beta e^{1/4}} + \frac{QZ}{4\pi (R^2 + Z^2)^{3/2}} = 0. \tag{3.27}$$

Останню рівність можна переписати у вигляді кубічного рівняння відносно $\zeta \equiv Z^2$:

$$(\zeta + R^2)^3 - \frac{Q^2 R^2}{\Gamma^2 \ln^2 \left( \frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} \right)} \zeta = 0. \tag{3.28}$$

Це рівняння має один негативний нефізичний корінь, а при виконанні умови

$$\frac{4Q^2}{27\Gamma^2} \geq R^2 \ln^2 \left( \frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} \right), \tag{3.29}$$

яке збігається з умовою наявності дійсних коренів, два позитивних корені, що відповідає існуванню точок повороту. З рис. 3.5 видно, що область зворотного руху примикає до сепаратриси. За нею вихрове кільце затягується в стік і колапсує. Цей ефект відсутній при $2D$ описі в площині. Там область зворотного руху займає обмежений за координатами інтервал значень і змінюється продовженням руху кільця, прискореного через його стиснення потоком, у зворотному напрямі. Відзначимо, що аналогічні точки повернення, в яких $\dot{Z} = 0$, є і в разі дипольного тороїдального вихору.

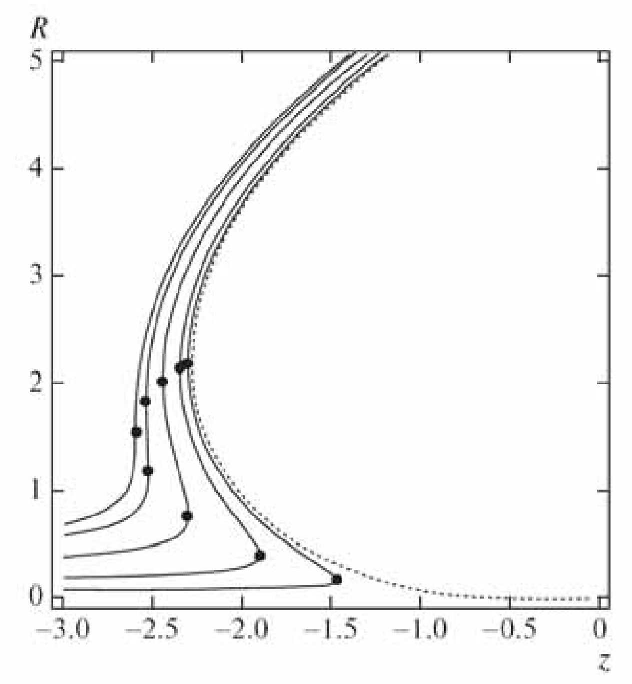


Рис. 3.5. Траєкторії руху вихору в розбіжному (збіжному) потоці: $|Q| = 4\pi$, $\Gamma = 0.02Q$. Сепаратриса позначена пунктирною лінією. Виділено точки повороту. При русі вихору зліва направо ($\Gamma > 0$) рисунок відповідає випадку джерела ($Q > 0$), а при русі справа наліво ($\Gamma < 0$) – випадку стоку ($Q < 0$). Траєкторії, які відповідають колапсу, не показані (пор. з рис.3.5).

## 3.3 Вплив орбітального руху на динаміку тороїдального вихору

Для астрофізичних об'єктів істотну роль відіграє наявність гравітаційного поля з боку центрального об'єкта. Для АЯГ таким джерелом є надмасивна чорна діра, яка забезпечує орбітальний рух речовини в акреційному диску. Оскільки диск має значні масштаби, ми обмежуємося нерелятивістським випадком, розглядаючи відстані значно віддалені від останньої стійкої орбіти. У попередніх розділах ми враховували тільки вихровий рух, тобто рух по малому контуру. В даному підрозділі ми розглянемо випадок, коли присутні не тільки вихровий рух, а й орбітальний. Ми будемо називати це надалі "закруткою". В якійсь мірі це опосередковане врахування гравітаційного поля з боку центрального джерела, хоча в даному випадку ми вважаємо, що орбітальний рух вже присутній. Ми побачимо, що орбітальний рух може якісно змінити динаміку вихору.

### *3.3.1 Одиночний тороїдальний вихор із закруткою*

Розглянемо рух вихрового кільця з циркуляцією $\Gamma < 0$ в збіжному радіальному потоці з функцією струму (3.1). Власна швидкість кільцевого вихору з закруткою [54]:

$$V = \dot{Z} = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{e^{1/4}a(R)} - \frac{4\pi^2\overline{v_\varphi^2}}{\Gamma^2}\right). \tag{3.30}$$

Як і раніше, малий радіус вихрового кільця визначається через умову збереження об'єму кільцевого вихору (3.11). Також вважаємо, що циркуляція (середня) по колу великого радіуса тора також зберігається:

$$\Gamma_1^2 = (2\pi R^2)\overline{v_\varphi^2} = \overline{(2\pi R v_\varphi)^2} = \text{const}. \tag{3.31}$$

Функція Гамільтона в цьому випадку має вигляд

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi}\ln\frac{8R^{3/2}}{e^{7/4}\beta} + \frac{\beta^2\Gamma_1^2}{8\pi\Gamma R^2} + \frac{P}{4\pi}\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}. \tag{3.32}$$

Тут для збіжного потоку ми використовували позначення $P = -Q$. Підставляючи вираз для $H$ в канонічні рівняння (3.2), отримуємо систему рівнянь руху одиночного кільцевого вихору із закруткою в полі точкового стоку:

$$\begin{gathered}\dot{Z} = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} - \frac{\beta^2}{R^3}\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right)^2\right] - \frac{P}{4\pi}\frac{Z}{(R^2+Z^2)^{3/2}},\\ \dot{R} = -\frac{P}{4\pi}\frac{R}{(R^2+Z^2)^{3/2}}.\end{gathered} \tag{3.33}$$

Вплив закрутки в збіжному потоці призводить до того, що напрямок руху центру кільця може змінюватися на протилежний. Дійсно, при русі кільцевого вихору в акреційному (збіжному) потоці радіус кільця зменшується і, відповідно, зростає роль закрутки. Формально це видно з (3.33). Фізично це легко зрозуміти, тому що зростання відцентрової сили, яка породжується орбітальним рухом і яка ортогональна завихреності, при збільшенні кривизни кільця призводить до зміни швидкості кільця за рахунок "підйомної сили" Кутта-Жуковського [54]. Її внесок може привести до зміни напрямку руху кільця.

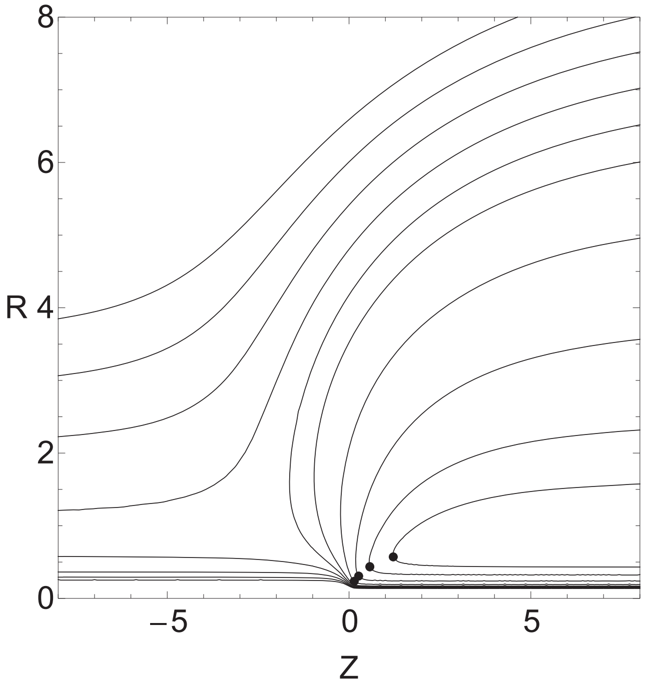


Рис. 3.6. Траєкторії одиночного кільцевого вихору з параметрами: $\Gamma = -0.02\pi$, $\beta = 0.1$ і потужністю стоку $P = 4\pi$. Показані траєкторії руху кільцевого вихору, отримані з умови $H = \text{const}$. Видно траєкторії, на яких вихор змінює напрямок руху ( "відбивається" від стоку). Виділено точки повороту. Відзначимо, що знак циркуляції $\Gamma_1$ неістотний, оскільки в (3.32) входить її квадрат.

Будемо вважати, що в виразі для швидкості $\dot{Z}$ інерційний доданок багато менше доданка, що описує внесок закрутки:

$$\ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4}\beta} \ll \frac{\beta^2}{R^3}\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right)^2. \tag{3.34}$$

Тоді координати точок повороту $\dot{Z} = 0$ визначаються з рівняння

$$\frac{\Gamma\beta^2}{R^4}\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right)^2 = -\frac{PZ}{(R^2+Z^2)^{3/2}}. \tag{3.35}$$

Нехай вихор рухається в негативному напрямку осі $z$, що відповідає $\Gamma < 0$. Якщо ввести позначення для комбінації параметрів:

$$\alpha^3 = \frac{\beta^2\Gamma_1^2}{Q\Gamma} > 0, \tag{3.36}$$

то рівняння (3.35) для точок повороту приводиться до вигляду

$$x(y-\alpha^2) = \alpha^2, \tag{3.37}$$

де

$$x = \left(\frac{R}{Z}\right)^2, \qquad y = (RZ)^{2/3}. \tag{3.38}$$

Розв'язок рівняння (3.37) являє собою гіперболу $x = \alpha^2/(y-\alpha^2)$ (рис. 3.7 *зліва*).

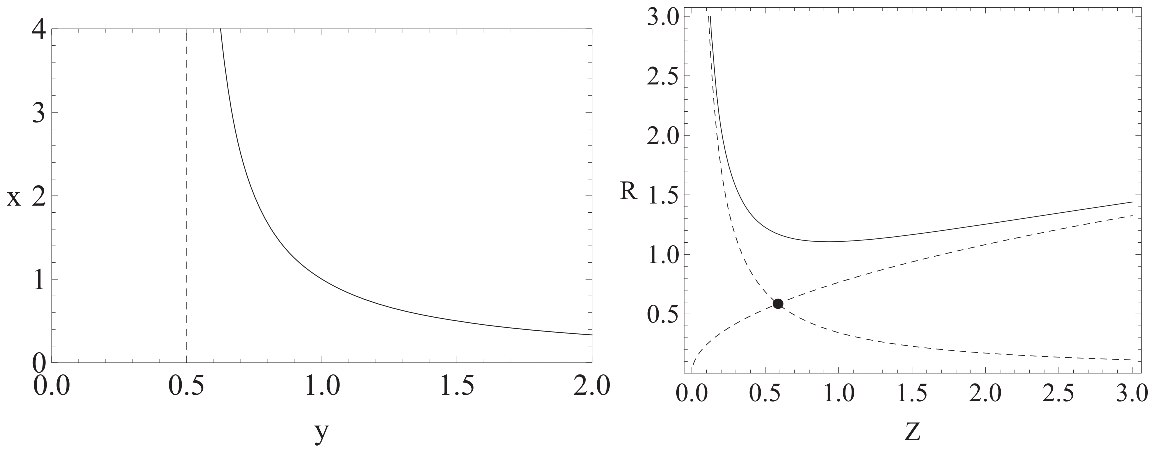


Рис. 3.7. *Зліва*: розв'язок рівняння для точок повороту кільцевого вихору в акреційному потоці при наявності орбітального руху в змінних (3.28). Пунктиром показана асимптота гіперболи $y = \alpha^2$. *Справа*: лінія точок повороту одиночного вихору, яка відповідає його відображенню, як функція відстані вихору від стоку, що знаходиться в початку координат. Мінімум досягається при $R_{\min} \approx \alpha^{3/2}$. При менших радіусах відображення від стоку відсутнє. Точкам на графіку відповідають координати $(\alpha^{3/2},\, \alpha^{3/2})$.

Неважко знайти асимптотики розв'язку рівняння для точок повороту в координатах $R$ і $Z$. При $y \to \alpha^2$, $x \to \infty$ — це гіпербола $R = \alpha^3/Z$, а при $y \to \infty$, $y \to 0$ — це коренева залежність $R = a^{3/4}\sqrt{Z}$. Мінімальне значення кривої досягається при $R_{\min} \approx \alpha^{3/2}$ (рис. 3.7 *справа*). Розгляд справедливий, якщо виконується додаткова умова тонкого кільця. При $\beta^2 \ll \alpha^{9/2}$ ця умова виконується аж до значення $R_{\min}$. Одночасно повинна виконуватися умова переважання закрутки (3.34). Чисельний розв'язок для точок повороту наведено на рисунку 3.7 *справа*. На рис. 3.8 показана схема динаміки кільцевого вихору із закруткою, який рухається до стоку. При $\Gamma < 0$ вихор рухається справа наліво уздовж осі $z$ (ліве кільце). Стиснення по великому радіусу акреційним потоком підсилює роль орбітального обертання, що змінює напрямок руху кільця на зворотний (праве кільце). Відповідні траєкторії показані на рис.3.6. Виділені точки повороту на траєкторіях відповідають кореневої залежності $R \propto \sqrt{Z}$.

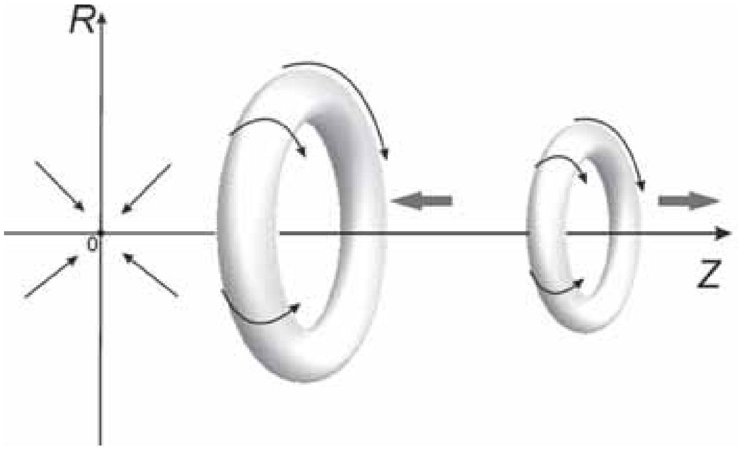


Рис. 3.8. Схема відображення одиночного кільцевого вихору із закруткою в фоновому радіальному потоці від стоку, центр якого знаходиться на початку координат. Потовщення відбитого вихору не показано.

### *3.3.2 Дипольний тороїдальний вихор з закруткою*

Розглянемо задачу про динаміку дипольного тороїдального вихору з урахуванням закрутки, вплив якої в акреційному потоці також, як і для одиночного вихору, є істотним. В силу симетрії задачі досить розглянути рівняння руху (3.2) в півпросторі для одного кільцевого вихору з пари з функцією Гамільтона

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi} \ln \frac{8R}{e^{7/4} a(R)} - \frac{\Gamma R}{4\pi} C(k) + \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + R^2}} + \frac{\beta^2 \Gamma_1^2}{8\pi \Gamma R^2}, \tag{3.39}$$

де $C(k)$ визначається формулою (3.4). Останній доданок в гамільтоніані (3.39) являє собою внесок орбітального руху (закрутка вихору). Як і раніше, для

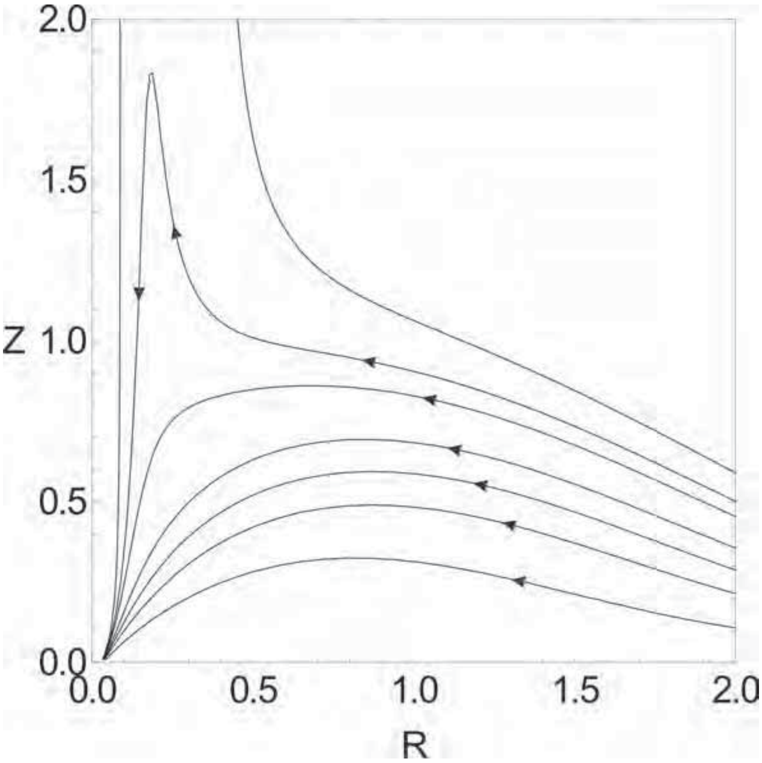


Рис. 3.9. Траєкторії компоненти дипольного тороїдального вихору (лінії постійного гамільтоніана) з урахуванням орбітального руху для $|\Gamma| = 4\pi$, $P = \Gamma^2$, $\beta = 0.01$.

побудови траєкторій використовуємо умову сталості функції Гамільтона.

Закрутка вносить істотний внесок, впливаючи на умови колапсу, що видно з наведених нижче фазових портретів — траєкторій в площині $R - Z$. Можна вважати, що в певній зоні параметрів закрутка впливає на положення точок повороту і зрушує положення колапсу. Зауважимо, що у викидах активних ядер галактик спостерігаються і зворотні рухи [173], які зазвичай інтерпретуються як результат проекції. Ми бачимо, що при викиді тороїдальних вихорів такі рухи можуть бути цілком реальними. Опис зворотного руху в разі дипольного тороїдального вихору може бути проведено аналітично. У порівнянні з рівняннями руху для одиночного вихору (3.22), в разі дипольного вихору додається доданок, що описує взаємодію між кільцями. З огляду на вираз для гамільтоніана (3.39), додатковий доданок в одному з рівнянь руху має вигляд:

$$\dot{Z} = ... - \frac{\Gamma}{4\pi}\left[C(k) + \frac{RZ^2}{(R^2+Z^2)^{3/2}}\frac{\partial C(k)}{\partial k}\right]. \tag{3.40}$$

Похідні від еліптичних інтегралів можна виразити через самі інтеграли [26]

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \qquad \frac{dE}{dk} = \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k}. \tag{3.41}$$

Після ряду нескладних перетворень рівняння руху для дипольного тороїдального вихору в стоці має вигляд[1]

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R^{3/2}}{\beta e^{1/4}} - \frac{\beta^2}{R^3}\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right)^2\right] + \frac{\Gamma k}{4\pi R}\left[E(k) - K(k)\right] - \frac{P}{4\pi}\frac{Z}{(R^2+Z^2)^{3/2}}, \\ \dot{R} &= \frac{\Gamma k}{4\pi R^2 Z}\left[2Z^2K(k) - (R^2+2Z^2)E(k)\right] - \frac{P}{4\pi}\frac{R}{(R^2+Z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

На рис. 3.9 показані траєкторії руху одного з компонентів дипольного тороїдального вихору з урахуванням орбітального руху. Випадок без закрутки розглянуто в розділі 3.1 і показано на рис. 3.4. Добре видно вплив закрутки на колапс вихору. Зокрема, з'являються траєкторії зі зворотним рухом по осі $Z$. Координату $Z$ точки повороту для даної траєкторії знаходимо з рівняння (3.42) за умови $\dot{Z} = 0$. При цьому ми враховуємо, що для великих значень $Z$ взаємодія мала і відповідним доданком в (3.42) нехтуємо:

$$\dot{Z} = ... - \frac{\Gamma k}{4\pi R}\left[E(k) - K(k)\right] \underset{k\to 1}{\Rightarrow} ...\frac{\Gamma}{16R}k^3 \approx ...\frac{\Gamma}{16}\frac{R^2}{(Z^2+R^2)^{3/2}} \to 0. \tag{3.43}$$

Для координати $Z$ точки повороту отримуємо вираз:

$$Z^2 \approx \frac{QR^2}{8\pi}\left[\frac{3\beta^2\Gamma_1^2}{8\pi\Gamma R^2} - \left(H + \frac{3\Gamma R}{8\pi}\right)\right]^{-1}. \tag{3.44}$$

При

$$\frac{3\beta^2\Gamma_1^2}{8\pi\Gamma R^2} \to \left(H + \frac{3\Gamma R}{8\pi}\right) \tag{3.45}$$

точка повороту по $Z$ йде на нескінченність.

Таким чином, видно, що урахування орбітального руху може призводити до ситуації з можливими зворотними рухами (ефект бумеранга). Фізичною причиною таких рухів стає сила, яка є аналогом "підйомної" сили Жуковського. Ця сила виникає в умовах, коли на завихреність кільця, спрямовану уздовж його твірної, діє відцентрова сила від орбітального потоку, ортогональна завихреності. Напрямок цієї "підйомної" сили ортогональний пло-

---

[1] Примітка 1. Зауважимо, що ми обмежуємося випадком коли $\Gamma \gg \Gamma_1$, що відповідає даній системі.

щині вихрового кільця і протилежний напрямку його інерційного руху. Завдяки цьому викид, що направляється інерційним рухом кільця, змінює свій рух на протилежний зі зменшенням радіусу кільця, коли відцентрова сила стає досить великою.

## 3.4 Інтеграл спіральності для різних випадків закрутки

Одним з важливих питань, що стосуються систем з двома типами руху (вихровим та орбітальним) є наявність додаткового інтеграла, свого роду додатковий перший інтеграл руху. Існування додаткового інтеграла говорить про стійкість системи. Так, наприклад, додатковий перший інтеграл існує в задачі двох тіл, так званий інтеграл Лапласа, який являє собою комбінацію повної енергії і повного кутового моменту. Додатковий топологічний інтеграл також існує в системі вихорів — так званий інтеграл спіральності (або просто спіральність). Як відомо, для двох зачеплених вихрових контурів спіральність повинна дорівнювати добутку циркуляцій, помноженому на подвійну кількість зачеплень [54, 188, 27, 22]. При наявності закрутки інтеграл спіральності також існує [188]. Ми покажемо на прикладі існуючого гідродинамічного розв'язку, що для тороїдального вихору з закруткою це співвідношення має дещо інший вигляд, що відображає просторовий розподіл завихреності.

### *3.4.1 Рівняння Брегга-Хоторна і його розв'язок для тороїдального вихору.*

Розглянемо осесиметричну стаціонарну течію ідеальної нестисливої рідини за відсутності масових сил. Рівняння Ейлера в цьому випадку має вигляд

$$(\mathbf{V}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{V} = -\frac{\bigtriangledown p}{\rho}. \tag{3.46}$$

Враховуючи, що

$$(\mathbf{V}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{V} = \bigtriangledown\left(\frac{V^2}{2}\right) - \mathbf{V}\times \mathrm{rot}\mathbf{V}, \tag{3.47}$$

$$\mathbf{V}\times \mathrm{rot}\mathbf{V} = \bigtriangledown\left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right), \tag{3.48}$$

де в циліндричних координатах $(r,\,\varphi,\,z)$ для осесимметричного випадку

$$\omega = \mathrm{rot}\mathbf{V} = \left(-\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\mathbf{i}_r, \left(\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\mathbf{i}_\varphi, \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r}\mathbf{i}_z\right). \tag{3.49}$$

Введемо функцію струму Стокса $\psi$, визначену згідно зі співвідношенням

$$V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{3.50}$$

При цьому рівняння неперервності $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$ задовольняється тотожно. Орбітальну компоненту швидкості тепер можна представити у вигляді

$$V_\varphi = \frac{f(\psi)}{r}, \tag{3.51}$$

де $f(\psi)$ — відома функція. Підставляючи вирази (3.50) і (3.51) в (3.49), отримуємо

$$\mathrm{rot}\mathbf{V} = \left(-\frac{1}{r}f'\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{i}_r\,,\ -\frac{\tilde{\triangle}\psi}{r}\mathbf{i}_\varphi\,,\ \frac{1}{r}f'\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{i}_z\right), \tag{3.52}$$

де

$$\tilde{\triangle} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \qquad f' \equiv \frac{df}{d\psi}.$$

Для $r$-компоненти векторного добутку $\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}$ маємо

$$V_\varphi \mathrm{rot}_z\mathbf{V} - V_z\mathrm{rot}_\varphi\mathbf{V} = \frac{\partial\Pi}{\partial r}, \tag{3.53}$$

де $\Pi = p/\rho + V^2/2$ — інтеграл Бернуллі. Враховуючи (3.50) та (3.51), отримуємо

$$\mathrm{rot}_\varphi\mathbf{V} = -\frac{ff'}{r} + \frac{r}{\psi'_r}\frac{\partial\Pi}{\partial r}, \qquad \psi'_r \equiv \frac{d\psi}{dr}. \tag{3.54}$$

Прирівнюючи (3.52) і (3.54) для азимутальної складової завихреності ($\varphi$-компонента), отримуємо для $\psi$ рівняння Брегга-Хотторна [54, 39] (або, що те ж, Ґреда-Шафранова в МГД-випадку [43]) при заданих $\Pi$ і $f$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\psi^2}{\partial z^2} = r^2\frac{d\Pi}{d\psi} - f\frac{df}{d\psi}. \tag{3.55}$$

Розв'язок рівняння (3.55) при $f \neq 0$ описує стаціонарні осесиметричні течії із закруткою. Один з таких розв'язків можна отримати для випадку

$$\frac{d\Pi}{d\psi} = \mathrm{const} = \alpha\phi_0, \qquad -f\frac{df}{d\psi} = \mathrm{const} = -\beta R^2\phi_0 \tag{3.56}$$

($\alpha$ і $\beta$) — безрозмірні константи, $\phi_0$ — розмірний нормувальний множник). Тоді розв'язок рівняння (3.55) для функції струму Стокса має вигляд [43] [1]

$$\psi = \phi_0\left[\frac{1}{2}(\beta R^2 + r^2)z^2 + \frac{\alpha-1}{8}(r^2-R^2)^2\right]. \tag{3.57}$$

---

[1] Примітка 1. Інші приклади рішень, головним чином у зв'язку з дослідженням МГД-конфігурацій, можна знайти в монографії [48] і в збірниках оглядів "Питання теорії плазми" під ред. М.А. Леонтовича (Атомиздат, Вища школа, Москва (1963-1982)).

По ньому за допомогою співвідношень (3.50) знаходимо $V_r$ і $V_z$, а за допомогою рівнянь (3.56) задаємо швидкість закрутки $V_\varphi$ (і тиск $p$). Поблизу від кола $r = R$, $z = 0$ (тобто при $|r - R|/R \ll 1$ і малих $z$) вираз (3.57) для функції струму переходить в наступний:

$$\psi = \frac{1}{2}\phi_0 R^2[(\beta + 1)z^2 + (\alpha - 1)(r - R)^2]. \tag{3.58}$$

У даному рішенні при $\beta + 1 > 0$ і $\alpha > 1$ поверхні $\psi(r, z) = \text{const}$ являють собою вкладені тори із загальною круговою віссю — направляючою $r = R$, $z = 0$, а їх меридіональні перетини являють собою еліпси. З рівнянь (3.56) отримуємо

$$\Pi = \alpha\phi_0\psi + \Pi_0, \qquad f^2 = f_0^2 - 2\beta R^2\phi_0\psi, \tag{3.59}$$

де $\Pi_0$ і $f_0$ — сталі інтегрування, які параметризують даний розв'язок.

Нижче ми знайдемо для розв'язку (3.58) інтеграл спіральності [188]

$$S = \int \mathbf{V}\text{rot}\mathbf{V}dV. \tag{3.60}$$

Обмежимося окремим випадком $\beta + 1 = \alpha - 1$, коли перетинами поверхонь струму меридіональної площини є кола:

$$\psi \approx \frac{1}{2}\phi_0 R^2(\alpha - 1)[z^2 + (r - R)^2]. \tag{3.61}$$

Будь-який з торів $\psi(r, z) = \text{const}$ може бути прийнятий за границю області, зайняту закрученою вихровою течією. Будемо вважати його поперечний меридіональний перетин колом радіуса $a$ (рис. 3.10). Поза межами тора течію

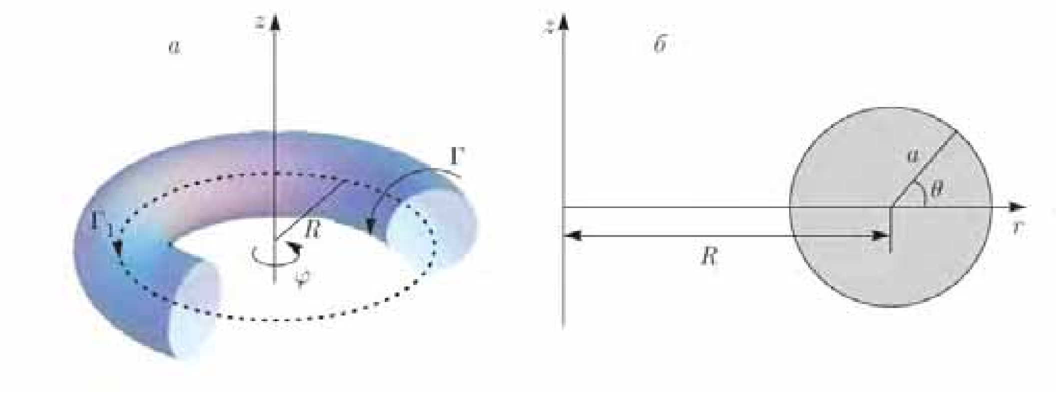


Рис. 3.10. Схема тороїдального вихору (а) і перетин в меридіональній площині (б).

будемо вважати потенціальною. З огляду на співвідношення (3.50), для компонент швидкості отримуємо

$$V_r = -R^2\phi_0(\alpha-1)\frac{z}{r}, \qquad V_z = -R^2\phi_0(\alpha-1)\frac{r-R}{r}. \tag{3.62}$$

У разі тонкого кільцевого вихору цей рух в меридіональній площині має характер "твердотільного обертання", оскільки лінійна швидкість обертання пропорційна відстані до кругової направляючої кільцевого вихору. Для цього випадку, з огляду на (3.62), отримуємо

$$V_r \approx -R\phi_0(\alpha-1)z, \qquad V_z \approx R\phi_0(\alpha-1)(r-R). \tag{3.63}$$

При цьому азимутальна компонента завихреності в тонкому кільці практично постійна,

$$\omega_\varphi \approx -2R\phi_0(\alpha-1). \tag{3.64}$$

### *3.4.2 Випадок однорідної закрутки*

Розглянемо спочатку випадок $\beta = 0$, $\alpha = 2$. При цьому $f(\psi) \equiv f_0 =$ const. Це означає, що закрутка всередині тора розподілена однорідно: $V_\phi = f_0/r \approx f_0/R$. Дві інші компоненти швидкості та азимутальна компонента ротора записуються у вигляді

$$V_r \approx -R\phi_0 z, \quad V_z \approx -R\phi_0(r-R), \quad \omega_\varphi \approx -2R\phi_0. \tag{3.65}$$

Перейдемо в полярну систему координат в меридіональній площині з

$$r - R = \eta\cos\theta, \quad z = \eta\sin\theta\,, \tag{3.66}$$

$\eta$ — координата, яка відраховується від кругової осі тора уздовж радіуса його поперечного перерізу (див. рис. 3.10). На границі $\eta = a$ маємо вихровий шар $\omega_\theta = -V_\phi\delta(\eta - a)$, оскільки азимутальна швидкість тут зазнає розрив (вважаємо, що поза тором вона обертається в нуль)$^1$. При наявності всередині тора закрутки — орбітального руху (по куту $\phi$) і вихрового руху в меридіональному перерізі уздовж малого контуру (по куту $\theta$) — спіральність (3.60) зручно представити в вигляді суми двох складових:

$$S = S_\varphi + S_\theta, \quad S_\varphi = \int V_\varphi\omega_\varphi dV, \quad S_\theta = \int (V_r\omega_r + V_z\omega_z)dV. \tag{3.67}$$

---

Примітка 1. $\delta(x)$ – функція Дірака.

Обчислюючи складові $S_\varphi$, $S_\theta$ спіральності (3.67), з урахуванням виразів (3.65) і $V_\theta^2 = V_r^2 + V_z^2$, маємо

$$S_\varphi = \int V_\varphi \omega_\varphi dV \approx -4\pi^2 Ra^2 f_0 \phi_0,$$
$$S_\theta = \int (V_r\omega_r + V_z\omega_z) dV = \int V_\theta \omega_\theta dV = -\int_\Sigma V_\theta V_\varphi dS. \tag{3.68}$$

В останньому виразі в (3.68) інтегрування ведеться по поверхні $\Sigma$ вихрового кільця. Оскільки на цій поверхні $V_\theta \approx Ra\phi_0$ і $V_\varphi \approx f_0/R$, маємо $S_\theta \approx -4\pi^2 Ra^2 f_0 \phi_0$. Звідси слідує, що $S_\theta = S_\varphi$ і, відповідно, для даного розв'язку $S = 2S_\varphi$. (В роботі [75] було показано, що співвідношення $S = 2S_\varphi$ є дуже загальним.) Таким чином, для спіральності отримуємо

$$S = -8\pi^2 Ra^2 f_0 \phi_0. \tag{3.69}$$

Зв'яжемо отримане значення спіральності зі значеннями циркуляції швидкості $\Gamma$ по малому контуру, яке охоплює вихрове кільце один раз, і $\Gamma_1$ по великому контуру, що збігається з круговою направляючою тора:

$$\Gamma = a \int_0^{2\pi} V_\theta d\theta \approx 2\pi a^2 R\phi_0,$$
$$\Gamma_1 = R \int_0^{2\pi} V_\varphi d\varphi = 2\pi f_0. \tag{3.70}$$

Тоді для спіральності (3.69), враховуючи (3.70), отримуємо вираз, який відповідає відомій формулі Моффата

$$S = -2\Gamma\Gamma_1. \tag{3.71}$$

### *3.4.3 Випадок неоднорідної закрутки.*

Розглянемо тепер випадок неоднорідної закрутки, обмежуючись вивченням спеціального випадку, коли максимум азимутальної швидкості досягається на круговий твірній вихрового кільця: $\beta = \alpha - 2 > 0$, а на поверхні кільця закрутка зникає. З виразу (3.61) для функції струму отримуємо на границі тора

$$\psi \approx (\alpha - 1)\phi_0 R^2 a^2/2, \tag{3.72}$$

де $a$ — малий радіус тороїдального вихору (радіус меридіонального перетину). Вважаючи на цій границі $V_\phi = 0$, тобто $f|_a = 0$, знаходимо сталу інтегрування $f_0$ в виразі (3.59):

$$f_0 = \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}\phi_0 R^2 a. \tag{3.73}$$

Тоді всередині вихрового кільця $a^2 \geq z^2 + (r - R)^2$ азимутальна швидкість дорівнює

$$V_\varphi = \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}\phi_0 R^2 \frac{\sqrt{a^2 - [z^2 + (r - R)^2]}}{r}, \tag{3.74}$$

а азимутальна компонента завихреності має вигляд

$$\omega_\varphi = -\varphi(\alpha - 1)R^2 \frac{r + R}{r^2} \approx -2\phi_0 R(\alpha - 1). \tag{3.75}$$

Таким чином, в розглянутому наближенні $|r - R|/R \ll 1$ для тонкого вихору отримуємо

$$V_\varphi \omega_\varphi \approx -2\phi_0^2 \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \times R^2 \sqrt{a^2 - [z^2 + (r - R)^2]}. \tag{3.76}$$

Для знаходження $\varphi$-ї складової спіральності інтегруємо (3.76) за об'ємом тора:

$$S_\varphi = -2\phi_0^2 \sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \times R^2 \cdot 2\pi R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a d\eta \sqrt{a^2 - \eta^2}. \tag{3.77}$$

Остаточно отримуємо

$$S_\varphi = -\frac{8}{3}\pi^2 a^3 R^3 \varphi_0^2 (\alpha - 1)\sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \tag{3.78}$$

Щоб вивести вираз для $S_\theta$, знайдемо відповідні компоненти швидкості і завихренності:

$$V_r \approx -(\alpha - 1)R\phi_0 z, \qquad V_z \approx -(\alpha - 1)R\phi_0 (r - R),$$

$$\omega_r \approx \phi_0 R z \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{\alpha^2 - [z^2 + (r - R)^2]}},$$

$$\omega_z \approx \phi_0 R(r - R) \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{\alpha^2 - [z^2 + (r - R)^2]}}.$$

Інтегруючи за об'ємом кільцевого вихору, знаходимо

$$S_\theta = \int (V_r \omega_r + V_z \omega_z) dV = -(\alpha - 1)^{3/2} (\alpha - 2)^{1/2} \times$$

$$\times\phi_0^2 R^2 \int \frac{z^2+(r-R)^2}{\sqrt{a^2-[z^2+(r-R)^2]}}dV.$$

Використовуючи ту ж, що і раніше, заміну змінних, отримуємо

$$S_\theta = -(\alpha-1)^{3/2}(\alpha-2)^{1/2}4\pi^2\phi_0^2R^3\int_0^a \frac{\eta^3}{\sqrt{a^2+\eta^2}}d\eta =$$

$$= -\frac{8}{3}\pi^2a^3R^3\phi_0^2(\alpha-1)\sqrt{(\alpha-1)(\alpha-2)}.$$

Порівнюючи цей вираз з (3.78), бачимо, що, як і вище, $S_\theta = S_\varphi$ і $S = 2S_\varphi$. Виразимо спіральність через циркуляції швидкості по малому ($\Gamma$) і великому ($\Gamma_1$) контурам (див. рис. 3.10). Для циркуляції по малому контуру (кола радіуса $a$), використовуючи формулу Стокса, отримуємо

$$\Gamma = a\int_0^{2\pi} V_\theta d\theta \approx -\pi a^2\omega_\varphi = 2\pi a^2 R\phi_0(\alpha-1). \tag{3.79}$$

Циркуляція по великому контуру (по круговій направляючій тора) дорівнює

$$\Gamma_1 = R\int_0^{2\pi} V_\varphi d\varphi = 2\pi R^2 a\phi_0\sqrt{(\alpha-1)(\alpha-2)}. \tag{3.80}$$

Виражаючи спіральність через циркуляції (3.70), для розглянутого випадку неоднорідної закрутки з максимумом її швидкості на круговій осі і нулем на границі отримуємо

$$S = -\frac{4}{3}\Gamma\Gamma_1. \tag{3.81}$$

Ми бачимо, що в разі неоднорідної закрутки модуль коефіцієнта $k$ при добутку циркуляцій у виразі для спіральності $S = -k\Gamma\Gamma_1$ може відрізнятися від двійки.

Таким чином, для вихору із закруткою (орбітальним рухом) спіральність відмінна від нуля, однак зв'язок з добутком циркуляцій зачеплених контурів відрізняється від відомої формули $S = \pm 2\Gamma\Gamma_1 I$, де множник $I$ — інтеграл зачеплень Гаусса, який приймає цілочисельні значення [58, 29, 3]. У нашому випадку для тонких кільцевих вихорів з круговим поперечним перерізом в узагальненій формулі $S = -k\Gamma\Gamma_1$ значення коефіцієнта $k = 2$ для випадку однорідної закрутки і $k = 4/3$ для випадку неоднорідної закрутки з максимумом швидкості на твірнії тора [75].

# ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

В даному розділі досліджена динаміка одиночного і дипольного тороїдального осесиметричних вихорів в центральному потоці. Отримано точні розв'язки і проаналізовано їх асимптотики. Показано, що існують як аналогії, так і якісні відмінності динаміки таких вихорів в $3D$ від поведінки систем плоских вихорів ($2D$). У збіжному (акреційному) потоці кільцеві вихори, так само як і їх плоскі аналоги, прискорюються. У разі дипольного тороїдального вихору це призводить до викиду прискорених компонент. Однак, на відміну від плоского випадку, при достатній потужності потоку відбувається захоплення кільцевих вихорів потоком, що супроводжується їх колапсом. Орбітальний рух призводить до ситуації з можливими зворотними рухами (ефект бумеранга).

Також для вихору із закруткою (орбітальним рухом) спіральність відмінна від нуля, але зв'язок з добутком циркуляцій зачеплених контурів відрізняється від відомої формули Моффата. Для тонких кільцевих вихорів з круговим поперечним перерізом за наявності закрутки в узагальненій формулі $S = -k\Gamma\Gamma_1$ значення коефіцієнта $k = 2$ для випадку однорідної закрутки і $k = 4/3$ для випадку неоднорідної закрутки з максимумом швидкості на твірнії тора.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [11, 10, 75, 77, 78, 87].

# РОЗДІЛ 4

# ГРАВІТАЦІЙНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ОДНОРІДНОГО КРУГОВОГО ТОРА

Теорія гравітаційного потенціалу почала бурхливо розвиватися у XVIII столітті у зв'язку з дослідженням гравітаційного поля Землі. Основні досягнення пов'язані з дослідженням потенціалу кулі, сферичної оболонки, еліпсоїда, диска — всіх тих фігур, які є ключовими в небесній механіці і астрофізиці. Дійсно, планети і зорі являють собою сплюснуті сфероїди, а однією з основних складових галактик є диск. Гравітаційний потенціал тора на той момент був дуже спеціальним випадком, який, можливо, представляв інтерес з точки зору нетривіальної топології. Напевно, саме у зв'язку з цим Бертран Ріман присвятив одну зі своїх останніх робіт гравітаційному потенціалу тора [51], в якій він розглянув можливість того, що потенціал тора можна представити у вигляді ряду Фур'є. Ця робота залишилася незавершеною і вираз для потенціалу тора в остаточному варіанті ним не був отриман, але це був перший крок до дослідження потенціалу тора. Кільце є окремим випадком тора, при якому його малий радіус набагато менше великого. Кільця — більш звичний елемент космічних об'єктів, найвідомішим випадком є кільця Сатурна. Маса кілець Сатурна нехтувано мала в порівнянні з масою планети, проте існування таких структур привернуло увагу до дослідження потенціалу тора. Відзначимо, що кільцям присвятила свою роботу Софія Ковалевська, що було пов'язано з дослідженням кілець Сатурна [34]. Наступний крок був зроблений в роботі Цюге [244], в якій потенціал тора був записаний, однак детально не досліджений. Протягом майже століття потенціал тора залишався недоторканою задачею, незважаючи на те, що тороїдальні структури вже почали спостерігатися (протопланетні диски, кільцеві галактики, затінюючі тори). У зв'язку зі складною топологією цього об'єкта потенціал тора виявляється досить громіздким і складним в аналітичному дослідженні [35], інколи не залишаючи шансів на знаходження зручних виразів для подальшого використання, наприклад, в задачах про рух частинки в такому гравітаційному полі. Тор, як і нескінченне кільце, є атрактором — це можна показати елементарними міркуваннями, які були приведені в роботах [5, 7]. Це, у свою чергу означає, що можна очікувати нетривіальні фізичні висновки в динаміці систем, що містять тороїдальні структури. Але перш ніж перейти безпосередньо до динаміки, необхідно детально дослідити гравітаційний потенціал тора.

У цьому розділі ми отримаємо новий вираз для потенціалу тора в довільній точці, а також детально дослідимо його в зовнішній та внутрішній областях. Результати дослідження, як буде видно нижче, виявляться несподіваними в узагальненні/аналогії з більш простими об'єктами, дозволяючи істотно спростити багато задач, пов'язаних з дослідженням динаміки в астрофізичних об'єктах, які містять тороїдальні структури.

## 4.1 Аналіз знаходження потенціалу тора різними методами

В рамках методів класичної механіки і теорії потенціалу для знаходження потенціалу об'ємного тіла ми можемо використовувати кілька способів.

### *4.1.1 Потенціал тора прямим інтегруванням за об'ємом*

Найперший і очевидний спосіб — це інтегрування за об'ємом. Ми побачимо, що отриманий вираз дуже незручний для дослідження, але він корисний для порівняння з новим виразом для потенціалу тора, який буде отримано в наступних підрозділах.

Отже, за визначенням, потенціал об'ємного тіла є

$$\varphi_V = G\int \frac{dm}{\tilde{r}} = G\kappa \int_V \frac{dV}{\tilde{r}}. \tag{4.1}$$

Ми ввели індекс "V" вказуючи, що цей вираз ми отримуємо прямим інтегруванням за об'ємом, щоб відрізняти його від нового виразу для потенціалу (див. наступний підрозділ). Розглянемо однорідний круговий тор з постійним розподілом густини $\kappa = \text{const}$, тоді густина тора з масою $M$, малим радіусом $R_0$ і великим радіусом $R$: $\kappa = M/(2\pi^2 R R_0^2)$. Зауважимо, що об'єм тора знаходиться простим способом відповідно до теореми Паппа-Гульдіна: об'єм тіла обертання дорівнює добутку площі його перетину $\pi R_0^2$ на довжину твірної окружності $2\pi R$. Відстань $\tilde{r}$ – це відстань від точки $P$, в якій шукаємо потенціал до елемента об'єму тора, тобто $\tilde{r} = |\mathbf{r}_{(P)} - \mathbf{r}_{(V)}|$. Тут $\mathbf{r}_{(P)}$ і $\mathbf{r}_{(V)}$ — радіус вектор точки $P$ і елемента об'єму $dV$, відповідно. Внаслідок симетрії по азимутальному куту, ми можемо вибрати довільно вісь в екваторіальній площині. Введемо циліндричну систему координат $(r, \theta, z)$ і виберемо площину, у якій азимутальний кут $\theta$ відлічується від площини $(r, z)$, що проходить через точку $P$. Тоді координати цієї точки $P(r, 0, z)$. Координати елемента об'єму: $dV(r' \cos\theta, r' \sin\theta, z')$, де $(r', \theta, z')$ — циліндричні координати, за якими необхідно інтегрувати. Таким чином, підінтегральний вираз

$$\phi_V(r, z) = \frac{1}{\sqrt{(r - r'\cos\theta)^2 + (r'\sin\theta)^2 + (z - z')^2}} \tag{4.2}$$

і, з урахуванням елемента об'єму в циліндричних координатах, отримуємо вираз для потенціалу тора:

$$\varphi_V(r, z) = \frac{GM}{2\pi^2 R_0^2 R} \int_0^{2\pi} \int_{R-R_0}^{R+R_0} \int_{-\sqrt{R_0^2 - (r'-R)^2}}^{\sqrt{R_0^2 - (r'-R)^2}} \phi_V(r, z; r', z', \theta) r' dz' dr' d\theta. \tag{4.3}$$

Для подальшого зручно ввести безрозмірні координати: $\rho = r/R$ , $\zeta = z/R$ і малий радіус тора в одиницях великого радіуса: $r_0 = R_0/R$. Ми також будемо називати його геометричним параметром, оскільки він визначає геометричну товщину тора. Тоді вираз (4.3) має вигляд:

$$\varphi_V(\rho, \zeta) = \frac{GM}{2\pi^2 r_0^2 R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1-r_0}^{1+r_0} d\rho' \int_{-\sqrt{r_0^2 - (\rho'-1)^2}}^{\sqrt{r_0^2 - (\rho'-1)^2}} \phi_V(\rho', \zeta', \theta) \rho' d\zeta', \tag{4.4}$$

$$\phi_V(\rho, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(\rho - \rho'\cos\theta)^2 + (\rho'\sin\theta)^2 + (\zeta - \zeta')^2}}. \tag{4.5}$$

Цей вираз визначає потенціал тора в довільній точці простору. Інтеграл в (4.4) не має аналітичного розв'язку і не призводить до жодних спрощень. Використовувати цей вираз для дослідження практично неможливо, окрім як шляхом чисельного аналізу. Використання цього виразу особливо невигідне для дослідження динаміки частинки в гравітаційному полі тора, оскільки в правій частині рівнянь руху ми повинні використовувати силу, тобто похідні по координатах від (4.4). Крім того, чисельний розрахунок показує, що для побудови кривої потенціалу по (4.4) потрібно брати дуже малий крок інтегрування для досягнення хорошої точності обчислень, що призводить до значних витрат машинного часу.

### *4.1.2 Потенціал тора по теоремі Діріхле*

Другий спосіб знаходження потенціалу тіла — використання теореми Діріхле [56, 28], тобто урахування, що у зовнішній області (поза об'ємом тіла) потенціал повинен задовольняти рівнянню Лапласа, а у внутрішній області — рівнянню Пуассона. При цьому функція, яку ототожнюють з потенціалом, повинна бути неперервною, мати похідні і зшиватись на границях. Даний метод можна використовувати, наприклад, для знаходження потенціалу кулі, (незалежно від методу інтегрування за об'ємом). Виведення потенціалу кулі з використанням теореми Діріхле, виявляється дуже елегантним.

Для тора ця задача виявляється не тільки складною, але часом непрохідною. У рівнянні Пуассона тороїдальні координати не розділяються, що не дозволяє розв'язати задачу даним способом в довільній точці. У магнітостатиці магнітний потенціал, що задовольняє рівнянню Лапласа, досліджувався (в тороїдальних координатах) у зв'язку із задачею про токамаки (посилання на ці роботи можна знайти в [133]), та також були розглянути задачі для спеціальних випадків [47, 53]. Зауважимо, що в електростатиці більшість задач відповідає випадку, коли заряд розподіляється по поверхні, що зводить задачу до пошуку потенціалу оболонки тора, на відміну від гравітаційного потенціалу, де необхідно інтегрувати за об'ємом.

Нижче ми представимо дослідження потенціалу тора, основні результати якого були опубліковані в нашій першій роботі 2011 р. [81], яка відкрила подальші можливості для дослідження динаміки в гравітаційному полі тора. Зауважимо, що в останні роки почали з'являтися роботи, в яких гравітаційний потенціал тора розглядається в тороїдальних координатах. Наприклад, у в 2019 р. Дж. Юре та ін. [158] досліджували потенціал тороїдальної оболонки в тороїдальних координатах; в 2018 р. Б.П. Кондратьєв розглянув розкладання в ряд по геометричному параметру [169], у 2016 р. Т.Фукушима [133] отримав вираз для зовнішнього гравітаційного поля тора з різним перетином в зональних тороїдальних гармоніках. Один з перетинів було вибрано відповідно до чисельного моделюваня в задачі $N$ тіл, яке відповідає рівноважному гравітуючому тору і який був отриманий в нашій статті 2012 р. [79]. Для випадку зовнішнього потенціалу однорідного кругового тора результат Т. Фукушима [133] добре узгоджується з нашим результатом 2012 року [79], який буде детально представлений нижче. Поява інтересу до дослідження потенціалу тора в останні роки пов'язана з виявленням об'єктів різного типу, які містять тороїдальні структури. З іншого боку, різні підходи (в циліндричних або в тороїдальних координатах) дозволяють незалежно досліджувати властивості цих об'єктів.

### *4.1.3 Використання потенціалів елементарних тіл*

Третій спосіб полягає в знаходженні потенціалу шляхом підсумовування по потенціалах елементарних тіл. Прикладом є добре відомий випадок знаходження потенціалу кулі, складеного з потенціалів сферичних оболонок. При цьому виведення виявляється особливо елегантним, оскільки використовується особливість потенціалу сферичної оболонки – всередині оболонки в будь-якій точці сума всіх сил дорівнює нулю. Можливо, саме цей спосіб використовував Ісаак Ньютон, коли робив висновок про те, що зовнішній потенціал кулі є потенціал матеріальної точки. Цей метод відіграє особливо важливу роль, коли досліджуваний об'єкт має складну форму. У випадку зі знаходженням потенціалу тора саме цей метод виявляється найвдалішим.

Однак навіть в цьому методі важливим виявляється правильний вибір складового елементу. Це може значно спростити подальше дослідження динамічних задач або, навпаки, приховати фізичні властивості системи від дослідника в лісі математичних виразів. В [35] в якості складового елементу використовувався потенціал диска. При цьому потенціал тора вдалося звести до однократного інтегралу від комбінації еліптичних інтегралів всіх трьох родів зі складним виразом для їх модулів. Це свого роду математичний успіх, але вираз для потенціалу тора виявився громіздким, а фізичні властивості залишилися захованими глибоко в математичних виразах (див. [169] де є відповідні посилання).

Оскільки в граничному випадку тор вироджується в нескінченно тонке кільце (при прагненні малого радіуса до нуля), то природно вибрати в якості елементарного об'єкта саме нескінченно тонке кільце. Знаючи потенціал кільця, потенціал тора будемо шукати у вигляді суперпозиції потенціалів таких складових кілець. У наступному розділі буде показано, що новий вираз для потенціалу тора [81], отриманий таким методом, дозволяє зробити важливі висновки про гравітаційні властивості тора і динаміку в гравітаційному полі системи, яка містить тороїдальну структуру [79, 73] (розділи 5, 6).

## 4.2 Інтегральний вираз для потенціалу однорідного кругового тора

Нехай тор характеризується масою $M$, великим $R$ і малим $R_0$ радіусами. Розглянемо випадок однорідного тора з круговим перерізом. Складемо тор з набору нескінченно тонких кілець, які надалі будемо називати складовими кільцями (див. рис. 4.1). При цьому площини кілець паралельні екваторіальній площині симетрії тора.

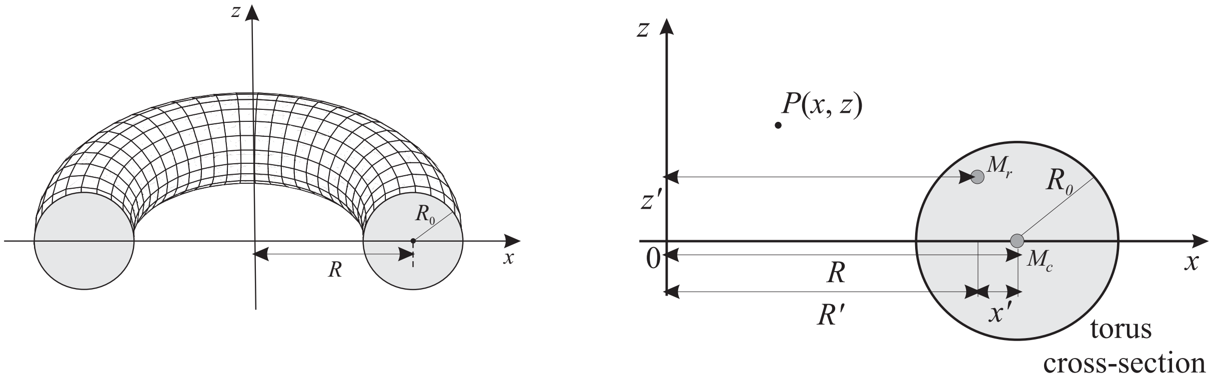


Рис. 4.1. *Зліва*: 3D-схема тора. *Справа*: схематичний перетин тора, представлений у вигляді набору складових нескінченно тонких кілець. На рисунку координата $x$ дорівнює $r$ в тексті.

Виділимо центральне кільце з масою $M_c$ і радіусом $R$ з набору кілець, які складають тор. Виберемо, як і раніше, циліндричну систему координат. Внаслідок аксіальної симетрії ми можемо розглядати довільну площину, тобто зафіксувати азимутальний кут. Таким чином, для тора, який є осесиметричним тілом, потенціал буде залежати тільки від двох координат $(r, z)$. Введемо відразу безрозмірні координати, нормовані на великий радіус тора, тобто $\rho = r/R$ , $\zeta = z/R$. Потенціал, створюваний цим кільцем в довільній точці $P(\rho, \zeta)$ має наступний вигляд:

$$\varphi_c(\rho, \zeta; R, M_c) = \frac{GM_c}{\pi R} \cdot \phi_c\left(\rho, \zeta\right), \tag{4.6}$$

де безрозмірний потенціал нескінченно тонкого кільця:

$$\phi_c\left(\rho, \zeta\right) = \sqrt{\frac{m}{\rho}} \cdot K(m), \tag{4.7}$$

повний еліптичний інтеграл 1-го роду:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m\sin^2\beta}} \tag{4.8}$$

з параметром

$$m = \frac{4\rho}{(\rho+1)^2 + \zeta^2}. \tag{4.9}$$

Потенціал в точці $P(\rho, \zeta)$, створюваний довільним кільцем з радіусом $R'$ і масою $M_r$, яке розташоване в торі на висоті $z'$ (рис. 4.1) має вигляд

$$\varphi_r(\rho, \zeta; M_r, z') = \frac{GM_r}{\pi R'} \cdot \phi_r, \tag{4.10}$$

де вираз для безрозмірного потенціалу складеного кільця $\phi_r$ отримано шляхом підстановки виду $R/R \to r/R'$ і $z/R \to (z - z')/R'$ в (4.7). Будемо називати координатами складеного кільця — координати точки перетину кільця з меридіональною площиною. Положення цієї точки визначається радіусом кільця $R'$ і відстанню від кільця до екваторіальної площини симетрії тора $z'$ (рис. 4.1). Зауважимо, що в силу симетрії ми можемо вибрати цю площину у такий спосіб, щоб вона збігалася з площиною, в якій розташована точка $P$. Координата складеного кільця, яка відраховується від центру перетину тора (рис. 4.1), виражається через великі радіуси кілець $x' = R' - R$. Отже, ми можемо виразити радіус складеного кільця через координату $R' = R + x'$. Введемо позначення, які пов'язані з безрозмірними координатами складеного кільця $\eta' = x'/R$ , $\zeta' = z'/R$. При цьому $\eta'$ відраховується від центру перетину тора. Тоді безрозмірний потенціал складеного кільця має вигляд

$$\phi_r(\rho, \zeta; \eta', \zeta') = \sqrt{\frac{(1+\eta') \cdot m_r}{\rho}} \cdot K(m_r), \tag{4.11}$$

де

$$m_r = \frac{4\rho \cdot (1+\eta')}{(1+\eta'+\rho)^2 + (\zeta-\zeta')^2}\ . \tag{4.12}$$

Умова однорідності тора означає рівність приведених мас $\chi_c = \chi_r$, де $\chi_c = M_c/(2\pi R)$ – приведена маса центрального кільця, а приведена маса складеного кільця $\chi_r = M_r/(2\pi R')$. Тоді маса складеного кільця $M_r = M_c R'/R$. Остаточно, вираз для потенціалу складеного кільця

$$\varphi_r(\rho,\zeta;\eta',\zeta') = \frac{GM_c}{\pi R} \cdot \phi_r\,, \tag{4.13}$$

де $\phi_r$ визначається (4.11) та (4.12). Внаслідок аддитивності, потенціал тора може бути представлений у вигляді інтегрування по потенціалах всіх складових кілець. Для цього замінимо дискретну масу кільця $M_c$ в (4.13) на диференціальну $dM$, яка в разі однорідного кругового тора дорівнює $dM = \frac{M}{\pi r_0^2} d\eta' d\zeta'$, де $M$ — повна маса тора, еквівалентна сумі мас складових кілець, а $r_0 = R_0/R$ – безрозмірний малий радіус тора (геометричний параметр). Тоді потенціал однорідного кругового тора

$$\varphi_{torus}(\rho,\zeta) = \frac{GM}{\pi^2 R r_0^2} \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-\sqrt{r_0^2-\eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2-\eta'^2}} \phi_r(\rho,\zeta;\eta',\zeta') d\eta' d\zeta', \tag{4.14}$$

де, ще раз нагадаємо, $\phi_r$ визначається виразом (4.11), (4.12). Отриманий інтегральний вираз для потенціалу однорідного кругового тора справедливий у всій області (внутрішній і зовнішній). Чисельне порівняння кривих потенціалу, отриманих за формулою (4.14) і за формулою (4.4), збігаються, що демонструє правильність отриманого нового виразу для потенціалу тора (4.14). При чисельному розрахунку кривих потенціалу "за об'ємом" (4.4) точність необхідно збільшувати в шість разів, порівняно з розрахунком потенціалу за формулою (4.14).

Надалі при аналізі наближених виразів потенціалу тора ми будемо використовувати термін "точний" для значень потенціалу, отриманого за формулою (4.14). На рис. 4.2 представлені залежності потенціалу тора від радіальної координати, які отримані чисельним інтегруванням (4.14) для тора з різним значенням геометричного параметра $r_0$. Видно, що криві потенціалу для різних значень $r_0$ вписані в криву потенціалу нескінченно тонкого кільця тієї ж маси і радіусом $R$, розташованого в екваторіальній площині симетрії

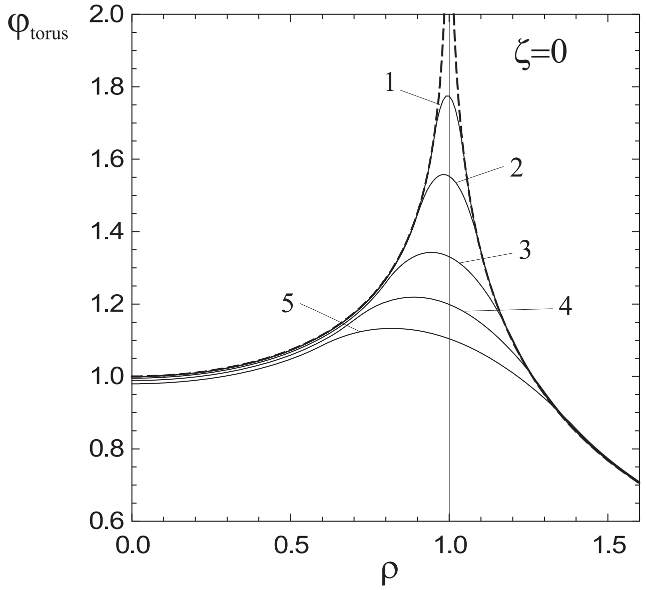


Рис. 4.2. Залежність потенціалу від радіальної координати при $\zeta = 0$ для тора з різними значеннями геометричного параметра: 1) $r_0 = 0.05$, 2) $r_0 = 0.1$, 3) $r_0 = 0.2$, 4) $r_0 = 0.3$, 5) $r_0 = 0.4$. Потенціал нескінченно тонкого кільця (4.6) з масою $M$, рівною масі тора, показаний пунктирною лінією. На цьому рисунку і на всіх наступних $M = 1$, $R = 1$, $G = 1$.

тора. Також видно з рис. 4.2, що криві потенціалу тора праворуч від поверхні ($\rho > 1 + r_0$) збігаються з кривою потенціалу кільця, в той час як зліва ($\rho < 1 + r_0$) є невелика відмінність, тобто криві потенціалу тора нижче ніж потенціал кільця, і видно залежність цієї відмінності від геометричного параметра $r_0$. Ми детально дослідимо цю залежність в наступному розділі і отримаємо наближені вирази, які дозволять побачити цю залежність аналітично. Заздалегідь можна сказати, що ця відмінність пов’язана з нетривіальною топологією поверхні тора, яка полягає в тому, що гауссова кривизна поверхні тора змінює знак при обході по перетину. Цікавим є наступний факт. Потенціал нескінченно тонкого кільця прагне до нескінченності на його радіусі. Це типова властивість одновимірних гравітуючих тіл. Однак в процесі інтегрування по кільцях, результуючий потенціал тора є гладкою функцією, тобто нескінченність заінтегріровалась. Важливою властивістю гравітаційного потенціалу тора є те, що максимум потенціалу зміщений відносно центру перетину ($\rho = 1$). Це попередньо наводить на припущення про те, що гравітуючий тор без центральної маси повинен стискатися по великому радіусу і, по всій видимості, істотну роль має відігравати орбітальний рух і відцентрові сили.

Таким чином, можна припустити істотну роль центральної маси в стабільності гравітуючого тора. Це докладно буде розглянуто в наступних розділах дисертації.

На рис. 4.3 показана залежність потенціалу тора від радіальної координати для різних значень $\zeta$, яка отримана чисельно за формулою (4.14). Зауважимо,

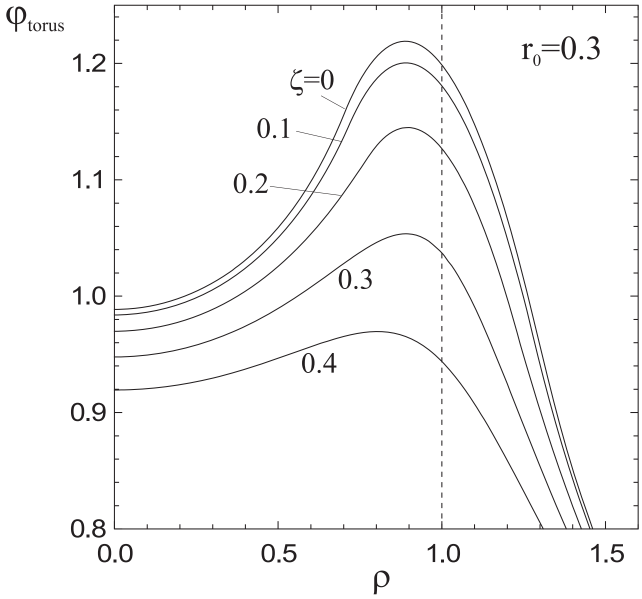


Рис. 4.3. Потенціал тора $r_0 = 0.3$ як функція від радіальної координати для різних значень $\zeta = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

що в роботі [35] (с.196, формула (7.26)) вираз для потенціалу тора було отримано в результаті складання його з нескінченно тонких дисків. Це дозволило знайти вираз для потенціалу тора у вигляді однократного інтегрування, але по еліптичних інтегралах всіх трьох типів з громіздким виразом для їх модулів. Відмінність від нашого підходу є істотною, тому що в якості складового елементу ми використовуємо більш елементарний об'єкт — нескінченно тонке кільце. З фізичної точки зору це більш природно, оскільки нескінченно тонке кільце є граничним випадком, тому що при $R_0$, який прагне до нуля, тор вироджується в нескінченно тонке кільце. Це дозволяє досліджувати зв'язок між потенціалом складної об'ємної фігури і елементарного об'єкта так, як це робилося в класичних задачах теорії потенціалу, наприклад, потенціал кулі та потенціал матеріальної точки. Ми побачимо далі в розділах 4.3 і 4.4, що такий підхід дійсно дозволяє побачити фізичні аналогії та, спираючись на них, знайти більш прості наближені аналітичні вирази для потенціалу тора.

Це, у свою чергу, може значно спростити багато задач небесної механіки, зоряної динаміки і астрофізики при дослідженні об'єктів, в яких присутні тороїдальні (кільцеві) структури.

У наступному розділі ми досліджуємо потенціал тора у зовнішній області. Оскільки тор є двозв'язним об'єктом, необхідно чітко визначити, що розуміється під внутрішньою та зовнішньою областями. Визначимо зовнішню область тора як область, в якій немає розподілу густини, тобто поза об'ємом тора. Це означає, що центральний отвір тора також є зовнішньою областю. Внутрішня область – це область, де розподіл густини присутній, тобто це область всередині об'єму тора. Таке визначення цілком природне, тому що воно пов'язане з визначенням по теоремі Діріхле: зовнішній потенціал тора задовольняє рівнянню Лапласа, а внутрішній потенціал — рівнянню Пуассона.

## 4.3 Потенціал тора у зовнішній області

Як видно з рис. 4.2, зовнішній потенціал тора наближено можна представити потенціалом нескінченно тонкого кільця тієї ж маси аж до поверхні тора. Значення потенціалу тора відрізняється від потенціалу кільця на величину, що залежить від геометричного параметра $r_0$, що проявляється значніше для товстого тора ($r_0 > 0.5$). Безумовно представляє інтерес виразити потенціал тора через потенціал нескінченно тонкого кільця і отримати залежність від геометричного параметра аналітично. Інтегральний вираз для потенціалу тора не виражається у елементарних функціях, інтеграл береться тільки чисельно. Тому очевидно, що для аналізу потенціала необхідно використовувати розкладання в ряд. Дослідження зовнішнього потенціалу тора означає, що ми працюємо в області поза об'ємом тора, тобто координати точки, в якій шукаємо потенціал, задовольняють умові $(\rho - 1)^2 + \zeta^2 \geq r_0^2$. У цій області підінтегральний вираз $\phi_r(\rho, \zeta; \eta', \zeta')$ в (4.14) не має сингулярностей для всіх значень $\eta'$, $\zeta'$. Отже, ми можемо розкласти підінтегральну функцію в ряд Маклорена за степенями $\eta'$, $\zeta'$ в околиці точки $\eta' = \zeta' = 0$. Оскільки інтеграли мають симетричні межі, то члени ряду, які містять змішані похідні і похідні непарного порядку, дорівнюють нулю і "виживають" тільки складові з парними порядками в розкладанні. Обмежуючись квадратичними членами розкладання, потенціал складеного кільця наближено може бути представлений як:

$$\phi_r(\rho,\zeta;\eta',\zeta') \approx \phi_c(\rho,\zeta) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\phi_r}{\partial\eta'^2}\bigg|_{\substack{\eta'=0\\ \zeta'=0}}\eta'^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\phi_r}{\partial\zeta'^2}\bigg|_{\substack{\eta'=0\\ \zeta'=0}}\zeta'^2. \tag{4.15}$$

Проінтегруємо (4.15) по перетину тора відповідно (4.14). Інтеграл в першому доданку береться елементарно — це є площа перетину тора:

$$\int_{-r_0}^{r_0}\int_{-\sqrt{r_0^2-\eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2-\eta'^2}} d\eta' d\zeta' = \pi r_0^2.$$

Інтеграли в другому і третьому доданку рівні:

$$\int_{-r_0}^{r_0}\int_{-\sqrt{r_0^2-\eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2-\eta'^2}} \eta'^2 d\eta' d\zeta' = \int_{-r_0}^{r_0}\int_{-\sqrt{r_0^2-\eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2-\eta'^2}} \zeta'^2 d\eta' d\zeta' = \frac{\pi r_0^4}{4}.$$

(Як було зазначено вище, інтеграли від непарних степеней підінтегральної функції дорівнюють нулю, тому залишаються тільки доданки з парними степенями при $r_0$).

Позначимо

$$A(\rho,\zeta) = \frac{\partial^2\phi_r}{\partial\eta'^2}\bigg|_{\substack{\eta'=0\\ \zeta'=0}} + \frac{\partial^2\phi_r}{\partial\zeta'^2}\bigg|_{\substack{\eta'=0\\ \zeta'=0}}, \tag{4.16}$$

тоді

$$\varphi_{torus}(\rho,\zeta) \approx \frac{GM}{\pi^2 R r_0^2}\left(\pi r_0^2\phi_c + \frac{\pi r_0^4}{8}\cdot A(\rho,\zeta)\right) = \tag{4.17}$$

$$= \frac{GM}{\pi R}\phi_c\left(1 + \frac{r_0^2}{8}\cdot\frac{A(\rho,\zeta)}{\phi_c}\right)$$

Незважаючи на те, що кожний доданок в (4.16) має досить громіздкий вираз, їх сума призводить до більш компактної форми:

$$A = -\frac{1}{2}\phi_c - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\rho}}\frac{1}{m-1}\left(1 - \frac{\rho+1}{2\rho}m\right)E(m). \tag{4.18}$$

Підставимо (4.18) в (4.17):

$$\varphi_{torus}(\rho,\zeta;r_0) \approx \frac{GM}{\pi R}\phi_c\cdot\left[1 - \frac{r_0^2}{16} - \frac{r_0^2}{16\phi_c}\sqrt{\frac{m}{\rho}}\frac{1}{m-1}\left(1 - \frac{\rho+1}{2\rho}m\right)E(m)\right]. \tag{4.19}$$

Остаточно, наближений вираз для потенціалу однорідного кругового тора у зовнішній області $(\rho-1)^2+\zeta^2 \geq r_0^2$ має наступний вигляд:

$$\varphi_{torus}(\rho,\zeta;r_0) \approx \frac{GM}{\pi R}\phi_c \cdot \left(1-\frac{r_0^2}{16}+\frac{r_0^2}{16}\cdot S(\rho,\zeta)\right), \tag{4.20}$$

де $\phi_c = \sqrt{m/\rho}\,K(m)$ – безрозмірний потенціал нескінченно тонкого кільця (4.7), розташованого в центрі перетину тора, а функція

$$S(\rho,\zeta) = \frac{\rho^2+\zeta^2-1}{(\rho+1)^2+\zeta^2}\cdot\frac{E(m)}{K(m)}, \tag{4.21}$$

$E(m) = \int_0^{\pi/2} d\beta\sqrt{1-m\sin^2\beta}$ — повний еліптичний інтеграл другого роду. Отриманий вираз можна також записати через іншу заміну, яка відраховується від центру перетину тора $\eta = \rho - 1$ і використання виразу через $\eta$ дійсно часто є більш зручним. В цьому випадку вираз (4.21) може бути представлено в наступному вигляді:

$$S(\eta,\zeta) = \frac{\eta^2+\zeta^2+2\eta}{\eta^2+\zeta^2}\cdot\frac{E(m)}{K(m)}, \tag{4.22}$$

де

$$m = 4\frac{\eta+1}{(\eta+2)^2+\zeta^2}.$$

Наближений вираз (4.20) для потенціалу тора (ми будемо надалі називати його S-наближенням), з урахуванням (4.21) або (4.22), представляє потенціал тора з досить високою точністю в зовнішньої області $\eta^2+\zeta^2 \geq r_0^2$. На рис. 4.4 показані криві потенціалу тора, отримані шляхом чисельного інтегрування в порівнянні з потенціалом, отриманими за наближеною формулою (S-наближенні).

Оскільки $|S| \leq 1$, другий множник в (4.20) є повільно змінною функцією від $\rho$ і $\zeta$. Спростимо вираз (4.20), замінивши другий множник його асимптотичним наближенням. У першому випадку, $\rho \to 0$ відповідає $\eta \to -1$ і параметру $m \to 0$ і $E(m)/K(m) \to 1$, отже, $S \to (\zeta^2-1)/(\zeta^2+1)$. Вираз для потенціалу тора в цьому випадку:

$$\varphi_{torus}(\rho,\zeta;r_0) \approx \frac{GM}{\pi R}\phi_c(\rho,\zeta)\cdot\left(1-\frac{r_0^2}{16}+\frac{r_0^2}{16}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\right). \tag{4.23}$$

Оскільки безрозмірний потенціал нескінченно тонкого кільця (4.7) на осі си-

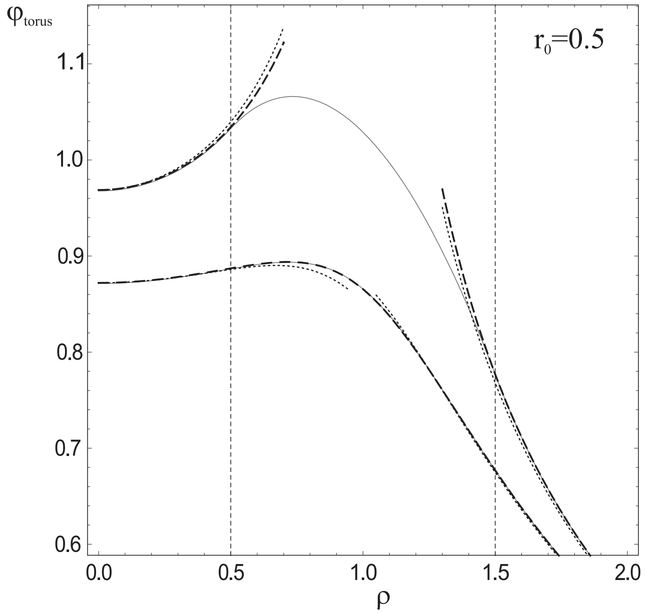


Рис. 4.4. Залежність потенціалу тора з $r_0 = 0.5$ від $\rho$ для $\zeta = 0$ (*верхні криві*) і $\zeta = 0.5$ (*нижні криві*). Суцільні лінії відповідають потенціалу, отриманому шляхом чисельного інтегрування по точній формулі (4.14). S-наближення потенціалу (4.20) показано пунктирною лінією, і точкова лінія відповідає граничному випадку S-наближення: крива потенціалу нескінченно тонкого кільця (4.26) праворуч від перетину тора і крива, відповідна "зміщеному" потенціалу нескінченно тонкого кільця (4.23) — зліва. Межі перетину тора показані точковими вертикальними лініями.

метрії

$$\phi_c(0,\zeta) = \frac{\pi}{\sqrt{1+\zeta^2}},$$

тоді в центрі симетрії ми отримуємо вираз для потенціалу тора на осі симетрії

$$\varphi_{torus}(0,\zeta;r_0) \approx \frac{GM}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} \cdot \left(1 - \frac{r_0^2}{16} + \frac{r_0^2}{16}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\right) \tag{4.24}$$

і для $\zeta = 0$,

$$\varphi_{torus}(0,0;r_0) \approx \frac{GM}{R}\left(1 - \frac{r_0^2}{8}\right). \tag{4.25}$$

Другий доданок $GM/R \cdot r_0^2/8$ в (4.25) описує зсув потенціалу тора на осі симетрії щодо потенціалу нескінченно тонкого кільця. На рисунку 4.4 точковою лінією показані криві для потенціалу тора, отримані по наближеному виразу (4.23).

У другому випадку, при великих значеннях $\eta$, параметр $m \to 0$, і $S \to 1$ в (4.20), отже

$$\varphi_{torus}(\rho,\zeta;r_0) \approx \frac{GM}{\pi R}\phi_c(\rho,\zeta). \tag{4.26}$$

Таким чином, в цій області потенціал тора дорівнює потенціалу нескінченно тонкого кільця тієї ж маси $M$ і радіусом $R$, рівним великому радіусу тора.

З рисунка 4.4 видно, що *$S$-наближення для зовнішнього потенціалу тора (4.20) описує потенціал тора з хорошою точністю аж до поверхні тора* (верхні криві). Дійсно, в області $\rho \leq 1 - r_0$ відмінності між потенціалом, отриманим за інтегральним виразом (4.14), і значеннями, отриманими за S-наближенням, досягають максимуму поблизу поверхні тора і не перевищують 0.2% навіть для товстого тора з $r_0 = 0.5$. Відмінності залишаються малими навіть для дуже товстого тора: вони не перевищують 1.5% для $r_0 = 0.9$. При $\zeta = r_0$ всі точки зовнішні і криві для точного потенціалу і для $S$-наближення візуально збігаються (відхилення менше 0.1%).

Зауважимо, що асимптотики $S$-наближення для зовнішнього потенціалу (4.24) і (4.26) також досить добре описують потенціал тора (точкові криві на рис. 4.4). Таким чином, для $|\zeta| < r_0$, наближення (4.24) може бути використано для розрахунку потенціалу всередині області, обмеженої циліндром з радіусом $\rho - r_0$, в той час як наближення (4.26) може застосовуватися поза областю, обмеженою циліндром з радіусом $\rho + r_0$.

При $|\zeta| \gg 1$, вираз (4.24) прагне до (4.26), і вираз для потенціалу нескінченно тонкого кільця (4.6) може бути використаний у всій зовнішній області для наближеного розрахунку потенціалу тора.

Таким чином, *зовнішній потенціал тора може бути представлений з високою точністю потенціалом нескінченно тонкого кільця тієї ж маси. Залежність від геометричного параметра $r_0$ з'являється тільки в "дірці" тора, що може бути враховано "зміщеним" потенціалом нескінченно тонкого кільця (4.23). Це наближення справедливо аж до поверхні тора.* Даний результат аналогічний відомому результату для зовнішнього потенціалу кулі. Як відомо, зовнішній потенціал кулі точно дорівнює потенціалу матеріальної точки. Невелика відмінність потенціалу тора від потенціалу нескінченно тонкого кільця може бути пов'язана з тим фактом, що гауссова кривизна тора не є постійною величиною, а залежить від геометричного параметра, що буде розглянуто нижче.

## 4.4 Потенціал тора у внутрішній області

Дослідимо внутрішній потенціал тора. Для цього зручно вибрати початок системи координат в центрі перетину тора (рис. 4.5). Тоді безрозмірний потенціал нескінченно тонкого кільця має вигляд:

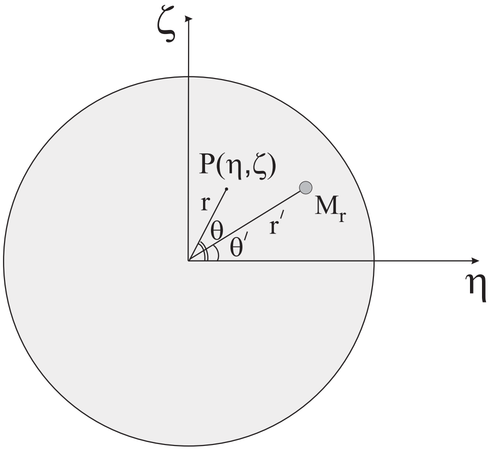


Рис. 4.5. Схема перетину тора в полярних координатах.

$$\phi_c(\eta,\zeta) = \sqrt{\frac{m}{1+\eta}} \cdot K(m), \tag{4.27}$$

де

$$m = \frac{4(1+\eta)}{(2+\eta)^2+\zeta^2}.$$

Розглянемо потенціал центрального кільця (4.27) в околиці $\eta \to 0$, $\zeta \to 0$, що відповідає $m \to 1$. В цьому випадку еліптичні інтеграли в (4.27) можуть бути розкладені в ряд по малому параметру $m_1 = 1 - m$. Обмежуючись першими членами розкладання, маємо:

$$K(m_1) \approx \ln\frac{4}{\sqrt{m_1}} + \frac{1}{4} m_1 \ln\frac{4}{e\sqrt{m_1}}. \tag{4.28}$$

Тут параметр $m_1$ дорівнює

$$m_1 = 1 - \frac{4\rho}{(\rho+1)^2+\zeta^2} = \frac{(\rho-1)^2+\zeta^2}{(\rho+1)^2+\zeta^2} = \frac{\eta^2+\zeta^2}{(\eta+2)^2+\zeta^2}.$$

Таким чином

$$m_1 = \frac{r^2}{r^2+4(1+\eta)},$$

де $r^2 = \eta^2 + \zeta^2$. Множник перед еліптичним інтегралом у виразі для потенціалу центрального нескінченно тонкого кільця виражається через параметр

$m_1$ наступним чином:

$$\sqrt{\frac{m}{\eta+1}} = \frac{2}{\sqrt{r^2+4(\eta+1)}} = \frac{2\sqrt{m_1}}{r}.$$

Тоді наближений вираз для потенціалу кільця, виражений через параметр $m_1$:

$$\phi_c(\eta,\zeta) \approx \frac{2\sqrt{m_1}}{r}\left(\ln\frac{4}{\sqrt{m_1}} + \frac{1}{4}m_1 \ln\frac{4}{e\sqrt{m_1}}\right). \tag{4.29}$$

Перехід до потенціалу довільного складеного кільця здійснюється за рахунок підстановок $1+\eta \to (1+\eta)/(1+\eta')$ і $\zeta \to (\zeta-\zeta')/(1+\eta')$. Тоді $\eta \to (\eta-\eta')/(1+\eta')$,

$$r^2 \to \frac{(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}{(1+\eta')^2} = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{(1+\eta')^2},$$

а параметр $m_1$ переходить в параметр

$$m_1' = (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/q, \quad \text{де} \quad q = (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 + 4(1+\eta)(1+\eta').$$

Наближений вираз для потенціалу складеного нескінченно тонкого кільця має вигляд

$$\phi_r(\eta,\zeta;\eta',\zeta') \approx \frac{2(1+\eta')}{\sqrt{q}}\left[\ln\frac{4}{\sqrt{m_1'}}\left(1+\frac{m_1'}{4}\right) - \frac{m_1'}{4}\right]. \tag{4.30}$$

Доданок $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 = (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2$ є квадратом відстані між складовим кільцем і точкою $P$ (рис. 4.5). Вираз (4.30) справедливий для $m_1' \to 0$, отже, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 \ll 1$.

Обмежимося випадком тонкого тора ($r_0 \ll 1$). Тоді $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 \ll 4(1+\eta)(1+\eta')$. Розглянемо окремо множник $1/\sqrt{q}$ в (4.30):

$$\frac{1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+4(1+\eta)(1+\eta')}} = \frac{1}{2\sqrt{(1+\eta)(1+\eta')}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+N}},$$

де

$$N = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4(1+\eta)(1+\eta')}.$$

Оцінимо граничні значення $N$. Дійсно, $\min[N] = 0$, $\max[N] = r_0^2/(1+r_0)^2$. Оскільки ми розглядаємо випадок тонкого тора $r_0 \ll 1$ і $\max[N] \approx r_0^2 \ll 1$, тоді $N \ll 1$ і

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \approx \frac{1}{2\sqrt{(1+\eta)(1+\eta')}}\left[1 - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{8(1+\eta)(1+\eta')}\right].$$

Перший множник в (4.30) може бути переписаний через члени другого порядку як:

$$f_1 \equiv \frac{2(1+\eta')}{\sqrt{q}} \approx \sqrt{\frac{1+\eta'}{1+\eta}}\left(1-\frac{1}{8}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\right). \tag{4.31}$$

Тут ми врахували, що $(1+\eta)(1+\eta') \approx 1$. Після розкладання квадратного кореня в (4.31) за степенями $\eta$ і $\eta'$, отримуємо

$$f_1 \approx \left(1+\frac{\eta'}{2}-\frac{\eta}{2}-\frac{\eta\eta'}{4}-\frac{\eta'^2}{8}+\frac{3}{8}\eta^2\right)\left(1-\frac{1}{8}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\right). \tag{4.32}$$

Після перемноження і, обмежуючись членами другого порядку, отримуємо:

$$f_1 \approx 1+\frac{\eta'}{2}-\frac{\eta}{2}-\frac{\eta\eta'}{4}-\frac{\eta'^2}{8}+\frac{3\eta}{8}-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{8}. \tag{4.33}$$

Подібним чином другий множник (у квадратних дужках) у (4.30) може бути виражений через квадрати координат як

$$f_2 \equiv \ln\frac{4}{\sqrt{m_1'}}\left(1+\frac{m_1'}{4}\right)-\frac{m_1'}{4} \approx \frac{1}{2}(\eta+\eta')-\frac{1}{4}(\eta^2+\eta'^2)+$$
$$+\ln\frac{8}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid}+\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{16}\ln\frac{8e}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid}. \tag{4.34}$$

Таким чином, ми отримуємо такий вираз для потенціалу складеного кільця:

$$\phi_r(\eta,\zeta;\eta',\zeta') \approx f_1 \cdot f_2. \tag{4.35}$$

Введемо для зручності позначення $w=(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')$, $\tilde{k}=1+\ln 8$ і, після перемноження, а також обмежуючись членами другого порядку, (4.35) набуває вигляду

$$\phi_r \approx \frac{\tilde{k}\cdot w}{16}+\frac{\eta}{2}-\frac{\eta^2}{2}+\frac{\eta'}{2}+\ln 8-\frac{1}{8}w\ln 8-\frac{1}{2}\eta\ln 8+\frac{3}{8}\eta^2\ln 8+\frac{1}{2}\eta'\ln 8-\frac{1}{4}\eta\eta'\ln 8-$$
$$-\frac{1}{8}\eta'^2\ln 8-\frac{1}{2}\ln w+\frac{1}{4}\eta\ln w-\frac{3}{16}\eta^2\ln w-\frac{1}{4}\eta'\ln w+\frac{1}{8}\eta\eta'\ln w+ \tag{4.36}$$
$$+\frac{1}{32}w\ln w+\frac{1}{16}\eta'^2\ln w.$$

Після приведення доданків

$$\phi_r \approx L_1+L_2w+L_3\eta'+L_4\eta'^2+L_5\ln w+L_6\eta'\ln w+\frac{1}{32}I_7+\frac{1}{16}I_8,$$

де

$$L_1=\frac{1}{2}\left(\eta-\eta^2+2\ln 8-\eta\ln 8+\frac{3}{4}\eta^2\ln 8\right),$$

$$L_2 = \frac{1}{16}(1 - \ln 8),$$
$$L_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \ln 8 - \frac{\eta}{2}\ln 8\right),$$
$$L_4 = -\frac{1}{8}\ln 8,$$
$$L_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\eta - 1 - \frac{3}{8}\eta^2\right),$$
$$L_6 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\eta - 1\right).$$

Для дослідження внутрішнього потенціалу тора перепишемо вираз (4.14) в полярних координатах (рис. 4.5):

$$\varphi_{torus}(r,\theta;r_0) = \frac{GM}{\pi^2 R r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\phi_r(r,\theta;r',\theta')r'dr'd\theta', \tag{4.37}$$

де координати складеного кільця $\eta' = r'\cos\theta'$, $\zeta' = r'\sin\theta'$ і координати точки $P$: $\eta = r\cos\theta$, $\zeta = r\sin\theta$. Підставивши (4.36) в (4.37), отримуємо в загальному вигляді:

$$\varphi_{torus}(r,\theta;r_0) \approx \frac{GM}{\pi^2 R r_0^2}(L_1 I_1 + L_2 I_2 + L_3 I_3 + L_4 I_4 + L_5 I_5 + L_6 I_6 + \tag{4.38}$$
$$+\frac{1}{32}I_7 + \frac{1}{16}I_8),$$

де

$$I_1 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'dr'd\theta' = \pi r_0^2,$$
$$I_2 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} wr'dr'd\theta' = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta'))r'dr'd\theta' =$$
$$= r^2\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'dr'd\theta' + + \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'^3dr'd\theta' - 2r\int_0^{r_0} r'^2dr'\int_0^{2\pi}\cos(\theta-\theta'))d\theta',$$
$$I_2 = \pi r_0^2 r^2 + \frac{\pi r_0^4}{2},$$
$$I_3 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\eta' r'dr'd\theta' = \int_0^{r_0} r'^2dr'\int_0^{2\pi}\cos\theta' d\theta' = 0,$$
$$I_4 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\eta'^2 r'dr'd\theta' = \frac{\pi r_0^4}{4},$$
$$I_5 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'\ln w dr'd\theta' == 2\int_0^{r_0} r'dr'\int_0^{\pi}\ln(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')d\theta'$$

Внутрішній інтеграл (по $\theta$) зводиться до табличного (див. [26] стор.411):

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)dx = \begin{cases} 2\pi \ln a, & \text{при } a \geq b > 0, \\ 2\pi \ln b, & \text{при } b \geq a > 0. \end{cases}$$

$$I_5 = 2\int_0^r r'dr' 2\pi \ln r + 2\int_r^{r_0} r'dr' 2\pi \ln r' = \pi r^2 - \pi r_0^2 + 2\pi r_0^2 \ln r_0.$$

$$I_6 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \eta' r' \ln w \cdot dr'd\theta' = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'^2 \cos\theta' \ln w \cdot dr'd\theta' =$$

$$= -\pi r\left(r_0^2 - \frac{r^2}{2}\right)\cos\theta = -\pi\eta \cdot \left(r_0^2 - \frac{r^2}{2}\right),$$

$$I_7 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r' w \ln w dr'd\theta' = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'(r'^2 + r^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta'))\ln w dr'd\theta' =$$

$$= \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'^3 \ln w dr'd\theta' +$$

$$+ r^2\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r' \ln w dr'd\theta' -$$

$$-2r\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'\cos(\theta - \theta')\ln w dr'd\theta' \equiv$$

$$\equiv I_7' + I_7'' + I_7'''.$$

$$I_7' = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'^3 \ln w dr'd\theta' = 2\int_0^{r_0} r'^3 dr' \int_0^\pi \ln w d\theta' =$$

$$= 2\int_0^r r'^3 \cdot 2\pi \ln r dr' + 2\int_r^{r_0} r'^3 \cdot 2\pi \ln r' dr'$$

$$= 4\pi \ln r \cdot \frac{r^4}{4} + 4\pi\int_r^{r_0} r'^3 \ln r' dr' = \frac{\pi}{4} r^4 - \pi r_0^4\left(\frac{1}{4} - \ln r_0\right)$$

$$I_7'' \equiv r^2\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r' \ln w dr'd\theta' = r^2 \cdot I_5 = \pi r^4 - \pi r_0^2 r^2 + 2\pi r_0^2 r^2 \ln r_0$$

$$I_7''' \equiv -2r\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r'^2 \cos(\theta - \theta')\ln w dr'd\theta'.$$

Оскільки cos — функція парна, то

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta')\ln(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta'))d\theta' =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta' \ln(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')d\theta'.$$

Тоді

$$I_7''' = -2r\int_0^{r_0} r'^2 dr' \int_0^{2\pi} \cos\theta' \ln\left[r^2\left(1+a^2-2a\cos\theta'\right)\right] d\theta' = -2rA,$$

де $a \equiv r'/r$. Врахуємо ([26] стор.607), що

$$\int_0^{\pi} \cos nx \ln(1+a^2-2a\cos x)dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{n}a^n, & \text{при } a^2<1, \\ -\frac{\pi}{na^n}, & \text{при } a^2>1. \end{cases}$$

Тоді

$$A = 2\int_0^{r} r'^2 dr' \cdot (-\pi\frac{r'}{r}) + 2\int_r^{r_0} r'^2 dr' \cdot (-\pi\frac{r}{r'}) = \frac{\pi}{2}(r^3 - 2rr_0^2)$$

і, отже,

$$I_7''' = \pi r^2(2r_0^2 - r^2).$$

$$I_7 \equiv I_7' + I_7'' + I_7''' = \frac{\pi}{4}r^4 + \pi r^2 r_0^2(1+2\ln r_0) + \pi r_0^4(\ln r_0 - \frac{1}{4}).$$

Якщо обмежуватися квадратичними членами, то

$$I_7 \approx \pi r_0^2 r^2 \cdot (2\ln r_0 + 1),$$

$$I_8 = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \eta'^2 r' \ln w dr' d\theta'.$$

Підставляючи отримані вирази в (4.38), отримуємо наближений вираз для внутрішнього потенціалу тора:

$$\varphi_{torus}^{inner}(\eta,\zeta;r_0) \approx \frac{GM}{2\pi R}\left[c + \tilde{a}_1\eta + \tilde{a}_2\eta^2 + \tilde{b}_2\zeta^2\right], \tag{4.39}$$

де

$$k \equiv \frac{r_0}{8}, \quad c = 1 + 2k^2 - 2\ln k + 8k^2\ln k, \quad \tilde{a}_1 = 1 + \ln k,$$

$$\tilde{a}_2 = -\frac{1}{(8k)^2} - 4k^2(11 + 10\ln k),$$

$$\tilde{b}_2 = -\frac{1}{(8k)^2} + 4k^2(3 + 2\ln k).$$

Перший доданок в (4.39) є значенням потенціалу тора в центрі перетину: $c = \phi_{torus}(0,0;r_0)$. Для подальшого аналізу внутрішнього потенціалу зручно перейти до координат, нормованими на геометричний параметр тора $r_0$. Тоді коефіцієнти ряду перетворюються в

$$a_1 = 8k(1+\ln k), \qquad a_2 = -1 - 4k^2(11 + 10\ln k),$$

$$b_2 = -1 + 4k^2(3 + 2\ln k).$$

Вираз для потенціалу тора (4.39) може бути записано як

$$\varphi_{torus}^{inner}(\eta, \zeta; r_0) \approx \frac{GM}{2\pi R}\left[c + a_1\frac{\eta}{r_0} + a_2\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^2 + b_2\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^2\right]. \qquad (4.40)$$

З виразу (4.40) видно, що максимальне значення потенціалу досягається в точці $\eta_{max} = -(a_1 r_0)/(2a_2)$, $\zeta = 0$, а еквіпотенціальними лініями є еліпси з центром, зміщеним на величину $\eta_{max}$ відносно центру перетину тора з відношенням великих півосей $\sqrt{b_2/a_2}$. Зауважимо, що положення максимуму потенціалу $\eta = \eta_{max}$, $\zeta = 0$ відповідає точці невагомості, тобто точці, де сили врівноважуються і результуюча всіх сил, що діють на частинку, дорівнює нулю. В даному наближенні компоненти сили всередині об'єму тора залежать від координат лінійно.

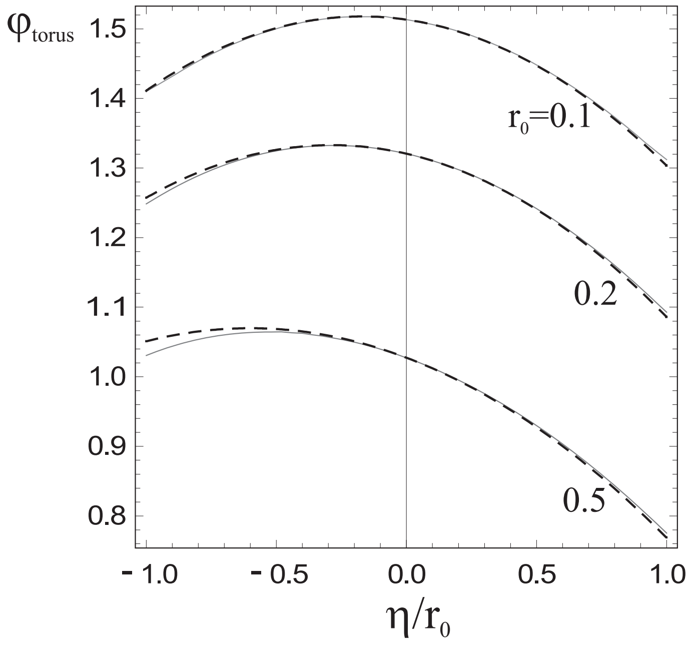


Рис. 4.6. Залежність внутрішнього потенціалу від нормованих координат $\eta/r_0$ при $\zeta = 0$ для різних значень геометричного параметра: $r_0 = 0.1, 0.2, 0.5$. Суцільні криві представляють залежність потенціалу від відстані до центру перетину тора, які отримані чисельним інтегруванням за формулою (4.14). Пунктирні лінії — криві потенціалу тора, які отримані по наближеному виразу для внутрішнього потенціалу (4.40).

На рис. 4.6 показані криві внутрішнього потенціалу для трьох значень $r_0$ в нормованих на $r_0$ змінних. Хоча ми обмежувалися випадком тонкого тора, криві потенціалу, отримані за виразом (4.40), добре узгоджуються з точним потенціалом (4.14) аж до $r_0 = 0.5$. При цьому максимум відхилення знаходиться поблизу поверхні тора і становить близько 2% (рис.4.6). Значення потенціалу в центрі перетину тора (константа $c = \phi_{torus}(0, 0; r_0)$ в (4.39)) також досить добре збігається з точним значенням.

Цікаво дослідити отриманий розв'язок для граничних випадків. Оскільки тор є двозв'язним об'єктом, $r_0 = R_0/R \to 0$ відповідає двом граничним переходам: до нескінченно тонкого кільця ($R$ фіксований, в той час як $R_0 \to 0$) і граничний перехід до циліндра, коли $R_0$ фіксований і $R \to \infty$. Для дослідження внутрішнього потенціалу тора цікавий граничний перехід до потенціалу циліндру. При цьому ми розглядаємо нескінченний циліндр, тобто границі відсутні, але при цьому його довжину ми ототожнюємо з довжиною кільця. При $r_0 \to 0$, коефіцієнт $c \to 1 - 2\ln k$, $a_1 \to 0$, $a_1 \to 0$ і коефіцієнти $a_2, b_2 \to -1$, а вираз (4.40) набуває такого вигляду:

$$\varphi^{inner}_{torus}(\eta, \zeta; r_0 \to 0) \approx \frac{GM}{2\pi R}\left[1 - 2\ln\frac{r_0}{8} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \tag{4.41}$$

де $r^2 = \eta^2 + \zeta^2$. Відомо, що внутрішній потенціал кругового циліндра з довжиною $2H$, набагато більшою, ніж радіус $R_0$ його перетину, має вигляд [35]:

$$\varphi_{cyl} = \frac{GM}{2H}\left[2\ln\frac{2\sqrt{e}H}{R_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]. \tag{4.42}$$

Після формальної підстановки $2H = 2\pi R$ в (4.42) (довжина циліндра дорівнює довжині центрального кільця), ми отримуємо остаточний вираз:

$$\varphi_{cyl} = \frac{GM}{2\pi R}\left[1 - 2\ln\left(\frac{r_0}{2\pi}\right) - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]. \tag{4.43}$$

Вираз (4.43) збігається з (4.41) з точністю до константи. Відмінність в константі може бути пов'язана з геометричною кривизною поверхні тора.

Квадратична залежність від $r$ для внутрішнього потенціалу тонкого тора може бути також отримана для випадку, коли малий радіус $R_0 \to 0$. Зовнішній потенціал тора, отриманий в розділі 4.3, наближено дорівнює потенціалу нескінченно тонкого кільця тієї ж маси і радіусом, рівним великому радіусу тора. У граничному випадку переходу до нескінченно тонкого кільця геометричний параметр $r_0$ є малою величиною і отримане наближення виявляється ще більш точним. Отже, при $\eta^2 + \zeta^2 \geq r_0 \to 0$ зовнішній потенціал тора прагне до потенціалу нескінченно тонкого кільця. В цьому випадку $\eta, \zeta \to 0$ і, таким чином, повний еліптичний інтеграл у виразі для нескінченно тонкого кільця (4.6) може бути розкладений в ряд в околиці $m \to 1$. Якщо ми обмежимося першими членами розкладання, то наближений вираз для потенціалу центрального нескінченно тонкого кільця

$$\varphi_c(\eta, \zeta) \approx \frac{GM}{2\pi R}\left(-\ln(\eta^2 + \zeta^2) + 2\ln 8\right), \tag{4.44}$$

який також залишається справедливим для зовнішнього потенціалу тонкого тора. Зауважимо, що тут немає залежності від геометричного параметра $r_0$, тому що в такому наближенні всі тонкі тори з однаковою масою і великими радіусами є еквігравітуючими для зовнішнього потенціалу. Похідні від потенціалу тонкого тора по $\eta$, $\zeta$:

$$\frac{\partial\varphi_c}{\partial\eta} \approx -\frac{GM}{\pi R}\frac{\eta}{r^2}, \qquad \frac{\partial\varphi_c}{\partial\zeta} \approx -\frac{GM}{\pi R}\frac{\zeta}{r^2}$$

і, накладаючи умови перетину тора, $(\eta^2 + \zeta^2 = r_0^2)$:

$$\left.\frac{\partial\varphi_c}{\partial\eta}\right|_{r=r_0} \approx -\frac{GM}{\pi R r_0}\cos\theta, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_c}{\partial\zeta}\right|_{r=r_0} \approx -\frac{GM}{\pi R r_0}\sin\theta.$$

Таким граничним умовам задовольняє лінійна залежність сили від координат $\eta$, $\zeta$. Таким чином, внутрішній потенціал тонкого тора може бути представлений, після інтегрування, як:

$$\varphi_{torus}^{inner}(\eta, \zeta; r_0) \approx \frac{GM}{2\pi R}\left(-\frac{\eta^2 + \zeta^2}{r_0^2} + c(r_0)\right). \tag{4.45}$$

Прирівнюючи (4.44) і (4.45) на поверхні тора, отримуємо вираз для константи $c(r_0) = -2\ln(r_0/8) + 1$, яка збігається з виразом (4.39), отриманим вище за умови $r_0 \ll 1$.

Стає зрозумілим з аналізу внутрішнього потенціалу для двох граничних випадків ($R_0 \to 0$ и $R \to \infty$), що перші доданки в коефіцієнтах $a_2$, $b_2$ степеневого ряду (4.40) відображають властивості внутрішнього потенціалу циліндра. Якщо виділити внутрішній потенціал циліндра, внутрішній потенціал тора (4.40) може бути записаний як:

$$\varphi_{torus}^{inner}(\eta, \zeta) = \varphi_{cyl}(r) + \varphi_{curv}(\eta, \zeta), \tag{4.46}$$

де

$$\varphi_{curv} \approx \frac{GM}{2\pi R}\left[c_{curv} + a_1\left(\frac{\eta}{r_0}\right) + c_a\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^2 + c_b\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^2\right], \qquad (4.47)$$

$$c_{curv} = 2\ln\frac{8}{2\pi} + 2k^2(1 + 4\ln k),$$

$$c_a = 1 + a_2, \qquad c_b = 1 + b_2.$$

Другий доданок в $\varphi_{curv}(\eta, \zeta)$, який ми назвали потенціалом кривизни, містить в собі властивості кривизни поверхні тора. Дійсно, всі коефіцієнти ряду (4.47) прагнуть до нуля в граничному випадку переходу до потенціалу циліндра ($r_0 \to 0$) і $\varphi_{curv} \to 0$. Отже, *внутрішній потенціал тора може бути представлений як сума потенціалу циліндра і доданка, який містить в собі гауссову кривизну поверхні тора.*

## 4.5 Зв'язок між потенціалом тороїдальної оболонки і гауссовою кривизною

Як відомо, зовнішній потенціал кулі строго дорівнює потенціалу матеріальної точки, розташованої в її центрі симетрії. Цей результат був отриманий ще Ісааком Ньютоном і відіграє дуже важливу роль в небесній механіці, дозволяючи замінювати потенціали планет матеріальними точками, що значно спростило задачі, пов'язані з рухом небесних тіл. Таким чином, матеріальна точка є еквігравітуючим елементом кулі. Реальні об'єкти не є ідеальними сферичними тілами внаслідок наявності моменту: відцентрові сили призводять до сплюснутої форми. Для потенціалу еліпсоїда також можна поставити питання про можливе існування еквігравітуючих тіл. Потенціал тривісного еліпсоїда не виражається через елементарні функції і може бути записаний через еліптичні інтеграли. Варто згадати задачу Ейлера про два нерухомих центри. Це задача трьох тіл, де дві важкі маси нерухомі, а третя рухається в створюваному ними гравітаційному полі. На перший погляд така задача здається далекою від практичного застосування (класична задача трьох тіл розглядається з урахуванням руху важких мас). Однак ця задача знайшла відгук значно пізніше, в середині двадцятого століття. Річ у тім, що зовнішній гравітаційний потенціал сфероїда може бути замінений потенціалом двох матеріальних точок, розташованих в його головних фокусах [19]. При цьому, в залежності від того, чи є сфероїд сплюснутим або витягнутим, відстань між цими масами є дійсною або уявною величиною. Даний результат дозволяв значно спростити задачі, пов'язані з динамікою частинки в гравітаційному полі сфероїда і його навіть намагалися застосувати для розрахунку траєкторій супутників. Можливо, подібний розв'язок існує і для зовнішнього потенціалу еліптичного тора, але еквігравітуючими тілами тут можуть виступати два нескінченно тонких кільця, радіуси яких збігаються з фокусами перетину тора. Ця відповідність виявляється неоднозначною, оскільки кривизна поверхні тора тут також ускладнює задачу, як і в випадку кругового тора. Пошук елементів, еквігравітуючих з тілами, які відіграють важливу роль в небесній механіці і астрофізиці, є цікавою і важливою задачею, яка дозволить пролити світло на гравітаційні властивості цих об'єктів. Також це важливо для спрощення динамічних задач, оскільки це може означати зведення рівнянь до більш простих і можливості отримання аналітичних рішень, які завжди важливі як критерій або контроль для аналізу більш складних чисельних задач.

У попередньому розділі було показано, що внутрішній потенціал тора можна виразити через складову, яка відображає нетривіальні геометричні особливості поверхні тора. Дійсно, тор є незвичайним об'єктом, якщо порівнювати його з об'єктами, з якими в основному має справу астрофізика, небесна механіка (куля, еліпсоїд, диск). Основна особливість полягає в тому, що тор є двозв'язним об'єктом, тобто, якщо ми виберемо на його поверхні геодезичну уздовж головної твірної, то ми не можемо її ніяким чином стягнути в точку. Двозв'язність поверхні тора проявляється дуже часто при аналітичних дослідженнях, оскільки ми майже завжди приходимо до двох граничних випадків, як, наприклад, в попередніх розділах: граничний випадок нескінченно тонкого кільця і циліндра. Іншою особливою властивістю поверхні тора є те[1], що кривизна поверхні змінює знак при обході по малому контуру. Це означає, що тороїдальна поверхня містить в собі три типи геометрії. Одне

---

[1] Примітка 1. Зауважимо, що також тут можна говорити і про скалярну кривизну, яка є згорткою тензора Річчі. Гауссова і скалярна кривизна відрізняються рівно вдвічі і цей множник, являючись константою, не суттєвий в даному розгляді.

з цікавих питань – це "чи можливо виразити потенціал тора через гауссову кривизну його поверхні?". На думку автора цієї роботи, потенціал тора повинен містити в собі топологічні властивості його поверхні, а значить, можливо, існує вираз, який пов'язує потенціал тора з потенціалом нескінченно тонкого кільця (або циліндра) через гауссову кривизну. Така впевненість заснована на теоремі Гаусса, де ми використовуємо потік через поверхню. Теорема Гаусса приводить нас до рівняння Пуассона, яке, для випадку тора, при переході до тороїдальних координат не дозволяє знайти аналітичний розв'язок. Хоча традиційний спосіб (теорема Діріхле) не дає відповіді на питання зв'язку між потенціалом і кривизною, ми спробуємо підійти ближче до цього питання з іншого боку, пропонуючи таку ідею. Розглянемо потенціал тороїдальної оболонки і подивимося розподіл потенціалу на поверхні за кутом в перетині тора. Якщо отриманий розподіл корелює з гауссовою кривизною поверхні тора, то це побічно буде вказувати на існуючий зв'язок між кривизною і потенціалом.

Для реалізації цієї ідеї запишемо вирази для потенціалу оболонки тора. Очевидно, що для цього зручно перейти в систему координат, початок якої пов'язаний з центром перетину оболонки тора, і змінні інтегрування виразимо через полярні координати в меридіональному перерізі: $\eta' = r_0 \cos\theta'$, $\zeta' = r_0 \sin\theta'$. Підставимо ці вирази в модуль еліптичного інтеграла $m_r(\theta'; \rho, \zeta; r_0)$ і потенціал складеного кільця $\phi_r(\theta'; \rho, \zeta; r_0)$, які для оболонки тора є функціями тільки від однієї змінної інтегрування (друга змінна є константою, яка дорівнює геометричному параметру тора). Тоді, інтегруючи по складовим кільцям,

$$\varphi_{torus}^{surf}(\rho, \zeta; r_0) = \frac{GM}{\pi^2 r_0^2 R} \int_0^{r_0} r' dr' \int_0^{2\pi} \phi_r(\theta'; \rho, \zeta; r_0) d\theta' \tag{4.48}$$

отримуємо остаточний вираз для потенціалу тороїдальної оболонки

$$\varphi_{torus}^{surf}(\rho, \zeta; r_0) = \frac{GM}{\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \phi_r(\theta'; \rho, \zeta; r_0) d\theta', \tag{4.49}$$

де

$$\phi_r(\theta'; \rho, \zeta; r_0) = \frac{2(1 + r_0 \cos\theta')}{\sqrt{(1 + r_0 \cos\theta' + \rho)^2 + (\zeta - r_0 \sin\theta')^2}} K(m_r),$$

$$m_r = \frac{4\rho(1 + r_0 \cos\theta')}{(1 + r_0 \cos\theta' + \rho)^2 + (\zeta - r_0 \sin\theta')^2}.$$

Переходимо знову до полярних координат для змінних в потенціалі і вважаючи $r = r_0$ (значення потенціалу на оболонці), тобто $\eta = r_0 \cos\theta$, $\zeta = r_0 \sin\theta$. Тоді потенціал оболонки для даного значення геометричного параметра виражаємо через кут: $\varphi^{surf}_{torus}(\theta; r_0)$.

Гауссова кривизна поверхні тора має вигляд

$$K = \frac{\cos\theta}{R^2 r_0 (1 + r_0 \cos\theta)}. \tag{4.50}$$

Кут $\theta$ відраховуємо від позитивного напрямку осі $\eta$. Видно, що при $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, тобто зовнішня частина поверхні тора, знак кривизни позитивний $k = \mathrm{sign}(K) = +1$. У цьому випадку головні радіуси знаходяться по одну сторону поверхні, що і пояснює позитивне значення кривизни. При $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ кривизна набуває негативих значень ($k = -1$). У цьому випадку головні радіуси знаходяться по різні боки поверхні. І, відповідно в двох точках $\theta = \pi/2$ та $\theta = 3\pi/2$, значення $K = 0$. Таким чином, поверхня тора містить три типи геометрії.

Очевидно, що для порівняння гауссової кривизни з потенціалом необхідно ввести нормуючі параметри, оскільки природа цих характеристик різна, різні розмірності та ін. Введемо модифіковану кривизну $K_{mod}$, тобто лінійну функцію від кривизни

$$K_{mod} = c_{1K} K + c_K, \tag{4.51}$$

де сталу $c_K$ знаходимо з нормування на значення потенціалу в точці, що відповідає куту $\pi/2$. Оскільки $K = 0$ в цій точці, то значення функції $F(0) = \phi^{surf}_{torus}(\pi/2; r_0)$. Постійну $c_{1K}$ визначимо через значення потенціалу і кривизни в точках $\theta = 0, \pi$:

$$c_{1K} = \frac{\varphi^{surf}_{torus}(0) - \varphi^{surf}_{torus}(\pi)}{K(0) - K(\pi)}. \tag{4.52}$$

З рис. 4.7 видно, що поведінка кривої потенціалу оболонки тора узгоджується з поведінкою функції кривизни. Невеликі відхилення присутні при кутах $\theta = 0, \pi$. Точний збіг при кутах $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ пов'язаний з тим, що саме в цих точках ми зшиваємо функції. Похибки для $r_0 = 0.1$ не перевищують 0.12% (рис. 4.8). Інтерес до пошуку зв'язку між потенціалом тора і гауссовою кривизною пов'язаний з тим, що при порівнянні потенціалу тора з потенціалом нескінченно тонкого кільця необхідно враховувати гауссову кривизну.

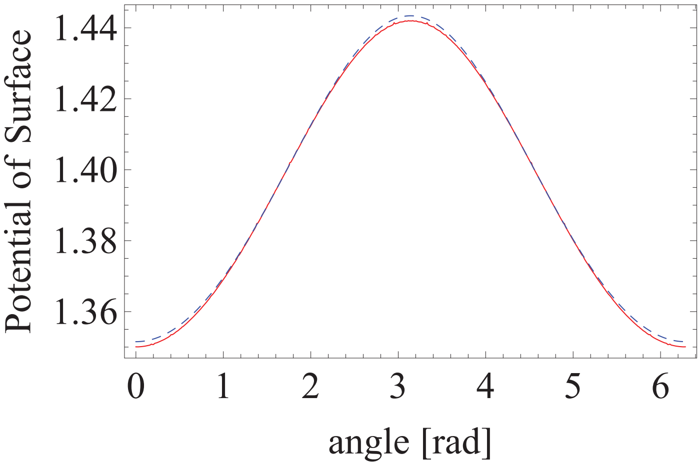


Рис. 4.7. Залежність потенціалу оболонки тора (червона крива) і функції кривизни (синя пунктирна) від кута в перетині тора для випадку $r_0 = 0.1$.

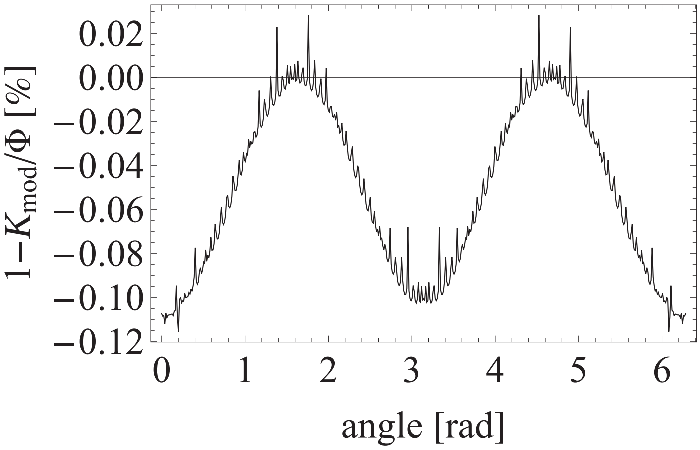


Рис. 4.8. Відносна похибка при порівнянні потенціалу оболонки тора (червона крива на рис. 4.7) і функції кривизни (синя пунктирна на рис. 4.7) для випадку $r_0 = 0.1$.

Ми порівнювали потенціал однорідного тора з потенціалом кільця і бачили, що однозначної відповідності, як у випадку з потенціалом кулі і матеріальної точки, не існує. Це може бути пов'язано саме з тим, що гауссова кривизна залежить від кута по перетину тора. А саме, можна припустити, що повна відповідність між потенціалом нескінченно тонкого кільця і тором існує для неоднорідного розподілу речовини в об'ємі тора. Там, де кривизна позитивна, маси має бути менше і, навпаки, там, де кривизна негативна — більше, що можна врахувати не круговим перетином, а, наприклад, перетином у вигляді овалу. При цьому гостра частина овалу повинна бути орієнтована до центру симетрії. З точки зору класичної теорії потенціалу було б дуже корисно знайти відповідь на питання: "Тору з яким розподілом маси в його об'ємі (або з якою формою перетину) в якості еквігравітуючого об'єкта буде відповідати нескінченно тонке кільце?" Це досить непроста пошукова задача, вирішення якої може бути важливо для розуміння гравітаційних властивостей тора. Автор сподівається, що ця задача зацікавить майбутніх дослідників.

## 4.6 Спільне зшивання внутрішнього і зовнішнього потенціалів на поверхні тора

Для задач, які вимагають знання окремо зовнішнього або внутрішнього потенціалу, отриманих виразів досить. Наприклад, рух частинки в зовнішньому потенціалі тора можна описати, замінюючи потенціал тора потенціалом нескінченно тонкого кільця або його модифікованим виразом (див. наступний розділ). Якщо нас цікавить задача, яка пов'язана зі стійкістю тора (розділ 6) і для якої важливим є аналіз руху частинки всередині його об'єму, достатньо використовувати наближений вираз для внутрішнього потенціалу. Як ми побачимо в наступних розділах, ці вирази дійсно дозволяють отримати аналітичні розв'язки, які, в свою чергу, допомагають зрозуміти результати чисельного моделювання. Однак є задачі, де необхідно використовувати потенціал у всій області, наприклад при аналізі руху частинки, яка перетинає область нестійких орбіт і рухається в бік тора. Якщо ми обмежуємось тільки наближенням нескінченно тонкого кільця, ми не можемо нічого сказати про подальший рух частинки, коли вона досягає поверхні тора. Навпаки, використовуючи тільки внутрішній потенціал, ми втрачаємо інформацію про динаміку, коли частинка залишає об'єм тора. Тому становить інтерес знайти наближений вираз для потенціалу тора, який буде працювати в усій просторовій області. Метод, який ми тут будемо використовувати, частково є наслідком теореми Діріхле про потенціал тора, тобто умови, що зовнішній і внутрішній потенціал, а також його похідні (компоненти сили) повинні бути рівні на границі об'ємного тіла.

У попередніх розділах ми отримали наближені вирази для потенціалу тора у зовнішній ($\eta^2 + \zeta^2 \geq r_0^2$) і внутрішній ($\eta^2 + \zeta^2 \leq r_0^2$) областях. Було показано, що внутрішній потенціал тора може бути представлений у вигляді ряду за степенями $\eta/r_0$, $\zeta/r_0$ і константою, при цьому були знайдені аналітичні вирази для лінійних і квадратичних членів. Для того, щоб знайти більше членів ряду, необхідно представити внутрішній потенціал досить точно. Для отримання наближеного розв'язку для потенціалу і його похідних у всій області ми будемо діяти таким чином. Представимо внутрішній потенціал тора у вигляді степеневого ряду:

$$\phi(\eta,\zeta;r_0)=\frac{1}{2\pi}\left(c(r_0)+\sum_{i=1}a_i(r_0)\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^i+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}\sum_{j=1}t_{ij}(r_0)\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^i\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^j+\sum_{j=1}b_j(r_0)\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^j\right), \qquad (4.53)$$

де $c(r_0)$, $a_i(r_0)$, $b_j(r_0)$, $t_{ij}(r_0)$ — невідомі коефіцієнти. Ми будемо розглядати тут безрозмірний потенціал. Для того, щоб перейти до розмірного випадку, необхідно помножити на $GM/R$, як, наприклад, в (4.6). Зауважимо, що ряд (4.53) містить тільки члени з парними степенями по $\zeta$, тому що потенціал тора симетричний по $\zeta$.

Припустимо, що ми маємо аналітичний вираз для потенціалу тора $\Psi(\eta,\zeta;r_0)$ на його поверхні ($\eta^2+\zeta^2=r_0^2$). Також запишемо внутрішній потенціал тора (4.53) на його поверхні ($\eta=r_0\cos\theta$ і $\zeta=r_0\sin\theta$):

$$\phi(\theta,r_0)=\frac{1}{2\pi}\left(c+\sum_{i=1}a_i\cos^i\theta+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}\sum_{j=1}t_{ij}\cos^i\theta\sin^j\theta+\sum_{j=1}b_j\sin^j\theta\right). \qquad (4.54)$$

З умови рівності внутрішнього і зовнішнього потенціалу та його похідних за координатами на поверхні тора для деяких кутів $\theta_k$ отримуємо систему $3k$

лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів $c$, $a_i$, $b_j$, $t_{ij}$:

$$\begin{cases} c + \sum\limits_{i=1} a_i \cos^i \theta_k + \sum\limits_{i=1} \sum\limits_{j=1} t_{ij} \cos^i \theta_k \sin^j \theta_k + \\ + \sum\limits_{j=1} b_j \sin^j \theta_k = 2\pi \, \Psi(\theta_k, r_0), \\ \\ \sum\limits_{i=1} i \cdot a_i \cos^{i-1} \theta_k + \sum\limits_{i=1} \sum\limits_{j=1} i \cdot t_{ij} \cos^{i-1} \theta_k \sin^j \theta_k = \\ = 2\pi r_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \Psi(\theta_k, r_0), \\ \\ \sum\limits_{j=1} j \cdot b_j \sin^{j-1} \theta_k + \sum\limits_{i=1} \sum\limits_{j=1} j \cdot t_{ij} \cos^i \theta_k \sin^{j-1} \theta_k = \\ = 2\pi r_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi(\theta_k, r_0). \end{cases} \tag{4.55}$$

Таким чином, якби ми мали аналітичний розв'язок для зовнішнього потенціалу тора, ми могли б отримати точний вираз для внутрішнього потенціалу у вигляді нескінченного ряду за степенями $\cos\theta_k$, $\sin\theta_k$, скориставшись граничними умовами і розв'язуючи систему рівнянь (4.55). Оскільки аналітичного розв'язку для зовнішнього потенціалу не існує, ми можемо використовувати наближений вираз, отриманий вище (4.20) для потенціалу тора у зовнішній області ($S$-наближення). Введемо позначення:

$$\Phi = \sum_k \left[\phi_{in}(\theta_k, r_0) - \phi_{out}(\theta_k, r_0)\right]^2,$$
$$\Phi_1 = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\phi_{in}(\theta_k, r_0) - \phi_{out}(\theta_k, r_0)\right]\right)^2$$
$$\Phi_2 = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\phi_{in}(\theta_k, r_0) - \phi_{out}(\theta_k, r_0)\right]\right)^2,$$

де $\phi_{in}$, $\phi_{out}$ — розв'язок для внутрішнього (4.54) і зовнішнього (4.20) потенціалу на границі тора, відповідно. Невідомі коефіцієнти ряду можуть бути знайдені з умови мінімуму функціонала

$$F = \Phi + \Phi_1 + \Phi_2 \to \min. \tag{4.56}$$

Функціонал (4.56), мінімізований методом зворотних квадратів, і коефіцієнти ряду (4.56) були отримані аж до четвертої степені.

Коефіцієнти степеневого ряду до 4 степені, отримані шляхом зшивання зовнішнього і внутрішнього потенціалу для тора з різним геометричним параметром $r_0$ представлені в таблиці 4.1. Для отримання нульового члена ряду

Таблиця 4.1. Коефіцієнти степеневого ряду для внутрішнього потенціалу тора для різних значень $r_0$, отриманих методом зшивання.

| Коеф. | Геометричний параметр $r_0$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| $a_1$ | -0.33798 | -0.53651 | -0.68154 | -0.79129 | -0.87439 | -0.93587 | -0.97906 | -1.00628 | -1.01928 |
| $a_2$ | -0.98002 | -0.93543 | -0.87773 | -0.81171 | -0.74107 | -0.66865 | -0.59677 | -0.52739 | -0.46224 |
| $b_2$ | -1.00411 | -1.01086 | -1.01970 | -1.02892 | -1.03759 | -1.04495 | -1.05030 | -1.05299 | -1.05237 |
| $a_3$ | 0.02392 | 0.04364 | 0.05781 | 0.06608 | 0.06853 | 0.06550 | 0.05753 | 0.04525 | 0.02938 |
| $t_{12}$ | 0.02550 | 0.05329 | 0.08404 | 0.11791 | 0.15454 | 0.19323 | 0.23295 | 0.27238 | 0.30991 |
| $a_4$ | -0.00182 | -0.00785 | -0.01610 | -0.02576 | -0.03580 | -0.04535 | -0.05371 | -0.06036 | -0.06495 |
| $b_4$ | 0.00061 | 0.00131 | 0.00308 | 0.00570 | 0.00922 | 0.01362 | 0.01880 | 0.02453 | 0.03045 |
| $t_{22}$ | -0.00122 | -0.00812 | -0.01948 | -0.03681 | -0.06076 | -0.09157 | -0.12900 | -0.17213 | -0.21931 |

$c$ ми використовували аналітичний вираз (4.39). На рис. 4.9 суцільною лінією показані лінійний ($a_1$) і квадратичні ($a_2$, $b_2$) коефіцієнти степеневого ряду як функції від $r_0$, які отримані аналітично з (4.39); квадратами/точками показані значення цих коефіцієнтів, які отримані з умови зшивання (таблиця 4.1). Видно, що значення аналітичних коефіцієнтів добре узгоджуються з їх значеннями, отриманими незалежно методом зшивання з (4.54).

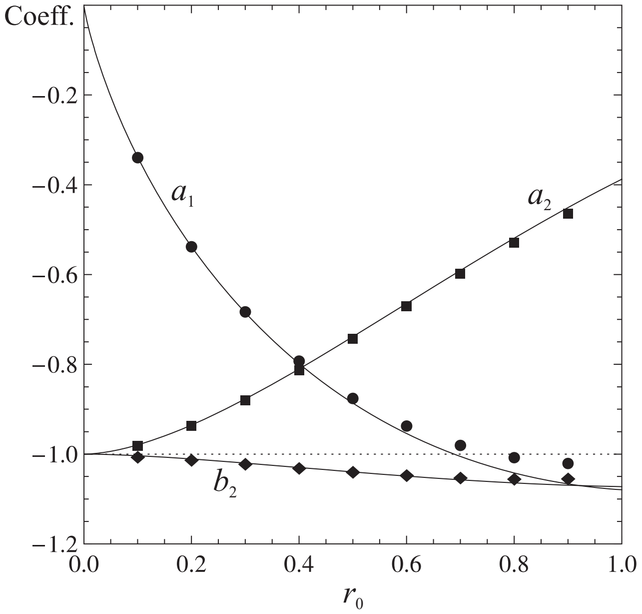


Рис. 4.9. Залежність від $r_0$ перших коефіцієнтів степеневого ряду внутрішнього потенціалу тора, які отримані методом зшивання.

На рис. 4.10 показана залежність потенціалу тора від радіальної координати у всій області, отримана по точному виразу (4.14), і його наближений вираз, отриманий шляхом зшивання $S$-наближення (4.20) і внутрішнього потенціалу, представленого у вигляді ряда (4.54). Хоча наближений розв'язок

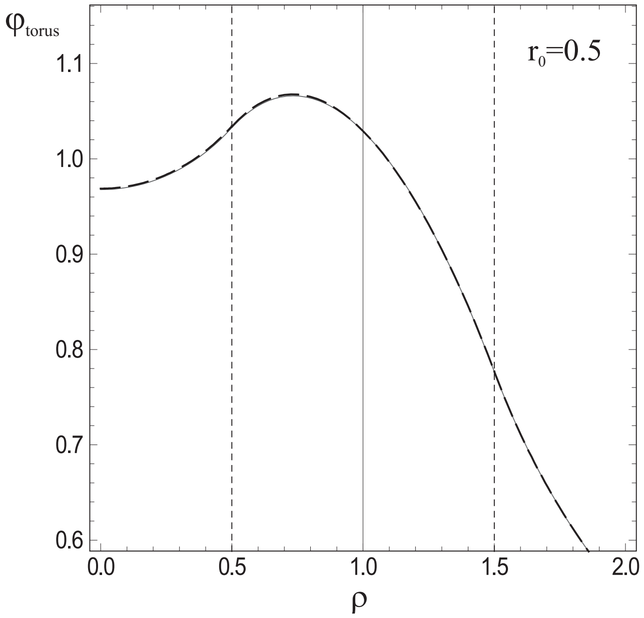


Рис. 4.10. Залежність потенціалу тора від $\rho$ для $r_0 = 0.5$ ($\zeta = 0$). У всій області: крива потенціалу, отримана чисельно за точним виразом (4.14), показана суцільною кривою; пунктирна крива показує спільне зшивання $S$-наближення у зовнішній області (4.20) з внутрішнім потенціалом, представленим у вигляді степеневого ряду (4.54). Коефіцієнти (таблиця 4.1) знайдені з умови зшивання (4.56).

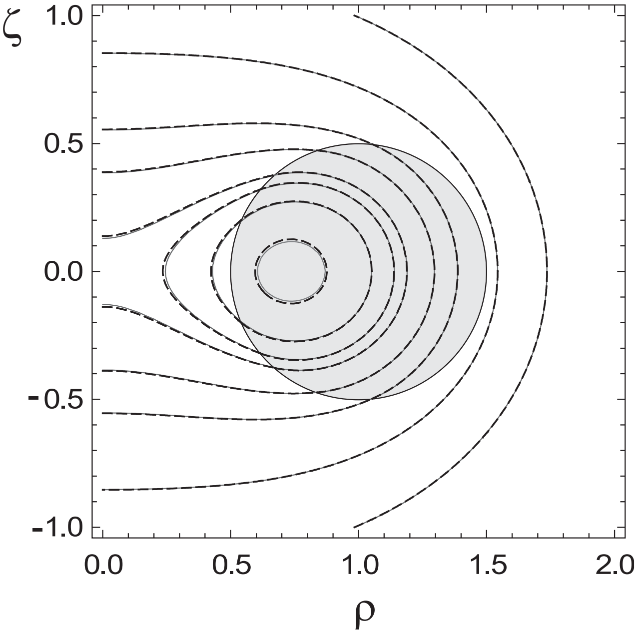


Рис. 4.11. Еквіпотенціальні криві для тора з $r_0 = 0.5$. Суцільні лінії знайдені за точним виразом для потенціалу; пунктирні лінії відповідають наближеному виразу зшитого потенціалу. Цей рисунок відповідає підпису в рис. 4.10. Перетин тора показан кругом сірого кольору.

отримано в припущенні тонкого тора $r_0 \ll 1$, ми можемо бачити, що чисельні значення потенціалу, які отримані по точному (4.14) і наближеному виразам, досить добре збігаються і для випадку тора з $r_0 = 0.5$. На рис. 4.11 показані еквіпотенціальні криві в меридіональній площині тора, які досить добре узгоджуються для всіх значень $\rho$, $\zeta$.

## 4.7 Потенціал тора з еліптичним перетином

Розглянемо тор з еліптичним перетином і з однорідним розподілом густини та знайдемо потенціал еліптичного тора в межах нашого підходу, тобто складаємо тор з нескінченно тонких кілець. Рівняння перетину тора задається рівнянням еліпса в меридіональній площині:

$$\frac{x^2}{R_0^2} + \frac{z^2}{\alpha^2 R_0^2} = 1, \tag{4.57}$$

де еліптичністі перетину $\alpha = b/a$, $a = R_0$, $b = \alpha a = \alpha R_0$ — велика і мала півосі еліпса, відповідно. Перейдемо, як і в попередніх розділах до безрозмірних координат: $\eta = x/R$, $\zeta = z/R$. Тоді рівняння перетину має вигляд

$$\frac{\eta^2}{r_0^2} + \frac{\zeta^2}{\alpha^2 r_0^2} = 1, \tag{4.58}$$

і межі інтегрування по $\zeta'$ визначаються з (4.58) як $\zeta' = \pm\alpha\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}$. Тоді потенціал тора з еліптичним перетином має вигляд

$$\varphi_{torus}^{ell} = \frac{GM}{\alpha\pi^2 r_0^2 R} \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-\alpha\sqrt{r_0^2-\eta'^2}}^{\alpha\sqrt{r_0^2-\eta'^2}} d\eta' d\zeta' \phi_r(\eta, \zeta; \eta', \zeta'). \tag{4.59}$$

З рис.4.12 видно, що максимум кривих потенціалу для еліптичного тора в екваторіальній площині вище, ніж для випадку кругового тора. При цьому на границі тора розбіжність потенціалу еліптичного тора з потенціалом нескінченно тонкого кільця істотна, в порівнянні з випадком кругового тора. При збільшенні координати $\zeta$ максимум потенціалу еліптичного тора стає меншим, ніж кругового (рис.4.13). Це пов'язано з тим, що в разі еліптичного тора, з урахуванням рівномірного розподілу густини в його об'ємі, маса більш зосереджена в екваторіальній площині і, відповідно, гравітаційні сили значніші саме в цій площині симетрії. Те, що нескінченно тонке кільце з хорошою точністю є еквігравітуючим елементом кругового тора, може наводити

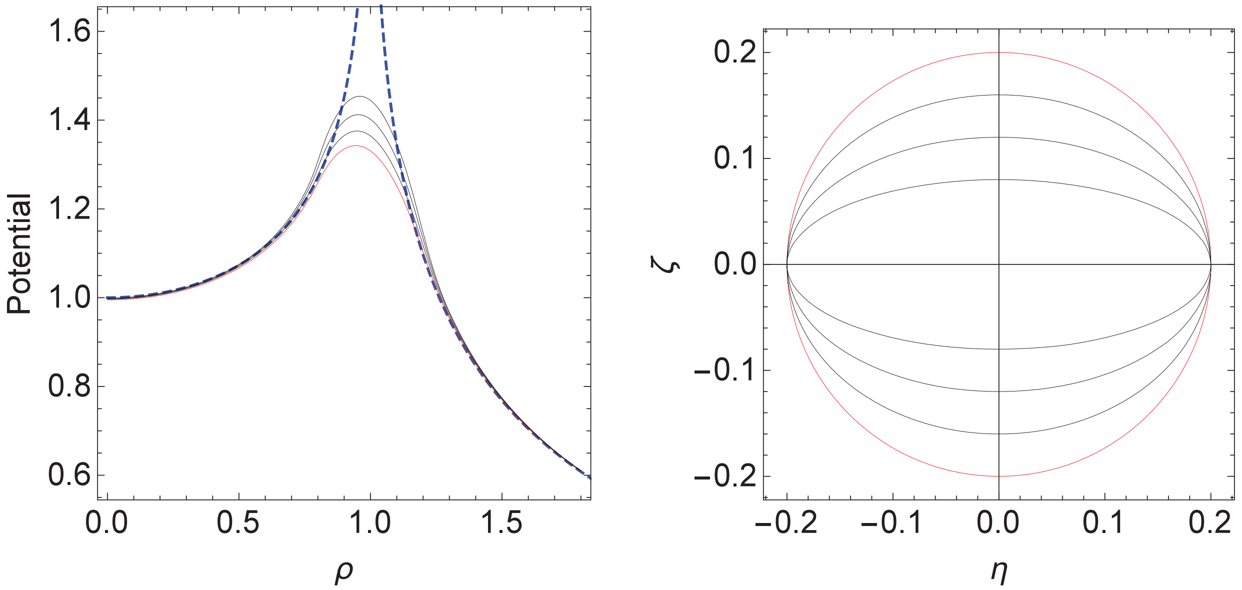


Рис. 4.12. *Зліва*: потенціал тора з еліптичним перетином з $\alpha = 0.8, 0.6, 0.4$ і $r_0 = 0.2$ для випадку $\zeta = 0$ (суцільні чорні криві). Тор з круговим перетином $\alpha = 1$ показаний червоною лінією. Синя пунктирна лінія відповідає потенціалу нескінченно тонкого кільця. *Справа*: відповідні перетини тора.

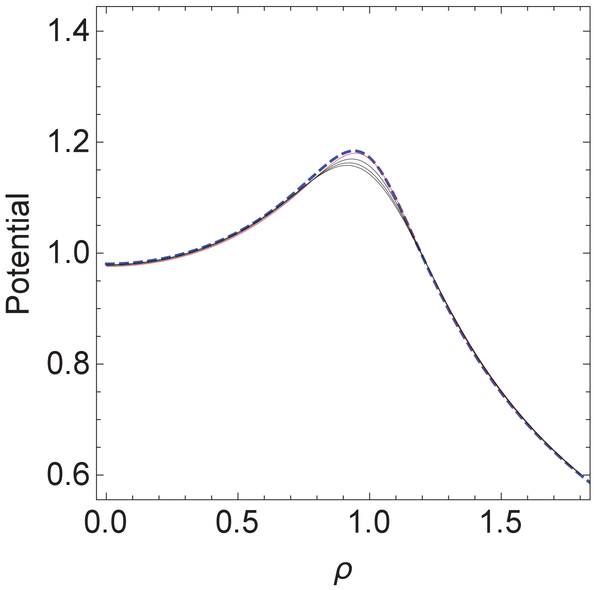


Рис. 4.13. Потенціал тора з еліптичним перетином з $\alpha = 0.8, 0.6, 0.4$ і $r_0 = 0.2$ для випадку $\zeta = 0.2$ (суцільні чорні криві). Тор з круговим перетином $\alpha = 1$ показаний червоною лінією. Синя пунктирна лінія відповідає потенціалу нескінченно тонкого кільця.

на думку, що потенціал еліптичного тора також можна замінити потенціалом двох нескінченно тонких кілець, великі радіуси яких збігаються з фокусами його перетину (див. обговорення в підрозділі 4.5). Автором були проведені попередні розрахунки зі спробою перевірити цю ідею для випадку однорідного еліптичного тору, однак ця задача виявилась складною. Абсолютної відповідності немає, але також як і для випадку кругового тора, можна знайти наближені вирази через потенціал двох нескінченно тонких кілець. Знову ж, відсутність однозначності між двома кільцями і еліптичним тором може бути пов'язана з гауссовою кривизною його поверхні. Також, як і у випадку кругового тора, тут необхідне як урахування неоднорідного розподілу густини так і кривизни поверхні.

# ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

Отримано новий вираз для гравітаційного потенціалу однорідного кругового тора в довільній точці. Показано, що зовнішній потенціал тора з хорошою точністю відповідає потенціалу нескінченно тонкого кільця тієї ж маси, що проходить через центр перетину тора. Цей результат демонструє аналогію з відомим результатом для зовнішнього потенціалу кулі і потенціалу матеріальної точки. Отримано наближені вирази для зовнішнього потенціалу тора в залежності від його геометричного параметра.

Досліджено поведінку гравітаційного потенціалу у внутрішній області однорідного кругового тора (всередині об'єму). Отримано наближений вираз для внутрішнього потенціалу тора. Показано, що внутрішній потенціал тора може бути представлений у вигляді потенціалу циліндра і потенціалу кривизни, який містить в собі геометричні властивості поверхні тора. Показано, що існує кореляція між поведінкою внутрішнього потенціалу тора і гауссовою кривизною.

Отримано наближений вираз для потенціалу тора у всій області шляхом зшивання внутрішнього і зовнішнього потенціалу на границі. Цей вираз значно простіше інтегрального і дозволяє отримати аналітичний розв'язок для динаміки в системах з тороїдальними (кільцевими) структурами.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [15, 16, 17, 79, 81, 95].

# РОЗДІЛ 5

# ДИНАМІКА В ЗОВНІШНЬОМУ ГРАВІТАЦІЙНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ ТОРА ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДО КІЛЬЦЕВИХ ГАЛАКТИК

У попередньому розділі ми детально дослідили гравітаційний потенціал тора і отримали наближені вирази, які дозволяють значно спростити розв'язок задач, пов'язаних з динамікою. Такі задачі дійсно є актуальними, оскільки в багатьох астрофізичних об'єктах спостерігаються подібні структури: протопланетні товсті диски, затіняючі тори в АЯГ, кільцеві галактики та ін. У цьому розділі ми досліджуємо динаміку пробної частинки в гравітаційному полі тора при наявності центральної маси, яка представляє особливий інтерес для кільцевих галактик, до яких ми безпосередньо і будемо застосувати отримані результати. Дійсно, в кільцевих галактиках маса кільця зореутворення порівнянна з масою центральної галактики і, отже, гравітаційне поле з боку кільця може відігравати суттєву роль в розподілі речовини в цих об'єктах.

З геометричної точки зору кільце є окремим випадком тора, коли його малий радіус набагато менше великого (тонкий тор). При дослідженні динаміки в зовнішньому потенціалі тора (кільця) щодо протопланетних товстих дисків, Дж.Вудвард [241] замінив потенціал тора потенціалом нескінченно тонкого кільця, оскільки його потенціал дійсно прагне до потенціалу кільця на великих відстанях. Результат нашого дослідження показав (попередній розділ 4), що таке наближення можна використовувати аж до поверхні тора і це робить задачу більш точною. При необхідності врахувати більш тонкі ефекти можна використовувати отримані нами наближені вирази, що може бути важливим на наступних етапах, при введенні в дію телескопів нового покоління, здатних отримувати більш детальну інформацію про динаміку в кільцевих галактиках.

В цьому розділі, спираючись на результати попереднього розділу, ми детально досліджуємо рух пробної частинки в зовнішньому та внутрішньому гравітаційному полі тора при наявності центральний маси. Ми побачимо, що дана гравітуюча система виявляє цікаві властивості, такі як існування окружності Лагранжа, остання нестійка кругова орбіта, область існування некругових орбіт. Безумовно, ці особливості в динаміці будуть відображатися на спостережуваному розподілі випромінювання. Зокрема, як ми побачимо нижче, отримані результати можуть пояснювати наявність зони більш низької яскравості для кільцевих галактик типу об'єкта Хога.

## 5.1 Окружність Лагранжа

Розглянемо рух пробної частинки в зовнішньому гравітаційному полі однорідного кругового тора і центральної маси (рис. 5.1). Гравітаційні сили з боку центральної маси і тора діють в протилежних напрямках таким чином, що рівновага досягається на деякій відстані в площині симетрії. За аналогією з точкою Лагранжа $L_1$ в задачі трьох тіл, ми будемо називати "окружність Лагранжа" геометричне місце точок, де реалізовується баланс між силами з боку центральної маси і тором. Очевидно, що окружність Лагранжа – це область нестійкої рівноваги. Невелике збурення визначає долю частинки, яка або буде захоплена центральною масою або піде на тор. Для того, щоб знайти радіус окружності Лагранжа, необхідно знайти вирази для гравітаційної сили з боку тора $F_{torus,\rho} = \partial\varphi_{torus}/\partial\rho$.

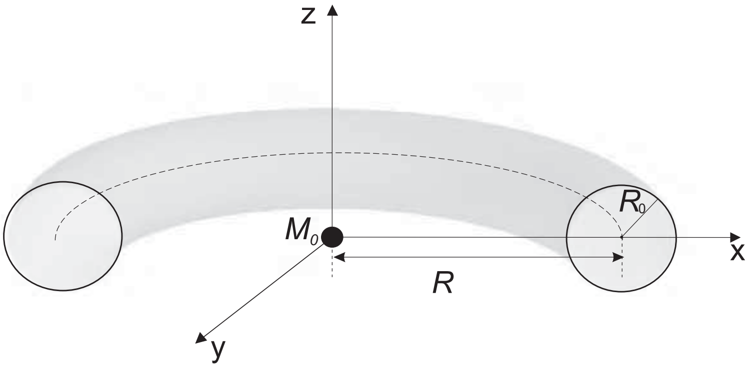


Рис. 5.1. Схема тора с центральною масою. Масивна окружність позначена пунктирною лінією.

В попередньому розділі ми отримали наближений вираз для зовнішнього потенціалу, який значно спрощує дослідження даної задачі. З наближеного виразу для зовнішнього потенціалу ми бачимо, що при $\zeta = 0$ множник у виразі (4.23) пропорційний $r_0^2/8$ і не залежить від радіальної відстані. Це означає, що ми можемо замінити потенціал тора потенціалом нескінченно тонкого кільця аж до поверхні тора, особливо для розглянутого випадку тонкого тора: $\varphi_{torus} \approx \varphi_{mc}$. Радіальна компонента гравітаційної сили з боку тора відрізняється від нескінченно тонкого кільця незначно: максимальне відхилення $\triangle f = 100\% \times (1 - f_1/f_2)$, менш ніж 6% для випадку тонкого тора (рис. 5.2). У всіх наступних рисунках ми позначаємо відмінність між кривою та її апроксимацією як $\triangle f = 100\% \times (1 - f_1/f_2)$.

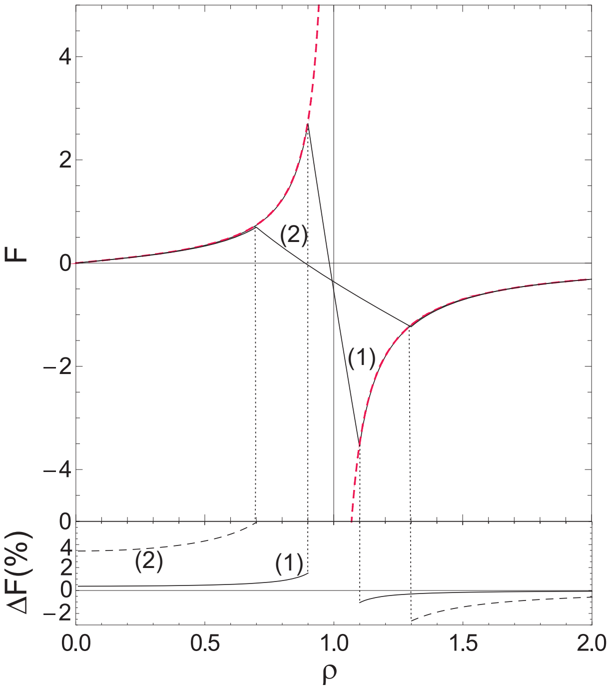


Рис. 5.2. *Верхня панель*: залежність радіальної компоненти гравітаційної сили ($\zeta = 0$) для масивної окружності з масою $M_{mc} = 1$ (червона крива) і для однорідного кругового тора (суцільна крива) тієї ж маси для наступних параметрів: 1) $r_0 = 0.1$, 2) $r_0 = 0.3$. *Нижня панель*: відносна відмінність між $F_{torus}$ та $F_{mc}$. Тут ми також використовуємо систему одиниць $G = 1$, $R = 1$.

Радіальна компонента сили, що діє з боку масивної окружності $F_{mc,\rho} = \partial\varphi_{mc}/\partial\rho$, після деяких перетворень має вигляд

$$F_{mc,\rho} = \frac{GM_{mc}}{\pi R^2}\sqrt{\frac{m}{\rho}}\frac{1}{4\rho(1-m)}\times$$
$$\left[(2 - m(\rho+1))E(m) - 2(1-m)K(m)\right]. \qquad (5.1)$$

Зазначимо, що в цьому розділі ми використовуємо поняття масивної окружності яке тотожно поняттю масивного нескінченно тонкого кільця (див. розділ 4). На рис. 5.2 показана залежність радіальної компоненти гравітаційної сили масивної окружності, яка чисельно отримана по (5.1), сили з боку центральної маси ($F_0 = GM_0/\rho^2$) та їх суми для випадку $\zeta = 0$, $M_0 = M_{mc}$ і $R = 1$.

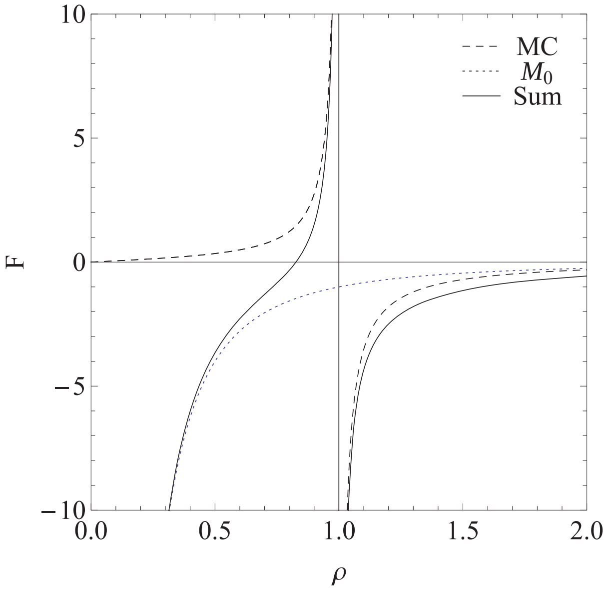


Рис. 5.3. Залежність радіальної компоненти гравітаційної сили масивної окружності (довга пунктирна крива), від центральної маси (коротка пунктирна крива) і від їх суми (суцільна крива) в площині масивної окружності для $M_0 = M_{mc}$.

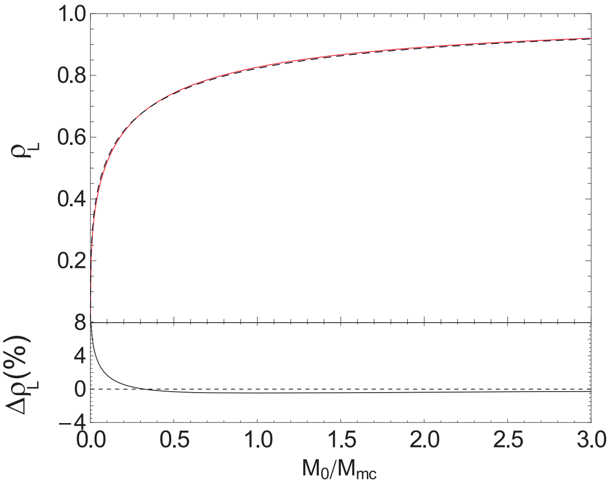


Рис. 5.4. *Верхня панель*: залежність радіусу окружності Лагранжа від відношення центральної маси до маси масивної окружності, які отримані чисельним розв'язком рівняння (5.7) (червона суцільна крива) і по наближеному виразу (5.11) (синя пунктирна крива). *Нижня панель*: відносна відмінність між двома кривими.

Таким чином, радіус окружності Лагранжа $\rho_L$ задовольняє умові $|F_{0,\rho}| =$

$|F_{mc,\rho}|$. З огляду на (5.1), отримуємо

$$\frac{\rho_L}{1-\rho_L}E(m_L) - \frac{\rho_L}{1+\rho_L}K(m_L) = q\pi, \tag{5.2}$$

де $q = M_0/M_{mc}$. Цей вираз було отримано незалежно і збігається з отриманим в [241]. Постараємося спростити його для подальшого використання в динаміці. Оскільки рівняння справедливо в екваторіальній площині симетрії $\zeta = 0$, параметр еліптичних інтегралів $m_L = 4\rho_L/(\rho_L+1)^2$. Рівняння (5.2) для $M_0 = 0$ має тривіальний розв'язок $\rho_L = 0$; в цьому випадку окружність Лагранжа вироджується в точку, яка збігається з центром масивної окружності. Для випадку $M_0 \gg M_{mc}$ радіус окружності Лагранжа прагне до радіуса масивної окружності. На рисунку 5.4 (*суцільна крива*) показано чисельний розв'язок рівняння (5.2) для різних значень відношення центральної маси до маси масивної окружності $q$. Рух навколо центральної маси може існувати в області $\rho < \rho_L$. В області між окружністю Лагранжа і масивною окружністю, де $\rho_L < \rho < 1$, частинка буде падати на масивну окружність (в разі руху частинки в площині симетрії кільця).

Можна отримати більш прості вирази для потенціалу масивної окружності і, відповідно, для радіальної компоненти сили для випадку $\zeta = 0$, використовуючи співвідношення для еліптичних інтегралів [26] (стор. 922, пункт 8.126):

$$K\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{\rho+1}\right) = (1+\rho)K(\rho), \tag{5.3}$$

$$E\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{\rho+1}\right) = \frac{1}{1+\rho}\left[2E(\rho) - (1-\rho^2)K(\rho)\right]. \tag{5.4}$$

Для зручності ми будемо використовувати модуль $k \equiv \sqrt{m}$ в еліптичних інтегралах (5.3) і (5.4). Тоді, враховуючи (5.3), ми перепишемо потенціал масивної окружності (4.6) в екваторіальній площині при $\rho < 1$ як

$$\varphi_{mc}(\rho) = \frac{2GM_{mc}}{\pi R}K(\rho) \tag{5.5}$$

і, відповідно, радіальну компоненту гравітаційної сили (5.1) для $\zeta = 0$ як

$$F_{mc}(\rho) = \frac{2GM_{mc}}{\pi R^2}\frac{1}{\rho(1-\rho^2)}\left[E(\rho) - (1-\rho^2)K(\rho)\right]. \tag{5.6}$$

З огляду на вираз (5.6), рівняння (5.2) для радіуса окружності Лагранжа спрощується і має вигляд

$$\frac{\rho_L}{1-\rho_L^2}E(\rho_L) - \rho_L K(\rho_L) = q\frac{\pi}{2}, \tag{5.7}$$

яке відповідає співвідношенню в [241]. Це рівняння може бути вирішено аналітично тільки для одного значення відношення мас за допомогою співвідношень [26]

$$K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{\pi}}; \quad E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2} + \frac{\Gamma(1/4)^2}{8\sqrt{\pi}}.$$

Тоді для $\rho_L = \sqrt{2}/2$ розв'язок рівняння (5.7) дає таке значення відношення мас: $q \equiv M_0/M_{mc} = 2\sqrt{2\pi}\Gamma(1/4)^{-2} \approx 0.38$.

## 5.2 Наближений розв'язок для потенціалу матеріальної окружності і радіус окружності Лагранжа

Сконструюємо тут наближений вираз потенціалу масивної окружності $\rho < 1$, який дозволить нам отримати аналітичний розв'язок для радіуса окружності Лагранжа. При $\rho \to 0$, $K(0) \to \pi/2$ і

$$\varphi_{mc}\big|_{\rho\to 0} \approx \frac{GM_{mc}}{R}.$$

При $\rho \to 1$, $m \to 1$,

$$K(m) \to \ln\frac{4}{\sqrt{1-m}} = \ln\frac{4(1+\rho)}{1-\rho} \approx \ln\frac{8}{1-\rho}$$

і

$$\varphi_{mc}\big|_{\rho\to 1} \approx \frac{GM_{mc}}{\pi R}\ln\frac{8}{1-\rho}.$$

Зшиваючи ці два граничних випадки, ми отримуємо хорошу апроксимацію для потенціалу

$$\varphi_{mc}(\rho) \approx \frac{GM_{mc}}{R}\left[1 - \frac{1}{\pi}\left(\rho + \ln(1-\rho)\right)\right], \tag{5.8}$$

і для радіальної компоненти гравітаційної сили:

$$F_{mc,\rho}(\rho) \approx \frac{GM_{mc}}{\pi R^2}\frac{\rho}{1-\rho}, \tag{5.9}$$

яка набагато простіше, ніж вираз (5.6).

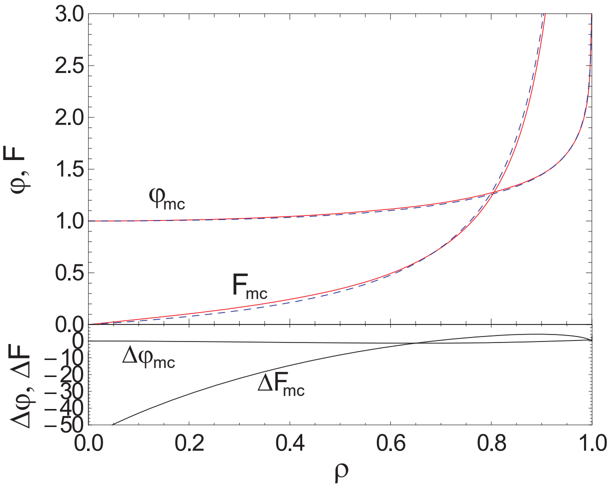


Рис. 5.5. *Верхня панель*: залежність потенціалу і радіальної компоненти гравітаційної сили для масивної окружності для випадку $M_0 = M_{mc}$. Суцільна крива відповідає точним виразам (5.5), (5.6) і пунктирні криві — наближеним виразам (5.8), (5.9). *Нижня панель*: відносні відмінності між двома цими кривими.

На рисунку 5.5 показані крива потенціалу масивної окружності і радіальної компоненти сили, які отримані по точним виразам (5.5) і (5.6) і по наближеним виразам (5.8) і (5.9). Наближений вираз для потенціалу працює з хорошою точністю у всій розглянутій області ($\rho < 1$). Така точність не зберігається для градієнта. Однак існує хороша відповідність між точним і наближеним виразами для сили в області $\rho \gg 0$, яка представляє інтерес для нашої задачі. Врівноважуючи гравітаційні сили з боку центральної маси та з боку масивної окружності, використовуючи наближений вираз (5.9), отримуємо рівняння для радіуса окружності Лагранжа:

$$\rho_L^3 - q\pi(1 - \rho_L) = 0. \tag{5.10}$$

Це рівняння дозволяє отримати аналітичний розв'язок для радіуса окружності Лагранжа

$$\rho_L = \frac{\pi^{1/3}(2^{1/3}s^2 - 2q(3\pi)^{1/3})}{6^{2/3}s}, \tag{5.11}$$

де

$$s = (9q + \sqrt{3}q\sqrt{27 + 4\pi q})^{1/3}.$$

З рисунка 5.4 видно, що існує хороша відповідність між чисельним розв'язком точного рівняння для окружності Лагранжа (5.7) і розв'язком, отриманим по наближеному виразу (5.11).

## 5.3 Рух в екваторіальній площині матеріальної окружності. Остання стійка орбіта (OSCO).

Розглянемо проблему існування фінітних і, зокрема, кругових орбіт для частинки, що рухається в екваторіальній площині під дією гравітаційних сил з боку центральної маси і масивної окружності. Ця задача є окремим випадком руху частинки в осесиметричному потенціалі [101, 193], відрізняючись тим, що гравітаційні сили від цих двох притягуючих об'єктів діють в протилежних напрямках. Ефективний потенціал для такої системи має вигляд

$$U_{\rm eff} = U_0 + U_{mc} + \frac{I^2}{2R^2\rho^2}, \tag{5.12}$$

де $U_0 = -GM_0/(R\rho)$ і $U_{mc} = -\varphi_{mc}$ – потенціальні енергії центральної маси і масивної окружності і $I = I_\zeta$ – кутовий момент частинки на одиницю маси.

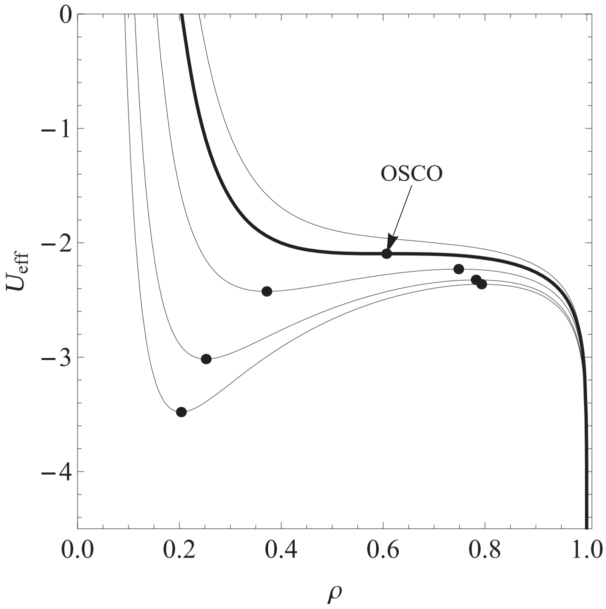


Рис. 5.6. Радіальна залежність ефективного потенціалу для різних значень кутового моменту: $I = 0.45$, $0.5$, $0.6$, $0.702$, $0.77$ і $M_0 = M_{mc}$. Екстремуми $U_{\rm eff}$ показані чорними точками; жирна крива відповідає $I = I_{osco} = 0.702$.

Для малих значень кутового моменту ефективний потенціал $U_{\rm eff}$ має два екстремуми: мінімум, який відповідає стійкій круговій орбіті, і максимум, який відповідає нестійкій круговій орбіті (рис. 5.6). При збільшенні значення моменту мінімум зміщується в область великих $\rho$, а максимум в область менших значень $\rho$. При деякому граничному значенні кутового моменту мінімум і максимум зливаються один з одним в одну точку. Ця точка відповідає максимально можливому радіусу стійкої кругової орбіти. Загалом, така поведінка $U_{\text{eff}}$ подібна до випадку руху матеріальної точки навколо чорної діри [66, 41, 232]. Дійсно, в релятивістському випадку ефективний потенціал (в системі одиниць $G = c = 1$) має вигляд

$$U_{\text{eff}}^{rel} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{I^2}{r^2}\right)}.$$

Цей потенціал має також два екстремуми: максимум на менших радіусах і мінімум на великих. При збільшенні кутового моменту екстремуми ефективного потенціалу зливаються один з одним в одну точку, яка відповідає останній можливій стійкій круговій орбіті (рис. 5.7 - пор. з рис. 2 в [232]).

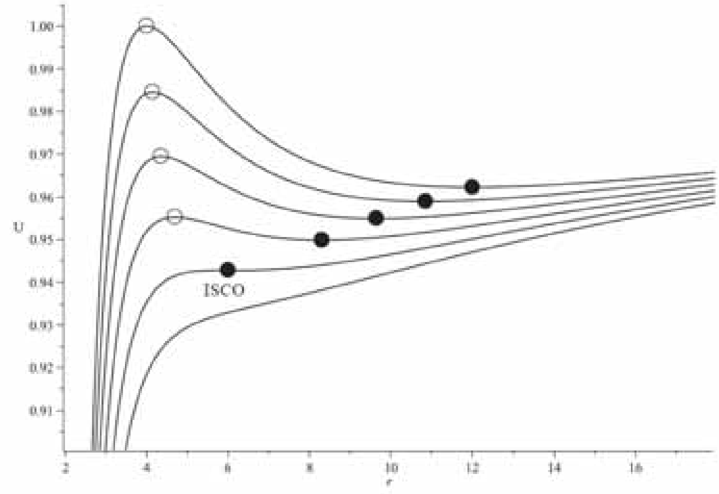


Рис. 5.7. Залежність ефективного потенціалу від відстані для релятивістського випадку метрики Шварцшильда. Різні криві відповідають різним значенням моменту частинки. Зафарбовані кола відповідають стійким і незафарбовані — нестійким круговим орбітам, відповідно. Остання стійка орбіта позначена як ISCO — the innermost stable circular orbit. Рисунок взятий з огляду [232].

Ця орбіта називається внутрішньою стійкою круговою орбітою (the innermost stable circular orbit = ISCO), тому що стабільні кругові орбіти існують[1] поза ISCO. Для метрики Шварцшильда радіус ISCO дорівнює $3r_g$, де $r_g = 2GM/c^2$ — радіус Шварцшильда. У разі потенціалу, розглянутого тут, ситуація аналогічна релятивістському випадку. При цьому розташування стійких і нестійких кругових орбіт протилежна: стійкі кругові орбіти

---

[1] Примітка 1. Зауважимо, що в спеціальному випадку розв'язок рівняння Ейнштейна при наявності лінійного масивного скалярного поля допускає також нетривіальну поведінку ефективного потенціалу [227], яке схоже на розглянутий тут випадок з кільцем в рамках класичної механіки.

розташовані всередині останньої стійкої кругової орбіти. За аналогією з релятивістським випадком ми будемо називати цю орбіту "останньої зовнішньою стійкою круговою орбітою"( "the outermost stable circular orbit = OSCO") .

Екстремуми ефективного потенціалу $\partial U_{\text{eff}}/\partial\rho$ приводять до наступного рівняння:

$$I^2 = W(\rho), \tag{5.13}$$

де

$$\begin{aligned} W(\rho) &= \rho + \frac{1}{q\pi}\frac{\rho^2}{\rho^2-1}\left[(\rho+1)E(m) + (\rho-1)K(m)\right] = \\ &= \rho + \frac{1}{q\pi}2\rho^2\left[K(\rho) - \frac{E(\rho)}{1-\rho^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Для того, щоб розв'язати рівняння (5.13), ми використовуємо наближений вираз (5.8) для масивної окружності, справедливе у внутрішній області $\rho < 1$:

$$W(\rho) \approx \rho + \frac{\rho^3}{q\pi}\left(1 - \frac{1}{1-\rho}\right). \tag{5.15}$$

Графічний розв'язок рівняння (5.13) на рис. 5.8 (*товсті криві*) показує область радіусів, для яких існують кругові орбіти. Для одних і тих же значень $I < I_{osco}$ існують два розв'язки для $\rho$, які відповідають існуванню стійких кругових орбіт (малі $\rho$) і нестійких кругових орбіт (великі $\rho$).

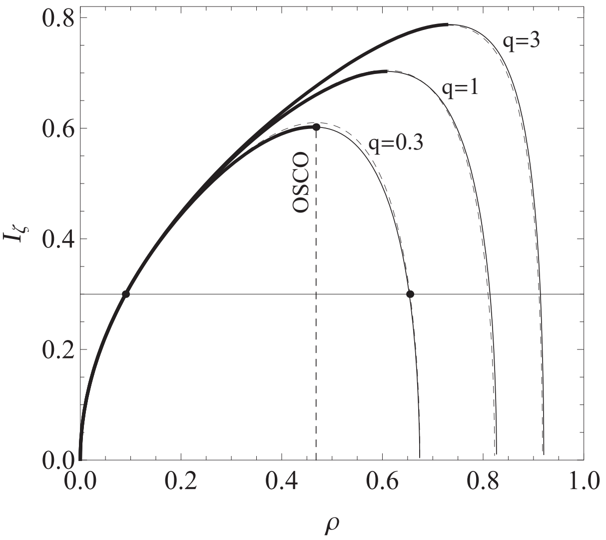


Рис. 5.8. Графічний розв'язок рівняння (5.13) з урахуванням точного виразу (5.14) (суцільні криві) і апроксимації (5.15) (пунктирні криві) для $I = 0.3$ і різних значень відношення маси ядра до маси окружності $q = 0.3, 1, 3$. Жирні криві відповідають області, де існують стабільні кругові орбіти.

Таким чином, максимально можливе значення кутового моменту $I_{osco}$ розділяє дві області існування стійких кругових орбіт і точок нестійкої рівноваги. Рівняння для OSCO може бути отримано з умови $\partial W(\rho)/\partial\rho = 0$ з урахуванням (5.15):

$$3\rho_{osco}^4 - 4\rho_{osco}^3 + \pi q(1-\rho_{osco})^2 = 0. \tag{5.16}$$

Це рівняння має два дійсних корені, один з яких задовольняє умові $\rho < 1$. Наприклад, радіус OSCO для $q = 1$ дорівнює $\rho_{osco} \approx 0.606$ з чисельного розв'язку рівняння (5.16) і кутовий момент OSCO $I_{osco} \approx 0.703$ з рівняння (5.13). На рис. 5.9 показані спільно залежності радіусів OSCO і окружності Лагранжа від відношення маси ядра до маси масивної окружності. Ми можемо перевірити зникнення стійкої кругової орбіти, розв'язуючи рівняння руху

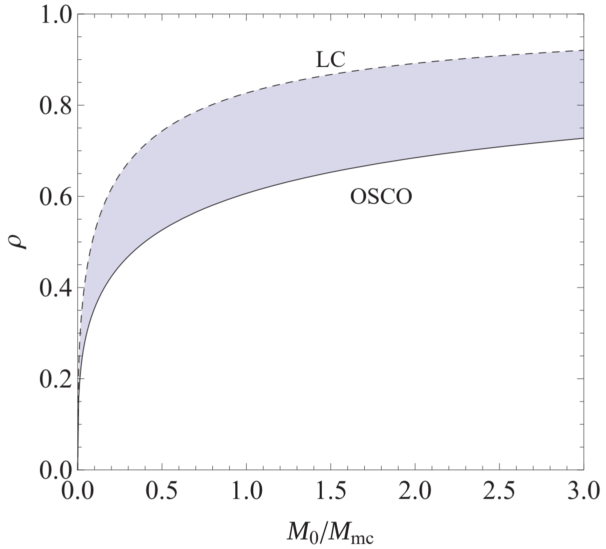


Рис. 5.9. Залежність радіусу OSCO і окружності Лагранжа від співвідношення мас ядр та-масивного кільца. Сіра область позначає область, де стійкі орбіти не існують.

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\frac{GM_0}{R^3}\vec{\rho}\left[\frac{1}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}} - \frac{f(\rho,\zeta)}{\pi q\,\rho^{5/2}}\right], \tag{5.17}$$

$$\ddot{\zeta} = -\frac{GM_0}{R^3}\zeta\left[\frac{1}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}} + \frac{1}{\pi q}\sqrt{\frac{m}{\rho}}\frac{E(m)}{(\rho-1)^2+\zeta^2}\right], \tag{5.18}$$

де

$$f(\rho,\zeta) = \frac{\sqrt{m}}{4(1-m)}\left[(2-m(\rho+1))E(m) - 2(1-m)K(m)\right],$$

координати $\zeta$, $\vec{\rho} = (x, y)$ параметризовані на радіус кільця $R$; параметр $m$ еліптичних інтегралів визначається виразом (4.9).

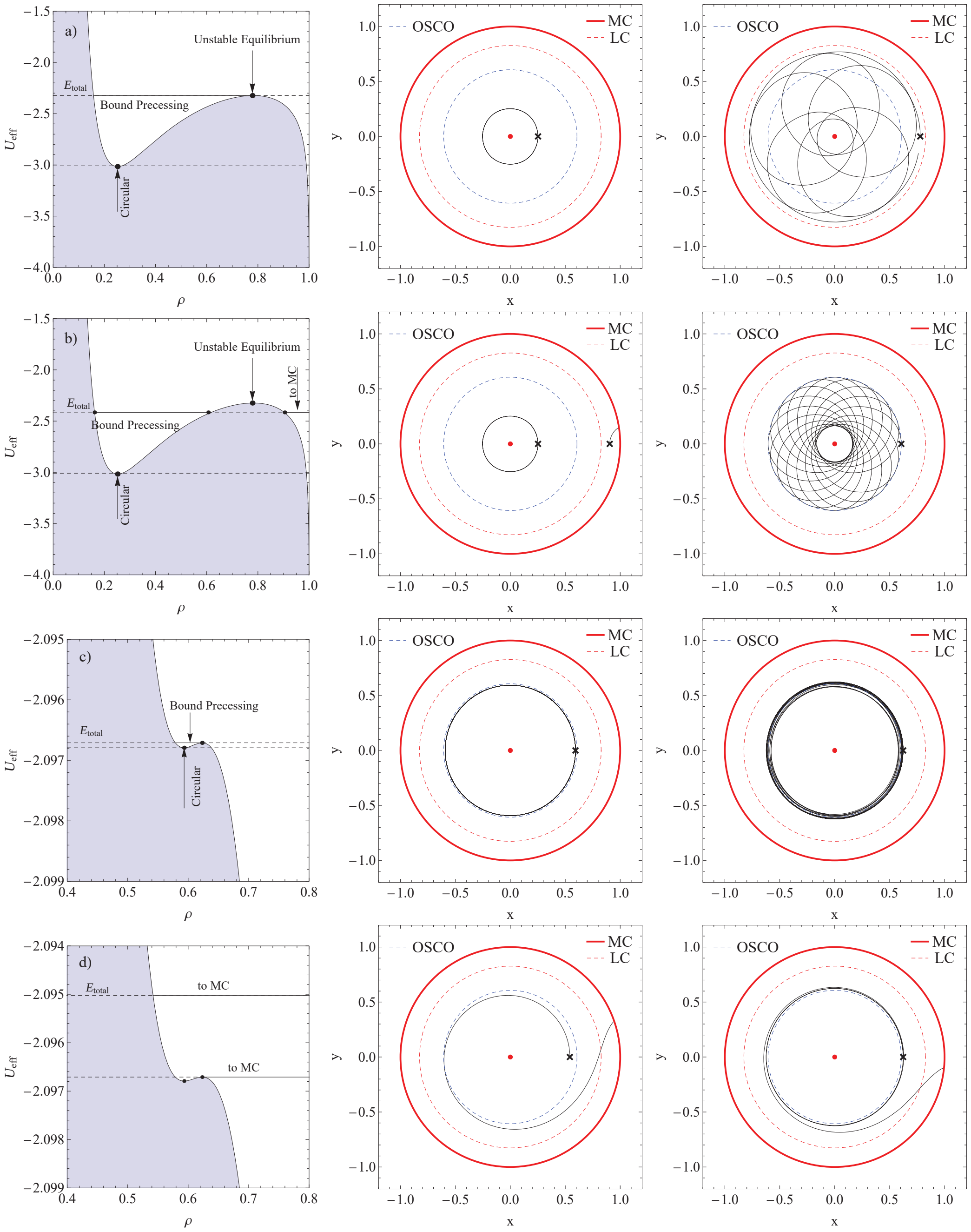


Рис. 5.10. Ефективний потенціал (*ліва колонка*) і орбіта пробної частинки (*середня, права колонка*) в екваторіальній площині кільця для $M_0 = M_{mc}$. Початкові умови: a) $I = 0.5$, $\rho_0 = 0.252$, $\rho_0 = 0.779$; b) $I = 0.5$, $\rho_0 = 0.252$, $\rho_0 = 0.606$; c) $I = 0.702$, $\rho_0 = 0.593$, $\rho_0 = 0.623157$; d) $I = 0.702$, $V_\rho(0) = 1.295$, $\rho_0 = 0.623220$. Початкове положення пробної частинки на орбіті відзначено хрестиком. Суцільне червоне, пунктирне червоне і пунктирне синє кола представляють масивну окружність, окружність Лагранжа і останню стійку орбіту (OSCO), відповідно.

У полярних координатах ($\rho$, $\psi$) рівняння руху в екваторіальній площині мають вигляд

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\psi}^2 = -\frac{GM_0}{R^3\rho^2}\left[1 - \frac{1}{\pi q}\sqrt{\rho}f(\rho, 0)\right], \tag{5.19}$$

$$\dot{\psi}\rho^2 R^2 = I. \tag{5.20}$$

На рис. 5.10 показані приклади орбіт з різними початковими умовами. При $I < I_{osco}$ ефективний потенціал має мінімум $\min(U_{\rm eff})$, який відповідає стійким круговим орбітам (рис. 5.10  a, b, c; *середні колонки*). Нестійка рівновага реалізується при $E_{total} = \max(U_{\rm eff})$ і в цьому випадку частинка рухається по обмеженій прецесуючій орбіті типу "розетка" (рис. 5.10 a; *праві колонки*). Екстремум $U_{\rm eff}$ знайдений розв'язком рівняння (5.13). Якщо $E_{total} < \max(U_{\rm eff})$, існують обмежено прецесуючі орбіти в потенціальній ямі і також рух у напрямку до масивної окружності (рис. 5.10 b; *середні, праві колонки*). При $I \to I_{osco}$ екстремум $U_{\rm eff}$ замивається і радіус стійкої кругової орбіти прагне до $\rho_{osco}$ (рис. 5.10 c; *середня колонка*). В цьому випадку при $E_{total} = \max(U_{\rm eff})$ орбіта прецесує поблизу $\rho_{osco}$ (рис. 5.10 c; *права колонка*). Оскільки екстремуми знаходяться близько один до одного, невелике відхилення від початкових умов $E_{total} > \max(U_{\rm eff})$ призводить до зростання радіусу орбіти і до руху частинки у напрямку до масивного кола (рис. 5.10 d; *права колонка*). Якщо $I > I_{osco}$ орбіти навколо центральної маси не існують і частинка завжди рухається у напрямку до масивної окружності, як на рис. 5.10 d (*середня колонка*).

Область $\rho_{osco} < \rho < \rho_L$, в якій неможливе існування стійких кругових орбіт, є результатом конкуренції між гравітаційними силами з боку центральної маси і кільця, які діють у протилежних напрямках. Сталий круговий рух може існувати тільки в межах границі OSCO. В об'єктах, де присутнє масивне кільце, зоряна речовина може вимітатись з області $\rho > \rho_{osco}$. Ці процеси повинні приводити до очищення цієї області і до формування щілини в розподілі речовини. Така щілина може пояснювати спостережуваний мінімум в розподілі речовини між центральним ядром і зоряним кільцем в таких об'єктах, як об'єкт Хога (див. розділ 1.2).

## 5.4 Рух частинки в меридіональній площині матеріальної окружності

Рух пробної частинки в гравітаційному полі масивної окружності і центральної маси може здійснюватися по таким замкнутим траєкторіям, які наведені на рис. 5.11. В такому гравітаційному полі ми виявили два типи замкнутих траєкторій, обидві з яких обвивають центральну масу і масивну окружність (рис. 5.11 a, b). Траєкторія типу "вісімки" (рис. 5.11 a) подібна замкнутої траєкторії в гравітаційному полі тільки масивного кільця [21].

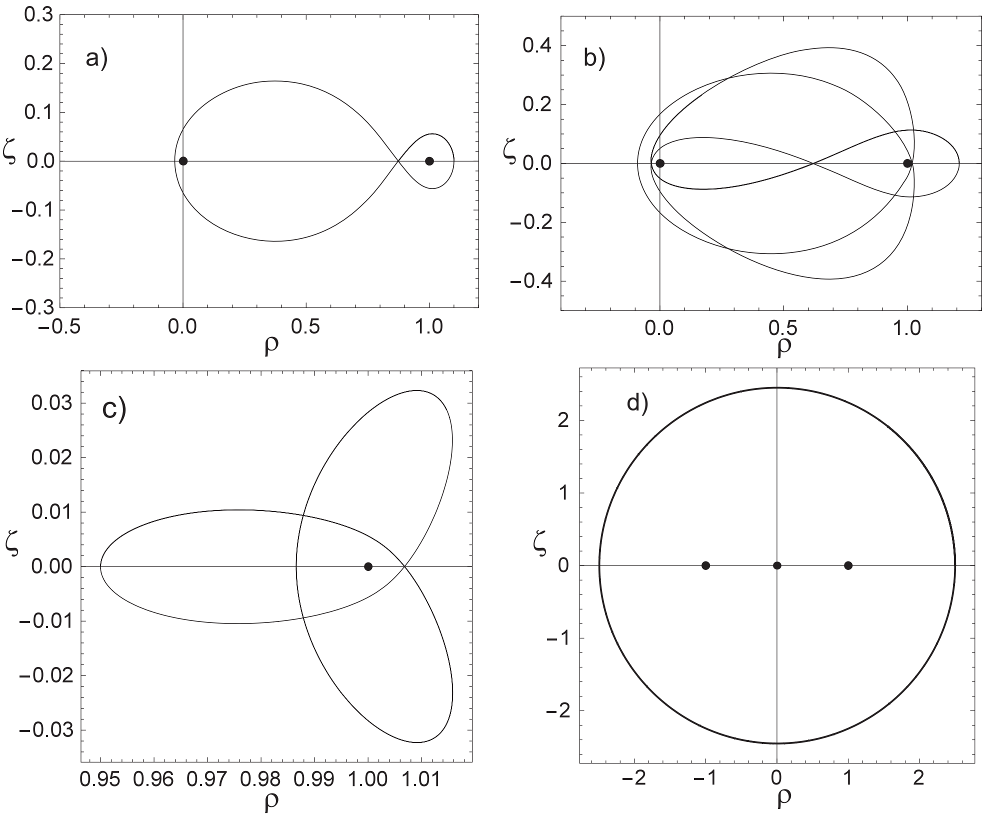


Рис. 5.11. Замкнуті траєкторії пробної частинки в меридіональній площині масивної окружності для $M_0 = M_{mc}$ і початкових умов: $\zeta_0 = 0$, $V_\rho(0) = 0$, a) $\rho_0 = 1.1$, $V_\zeta(0) = 0.392$, b)$\rho_0 = 1.21$, $V_\zeta(0) = 0.3924$, c) $\rho_0 = 0.95$, $V_\zeta(0) = 0.145$, d) $\rho_0 = 2.5$, $V_\zeta(0) = 0.905$. Центральна маса розташована в точці (0,0) і координати масивної окружності $(\pm 1, 0)$.

У разі окремої масивної окружності без центральної маси, частинка рухається по вісімці з точкою перетину, що збігається з геометричним центром кільця. Складніша замкнута траєкторія показана на рис. 5.11 b. Ми будемо називати такий тип траєкторії "риба". Інша замкнута траєкторія з формою "трилисника" знаходиться поблизу масивної окружності і показана на рис. 5.11 с. Чисельне моделювання показує, що ці орбіти стійкі на тривалому часовому інтервалі. Подібні траєкторії існують тільки в такому типі гравітаційного осесиметричного потенціалу, де сили діють у протилежних напрямках. Крім того, при зростанні відстані від кільця (в початкових умовах) потенціал такої системи прагне до потенціалу матеріальної точки і орбіта частинки прагне до кругової навколо всієї системи (рис. 5.11 d). Нетривіальні замкнуті траєкторії можуть означати існування третього інтеграла в системі з таким потенціалом (див., наприклад, [154, 101]).

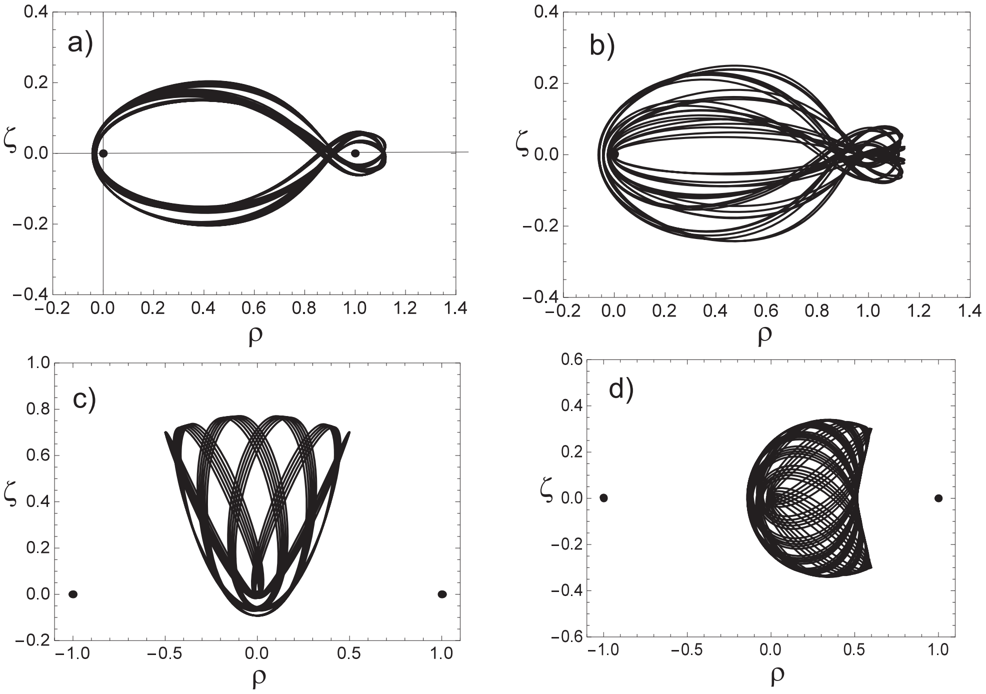


Рис. 5.12. Регулярні орбіти пробної частинки в гравітаційному полі центральної маси і масивного кільця для $M_0 = M_{mc}$ і початкових умов: $\zeta_0 = 0$, $V_\rho(0) = 0$, a) $\rho_0 = 1.11$, $V_\zeta(0) = 0.392$, b) $\rho_0 = 1.12$, $V_\zeta(0) = 0.392$, c) $\rho_0 = 0.5$, $\zeta_0 = 0.7$, $V_\zeta(0) = 0$, d) $\rho_0 = 0.6$, $\zeta_0 = 0.3$,$V_\zeta(0) = 0$. Центральна маса розташована в точці (0,0) і координати масивної окружності $(\pm 1, 0)$.

Замкнені орбіти є особливим випадком. Найбільш часті орбіти — це незамкнуті регулярні орбіти (рис.5.12), які є типовими для осесиметричного потенціалу. Обмежено регулярні орбіти навколо центральної маси і масивної окружності показані на рис. 5.12 a, b [1]. Це дифузна орбіта типу вісімки (рис. 5.12 a), що отримана для початкових умов, які слабо відрізняються від умов, відповідних рис.5.11 a. Зростання початкового значення координа-

---

Примітка 1. Зауважимо, що деякі з регулярних траєкторій були обчислені нами раніше в [5].

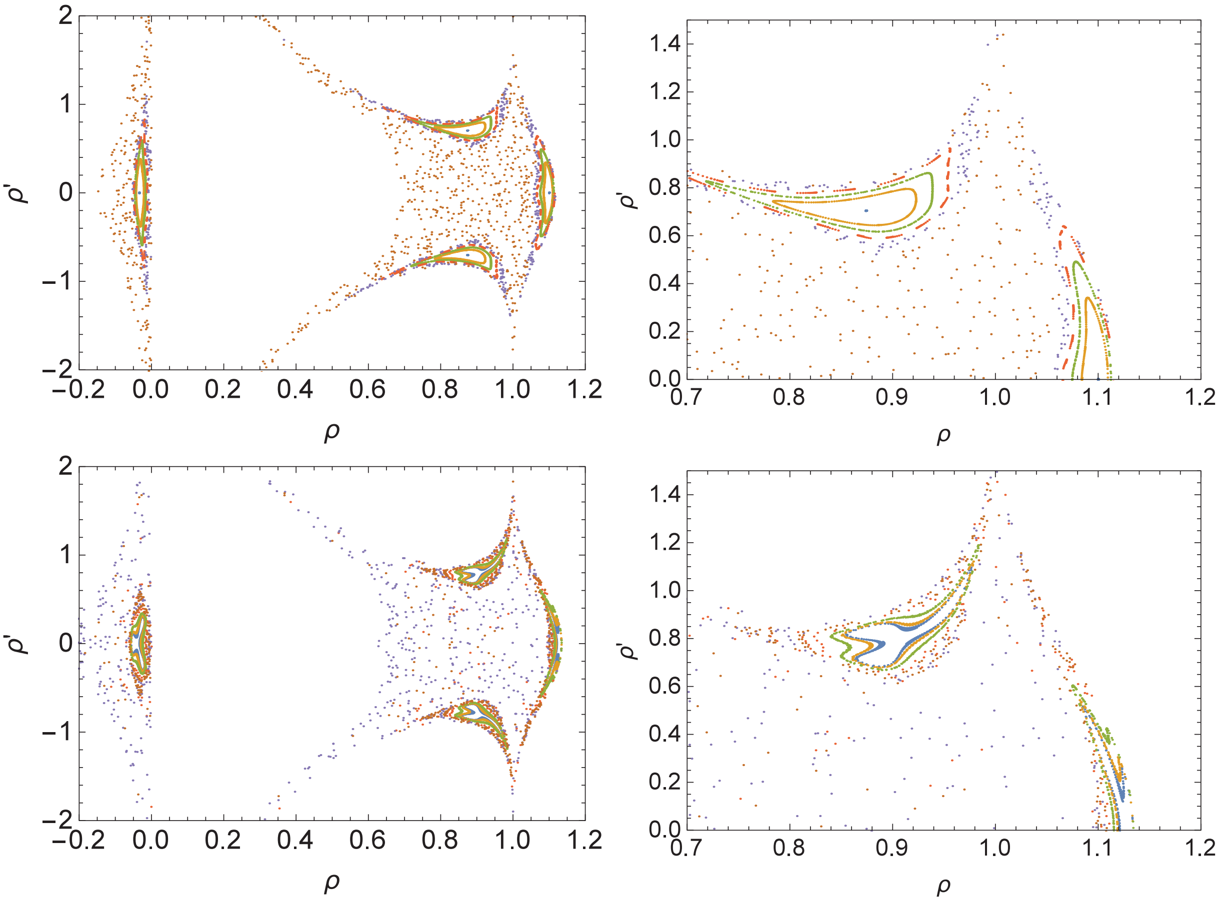


Рис. 5.13. Перетин Пуанкаре для початкових умов: $M_0 = M_{mc}$, $\zeta_0 = 0$, $V_\zeta(0) = 0.392$, $\rho_0 = 1.1 - i \cdot 0.012$, $i = 0, .., 5$. *Верхні панелі*: $E_{total} = -2.17606$; *нижні панелі*: $E_{total} = -2.12$.

ти частинки призводить до зміни форми траєкторії, яка має вже тип "хвіст ластівки" (рис. 5.12 b). Назва такої орбіти була введена в роботі [21], де досліджувався рух частинки в гравітаційному полі нескінченно тонкого кільця за відсутності центральної маси. Як ми бачимо, наявність центральної маси також дозволяє існування такого типу орбіт. Інший тип регулярних орбіт — тип "чашка", яка обвиває тільки центральну масу, показана на рис. 5.12 c. Якщо початкові умови $\zeta$-координати зменшуються, тоді чашка повертається на кут $\pi/2$ (рис. 5.12 d). Дійсно, в цьому випадку існує істотний вплив гравітаційних сил в екваторіальній площині системи, що пояснює поворот орбіти. Такі траєкторії демонструють як випадок руху тільки в меридіональній площині, так і проекції $3D$-орбіт.

У такій системі також присутній хаотичний рух. Зауважимо, що виникнення хаосу в системі "чорна діра з диском або кільцем" було досліджено за допомогою перетинів (відображень) Пуанкаре в роботах [218, 219]. Тут ми коротко розглянемо випадок, який є особливим, тобто існує тільки в даній системі. Для цього ми будемо використовувати метод відображення на перетині Пуанкаре, який дозволяє побачити тенденцію зміни характеру орбіт відразу для декількох початкових умов. Дослідженню хаосу присвячена велика кількість робіт (див., наприклад, [63] з посиланнями). Ідея перетину Пуанкаре полягає в тому, що ми виділяємо певну площину, в даному випадку в меридіональної області, і розглядаємо перетин траєкторій цією площиною. При цьому одну з компонент швидкості виражаємо через закон збереження повної енергії. Таким чином, ми приходимо до можливості відображення орбіти в фазовій площині $\rho, \dot{\rho}$.

На рис. 5.13 (*верхній*) показані перетини Пуанкаре в фазовій площині ($\rho$, $V_\rho$) для даного значення повної енергії $E_{total} = -2.17606$. П'ять траєкторій на цьому перетині, які розфарбовані різними кольорами, відповідають різним початковим координатам. Радіальна компонента швидкості $V_\rho$ отримана із закону збереження енергії. Добре видно, що існують чотири інваріантних точки в центрах чотирьох островів (*блакитні точки* на рис.5.13 *верхні*), які представляють стійкі замкнуті орбіти. Для обраних початкових умов, ці точки відповідають траєкторіям типу вісімки (рис. 5.11 a). Також присутні три замкнуті криві навколо кожної інваріантної точки (*помаранчеві, зелені, червоні* на рис. 5.13 *верхній*). Ці траєкторії відповідають трьом регулярним орбітам, подібно орбітам типу дифузної вісімки (рис. 5.12 a). Зменшення радіальної координати призводить до хаотизації траєкторії навколо центральної маси і масивної окружності. Така траєкторія відображається на перетині Пуанкаре у вигляді випадково розподілених точок в обмеженій області. Форма островів на перетині Пуанкаре змінюється для високих значень повної енергії $E_{total} = -2.12$ (рис. 5.13 *нижній*). Ці острови відповідають дифузній траєкторії типу "хвіст ластівки" як на рис. 5.12 b. При подальшому зростанні повної енергії регулярних орбіт не існує і можливий тільки хаотичний рух.

## 5.5 Область нестійких орбіт в об'єкті Хога

Область, де неможливе існування стійких кругових орбіт, може представляти інтерес для розуміння спостережуваних властивостей кільцевих галактик, в яких маса ядра порівнянна з масою кільця. Як приклад, ми можемо оцінити ширину області нестійких орбіт для об'єкта Хога. В цьому об'єкті навколо центральної еліптичної галактики спостерігається кільце, в якому відбуваються активні процеси зореутворення. Використовуючи зображення, отримане телескопом ім.Хаббла в рамках програми "Heritage program" (див. рис. 1.19), ми можемо грубо оцінити внутрішню границю кільця, яка дорівнює приблизно 0.9 від середнього радіуса самого кільця. Відповідно даним спостережень [131], відношення маси центральної галактики до маси кільця $M_0/M_{ring} \approx 3$ і великий радіус кільця $R \approx 17''$. Ми можемо отримати значення радіусу окружності Лагранжа з (5.11) $\rho_L \approx 0.92$, який в даному випадку практично збігається з внутрішнім радіусом кільця. З рівняння (5.16) отримуємо радіус останньої стійкої орбіти (OSCO), який виявляється рівним $\rho_{osco} \approx 0.73$. Тоді ширина області між OSCO і окружністю Лагранжа в кутовій мірі дорівнює $\triangle\rho = \rho_L - \rho_{osco} = 0.19R \approx 3.2''$. Оскільки $1'' = 851$ пк [226], отримуємо ширину області нестійких орбіт в лінійній мірі $\triangle\rho \approx 2.8$ кпк. На рис. 5.14 показана схема кільцевої галактики для випадку об'єкта Хога зі збереженням відповідних пропорцій між головними масштабами. Ширина області нестійких кругових орбіт відповідає спостережуваному мінімуму в усередненому профілі світності для об'єкта Хога (рис. 1.20)[131]. Також мінімум в зоряному розподілі об'єкта Хога видно і на зображенні телескопа ім. Хаббла (рис. 1.19).

Ширина області нестійких кругових орбіт залишається приблизно тією ж для значень відношення маси ядра до маси кільця ($q = 0.5 \div 3$) і зміщується до центру системи, якщо маса кільця збільшується (див. рис. 5.9). Це може бути додатковим критерієм для визначення маси кільця, яку досить складно оцінити зі спостережуваного розподілу яскравості для далеких галактик. Відзначимо, що існує деяка аналогія з областю нестійких орбіт в головному поясі астероїдів, так звана щілина Кірквуда, яка виникає внаслідок гравіта-

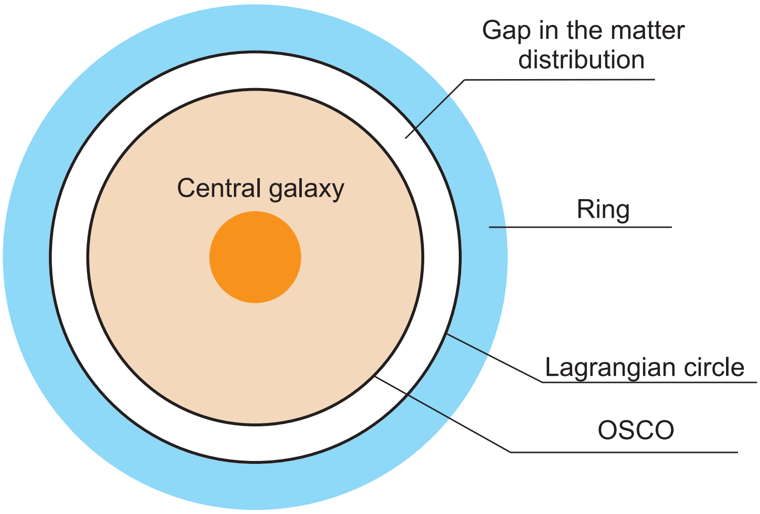


Рис. 5.14. Схема кільцевої галактики типу об'єкта Хога з щілиною в розподілі речовини між останньою стійкою круговою орбітою (OSCO) і окружністю Лагранжа.

ційного резонансу і пов'язана з гравітаційним впливом поля Юпітера. У розглянутій тут системі природа щілини істотно інша, вона виникає як результат конкуренції гравітаційних сил з боку центральної галактики і кільця. Це призводить до неможливості руху частинок по замкнутим круговим орбітам. В результаті тісні зближення зірок можуть призводити до суттєвих змін їх орбіт з подальшою міграцією або на центральну галактику, або на кільце, формуючи таким чином спостережувану щілину в розподілі зірок. Подібна щілина повинна бути обов'язковою в будь-якій кільцевій галактиці, де маса центрального ядра порівнянна з масою кільця. І навпаки, об'єкти, в яких така щілина спостерігається, кажуть нам про те, що маса кільця істотна, що знову ж таки є додатковим критерієм у визначенні співвідношення мас для таких об'єктів. Надалі представляє інтерес на підставі статистики великого числа кільцевих галактик отримати розподіл значень ширини області нестійких орбіт, що дозволить зробити висновки про еволюцію цих об'єктів. Крім того, кільцеві галактики, як видно з результатів цього розділу, є унікальними "лабораторіями" для дослідження незвичайних гравітаційних властивостей галактичних об'єктів, де гравітаційні сили діють в протилежних напрямках.

В роботі [79] обговорювалося, що так як максимум потенціалу зміщений по відношенню до центру перетину, гравітуючий тор повинен стискатися уздовж великого радіуса. Для протидії цьому стисненню необхідні відцентрові сили, які врівноважують гравітаційні і, отже, істотна роль орбітального руху. Можна стверджувати, що стабільні кільцеві структури можуть існувати тільки при наявності центральної маси, яка і забезпечує баланс між гравітаційними і відцентровими силами (уздовж великого радіуса тора). Це реалізується в таких об'єктах, як затінюючі газопилові тори в активних ядрах галактик, в яких маса тора значно менша, ніж маса центральної надмасивної чорної діри. Однак в кільцевих галактиках, де маса кільця порівнянна з масою центральної галактики, з'являються додаткові сили. Дійсно, в цьому випадку тор буде також стискатися уздовж малого радіуса за рахунок самогравітації, і, щоб компенсувати це стиснення, необхідні також відцентрові сили, але тепер вже вздовж малого радіуса. Це означає, що в кільці може бути присутнім вихровий рух. Можливо, що в кільцевих галактиках реалізується унікальний баланс між орбітальним і вихровим рухом, який призводить до стійкості даних об'єктів.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5

Досліджено задачу про рух пробної частинки в зовнішньому гравітаційному полі тора при наявності центральної маси. Завдяки результатам, отриманим в попередньому розділі, потенціал тора замінено потенціалом нескінченно тонкого кільця (масивної окружності). Це дозволило отримати аналітичний розв'язок для радіуса області нестійкої рівноваги. Введено поняття "окружность Лагранжа" за аналогією з точкою Лагранжа $L_1$ в задачі трьох тіл, яке є геометричним місцем точок, де досягається рівновага між центральною масою і кільцем.

Також показано, що в такій системі існує найостанніша стійка кругова орбіта. Стійкі кругові орбіти можливі тільки всередині області, що обмежена цією орбітою. Ми назвали таку орбіту OSCO (the outermost stable circular orbit), за аналогією з випадком, що виникає в загальній теорії відносності. Дійсно, в релятивістському випадку існує остання внутрішня стійка кругова орбіта (ISCO — the innermost stable circular orbit) і стійкий круговий рух можливий тільки поза цією орбітою. Як відомо, ISCO є в даний час додатковим "інструментом", здатним отримати інформацію про характеристики чорної діри. Подібна особливість динаміки в системах з кільцевими структурами, а саме існування останньої зовнішньої стійкої кругової орбіти, також може дозволити отримати додаткову інформацію про гравітаційні властивості таких систем.

Показано, що між OSCO і окружністю Лагранжа існує область нестійких орбіт, яка пов'язана з конкуренцією гравітаційних сил між центральною галактикою і кільцем. Існування області таких орбіт в кільцевих галактиках може призводити до формування щілини зі зниженою густиною речовини між центральною галактикою і кільцем, що збігатися з щілиною в розподілі яскравості в об'єкті Хога. Подібне зменшення густини спостерігається в більшості кільцевих галактик і може бути пояснене існуванням знайденою в цьому розділі області нестійких орбіт. Також показано, що в такій системі існують нові типи складних замкнутих орбіт в меридіональній площині. Існування замкнутих орбіт подібного типу може вказувати на існування третього інтеграла в подібній системі.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [17, 73, 81, 88, 91].

# РОЗДІЛ 6

# ЗАДАЧА N-ТІЛ ДЛЯ ПОШУКУ РІВНОВАЖНОЇ ФОРМИ САМОГРАВІТУЮЧОГО ТОРА: ЗАСТОСУВАННЯ ДО ПИЛОВИХ ТОРІВ АКТИВНИХ ЯДЕР ГАЛАКТИК

У попередніх розділах ми досліджували гравітаційний потенціал тора і динаміку при наявності центральної маси. Одними з важливих питань є: чи може гравітуючий тор бути стабільним? Яка рівноважна форма перетину тора? Ці питання зводяться до класичних задач про пошук рівноважної форми гравітуючого об'єкта, якими займалися видатні математики в зв'язку зі стійкістю еліпсоїда обертання. Варто згадати роботи О.М. Ляпунова про стійкість обертового еліпсоїда, який вирішував задачу про те, при якій граничної кутовій швидкості рідкий еліпсоїд залишається в стійкому стані [44]. Дослідження стійкості обертового гравитуючого тора в наближенні суцільного середовища було проведено в роботі [240] і, зокрема, було проведено порівняння зі стійкістю еліпсоїда Маклорена (значення критичного моменту для цих випадків). Також обговорювалися питання можливого формування кільцевих структур, в основному стосовно кільцевих галактик [110] і вплив гравітаційного поля галактики [30] та гало темної речовини [162, 206] на їх стабільність. Питання про стійкість тора дуже важливе, особливо у зв'язку з передбаченням і прямими спостереженнями затінюючого тора в АЯГ. Нагадаємо, що пиловий тор в АЯГ геометрично товстий; його також часто називають "пончиком" , оскільки відношення малого радіуса до великого трохи менше одиниці. Спершу ідея про існування подібних об'єктів сприймалась зі скептицизмом, оскільки наявність моменту повинна приводити до виродження тора в диск. Однак статистичні дані та прямі спостереження вказують, що пилові тори присутні в багатьох АЯГ і відіграють основну роль в підживленні акреційного диску та активності ядер галактик (див. розділ 1). Крім того, спостереження показують клампована структуру тора, а це вимагає перехід від суцільного середовища до дискретного, тобто до дослідження умов стабільності для гравитуючого тора, що складається з хмар. Крім того, як ми бачили в розділі 4 і нижче, істотним є гравітаційне поле центральної маси.

У цьому розділі ми спробуємо відповісти на питання, пов'язані зі стабільністю тора, використовуючи методи чисельного моделювання в рамках задачі багатьох тіл. Тобто, на відміну від попереднього розділу, тут нас будуть цікавити частинки, які безпосередньо формують об'єм тора. При цьому якщо в попередніх розділах 2, 3 ми розглядали безперервне середовище (гідродинаміка) або згладжений потенціал в розділі 4 (теорія потенціалу), то в цьому розділі ми зробимо крок, який наблизить нас до більш реалістичної моделі, в якій тор є не безперервним середовищем, а складається з хмар. Ми все ж залишимося в рамках деякої ідеалізації, розглядаючи ці хмари у вигляді частинок, які характеризуються деяким радіусом, але для перших досліджень стабільності тора в рамках задачі багатьох тіл цього буде достатньо. Перш ніж приступити до моделювання, ми спробуємо відповісти на питання "Чи можна сформувати тороїдальну структуру з пробних частинок, що рухаються в гравітаційному полі центральної маси?" Це питання призведе нас до винаходу нового ідеалізованого об'єкта, який ми будемо називати "тор Кеплера", по аналогії з диском Кеплера. Також як і в кеплерівському диску ми накладемо умову абсолютної беззіштовхувальності, тобто відсутності перетинання орбіт. Ідеалізовані об'єкти відіграють важливу роль у фізиці, оскільки вони є відправними пунктами при вивченні більш складних об'єктів і урахування різних ефектів, які в більшості випадків є "членами наступного порядку". Як ми побачимо нижче, тор Кеплера буде тим нуль-пунктом, відносно якого ми можемо вивчати поведінку більш складної системи з урахуванням гравітаційної взаємодії між частинками (хмарами) в торі в рамках задачі багатьох тіл.

## 6.1 Тор Кеплера

Поставимо наступну задачу: чи можливо сконструювати тороїдальну структуру з частинок, що рухаються в гравітаційному полі центральної маси (рис. 6.1)? Ця задача зводиться до класичної задачі двох тіл: центральна маса і кожна з частинок системи. При цьому геометрична товщина тора може досягатися за рахунок розкиду частинок за елементами орбіт, а саме, по нахилу та ексцентриситетам. При цьому ми накладаємо умови неперетинання орбіт частинок. Оскільки в цьому випадку частинки будуть рухатися по незбуреним кеплерівським орбітам, ми назвемо сформований таким чином тор – "тор Кеплера". Можна відразу сказати, що тор Кеплера – це узагальнення диска Кеплера (див. також підрозділ 7.1.1). Для того, щоб зформувати тор Кеплера з частинок, ми накладемо наступні умови:

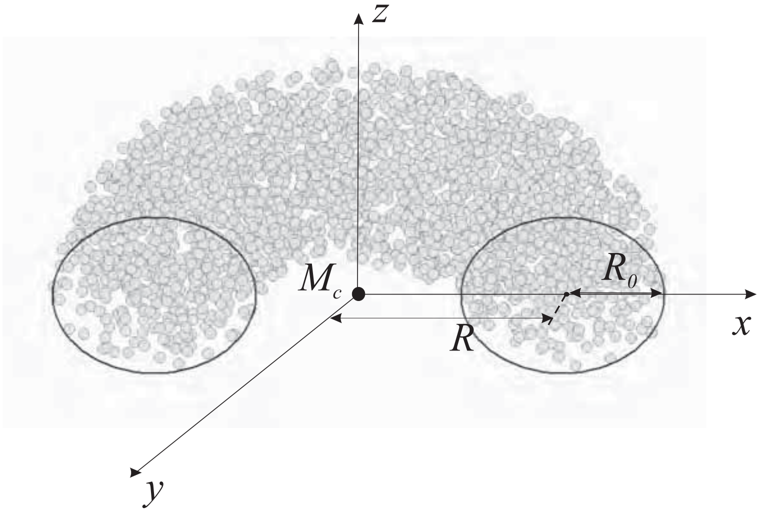


Рис. 6.1. Схема тора, сформованого частинками, що рухаються в гравітаційному полі центральної маси $M_c$.

a) форма перетину тора повинна бути близька до кругової або еліптичної;

b) просторовий розподіл частинок в об'ємі тора має бути близьким до однорідного;

c) орбіти частинок в супутній системі координат повинні бути вкладені одна в одну. Ця умова дозволяє уникнути перетинання орбіт і, отже, зіткнення між частинками. Зауважимо, що в наступних підрозділах ми будемо розглядати більш реалістичні випадки, враховувати зіткнення частинок в рамках задачі багатьох тіл, а тор Кеплера ми будемо використовувати в якості початкових умов при дослідженні стабільності гравітучого тора в задачі багатьох тіл.

Для формування тора Кеплера необхідно проаналізувати, які з елементів орбіт є ключовими для досягнення значної геометричної товщини тора і які з них будуть впливати на форму його перетину. Нагадаємо, що орбіта частинки в центральному полі характеризується шістьма кеплерівськими елементами. Три кути визначають орієнтацію орбіти в просторі: довгота висхідного вузла

($\Omega$), періцентрова відстань ($\omega$) і нахил орбіти до площини симетрії ($i$). Перші два кути пов'язані з поворотом орбіти щодо осі тора. Оскільки тор має осьову симетрію, то початковий розподіл часток по $\Omega$ достатньо задати випадковим чином, а $\omega$ — зафіксувати. Дані елементи не впливають на кінцевий результат, тому що вони відповідають за розподіл орбіт по азимутальному куту. Навпаки, нахили орбіт грають важливу роль, забезпечуючи геометричну товщину тора, тому в усіх варіантах початкових станів необхідно враховувати розкид орбіт по нахилам. Момент проходження частинки через перицентр орбіти $\tau$ (або, як еквівалент, справжня аномалія $\nu$) також не суттєвий, оскільки положення кожної частинки на її орбіті має сенс задавати випадковим чином. В цьому випадку розподіл частинок в об'ємі тора (по азимутальному куту) буде наближатися в середньому до однорідного. Таким чином, на рівноважну форму перетину тора буде впливати розподіл за останніми двома елементам (великі півосі і ексцентриситети орбіт). Обмежимося двома граничними випадками: розкид орбіт по ексцентриситетам зі значеннями великих піввісей, рівними великому радіусу тора ($R = 1$), і протилежний випадок — розкид по великім піввісям з ексцентриситетами, рівними одиниці. Надалі будемо називати об'єкти, сформовані таким чином – еліптичним і круговим торами Кеплера, відповідно. Особливістю тора Кеплера є те, що орбіти частинок в ньому не перетинаються. У цьому розділі ми будемо конструювати еліптичний тор Кеплера, а в розділі 7.1.1 ми також включимо в розгляд круговий тор Кеплера, як додатковий початковий стан для задачі багатьох тіл.

Отже, щоб домогтися квазікругового перетину тора, ми повинні покласти великі півосі всіх частинок рівними великому радіусу тора $a_k = R$, де $k$ — номер частинки. З іншого боку, це нормує просторові координати. Для того, щоб всі частинки знаходилися в об'ємі тора, необхідно, щоб ексцентриситети їх орбіт були розподілені в межах $e_k = [0, r_0]$, де, як і в розділі 4, $r_0 = R_0/R$ – геометричний параметр тора. Нахили, які вимірюються від екваторіальної площини симетрії, повинні задовольняти наступним умовам:

$$i_k = \arcsin\left(q\frac{e_k}{\sqrt{1-e_k^2}}\right), \tag{6.1}$$

де $q$ — параметр, що дозволяє змінювати еліптичності перетину тора. Ми, як і раніше, будемо користуватися нормованими координатами: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}/R$ і $\zeta = z/R$. Надалі для зручності в виразах для елементів орбіт ми опустимо індекс $k$. Координати внутрішньої і зовнішньої границь тора визначаємо через ексцентриситет орбіти $\rho_{min} = 1 - e$ і $\rho_{max} = 1 + e$. Покладемо аргумент перигелію для всіх орбіт $\omega = 0$, тобто лінія вузлів збігається з великою піввіссю. При цьому довготу висхідного вузла $\Omega$ і справжню аномалію $\nu$ будемо генерувати випадковим чином в інтервалі значень від 0 до $2\pi$. Задаючи елементи орбіт, ми можемо знайти координати та компоненти швидкості для кожної частинки, використовуючи відомі формули небесної механіки [28]

$$(x, y, z) = r \cdot (\alpha, \beta, \gamma), \tag{6.2}$$

де

$$\begin{aligned}
&\alpha = \cos\Omega\cos\nu - \sin\Omega\sin\nu\cos i,\\
&\beta = \sin\Omega\cos\nu + \cos\Omega\sin\nu\cos i,\\
&\gamma = \sin\nu\sin i
\end{aligned}$$

і модуль радіус-вектора від центральної маси до частинки

$$r = \frac{R(1-e^2)}{1+e\cos\nu}. \tag{6.3}$$

Компоненти швидкості частинки знаходяться наступним чином:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{I}{p}\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot e\sin\nu + \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}(1+e\cos\nu)\right], \tag{6.4}$$

де

$$(\alpha', \beta', \gamma') = \frac{d}{d\nu}(\alpha, \beta, \gamma),$$

$p = R(1-e^2)$ — фокальный параметр, $I = \sqrt{GM_c \cdot p}$ — модуль кінетичного моменту. Ми будемо використовувати систему одиниць, в якій $G = R = M_c = 1$. Остаточно алгоритм для моделювання тора Кеплера наступний.

1. Встановимо число частинок $N$, геометричний параметр $r_0$ і еліптичність перетину тора $q$.

2. Згенеруємо випадковим чином ексцентриситети орбіт кожної частинки в заданих межах $e = [0, r_0]$ і знайдемо відповідні значення нахилів за формулою (6.1). Також згенеруємо випадковим чином $\Omega$ і $\nu$ для цих орбіт.

3. Знайдемо координати і компоненти швидкості за елементами орбіт відповідно до (6.2) – (6.4) і використаємо їх як початкові умови.

4. Розв'язуємо рівняння руху для отриманих початкових умов.

На рис. 6.2 продемонстрований скріншот програми, в якій відображені частинки та їх траєкторії: проекція на екваторіальну площину, проекція на меридіональну площину і супутня система. Це моделювання реалізовано для 500 частинок. Оскільки траєкторії частинок не перетинаються, то ця ідеалізована система за визначенням стабільна, тому що орбіти частинок незбурені (кеплерівські). Результати у вигляді анімації представлені на веб-сторінці http://astrodata.univer.kharkov.ua/agn/torus/. Через певний часовий інтервал можна помітити, що орбіти частинок відхиляються від кеплерівських, що пов'язано з грубим кроком, якого, втім, досить для демонстрації такого ідеалізованого об'єкта. Зауважимо, що тор Кеплера може бути корисний також у навчальній програмі, наприклад, на практиці з небесної механіки, оскільки він дозволяє в рамках простого алгоритму змоделювати систему з великого числа частинок і дозволяє зрозуміти супутню систему координат, яка дуже часто грає важливу роль в динамічних задачах небесної механіки.

Оскільки розглянута система має симетрію щодо азимутального кута, зручно ввести супутню систему координат. Ця система координат пов'язана з площиною, перпендикулярною до екваторіальної площини. Радіус-вектор частинки збігається з цією площиною. Таким чином, вісь абсцис супутньої системи $\rho$ збігається з проекцією радіус-вектора частинки на екваторіальну площину тора, а вісь ординат $\zeta = z/R$ збігається з віссю симетрії тора. Оскільки частинка рухається навколо центральної маси, супутня система також обертається навколо $M_c$ зі швидкістю, що дорівнює орбітальній швидкості частинки. Така супутня система координат зручна, тому що орбіти частинок в цій системі відображають форму перетину тора (траєкторії справа на рис. 6.2).

Рівняння траєкторії частинки в супутній системі координат для випадку тора Кеплера можна представити аналітично в параметричному вигляді:

$$\rho = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \sqrt{1 - q^2 \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 \nu}, \tag{6.5}$$

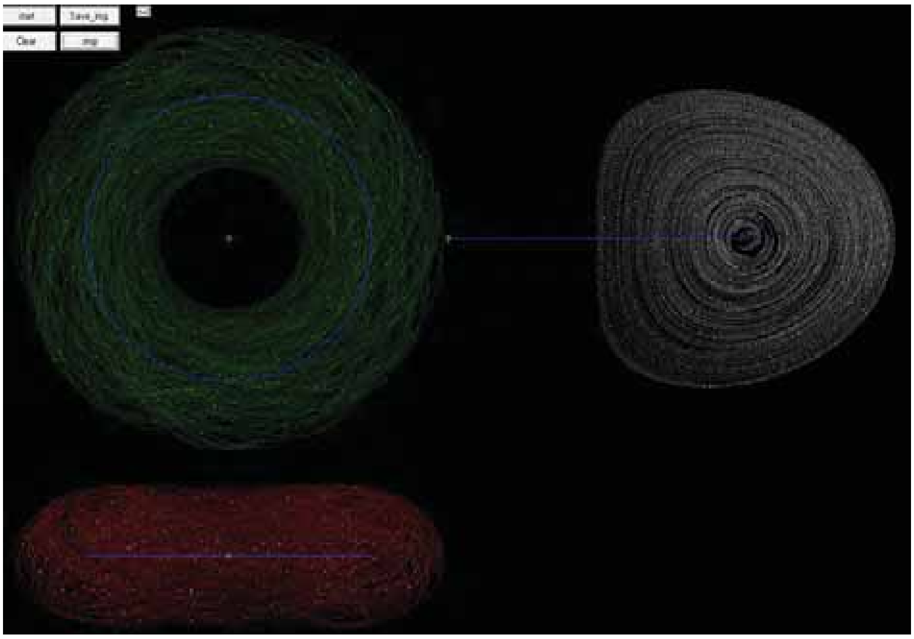


Рис. 6.2. Скріншот програми, в якій моделюється тор Кеплера для 500 частинок.

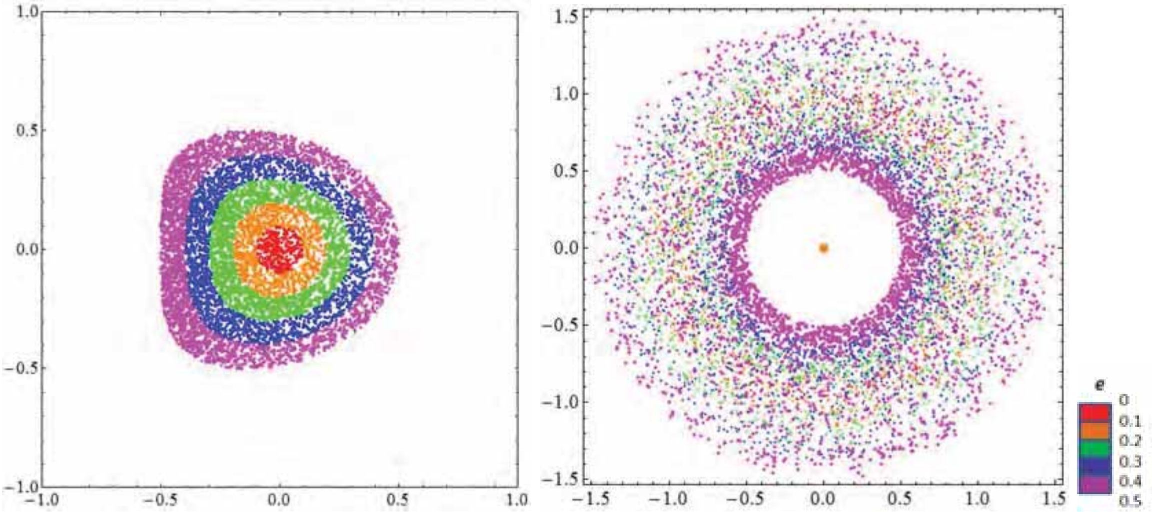


Рис. 6.3. Розподіл частинок у торі Кеплера по ексцентриситетам. *Зліва*: всі частинки зібрані в одну площину в супутньої системі; *праворуч*: проекція положень частинок на екваторіальну площину.

$$\zeta = qe\sqrt{1-e^2}\frac{\sin\nu}{1+e\cos\nu}. \tag{6.6}$$

На рис. 6.4 показані траєкторії в супутній системі, отримані за формулами (6.5) – (6.6). Форма граничної орбіти (з максимальним нахилом) визначає форму перетину тора з даними значенням $r_0$. Період обертання частинки в супутній системі дорівнює орбітальному періоду. Оскільки всі великі півосі частинок рівні великому радіусу тора ($R = 1$), періоди всіх частинок рівні.

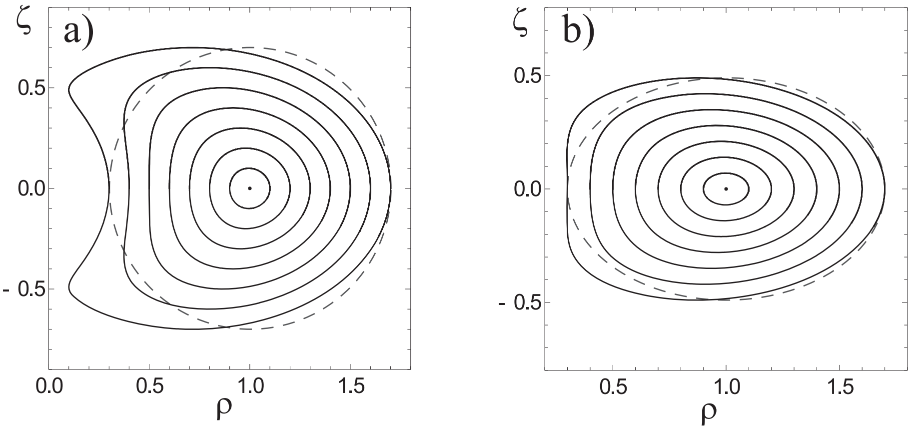


Рис. 6.4. Траєкторії частинок з ексцентриситетами $e = 0.1k$ ($k = 1...7$) В супутній системі координат і з параметром еліптичності перетину тора: a) $q = 1$, b) $q = 0.7$. Центральна маса розташована в точці з координатами $(0, 0)$. Пунктирною лінією для порівняння показані круговий (a) і еліптичний (b) перетини. У граничному випадку товстого тора (зовнішні суцільні криві) перетин тора Кеплера істотно відрізняється від відповідно кругового (a) або еліптичного (b).

З рис. 6.4 видно, що перетин тора Кеплера відрізняється від кругового для великих значень нахилів орбіт (зовнішня траєкторія на рис. 6.4 a). При малих нахилах траєкторія в супутній системі близька до кругової (рис. 6.4 a). При цьому і ексцентриситети також малі. Траєкторія, яка проходить через центр перетину тора, є круговою з нульовим нахилом. Цікаво, що траєкторії частинок в торі Кеплера при великих нахилах створюють перетин тора, форма якого істотно відрізняється від кругової. При цьому перетин має два горби (рис. 6.4 a). Обмеження на геометричну товщину тора можна побачити безпосередньо з виразу (6.1). Дійсно, тому що $\sin i \leq 1$, ми отримуємо максимальне значення ексцентриситету $e_{max} = 1/\sqrt{q^2 + 1}$ з рівняння (6.1), яке і є верхньою межею на $r_0$. При $q = 1$ максимальне можливе значення геометричного параметра тора Кеплера $r_0 = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$. Ця межа відповідає максимальному нахилу орбіти $i = \pi/2$, тобто зовнішня частинка рухається в площині, перпендикулярній екваторіальній площині тора. При прагненні до нуля нахилів і ексцентриситетів всіх частинок тор Кеплера вироджується в нескінченно тонке кільце (масивна окружність) з радіусом, рівним великому радіусу тора. При цьому жодним граничним переходом ми не зможемо привести тор Кеплера в диск Кеплера. В розділі 7.1.1 ми розглянемо другий випадок, коли тор може бути сформований з частинок, що рухаються по круговим орбітам. Ми побачимо, що такий тор в граничному випадку буде вироджуватись в кеплерівський диск. Ще раз відзначимо, що розглянутий тут тор Кеплера ми умовно називаємо еліптичним, оскільки частинки, які його формують, мають розкид елементів орбіт по ексцентриситету, – на відміну від кругового тора Кеплера, який ми розглянемо нижче.

Очевидно, що оскільки тор Кеплера сформований з пробних частинок, тобто ми нехтуємо гравітаційною взаємодією між ними, орбіти частинок завжди залишаються замкнутими і тор Кеплера залишається стабільним. Існування аналітичного розв'язку для $\mathbf{r}(\nu)$ в разі тора Кеплера дозволяє використовувати його в якості початкових умов в задачі багатьох тіл, оскільки ми можемо поставити умови для всіх частинок системи і використовувати це як початкові умови для дослідження стабільності системи (див. наступний підрозділ 6.3).

Тор Кеплера є граничним випадком гравітуючого тора, коли його маса прагне до нуля. У реальності тор має масу і, відповідно, необхідно враховувати його гравітаційний потенціал. У наступному розділі ми досліджуємо траєкторії пробної частинки в гравітаційному потенціалі центральної маси і однорідного кругового тора. На відміну від попереднього розділу, тут ми будемо робити акцент на динаміку у внутрішньому потенціалі, тому що це є важливим для подальшої інтерпретації результатів чисельного моделювання.

## 6.2 Динаміка у внутрішньому гравітаційному потенціалі тора

### *6.2.1 Рівняння руху матеріальної точки у внутрішньому потенціалі тора і роль центральної маси*

Розглянемо рух пробної частинки у внутрішньому гравітаційному потенціалі тора з урахуванням центральної маси. Для аналітичного дослідження ми скористаємося наближеним виразом для внутрішнього потенціалу [81], отриманого в розділі 5. Це розкладання в степеневий ряд до членів другого порядку (4.39), вирази для якого ми наведемо тут ще раз для зручності використання:

$$\varphi_{torus}^{inner}(\eta,\zeta;r_0) \approx \frac{GM_{torus}}{2\pi R}\left[c + a_1\frac{\eta}{r_0} + a_2\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^2 + b_2\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^2\right], \qquad (6.7)$$

де ми будемо використовувати вирази для коефіцієнтів у вигляді

$$a_1 = 8k(1+\ln k), \qquad k \equiv r_0/8,$$

$$a_2 = -1 - 4k^2(11 + 10\ln k), \qquad b_2 \equiv -1 - 4k^2(3 + 2\ln k).$$

Нагадаємо, що цей вираз з хорошою точністю описує внутрішній потенціал однорідного кругового тора аж до $r_0 = 0.5$ та, як ми побачимо нижче, дозволяє отримати наближений аналітичний розв'язок для траєкторії частинки в гравітуючій системі "тор + центральна маса". Для подальшого важливо, що коефіцієнт $a_1$ визначає зміщення максимуму потенціалу щодо центру перетину тора. Це вже передбачає, що без введення додаткових сил частинка не буде здійснювати рухи навколо центру перетину тора. Що це за додаткові сили, ми обговоримо трохи нижче. У свою чергу, коефіцієнти $a_2$, $b_2$ пов'язані з відхиленням кривої потенціалу тора від квадратичного закону. Як було відзначено в розділі 5 і в [81], внутрішній потенціал тора можна представити у вигляді потенціалу циліндра і потенціалу кривизни, який містить зв'язок з гауссовою кривизною поверхні тора, $\varphi(r) = \varphi_{cyl}(r) + \varphi_{curv}(r;r_0)$. Як відомо, все фінітні траєкторії замкнуті тільки у двох типах полів: $\varphi(r) \propto 1/r$ і $\varphi(r) \propto r^2$ [41]. Оскільки внутрішній потенціал циліндра $\varphi_{cyl}(r) \propto r^2$, то в гравітаційному полі циліндру всі фінітні орбіти замкнуті. Також зауважимо, що подібна поведінка потенціалу також відповідає внутрішньому потенціалу кулі. Однак для нас тут ключовим об'єктом є циліндр як один з граничних випадків тора. Очевидно, що оскільки внутрішній потенціал тора відрізняється від потенціалу циліндра складовою, що містить гауссову кривизну поверхні тора $\varphi_{curv}$, то це означає, що орбіти всередині тора будуть незамкнені. Які це будуть орбіти? Чи є аналогія з відомими типами орбіт? Чи можна організувати рух частинок у внутрішньому потенціалі тора з центральною масою таким чином, щоб частинки не покидали об'єм тора? Дослідимо цю задачу докладніше, щоб знайти відповіді на поставлені питання.

Для якісного аналізу траєкторії частинки у внутрішньому потенціалі тора, ми обмежимося випадком кругового перетину і однорідним розподілом густини. Оскільки потенціал осесиметричний, то проекція кутового моменту на вісь $\zeta$ є величина постійна ($I_\zeta = \text{const}$). У цьому випадку, як і в розділі 5, введемо ефективний потенціал. Відмінності в записі полягають в тому, що тут ми використовуємо саме потенціал, а в розділі 5 ми під ефективним потенціалом розуміли ефективну потенціальну енергію. Відмінність в цих двох випадках тільки в загальному знаку, тому це не впливає на кінцевий результат. Отже, ефективний потенціал даної системи запишемо у вигляді [101]:

$$\varphi_{\text{eff}} = \varphi_{torus}^{inner} + \varphi_c - \frac{I_\zeta^2}{2(\eta+1)^2}, \tag{6.8}$$

де потенціал центральної маси $M_c$

$$\varphi_c = \frac{GM_c}{R}\frac{1}{\sqrt{(\eta+1)^2+\zeta^2}}. \tag{6.9}$$

Для того, щоб знайти умову, за якої орбіта завжди буде всередині об'єму тора, скористаємося представленням потенціалу через суму потенціала циліндра і "потенціала кривизни" , який ми ввели в розділі 4. Тоді ефективний потенціал системи в такому представленні набуває вигляду

$$\varphi_{\text{eff}} = \varphi_{cyl} + \varphi_c + \varphi_{curv} - \frac{I_\zeta^2}{2(\eta+1)^2}. \tag{6.10}$$

У цьому виразі присутній потенціал центрального поля і потенціал циліндра, в яких, як уже згадувалося вище, всі фінітні орбіти замкнуті. Отже, формальна умова

$$\varphi_{curv} - \frac{I_\zeta^2}{2(\eta+1)^2} = 0 \tag{6.11}$$

дозволяє знайти момент частинки, для якої орбіти будуть існувати всередині об'єму тора і, можливо, знайти замкнуті орбіти. Це означає, що відхилення потенціалу тора від потенціалу циліндра ми компенсуємо за рахунок відцентрових сил при орбітальному русі. З точки зору математики це означає, що ми область поблизу максимуму потенціалу зводимо до симетричного виду, тобто до параболи.

Представимо $\varphi_{\text{eff}}$ в формі степевого ряду, обмежуючись членами другого порядку у вигляді, зручному для подальшого аналізу:

$$\varphi_{\text{eff}}(\eta,\zeta;r_0) \approx \frac{GM_{torus}}{2\pi R}\left[\tilde{c} + \tilde{a}_1\frac{\eta}{r_0} + \tilde{a}_2\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^2 + \tilde{b}_2\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^2\right], \tag{6.12}$$

де коефіцієнти

$$\begin{aligned}
\tilde{c} &= 2\pi\mu(2 - l^2) + c, \\
\tilde{a}_1 &= 2\pi\mu r_0(2 - l^2) + a_1, \\
\tilde{a}_2 &= -\pi\mu r_0^2(3l^2 - 2) + a_2, \\
\tilde{a}_2 &= -\pi\mu r_0^2 + b_2,
\end{aligned}$$

$\mu = M_c/M_{torus}$ – відношення центральної маси до маси тора і безрозмірний параметр $l$ визначає частину кутового моменту від кеплерівського значення $I_\zeta^2 = l^2 GM_c/R$. В [81] і в розділі 4 було показано, що максимум потенціалу однорідного кругового тора зміщений щодо центру перетину в бік центру симетрії тора (див. рис. 4.2 та рис. 4.11). Це означає, що тор повинен стискатися уздовж великого радіуса внаслідок самогравітації. Це стиснення можна компенсувати відцентровими силами, які будуть врівноважувати гравітаційні. Таким чином, стає зрозумілим, що важливу роль в стабільності тора має відігравати центральна маса, яка і задає орбітальний рух частинок, і, отже, необхідні відцентрові сили. У термінах поведінки функції ефективного потенціалу це означає, що максимум ефективного потенціалу буде зміщуватися ближче до центру перетину тора, тобто $\tilde{a}_1 = 0$ в (6.12). З цього виразу ми отримуємо умову на кутовий момент:

$$l^2 = 1 - a_1/(2\pi\mu r_0). \tag{6.13}$$

### *6.2.2 Типи траєкторій частинок*

Рівняння траєкторії частинки в супутній системі координат ми можемо отримати, розв'язуючи рівняння руху

$$\ddot{\eta} \equiv \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_{\text{eff}}}{\partial\eta}; \qquad \ddot{\zeta} \equiv \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_{\text{eff}}}{\partial\zeta}. \tag{6.14}$$

Ми також можемо представити ці рівняння у вигляді, який відповідає рівнянням гармонічного осцилятора:

$$\ddot{\eta} + \omega_A^2\eta = 0, \qquad \ddot{\zeta} + \omega_B^2\zeta = 0. \tag{6.15}$$

Тоді розв'язок рівнянь (6.15) може бути представлено в параметричному вигляді:

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= \eta_0 \cos[\omega_A \cdot t + \alpha], \\
\zeta(t) &= \zeta_0 \cos[\omega_B \cdot t + \beta],
\end{aligned} \tag{6.16}$$

де $\eta_0$, $\zeta_0$ — координати частинки в початковий момент часу,

$$\omega_A^2 = \frac{GM_{torus}}{\pi R^3 r_0^2}\left[\pi\mu r_0^2(3l^2-2) - a_2\right], \tag{6.17}$$

$$\omega_B^2 = \frac{GM_{torus}}{\pi R^3 r_0^2}\left[\pi\mu r_0^2 - b_2\right]. \tag{6.18}$$

Таким чином, координати частинки (6.16) еволюціонують подібно до двох зміщених гармонійних осциляторів з епіциклічною $\omega_A$ і вертикальною $\omega_B$ частотами, відповідно. В цьому випадку орбіта незамкнута і траєкторія в супутній системі координат заповнює прямокутну область і характеризується певним періодом $P_{box}$, після якого процес знову повторюється. Такі орбіти відносяться до типу коробчатих орбіт (box-orbits) [101]. З рівняння (6.13) видно, що при $\mu r_0 \gg 1$ коефіцієнт кутового моменту $l \to 1$ і відношення епіциклічної частоти $\omega_A$ до вертикальної частоти $\omega_B$ набуває вигляду

$$f \equiv \frac{\omega_A}{\omega_B} = \sqrt{\frac{\pi\mu r_0^2 - a_2}{\pi\mu r_0^2 - b_2}}. \tag{6.19}$$

Тоді період коробчатої орбіти, виражений в орбітальних періодах, визначається виразом $P_{box} = 1/|1-f|$. Для $r_0 = 0.3$ і для $\mu = 50; 25; 1/0.06$ ми отримуємо $P_{box} = 213; 113; 80$. В разі $\mu r_0 \gg 1$ $(l \to 1)$ з рівняння (6.19) видно, що $\omega_A \to \omega_B$. Цей граничний випадок відповідає тору Кеплера. За аналогією зі спін-орбітальним резонансом, тобто збігом періоду обертання навколо осі і навколо центральної маси, ми можемо ввести новий тип гравітаційного резонансу "орбітально-вихровий", при якому період обертання навколо центральної маси (орбітальний) дорівнює періоду обертання навколо центру перетину тора в супутній системі (аналог вихрового руху).

На рис. 6.5 показані траєкторії пробної частинки у внутрішньому гравітаційному потенціалі однорідного кругового тора з урахуванням потенціалу центральної маси. Ці траєкторії були отримані з використанням розкладання в ряд потенціалу (4.54)

$$\varphi_{torus}^{inner}(\eta,\zeta;r_0) \approx \frac{GM_{torus}}{2\pi R}\left[c + \sum_{j=1} a_j \left(\frac{\eta}{r_0}\right)^j + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}\sum_{j=1} t_{ij}(r_0)\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^i \left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^j + \sum_{j=1} b_j(r_0)\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^j\right],$$

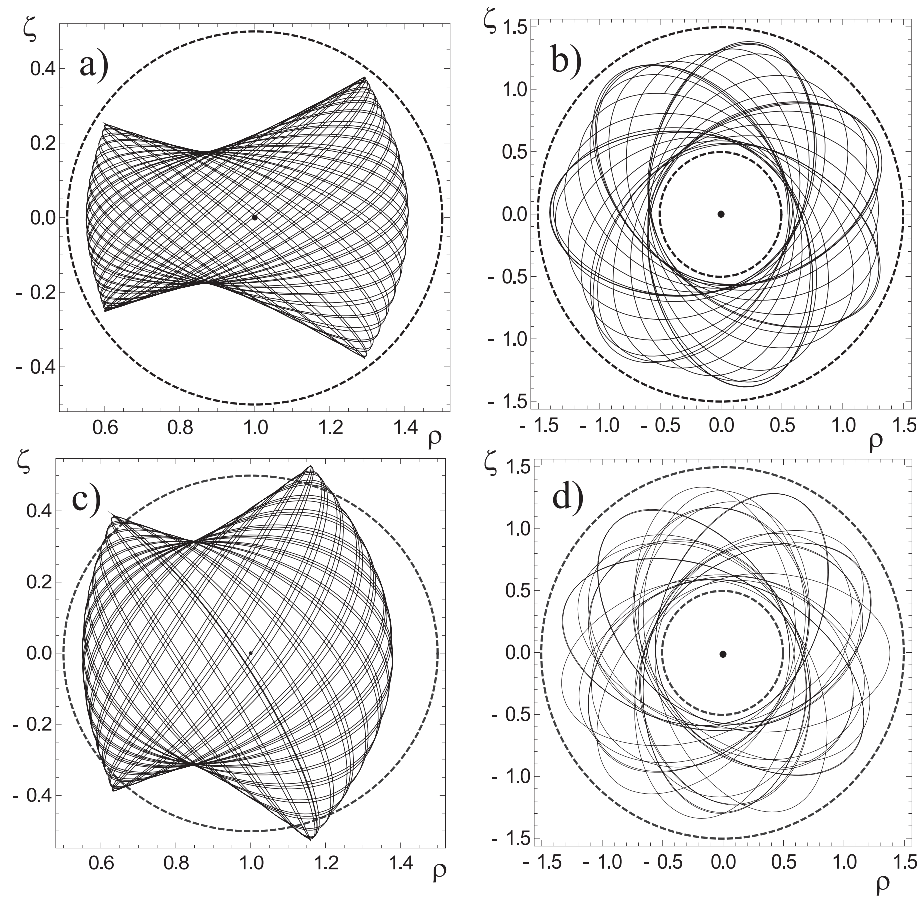


Рис. 6.5. Траєкторії пробної частинки у внутрішньому потенціалі однорідного кругового тора і в потенціалі центральної маси. *Зліва*: траєкторія в супутній системі координат для a) $V_\zeta = 0.4$; $l = 0.95$, c) $V_\zeta = 0.7$; $l = 0.90$. Центр перетину тора позначений точкою. *Справа*: проекція траєкторії на екваторіальну площину симетрії тора для b) $V_\zeta = 0.4$; $l = 0.95$; d) $V_\zeta = 0.7$; $l = 0.90$. Пунктирні лінії відповідають границям об'єму тора. Для всіх випадків $\mu = 1$, $r_0 = 0.5$, $G = R = 1$, $t = 150$.

з коефіцієнтами, знайденими методом зшивання і представленими в таблиці 4.1 [81].

На відміну від квадратичного потенціалу (6.7), в даному випадку ми використовуємо більш точне значення внутрішнього потенціалу тора. Отже, область, яка обмежує траєкторію руху частинки, має більш складну форму, ніж (6.16) (рис. 6.5 a, c). Зауважимо, що коробчаті орбіти виникають як результат розсинхронізації орбітального періоду частинки та її періоду в супутній системі координат. Якщо маса тора зростає, орбітальний період частинки зменшується внаслідок повороту лінії вузлів. Це призводить до зміщення перицентра і, отже, до формування розеткової орбіти (в проекції) в екваторіальній площині тора (рис.6.5 b,d). Коли маса тора зменшується, траєкторія в супутній системі координат заповнює прямокутну область за довгий період, тобто період коробчатої орбіти в цьому випадку зростає.

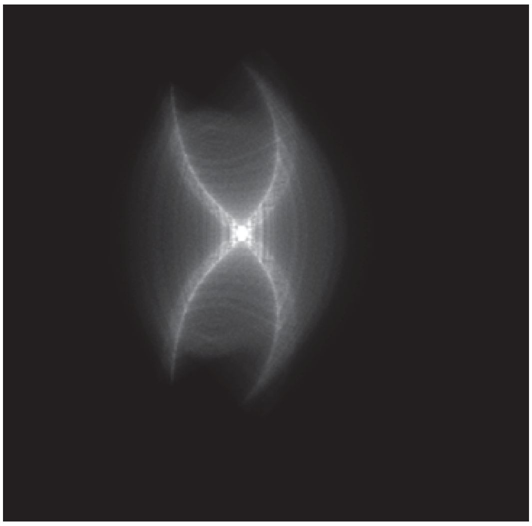


Рис. 6.6. Усереднений розподіл густини 1500 частинок, що рухаються у внутрішньому потенціалі однорідного кругового тора і потенціалі центральної маси.

На рис. 6.6 показано усереднений розподіл 1500 частинок в супутній системі, що рухаються в гравітаційному полі тора і центральної маси. Цей розподіл отримано після 100 середніх орбітальних періодів, тобто коли система досягла стану, наближеного до рівноважного. Відзначимо, що на початковому етапі можна спостерігати своєрідне биття і навіть щось подібне до гравітаційного резонансу. Результуючий перетин (рис. 6.6) демонструє хрестоподібну структуру. Такий розподіл густини можна пояснити наявністю коробчатих орбіт (рис.6.5), що виникають в потенціалі тора. Маючи різні значення початкових координат і швидкостей, частинки будуть також рухатися по орбітах різного масштабу, поступово підлаштовуючись під загальний потенціал системи і, відповідно, будуть сідати на типові орбіти типу коробчатих орбіт. Те, що в результаті виникає хрестоподібний розподіл густини, пов'язано з тим, що саме на діагоналях коробчатих орбіт частинка знаходиться найдовше. Для великої кількості частинок, після усереднення це буде виглядати як "хрест" на розподілі густини в перетині. При цьому відбувається синхронізація орбіт, тобто періоди кожної частинки в супутній системі стають близькими за значенням. У цьому сенсі можна говорити про виникнення гравітаційного резонансу який в даному випадку призводить до формування структури в розподілі густини частинок.

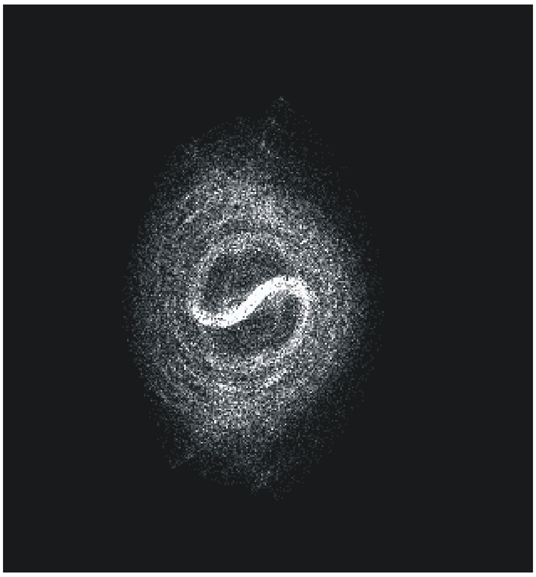


Рис. 6.7. Усереднений розподіл густини 1500 частинок, що рухаються у внутрішньому потенціалі однорідного кругового тора і центральної маси.

В даному потенціалі, судячи з усього, можливе існування замкнутих (в супутній системі координат) орбіт. Рис. 6.7 демонструє розподіл частинок для інших початкових умов, для яких розподіл істотно відрізняється від представлених на рис. 6.6. Це вказує на принципово інші типи траєкторій, які існують в даному потенціалі. Обмежуючись розкладанням потенціалу до членів другого порядку і розв'язуючи чисельно рівняння руху, можна отримати траєкторію орбіти частинки у внутрішньому гравітаційному потенціалі тора при наявності центральної маси. На рис. 6.8 показаний приклад такої траєкторії. Видно, що квазізамкнутій траєкторії в супутній системі координат відповідає більш складна траєкторія в тривимірному випадку. Цікаво, що траєкторія цієї частинки обмотує поверхню тора, тобто частинка в цьому випадку практично строго рухається по поверхні тора заданого геометричного параметра (в даному випадку $r_0 = 0.4$). На лівому рис. 6.8 показано також перетин тора (пунктирна лінія), центр перетину (хрест) і точка невагомості. Нагадаємо, що під точкою невагомості ми розуміємо точку, де сума всіх сил з боку тора дорівнює нулю та відповідає екстремуму потенціалу: для внутрішньої точки це максимум потенціалу (див. розділ 4.4). Видно, що точка невагомості досить сильно зміщена по відношенню до центру перетину. У свою чергу це означає, що

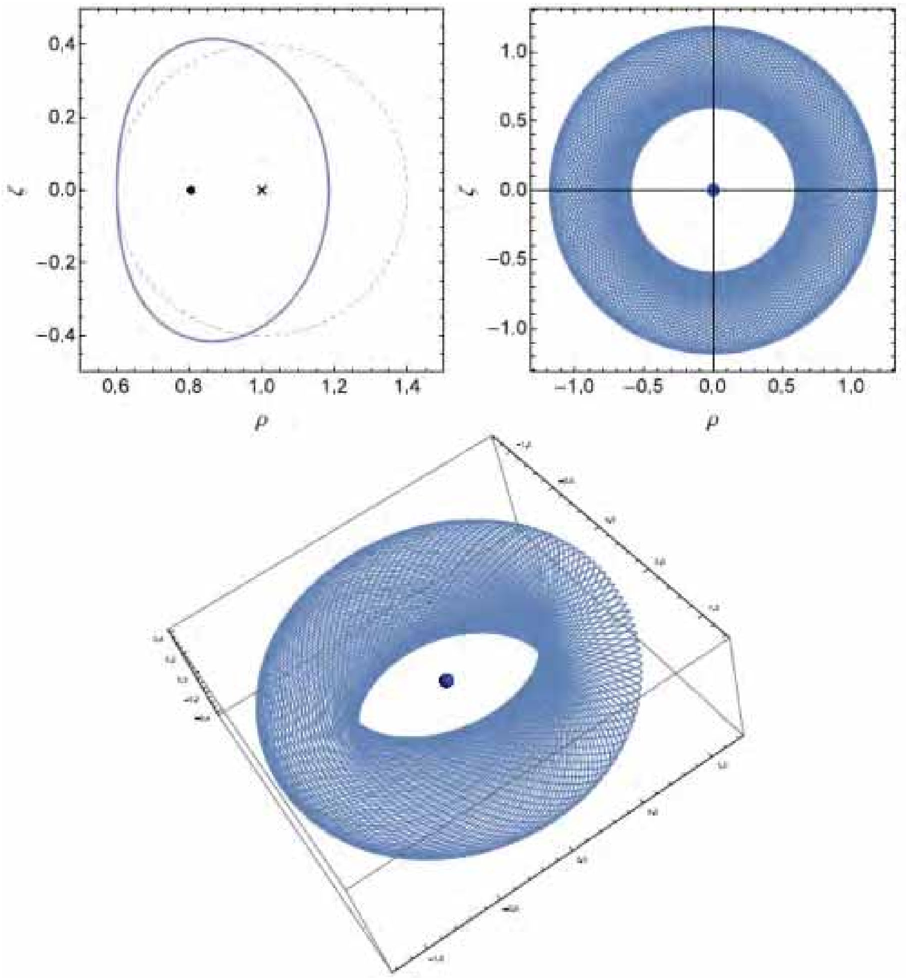


Рис. 6.8. Траєкторія частинки в гравітаційному полі однорідного кругового тора з центральною масою ($M_c = M_{torus}$) для початкових значень $x = 0.601$, $V_x = 0$, $y = 0$, $V_y = 1.4$, $z = 0$, $V_z = 0.91$. *Зліва*: супутня система координат; *справа*: на екваторіальну площину; *нижній*: 3D випадок.

досить складно організувати фінітну траєкторію всередині об'єму тора, тому важливо орбітальний рух, який за рахунок відцентрових сил призводить до того, що точка невагомості буде зміщатися ближче до центру перетину в залежності від моменту частинки. У цьому сенсі запропоноване представлення внутрішнього потенціалу тора через потенціал кривизни (4.46) та (6.11) дуже зручне, тому що в термінах точки невагомості ми можемо знайти необхідну умову існування фінітної орбіти всередині (аж до поверхні) об'єму тора. Подібним чином були знайдені умови для орбіти, представленої на рис. 6.8. (До речі, в проекції на меридіональний перетин ця орбіта схожа на орбіту типу "хвіст ластівки"). Ми використовували тут грубе наближення потенціалу тора, але при цьому отримали досить цікавий результат. При використанні більш точного наближення, судячи з усього, можна знайти замкнуті орбіти. Можна зробити припущення, що подібні орбіти можуть бути геодезичними. На відміну від плоского простору, де геодезичними є прямі лінії, або сфери, де геодезичні – кола (дуга), на тороїдальній поверхні можливі кілька типів геодезичних. Це означає, що в залежності від положення точок на поверхні тора, найкоротші лінії, що з'єднують їх, можуть бути принципово різні. Замкнені орбіти можуть відображати геодезичні, і це може бути однією з цікавих задач для подальшого дослідження. Орбіту, представлену на рис. 6.8, можна віднести до типу гало-орбіт. Такі орбіти існують в обмеженій круговій задачі трьох тіл, при цьому частинка (або супутник) обертається навколо точки Лагранжа в супутньої системі. Назва "гало-орбіта" було введено Р.У. Фаркуаром, який досліджував задачу про рух супутника в точці Лагранжа $L_2$ системи Земля–Місяць для космічної місії "Apollo" на зворотний бік Місяця [129] [1]. При виборі орбіти українського супутника [61, 222] розглядалися варіанти запуску його в точку Лагранжа $L_2$ системи Земля–Місяць, тому було зроблено ряд чисельних експериментів для підбору відповідної орбіти. На рис. 6.9, як приклад, представлені дві гало-орбіти навколо точки Лагранжа $L_2$ в трьох проекціях, отримані чисельним розв'язком обмеженої кругової задачи трьох тіл Земля-Місяць-Супутник (супутня система координат). Початок системи координат знаходиться в барицентрі Земля–Місяць, а період траєкторії 14.6 днів. Форма орбіти частинки у гравітаційному полі тора і центральної маси

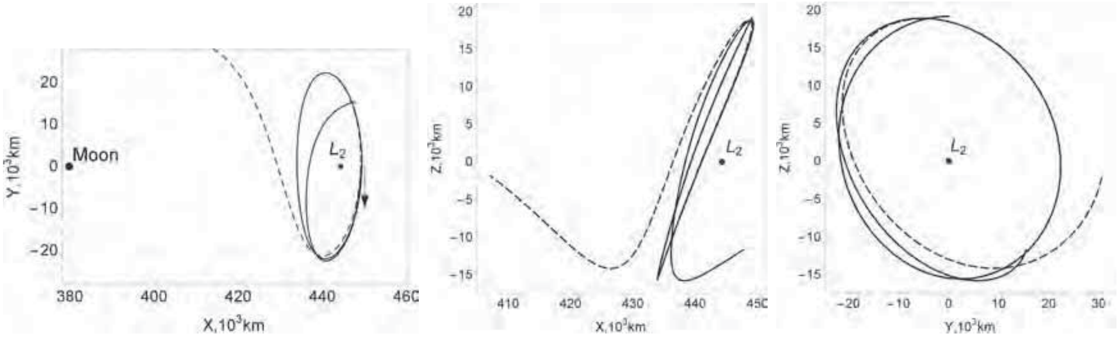


Рис. 6.9. Приклад двох гало-орбіт в трьох проекціях. Початкові умови: $y = 0$, $z = 19220.1$ км, $V_x = V_z = 0$, $V_y = -102.6$ м/с, а) $x = 449035.7$ км (пунктирна крива), б) $x = 449036.1$ км (суцільна кривая).

---

[1] Примітка 1. У подальшій роботі Р.У. Фаркуар спільно з А.Камел також врахували вплив нелінійних ефектів, ексцентриситету орбіти Місяця і гравітаційний вплив Сонця [130].

дійсно нагадує гало-орбіту Фаркуара. Однак слід зауважити, що рух в колінеарних точках Лагранжа є нестійким, на відміну від випадку потенціалу тора, де гало-орбіта залишається стабільною.

Аналіз орбіт частинки у внутрішньому потенціалі тора важливий для інтерпретації результатів в задачі багатьох тіл, яка буде розглянута в наступному розділі. Ми побачимо, що в більш реалістичному моделюванні, тобто при урахуванні гравітаційної взаємодії між частинками (хмарами) при еволюції самогравітуючого тора від початкового стану до рівноважного коробчаті орбіти будуть відображатися на зміні розмірів тора з часом, проявляючись у вигляді хвильової структури. Це демонструє, що наближені аналітичні розв'язки часто допомагають зрозуміти фізичні явища при більш складному чисельному моделюванні, показуючи, що отримані результати відображають фундаментальні властивості системи.

## 6.3 Рівноважна форма самогравітуючого тора: задача $N$ тіл

Цей розділ присвячений дослідженню еволюції самогравітуючого тора в полі центральної маси. Тут ми обмежимося випадком, коли маса тора становить до 10 відсотків центральної маси. Такий вибір пов'язаний в першу чергу із застосуванням результатів до затінюючих торів в активних ядрах галактик. В якості початкових умов ми будемо використовувати тор Кеплера (підрозділ 6.1). Зауважимо, що на відміну від руху частинок в згладженому потенціалі без взаємодії між ними (див. підрозділ 6.2.2 та рис. 6.6, 6.7), тут ми будемо враховувати гравітаційну взаємодію між частинками.

У цьому розділі ми постараємося відповісти на наступні питання.

1. Чи може тор бути стабільним на інтервалах часу, порівнянних з часом життя астрофізичних об'єктів?

2. Яка форма перетину тора в рівноважному стані?

3. Який розподіл густини частинок в рівноважному стані тора?

Ми побачимо нижче, що самогравітація істотно вплине на форму перетину тора в порівнянні з початковим станом (тором Кеплера).

### *6.3.1 Роль іррегулярних сил при взаємодії частинок*

Гравітаційний потенціал об'єму (тут ми не обговорюємо форму об'єму) з масою $M_{torus}$, що складається з $N$ гравітуючих частинок рівних мас, в довільній точці з радіус-вектором $\mathbf{r}(\rho, \lambda, \zeta)$ має вид

$$\varphi_{torus}(\rho, \lambda, \zeta) = \frac{GM_{torus}}{R} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_i}|}, \tag{6.20}$$

де $\mathbf{r_i}(\rho, \lambda, \zeta)$ – безрозмірний радіус-вектор $i$-ї частинки, нормований на великий радіус тора $R$. З урахуванням гравітаційної взаємодії між частинками, які формують тор, сили, що діють на кожну частинку, можна представити як суму регулярної та нерегулярної компонент. Регулярну компоненту ми ототожнюємо зі згладженим потенціалом, а іррегулярна обумовлена безпосередньо гравітаційною взаємодією між найближчими частинками. Роль іррегулярних сил зростає в разі відносно малого числа частинок. Навпаки, чим більше частинок, тим ближче результуючий потенціал до згладженого. Отже, потенціал тора може бути представлений таким чином:

$$\varphi_{torus}(\rho, \lambda, \zeta) = \varphi^{reg}_{torus}(\rho, \zeta) + \varphi^{irr}_{torus}(\rho, \lambda, \zeta), \tag{6.21}$$

де перший доданок – регулярна частина потенціалу тора, яка внаслідок осесиметрії не залежить від азимутального кута $\lambda$, в той час як другий доданок є іррегулярна (випадкова) частина потенціалу, що визначається як

$$\varphi^{irr}_{torus}(\rho, \lambda, \zeta) = \frac{G}{R}\left[M_{torus} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_i}|} - \int_V \frac{\kappa(\mathbf{r}')\mathbf{dV}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right]. \tag{6.22}$$

Тут $\kappa(\mathbf{r})$ — об'ємна густина тора. Урахування впливу центральної маси приводить нас до наступного виразу для повного потенціалу системи:

$$\varphi(\rho, \lambda, \zeta) = \varphi_c(\rho, \zeta) + \varphi_{torus}(\rho, \lambda, \zeta), \tag{6.23}$$

де потенціал центральної маси було визначено раніше. Граничний випадок $\Phi^{irr}_{torus} \to 0$ (нехтуємо взаємодією між частинками) відповідає задачі про рух пробної частинки в регулярному (згладженому) гравітаційному потенціалі тора. Ця проблема детально була досліджена в попередньому підрозділі, де було показано, що у внутрішньому потенціалі тора існують орбіти типу коробчатих, так гало-орбіти Фаркуара.

Надалі ми покажемо, що в задачі $N$ тіл роль регулярної частини потенціалу проявляється в зміні розмірів перетину тора. В середньому, тобто при усередненні по всім $i$-індексам, $\varphi^{irr}_{torus} \to 0$, але в кожній окремій точці $\varphi^{irr}_{torus}$ може істотно відрізнятися від нуля, враховуючи як позитивні, так і негативні значення. Як наслідок, швидкість частинки, що рухається в регулярному потенціалі тора, буде об'єктом випадкового обурення внаслідок дії іррегулярної частини потенціалу. Для того, щоб оцінити іррегулярну частину потенціалу, ми виділимо потенціал частинки на відстані $\tilde{l} = \sqrt[3]{V_{torus}/N}$, рівній середній відстані між частинками: $\varphi_i = Gm_i/\tilde{l}$. Оскільки маси всіх частинок однакові $(m_i = M_{torus}/N)$, отже $\varphi_i \propto N^{-2/3}$, тобто іррегулярні сили стають істотними при відносно малій кількості частинок $N$ в системі.

### 6.3.2 Задача $N$ тіл для тороїдального розподілу частинок в полі центральної маси: постановка задачі

Вже згадана задача $N$ тіл зводиться до чисельного інтегрування рівнянь руху з урахуванням центральної маси:

$$\mathbf{a}_i = -\frac{GM_c}{R^2}\frac{\mathbf{r_i}}{r_i^3} + \frac{\mathbf{F_i}}{m_i}, \tag{6.24}$$

де $\mathbf{a_i}$ — прискорення $i$-ї частинки. Сумарна гравітаційна сила, що діє на $i$-ту частинку

$$\mathbf{F}_i = -\frac{Gm_i}{R^2}\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}}{(|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}, \tag{6.25}$$

$\varepsilon$ – пом'якшувальний параметр (softening parameter), що дозволяє уникнути нескінченного зростання сили при зіткненні частинок [64, 65]. З іншого боку, введення цього параметра означає, що ми моделюємо не точкові частинки, а мегачастинки сферичної форми з безрозмірним радіусом $\varepsilon$, в якому розподіл густини підкоряється закону Пламмера [201, 52]. Такі об'єкти в першому наближенні можуть описувати газопилові хмари, як раз те, що і необхідно нам для дослідження газопилових торів в АЯГ. У наступних чисельних моделюваннях в цьому розділі ми будемо вважати параметр $\varepsilon = 0.01$, але в розділі 7 ми продемонструємо, що цей параметр не впливає суттєво на розподіл частинок в рівноважному стані (див. рис. 7.10). Зауважимо, що в цьому випадку хмари проходять одна крізь одну при зіткненнях. Подібна постановка задачі

$N$ тіл є типовою при моделюванні гравітуючих об'єктів.

Для чисельного розв'язку задачі багатьох тіл для великого числа частинок потрібно досить багато комп'ютерного часу. Для того, щоб оптимально вирішувати такі задачі, ми використовуємо алгоритм паралельних обчислень з використанням технології *CUDA*, яка дозволяє значно прискорити обчислення за рахунок використання графічних процесорів (GPUs). Ця технологія особливо ефективна для задачі $N$ тіл [104], оскільки тут відбувається багаторазове повторення однієї процедури (застосування алгоритму розв'язання диференціальних рівнянь для кожної частинки системи). Чисельне моделювання проводилося спочатку на графічній відеокарті NVIDIA GeForce GTS 250 (192 *CUDA* Cores). Надалі розрахунки проводились на відеокарті NVIDIA GeForce GTS 660 (1920 *CUDA* Cores). Часовому інтервалу 1000 орбітальних періодів відповідає 10 годин машинного часу для метода Ейлера[1] для $h = 1/1500$. При цьому повна енергія зберігається на рівні $5 \times 10^{-6}$, що є хорошим наближенням.

Наша основна ідея полягає в тому, що тор може бути стабільним внаслідок руху хмар по нахиленим орбітам. Це дає можливість пояснити спостережувану геометрично товсту структуру затінюючого тору в активних ядрах галактик. Дійсно, в рамках розгляду речовини в торі як суцільного середовища, речовина рухається в цьому випадку паралельно екваторіальній площині і гравітаційні сили прагнуть стиснути тор в диск. При розгляді тора у вигляді клампованого середовища, що складається з хмар, в рамках класичної механіки ми розуміємо, що площина орбіти кожної хмари повинна проходити через центральну масу. Таким чином, товстий тороїдальний розподіл хмар може бути забезпечено рухом хмар навколо центральної маси по нахиленим орбітам.

Для реалізації цієї ідеї і дослідження стабільності тора ми будемо використовувати в якості початкових умов тор Кеплера з певним геометричним параметром $r_0$ (розділ 6.1). Розв'язок для тора Кеплера дозволяє задати орбіти частинок з необхідними нахилами та ексцентриситетами і перерахувати елементи орбіти кожної частинки в координати і компоненти її швидкості.

---

[1] Примітка 1. Зауважимо, що існують ефективні алгоритми для задачі $N$ тіл (див., наприклад, [152]).

Однією з необхідних умов досягнення системою частинок квазірівноважного стану є відсутність квазіперіодичних флуктуацій макропараметрів статистичної системи. Для того, щоб перевірити цю умову, ми будемо контролювати значення кінетичної, потенціальної і повної енергії системи кілька разів протягом періоду. Це також важливо для контролю точності розрахунків. У доповнення до цього, для контролю динаміки системи ми будемо записувати статистичні макропараметри системи з тією ж частотою: координати центру мас в перетині тора $(\eta_c, \zeta_c)$ і ефективні розміри перетину, які ми обчислюємо наступним чином:

$$r_\eta = 2\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\eta_i - \eta_c)^2}, \quad r_\zeta = 2\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\zeta_i - \zeta_c)^2}, \tag{6.26}$$

де $r_\eta$, $r_\zeta$ — відповідно горизонтальний і вертикальний розміри перетину, а середній ефективний розмір перетину:

$$r_a = \sqrt{(r_\eta^2 + r_\zeta^2)/2}. \tag{6.27}$$

Зауважимо, що в разі однорідного кругового диска всі ефективні розміри, які визначені таким чином, дорівнюють радіусу диска. Сумарний кутовий момент частинок в супутній системі координат визначаємо наступним чином:

$$I_\theta = \sum_{i=1}^{N}(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i), \tag{6.28}$$

де точкою позначено похідну по часу. Надалі цей кутовий момент (6.28) ми будемо називати "фіктивним" кутовим моментом, оскільки він прив'язаний до супутньої системи координат. Аналіз поведінки фіктивного кутового моменту дозволяє визначити ступінь впорядкованості (або хаотизації) напрямків руху частинок в перетині тора. Також ми періодично фіксуємо положення (координати) всіх частинок в площині перетину тора. Збираючи ці положення протягом 10 орбітальних періодів, отримуємо усереднений розподіл густини частинок в перетині тора і аналізуємо зміну форми перетину протягом моделювання. Еволюція перетину тора для різних значень $r_0$ представлена у вигляді анімацій на ресурсі http://astrodata.univer.kharkov.ua/agn/torus.

### *6.3.3 Результати моделювання*

Результати моделювання показують, що розподіл частинок у торі в рівноважному стані відрізняється від початкових умов (рис. 6.10). Початковий розподіл частинок в торі Кеплера (рис. 6.10 *зліва*) за рахунок самогравітації приходить до тороїдального розподілу (рис. 6.10 *справа*), зберігаючи геометричну товщину. Щоб проаналізувати цей результат, ми проводимо дослідження поведінки основних характеристик системи.

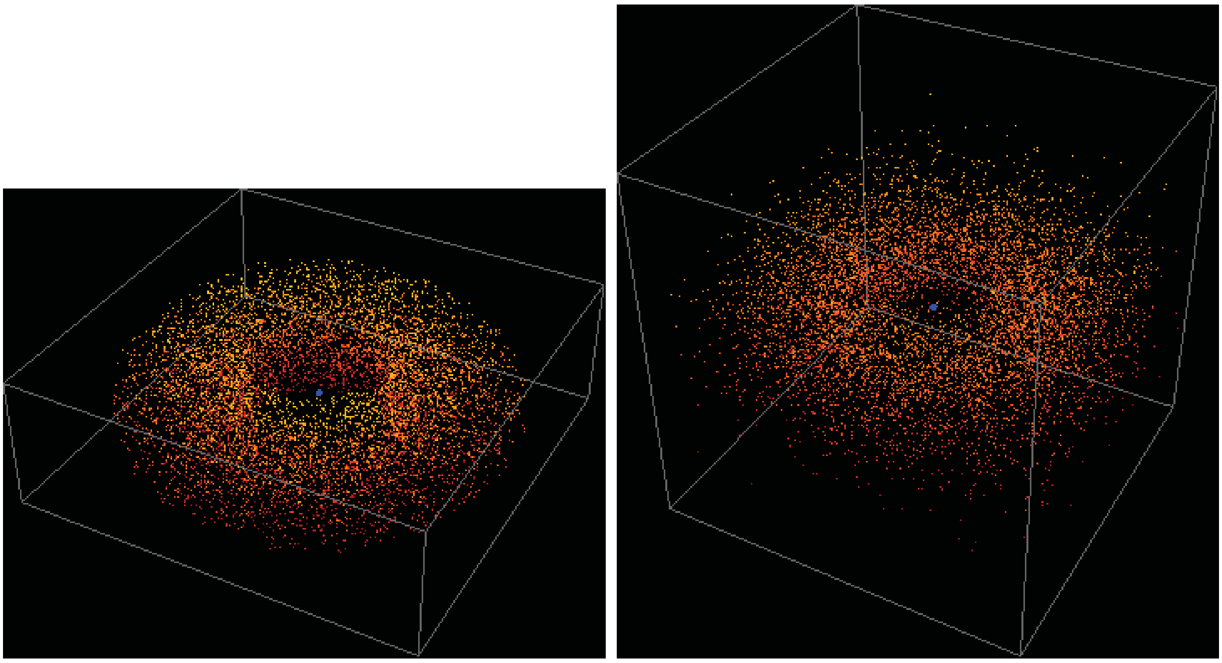


Рис. 6.10. *Зліва*: тор Кеплера з $r_0 = 0.5$, який використовується в якості початкових умов. *Справа*: рівноважний розподіл частинок в торі після 500 середніх орбітальних періодів для $M_{torus}/M_c = 0.056$ і $N = 8\ 192$.

Моделювання показує істотну зміну кінетичної і потенціальної енергій, яке має місце на початковій стадії $t < 20$ (рис. 6.11), але при цьому повна енергія системи зберігається. Істотні флуктуації потенціальної енергії пов'язані зі зміною форми поперечного перерізу тора і розподілом густини частинок в ньому. Саме протягом цього короткого початкового інтервалу розподіл частинок в торі істотно змінюється і тор досягає свого рівноважного перетину в формі овалу. При цьому більш гостра частина орієнтована в бік центральної маси, а більш плоска — в зовнішню область (див. підрозділ 6.3.4). Це як раз протилежно початковому стану (тор Кеплера). Зміна форми перетину показана в розділі 7.1.3 на рис.7.2. Ці перетини побудовані таким чином, що

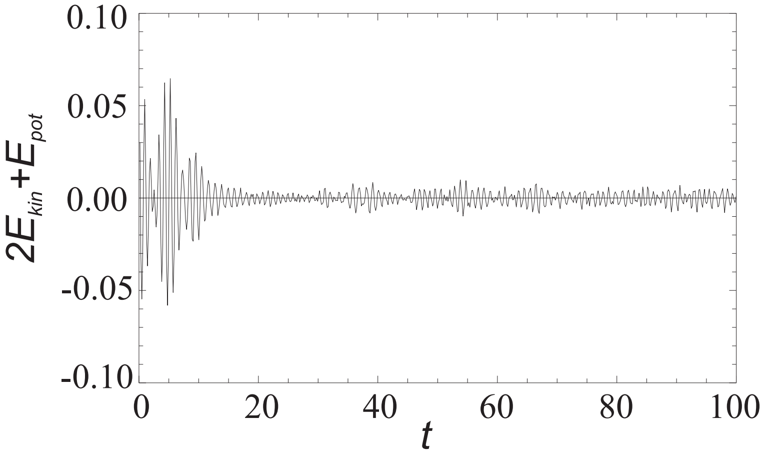


Рис. 6.11. Подвійна сума кінетичної і потенціальної енергії системи $2E_{kin}+E_{pot}$ протягом перших 100 орбітальних періодів для $M_{torus}/M_c = 0.02$ і $N = 8\ 192$. Початкові умови відповідають тору Кеплера з $r_0 = 0.3$.

всі частинки зібрані в одну меридіональну площину. Очевидно, що істотні флуктуації енергії виникають внаслідок прагнення тора досягти свого рівноважного стану, а саме, форми перетину тора, яка протилежна початковому стану. Уже для часового інтервалу $t > 20$ флуктуації кінетичної і потенційної енергій незначні. Це означає, що форма перетину тора більше істотно не змінюється. Ми визначимо стан, при якому форма перетину тора не змінюється істотно, як рівноважний. Рис. 6.11 показує, що теорема віріала задовольняється: $2E_{kin} + E_{pot} \approx 0$, що характеризує стаціонарний або лінійно нестаціонарний стан системи. З рис. 6.12 видно, що перетин тора поступо-

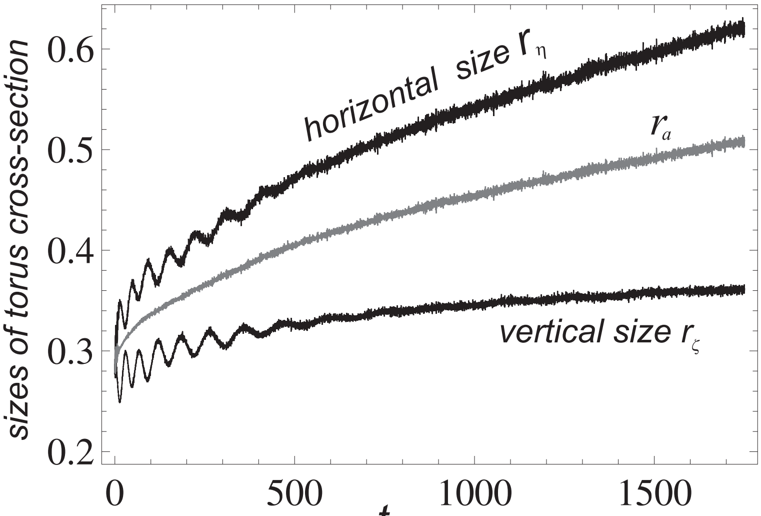


Рис. 6.12. Зміна розмірів перетину тора з масою $M_{torus} = 0.02M_c$, що складається з $N = 8\ 192$ частинок протягом 1 800 орбітальних періодів. Початковий стан відповідає тору Кеплера з $r_0 = 0.3$.

во збільшується (розповзається) з часом. Поступове розповзання перетину пов'язано з іррегулярні силами, що виникають внаслідок гравітаційної взаємодії між частинками. Дійсно, іррегулярні сили переважають над регулярними, які створюються згладженим потенціалом для розглянутого випадку "легкого" тора ($M_{torus}/M_c = 0.02$). Періодичні флуктуації розміру перетина (рис. 6.12) пов'язані з регулярною складовою потенціалу тора. Як було показано в підрозділі 6.2.2, орбіта пробної частинки у внутрішньому потенціалі кругового тора в супутній системі належить до коробчатих орбіт. У випадку задачі $N$ тіл, коробчаті орбіти синхронізуються на початковому етапі, створюючи періодичні флуктуації поперечного перерізу тора на рис. 6.12. Амплітуда цих коливань зменшується на пізніх етапах еволюції внаслідок розсинхронізації коробчатих орбіт. Як наслідок, фіктивний кутовий момент $I_\theta$ (момент в супутній системі координат) також зменшується, що добре видно на рис. 6.13. Система прагне до стану з $I_\theta \to 0$, тобто до рандомізації напрямків руху частинок в перетині тора. Фіктивний кутовий момент також відображає розгойдування перетину тора відносно центру мас. Зауважимо, що повний кутовий момент системи зберігається. На рис. 6.14 представлена

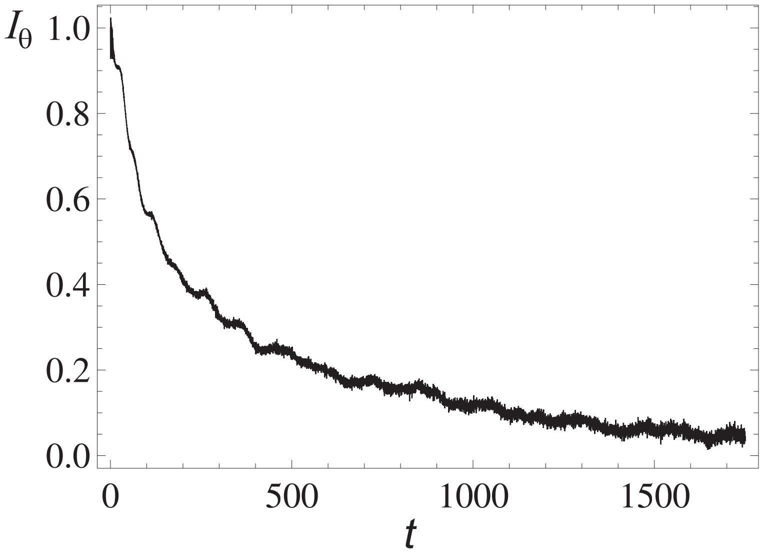


Рис. 6.13. Зміни фіктивного кутового моменту для тора з масою $M_{torus} = 0.02M_c$ і $N = 8\ 192$ протягом 1 800 орбітальних періодів. $I_\theta$ нормований на початкове значення, яке відповідає тору Кеплера з $r_0 = 0.3$.

зміна розмірів перетину для тора з великим початковим геометричним параметром $r_0 = 0.7$. Видно суттєву відмінність від попереднього випадку тора з меншим початковим значенням $r_0 = 0.3$ (рис. 6.12). З рис. 6.14 видно, що

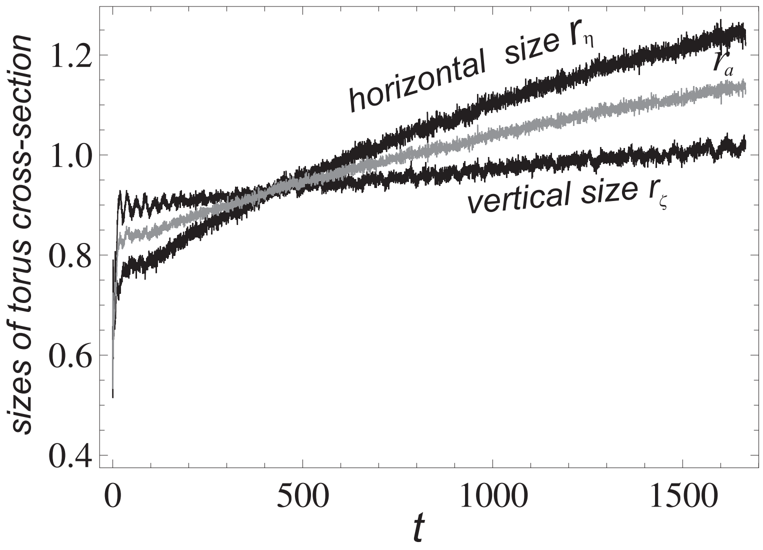


Рис. 6.14. Зміна розмірів перетину тора з масою $M_{torus} = 0.109M_c$, що складається з $N = 8\,192$ частинок, протягом 1 800 орбітальних періодів. Початкові умови відповідають тору Кеплера з $r_0 = 0.7$.

розміри перетину змінюються істотно на початковому етапі, що пов'язано з істотною зміною форми перетину тора. Надалі амплітуда флуктуацій зменшується і зникає після $t = 300$. При цьому видно відмінність від випадку більш тонкого тора, тому що для товстого тора поперечний і поздовжній розміри перетину міняються місцями. Таку поведінку можна пояснити наступним чином. У разі товстого тора періоди коробчатих орбіт на початковій стадії відрізняються дуже сильно, що призводить до швидкої розсинхронізації орбіт в перетині тора. При цьому на еволюції перетину тора видно сильне "розгойдування", яке призводить до того, що форма перетину змінюється на протилежну в порівнянні з початковим станом. Це підтверджує аналіз зміни фіктивного кутового моменту, який зображений на рис. 6.15. Осциляції фіктивного кутового моменту відображають коливання перетину тора (в супутній системі координат). Починаючи з певного моменту, флуктуації фіктивного моменту зникають і його значення близьке до нуля, що говорить про повну рандомізацію напрямків руху частинок в перетині тора. Таким чином, перетин самогравітуючого тора повільно розповзається (вертикальний розмір зростає повільніше, ніж горизонтальний). У рівноважному стані напрямки руху частинок в перетині тора рандомізовані. Відзначимо, що як-

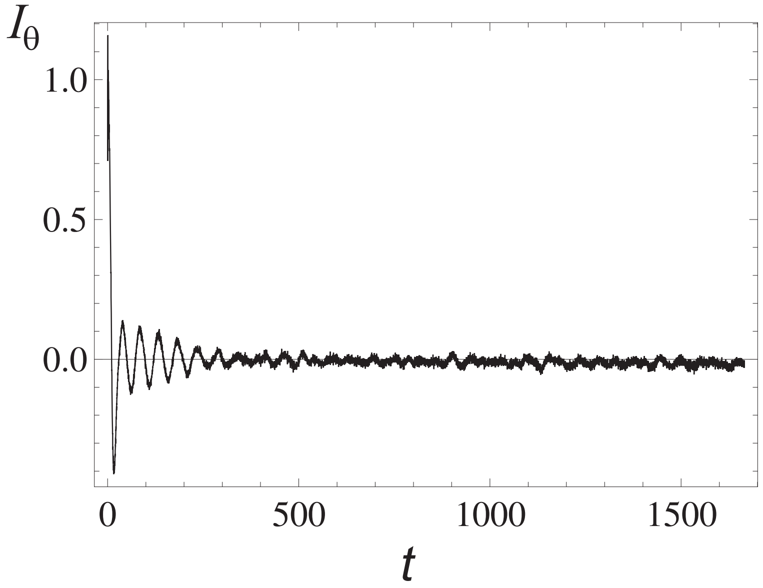


Рис. 6.15. Зміна фіктивного кутового моменту для тора з масою $M_{torus} = 0.109 M_c$ і $N = 8192$ протягом 1800 орбітальних періодів. $I_\theta$ нормований на початкове значення, яке відповідає тору з $r_0 = 0.7$.

що центральна маса відповідає значенню типової надмасивної чорної діри в центрі активного ядра галактики, наприклад, $M_c = 10^7 M_\odot$, тоді один орбітальний період ($t = 1$) для тора з великим радіусом $R = 2$ пк відповідає проміжку часу приблизно 80 000 років. Більш докладно про застосування результатів до активних ядер галактик буде розглянуто в наступному розділі. Таким чином, результати чисельного моделювання для $N = 8\ 192$ (рисунки 6.12 – 6.15) для часового інтервалу 1 700 орбітальних періодів відповідає 136 млн років, що можна порівняти з часом життя активного ядра галактики.

Ми можемо оцінити поведінку системи для різного значення кількості частинок і маси тора, використовуючи загальні міркування зоряної динаміки. При взаємодії частинок одна з одною деякі з них втрачають свою енергію і, відповідно, переходять на більш низькі орбіти. Навпаки, кінетична енергія інших частинок зростає і вони переходять на більш витягнуті орбіти. Як результат такої взаємодії, зовнішня межа тора поступово збільшується. Завдяки випадковій природі взаємодії частинок, ми можемо представити модуль повного збільшення швидкості частинки $\triangle V_i$ як:

$$(\triangle V)^2 = \sum_i (\triangle V_i)^2. \tag{6.29}$$

В теорії зоряної динаміки добре відомий наближений вираз для оцінки дисперсії швидкості $(\triangle V)^2$, яке досягається протягом інтервалу $\triangle t$ [52, 37]:

$$(\triangle V)^2 = 32\pi G m^2 \triangle t \cdot D\left(\frac{1}{V}\right)\ln\left(\frac{b_{max}}{B}\right), \tag{6.30}$$

де $m$ — маса частинки, $D$ — число частинок в одиниці об'єму, яке в разі рівномірного розподілу пропорційне $N$. Опускаючи постійні коефіцієнти і вважаючи, що маса частинок $m = M_{torus}/N$, вираз (6.30) приводимо до вигляду

$$(\triangle V)^2 \propto G\frac{M_{torus}^2}{N}\triangle t\ln\left(\frac{b_{max}}{B}\right). \tag{6.31}$$

В якості оцінки прицільного параметра $b_{max}$ можна вибрати середню відстань між частинками $\tilde{l}$. Тоді вираз для прицільного параметра має вигляд

$$b_{max} \approx \bar{l} = \sqrt[3]{\frac{2\pi^2 R^3 r_0^2}{N}} \tag{6.32}$$

і

$$B = \frac{2GM_{torus}}{NV^2}. \tag{6.33}$$

У розглянутій безрозмірній системі

$$\ln\left(\frac{b_{max}}{B}\right) \approx \ln\left(\frac{N^{2/3}}{M_{torus}^2}\right). \tag{6.34}$$

Нехтуючи слабкою логарифмічною залежністю $(\triangle V)^2$ від $N$ і $M_{torus}$, ми остаточно отримуємо

$$(\triangle V)^2 \sim M_{torus}^2\frac{\triangle t}{N}. \tag{6.35}$$

Хоча вираз (6.35) було отримано для однозв'язної системи, він також може бути застосований до тороїдального розподілу частинок, що підтверджується результатами моделювання. Наприклад, якщо $N_1$ — число частинок в торі і $\triangle t_1$ — інтервал, протягом якого досягається певне значення дисперсії швидкості, тоді з (6.35) випливає, що $\triangle t_2 = \triangle t_1 \cdot N_2/N_1$, тобто те ж саме значення дисперсії швидкості для $N_2 = N_1/2$ буде досягатися протягом періоду $\triangle t_2 = \triangle t_1/2$. На рис. 6.16 показані зміни розміру перетину тора для різного числа частинок. Чорні криві отримані при моделюванні тора з $N_1 = 16\ 384$ на інтервалі $t_1 = 3000$. Сірі криві відповідають тору з $N_2 = N_1/2 = 8\ 192$ частинок на інтервалі $\triangle t_2 = \triangle t_1/2 = 1\ 500$ с з подальшим розтягуванням

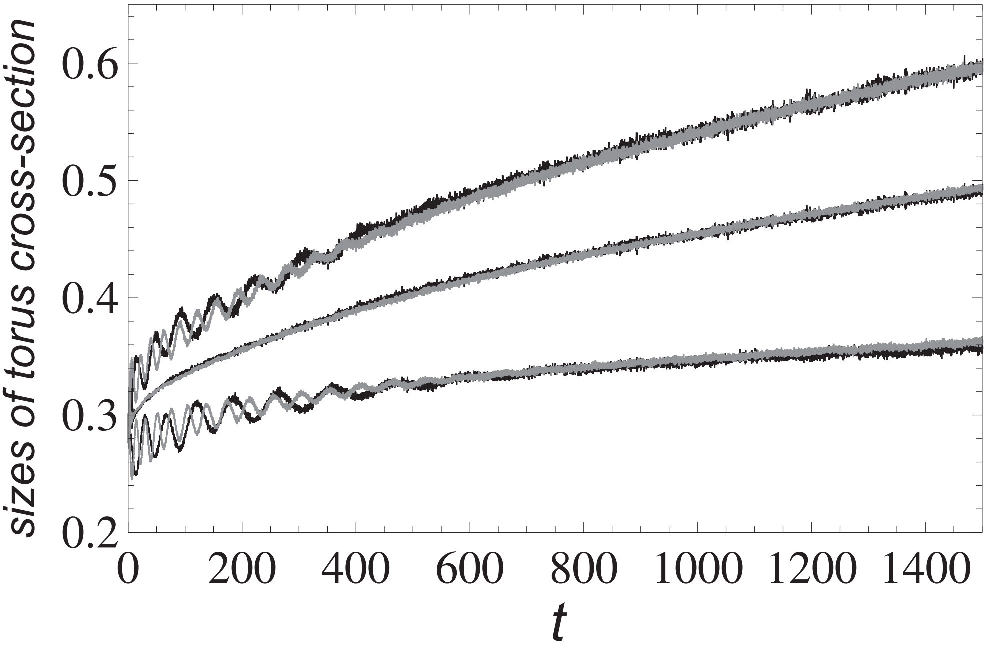


Рис. 6.16. Зміна перетину тора для початкових умов $r_0 = 0.3$; $M_{torus} = 0.02M_c$. Чорні криві отримані моделюванням з $N_1 = 16\ 384$ на інтервалі $\triangle t_1 = 3000$. Сірі криві відповідають випадку $N_2 = N_1/2 = 8\ 192$ на $\triangle t_2 = 1\ 500$ з подальшим розтягуванням в два рази.

отриманих кривих у два рази. Видно, що чорні та сірі криві збігаються з хорошою точністю, що показує задовільну роботу виразу (6.35).

*Таким чином, отримані результати показують, що на підставі моделювання системи з меншою кількістю частинок на відносно малому часовому інтервалі дозволяє передбачити стан системи з великою кількістю частинок на більшому часовому інтервалі відповідно до виразу (6.35). Аналогічно, умови перемасштабування (6.35) може бути використані для дослідження системи з різними значеннями маси тора* $M_{torus}$.

### *6.3.4 Рівноважна форма перетину тора*

Ми виявили з моделювання, що в рівноважному стані перетин тора має форму овалу з експоненційним розподілом густини частинок. При цьому стабільність тора досягається за рахунок того факту, що хмари рухаються в ньому по нахиленим орбітам.

У розділі 4, де досліджувався гравітаційний потенціал тора, ми виявили, що зовнішній потенціал однорідного кругового тора не строго дорівнює потенціалу нескінченно тонкого кільця, що може бути пов'язано з тим, що гаус-

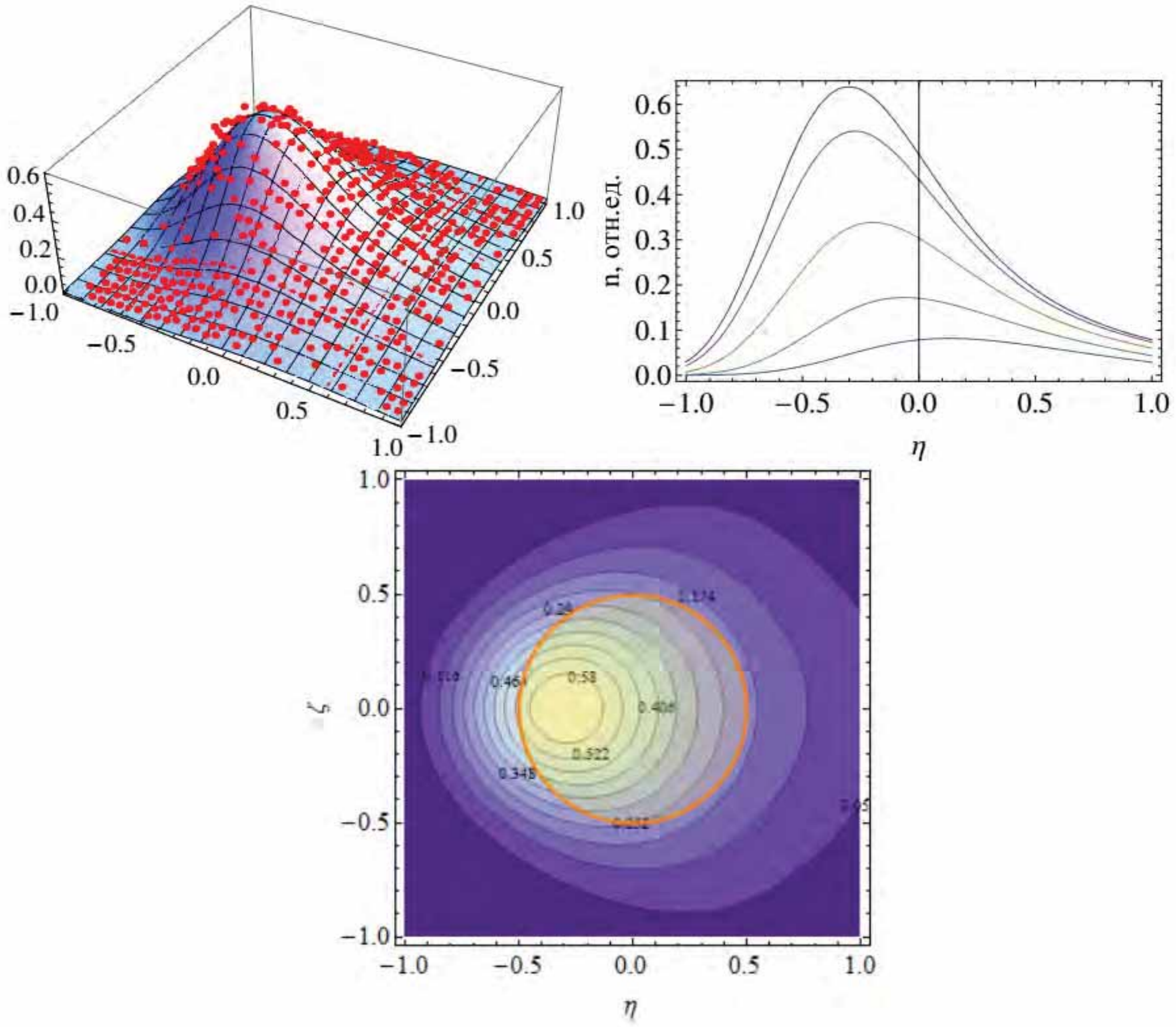


Рис. 6.17. *Зліва верхній*: червоними точками показано розподіл частинок в перетині тора, отримане в рамках задачі $N$ тіл для $M_{torus}/M_c = 0.01$, $r_0 = 0.7$, $N = 8192$. Поверхня отримана шляхом фітінгу перетину овалом з експоненційним розподілом густини (6.36). *Справа верхній*: профілі розподілу при $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. *Нижній*: відповідні ізоденси в меридіональній площині тора (поперечний перетин тора). Для порівняння показано круговий перетин (прозоре жовте коло).

сова кривизна поверхні тора змінює знак при обході по малому контуру. При цьому можна припустити, що для "компенсації" впливу кривизни перетин тора має відрізнятися від кругового. З чисельного моделювання видно, що перетин рівноважного гравітуючого тора дійсно відрізняється від кругового і близький до овалу. Це пов'язано з тим, що внутрішня (по відношенню до центру симетрії) область відчуває більше тяжіння з боку решти об'єму тора, ніж зовнішня. Тому інтуїтивно зрозуміло, що внутрішня частина повинна містити менший об'єм, а зовнішня, навпаки, більший. Це якраз і досягається за рахунок овалоїдної форми перетину. Звичайно, тут також грає роль центральна маса, яка додатково створює тяжіння до центру симетрії. Однак оскільки гравітаційне поле центральної маси ізотропне, це не порушує наші попередні міркування про зв'язок форми перетину тора і гауссовою кривизною його поверхні.

Для того, щоб отримати аналітичний вираз для форми перетину і розподілу частинок, ми зробимо таку процедуру. Коли тор досягає свого рівноважного стану (через 1000 орбітальних періодів), осереднимо розподіл частинок по координатам на інтервалі 100 орбітальних періодів (рис. 6.17, *червоні точки*), а потім апроксимуємо отриманий розподіл функцією виду:

$$n(\eta, \zeta; r_0) = n_0(r_0) \exp[-f(\eta, \zeta; r_0)], \tag{6.36}$$

де $n_0$ — число частинок на максимумі розподілу. Для спрощення ми покладемо $n_0 = 1$. Очевидно, що $\ln(n/n_0) = f(\eta, \zeta)$ є рівнянням ізоденс на рівні $n/n_0$ для даного розподілу густини (6.36). Оскільки ізоденси мають форму овалу, ми апроксимуємо функцію $f$ у вигляді степеневого ряду за координатами у вигляді:

$$\begin{aligned} f(\eta, \zeta) = c + a_1\eta + a_2\eta^2 + b_2\zeta^2 + a_3\eta^3 + \\ + t_{12}\eta\zeta^2 + a_4\eta^4 + b_4\zeta^4 + t_{22}\eta^2\zeta^2. \end{aligned} \tag{6.37}$$

На рис.6.17 показана результуюча поверхня, яка відображає згладжений розподіл густини в перетині тора, а також профілі густини та відповідні ізоденси для тора, маса якого становить 1 відсоток від центральної маси. При цьому початковий розподіл частинок відповідає геометрично товстому тору Кеплера з $r_0 = 0.7$.

На рис. 6.18 показані усереднений розподіл густини в перерізі рівноважного тора, що складається з $N = 8\ 192$, для чотирьох різних початкових умов (через 1000 орбітальних періодів). Параметри ($M_{torus}$ і $r_0$) були обрані таким чином, щоб в початковому стані всі чотири випадки відповідали торам з однаковими значеннями початкової об'ємної густини: $\kappa_{torus} = M_{torus}/(2\pi^2 R^3 r_0^2) = \text{const}$. Цю умову ми наклали для того, щоб уникнути впливу різної об'ємної густини на форму перетину тора, яку можна дослідити окремо. Однак проводилися різні чисельні експерименти, включа-

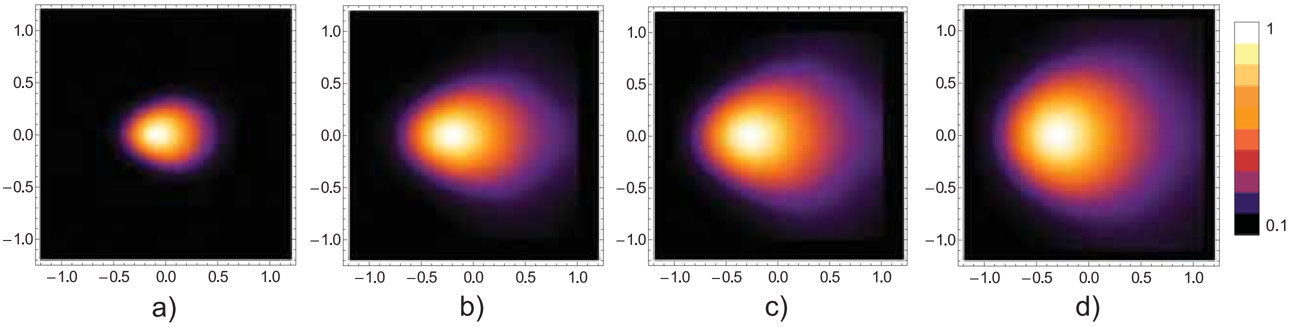


Рис. 6.18. Усереднений розподіл густини частинок в рівноважному перетині тора, що складається з $N = 8192$ для різних значень маси і геометричного параметра: a) $r_0 = 0.3$, $M_{torus} = 0.02M_c$, b) $r_0 = 0.5$, $M_{torus} = 0.056M_c$, c) $r_0 = 0.6$, $M_{torus} = 0.08M_c$, d) $r_0 = 0.7$, $M_{torus} = 0.109M_c$. Розподіл густини представлено в циліндричних координатах $(\eta; \zeta)$, центральна маса знаходиться в точці з координатами $(-1, 0)$.

ючи зміну початкової форми перетину тора за рахунок зміни еліптичності $q$ в торі Кеплера, які, тим не менш, приводили до форми перетину, близької до овалу. У наступному розділі ми розглянемо вплив суттєво різних початкових умов на рівноважну форму перетину тора.

Таким чином, ми прийшли до наступних висновків.

*1. Гравітуючий тор з масою* $\lesssim 0.1M_c$ *стабільний на часових масштабах, порівнянних з часом життя астрофізичних об'єктів.*

*2. У загальному випадку рівноважний перетин тора має форму овалу, а напрями векторів швидкості частинок в перетині рандомізовані.*

*3. Розподіл густини частинок в перетині тора підпорядковується гауссовому розподілу з максимумом, близьким до центру перетину тора.*

В даному моделюванні ми припускали, що хмари (частинки) не змінюють своєї форми при близькому проходженні і зіткненнях. Реальні хмари в затінюючих торах АЯГ можуть істотно змінювати свою форму в результаті припливної взаємодії або збиратися в одну хмару при зіткненнях. Отже, виникає питання: як хмари можуть виживати на тривалому часовому інтервалі? В роботі [171] це питання було детально розглянуто. Основна ідея полягає в наступному. При близькому проходженні хмар, за рахунок припливного розтягування, хмари можуть розпадатися на хмари менших розмірів. З іншого боку, при непружному зіткненні хмари будуть збиратися у великі об'єми. За оцінками, ці два процеси одного порядку, тому вони в середньому можуть компенсувати один одного, зберігаючи таким чином загальну кількість хмар постійним. У нашій моделі для пояснення геометричної товщини тора необхідно, щоб хмари в початковому стані рухалися по нахиленим орбітам, тому розглянуті вище процеси повинні слабо впливати на рівноважну форму перетину. Рух хмар в початковому стані по нахиленим орбітам може забезпечуватися наявністю вітру в АЯГ і зовнішньою акрецією, що буде обговорюватися в наступному розділі.

# ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 6

Показано, що істотну роль в стабільності тора відіграє центральна маса. А саме, за рахунок самогравітації тор повинен стискатися по великому радіусу. Щоб компенсувати це стиснення, необхідна наявність відцентрових сил, отже, важливу роль відіграє орбітальний рух, який і забезпечує центральна маса.

Досліджено рух пробної частинки у внутрішньому гравітаційному потенціалі тора з урахуванням центральної маси на основі наближених виразів, знайдених в попередніх розділах. Отримано аналітичний розв'язок рівнянь руху і показано, що в такій системі орбіта частинки незамкнена і належить до типу коробчатих орбіт. При певних параметрах можливе існування в супутній системі гало-орбіт, які подібні нестійким гало-орбитам Фаркуара навколо колінеарних точок Лагранжа в задачі трьох тіл (наприклад, в точці $L_2$). Гало орбіти у внутрішньому потенціалі тора і центральної маси є стійкими і, за певних початкових умов, існують навіть квазізамкнені гало-орбіті. Можливо, що подібні орбіті близькі до геодезичних на поверхні тора. Показано, що в рамках задачі двох тіл (кожна частинка і центральна маса) можливо сформувати тор, що складається з $N$ частинок, орбіти яких не перетинаються, а товщина тора забезпечується наявністю розкиду по нахилам і ексцентриситетам. При цьому нахил орбіт задається за певним законом і залежить від ексцентриситетів орбіт. Оскільки рух частинок в такому торі кеплерівський, ми назвали його "тор Кеплера". Тор Кеплера є узагальненням кеплерівського диска та зручний в дослідженні задачі про стабільність гравітуючого тора. В рамках задачі $N$ тіл досліджено стабільність самогравітуючого тора, що знаходиться в гравітаційному полі центральної маси. Показано, що тор залишається стабільним на проміжках часу, порівнянних з часом життя астрофізичних об'єктів. Рівноважний перетин тора має форму овалу з гауссовим розподілом частинок в його перерізі. При цьому тор залишається геометрично товстим навіть після значного часу моделювання, що дає можливість пояснити існування геометрично товстих торів в активних ядрах галактик.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [15, 16, 57, 79, 81, 61, 222, 93, 95, 96].

# РОЗДІЛ 7

# ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ І ФОРМУВАННЯ ГАЗОПИЛОВИХ ТОРІВ В АКТИВНИХ ЯДРАХ ГАЛАКТИК

Цей розділ присвячено дослідженню фізичних властивостей газопилового тора в межах моделі, запропонованої в розділі 6. З чисельного моделювання можна зробити висновки про умови затінення, а також отримати оцінки числа хмар, що формують затінюючу структуру та їх розподіл. Також важливим є питання про вплив початкових умов. У попередньому розділі ми вибрали в якості початкових умов – еліптичний тор Кеплера. Нижче буде досліджено еволюцію для двох інших початкових умов. Розглядаючи фізичні властивості тора, що складається з хмар, ми отримаємо формули для температури хмар, нагрітих акреційним диском. Також ми обговоримо сценарій формування тора та фізичні характеристики хмар. На основі аналізу динаміки, буде запропонована інтерпретація спостережних даних ALMA для сейфертівської галактики NGC 1068.

## 7.1 Вплив початкових умов на рівноважну форму самогравітуючого тора

В даному розділі досліджується можливий вплив початкових умов на кінцевий розподіл частинок, коли система досягає свого рівноважного стану. Це важливо для розуміння ролі початкових ексцентричних орбіт і їх впливу на стабільність самогравітуючого тора в АЯГ. У свою чергу, такий аналіз може дати інформацію про умови, які призвели до формування геометрично товстих затінюючих торів. Також аналіз розподілу хмар необхідний для подальшої побудови кривих обертання АЯГ та інтерпретації даних ALMA.

В розділі 6 ми вказували, що при формуванні тора ми використовуємо деякі початкові умови. При цьому ми з'ясували, що на рівноважну форму перетину тора буде впливати розподіл по нахилам і ще по двом елементам (великі півосі і ексцентриситети орбіт). Обмежимося двома граничними випадками: розкид орбіт по ексцентриситетам зі значеннями великих півосей, рівними великому радіусу тора ($R = 1$), і протилежний випадок – розкид по великим півосям з ексцентриситетами, рівними одиниці. Перший випадок відповідає еліптичному тору Кеплера, який ми використовували у якості початкових умов в попередньому розділі. У цьому підрозділі ми розглянемо другий ідеалізований випадок, який будемо називати круговим тором Кеплера, оскільки він сформований з частинок, що рухаються по круговим орбітам.

### *7.1.1 Круговий тор Кеплера*

Сформуємо тор з частинок, які рухаються по незбуреним круговим орбітам ($e_k = 0$) і мають розкид по великим півосям і нахилам. При цьому великі півосі $a_k = 1+\eta_k$, де $\eta_k = [-r_0, r_0]$, а нахил для кожної частинки визначаються наступним чином:

$$i_k = \arccos\left(\frac{1 + a_k^2 - r_0^2}{2a_k}\right). \tag{7.1}$$

Вираз (7.1) отримано з простих геометричних міркувань. Оскільки для кругової орбіти не існує періцентрової відстані, то тут достатньо задати значення висхідного вузла $\Omega$ випадковим чином в межах від 0 до $2\pi$. Тоді координати частинок знаходимо за формулами (6.2) з заданими умовами, в яких робимо заміну $r = a$ і $\nu = \tilde{M}$, де $\tilde{M}$ – середня аномалія, $n = a^{-3/2}$ – кутова швидкість (в системі одиниць $G = M_c = 1$). Відповідні компоненти швидкості легко отримати для цього випадку, диференціюючи вираз для координат (6.2). На рис. 7.1 б показані траєкторії 20 частинок в супутній системі для кругового

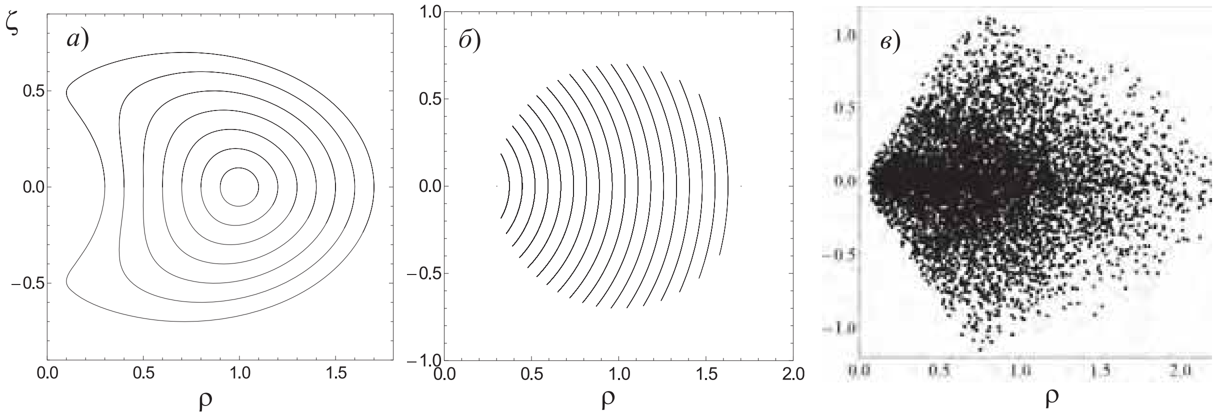


Рис. 7.1. Траєкторії частинок в супутній системі в еліптичному (а) і круговому (б) торах Кеплера; (в) — випадковий розподіл частинок за елементами орбіт при наявності анізотропії (всі частинки зібрані в одну площину). Центральна маса розташована в точці (0,0).

тора Кеплера. На відміну від еліптичного тора Кеплера (див. підрозділ 6.1), де орбіти частинок в супутній системі замкнені (рис. 7.1 а), а великі півосі і періоди орбіт однакові, в круговому торі Кеплера орбіти частинок в супутній системі не замкнуті (рис. 7.1 б), а періоди цих частинок різні, тому що різні великі півосі орбіт ($T_k \propto a_k^{3/2}$). Якщо нахили всіх частинок покласти рівними нулю (при незмінних великих півосях), то круговий тор Кеплера вироджується в кеплерівський диск. Таким чином, такий двозв'язний об'єкт, як тор, характеризується в рамках даної задачі двома граничними випадками при нульових нахилах всіх частинок: еліптичний тор Кеплера вироджується в нескінченно тонке кільце, а круговий тор Кеплера — в кеплерівський диск. Тобто тор Кеплера є узагальненням кеплерівського диска.

### *7.1.2 Випадковий розподіл частинок за елементами орбіт*

Отже, в еліптичному торі Кеплера всі великі півосі частинок були рівні, а в круговому, навпаки, однакові ексцентриситети всіх частинок. Тут ми виберемо в якості початкових умов випадок, коли всі елементи орбіт задані випадковим чином (в тому числі ексцентриситети, нахили і великі півосі). Оскільки тор є двозв'язною фігурою, для його формування необхідна наявність анізотропії, яку ми врахуємо в цьому початковому розподілі. А саме, ми виключимо частинки з двох взаємопротилежних тілесних кутів, які відповідають нахилам $\pm 60^\circ < i < \pm 120^\circ$ (позитивні значення відповідають верхній півплощині, а негативні — нижній). Відразу відзначимо, що такий початковий стан може відповідати реальній картині в активних ядрах галактик, коли хмари, набуваючи додаткового імпульсу за рахунок наявності вітру, можуть подолати гравітаційні сили з боку центральної маси (і тора) і "залишити" систему (див. підрозділ 7.3 з обговоренням сценарію формування тора в АЯГ).

### *7.1.3 Чисельне моделювання*

Як приклад, в цьому підрозділі ми розглядаємо випадок, коли маса тора становить 5 відсотків від центральної маси. В [57] була представлена еволюція перетину тора, зафіксовані при різних моментах часу: від початкового стану (тор Кеплера), через 25 періодів і рівноважний стан для $M_{torus}/M_c = 0.045$, 0.056, 0.07. На рис.7.2 показані більш детально результати моделювання для тора, початковий стан якого відповідає еліптичному тору Кеплера. Тимчасову еволюція форми перетину тора, крім [57], можна також побачити в якості анімації на ресурсі http://astrodata.univer.kharkov.ua/agn/ torus. Крім того,

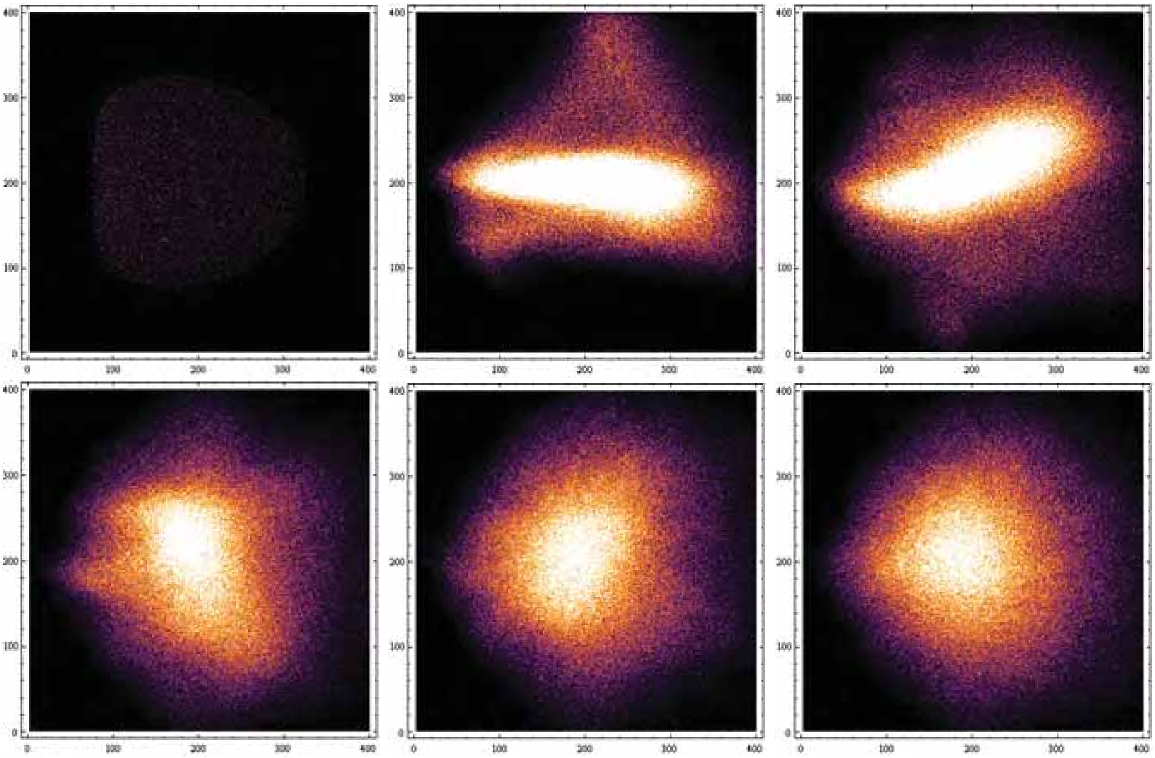


Рис. 7.2. Еволюція перетину тора з масою $M_{torus} = 0.05M_c$ і $N = 8192$ від початкового стану — еліптичний тор Кеплера (перший рисунок зверху) через часові інтервали, нормовані на середні орбітальні періоди $t = 0, 25, 50, 75, 100, 150$, відповідно (див. [57])

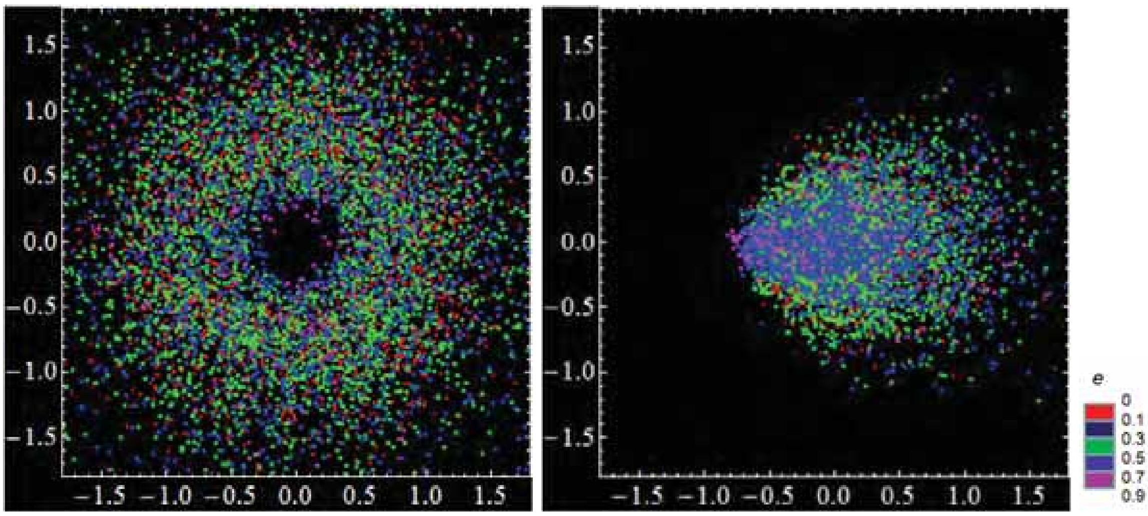


Рис. 7.3. Розподіл частинок в рівноважному стані тора за ексцентриситетами.

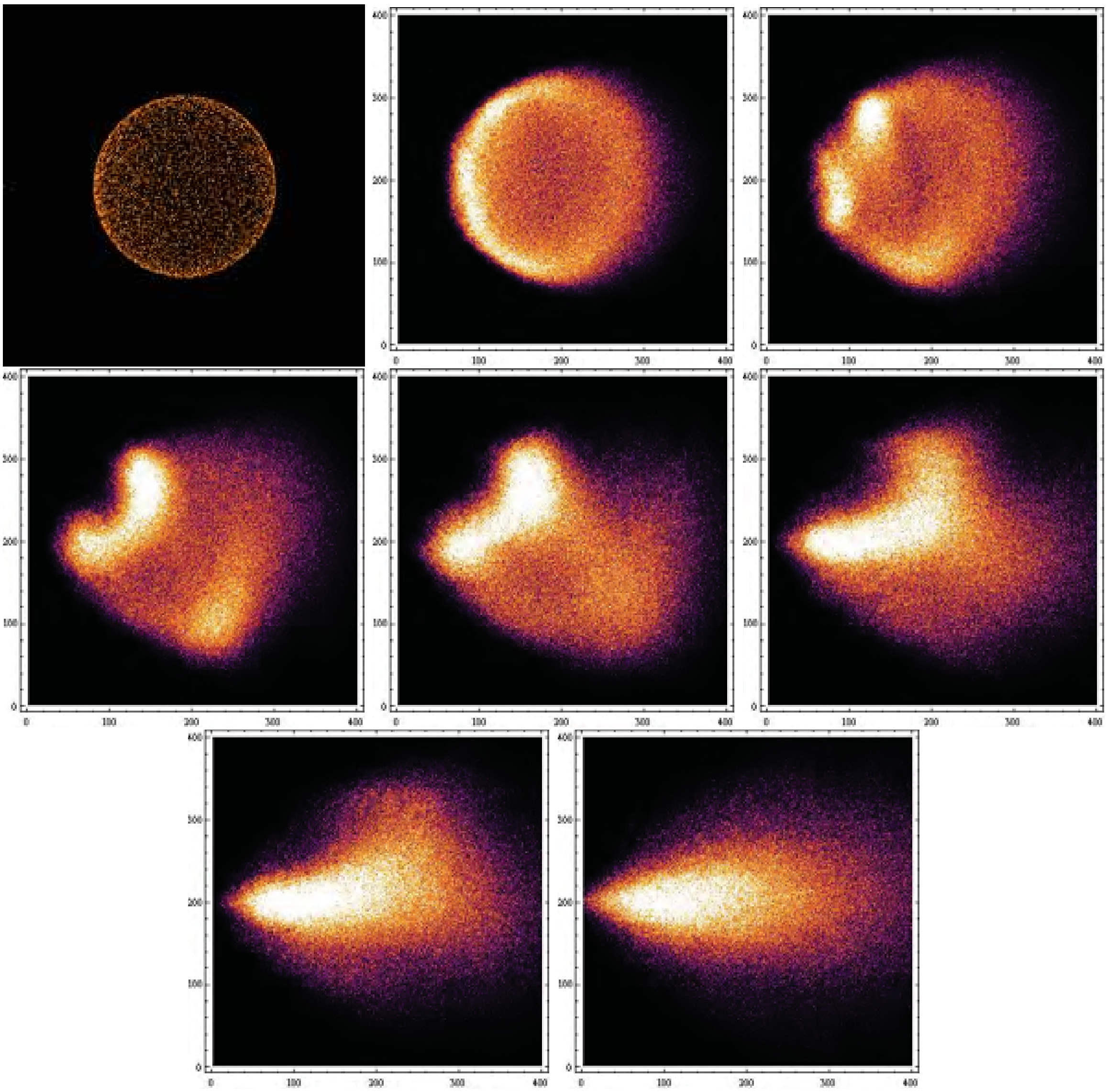


Рис. 7.4. Еволюція перетину тора від початкового стану – круговий тор Кеплера (перший рисунок зверху) через часові інтервали, нормовані на середні орбітальні періоди $t = 0, 25, 50, 75, 100, 150, 200, 1000$. Решта початкових умов такі ж, як і на попередніх рисунках.

в цій роботі вперше була висловлена ідея про аналіз розподілу хмар в торі не тільки за швидкостями, а й за елементами орбіт, що важливо для розуміння особливостей динаміки в торі в застосуванні до моделі активного ядра галактики.

Видно, що через 25 середніх періодів перетин тора істотно змінюється. Фактично, до цього моменту всі частинки схлопиваются в диск, але вже через наступні 25 періодів видно, що перетин продовжує еволюціонувати, досягаючи рівноважного стану на $t = 150$. Як зазначалося в попередньому розділі, така істотна зміна форми перетину в процесі еволюції до рівноважного стану пов'язана з тим, що форма перетину в початковому стані істотно відрізняється від рівноважної. На рис. 7.3 показано розподіл частинок за ексцентриситетами, де видно, що зовнішня границя тора сформована частинками з більшим значенням ексцентриситету (див. обговорення нижче).

Наступний рисунок 7.4 демонструє еволюцію самогравітуючого тора від початкового стану – кругового тору Кеплера. Для цього випадку видно, що через 25 періодів розподіл частинок змінився не істотно: частинки зміщуються в область ближче до центральної маси, таким чином створюючи неоднорідний розподіл в перерізі. Через наступні 25 періодів помітна фрагментація і значне збільшення щільності частинок ближче до центральної маси, що зрештою призводить до збільшення фіктивного моменту і розгойдування перетину, що у свою чергу призводить до більш активної еволюції тора. На рис.7.5 показана еволюція тора, коли початковим станом є випадковий розподіл частинок по всіх елементах орбіт. Видно, що перетин тора змінюється практично відразу, але потім він довго приходить в рівноважний стан.

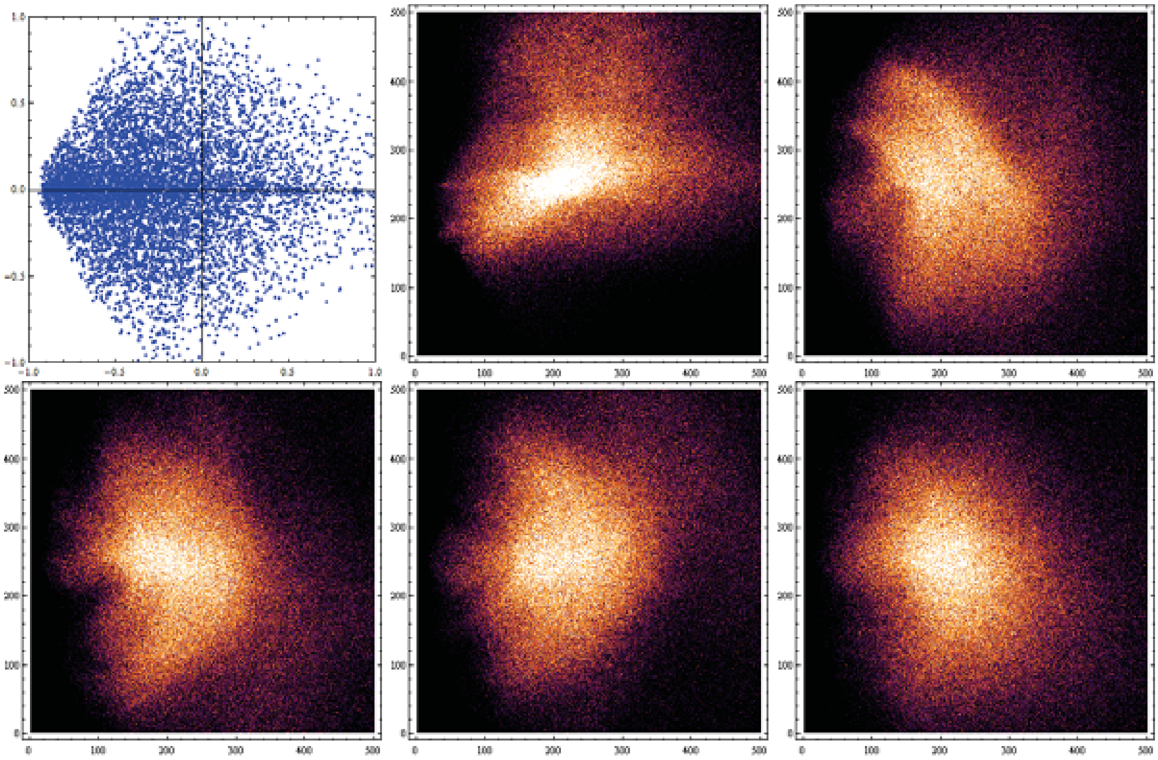


Рис. 7.5. Еволюція перетину тора від початкового стану – випадковий розподіл за елементами орбіт (перший рисунок зверху) через часові інтервали, нормовані на середні орбітальні періоди $t = 0, 25, 50, 75, 100, 250$. Решта початкових умов такі ж, як і на попередніх рисунках.

На рис.7.6 показані результати чисельного моделювання для різних початкових умов, досягнутих через 1000 орбітальних періодів. Всі координати

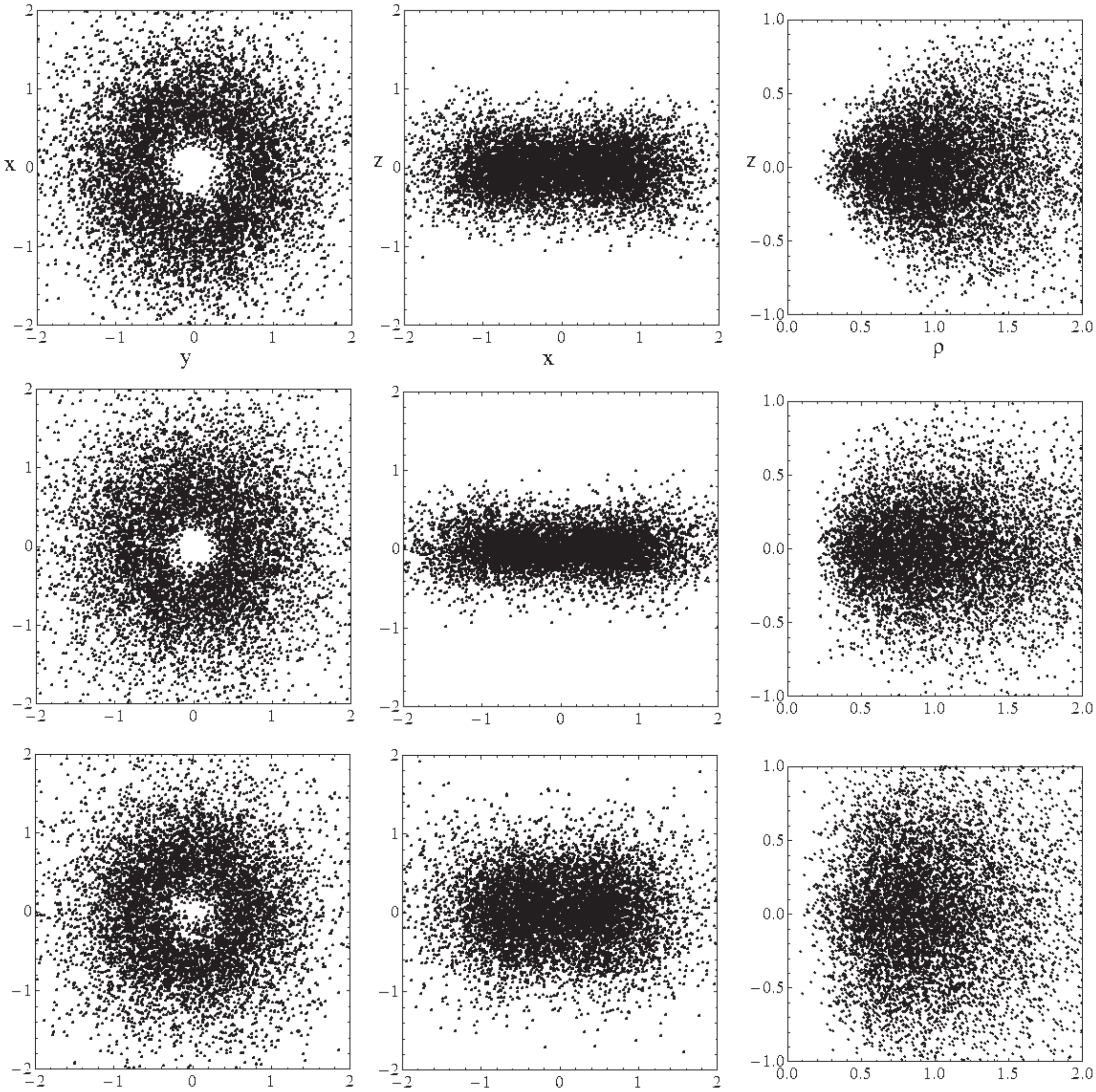


Рис. 7.6. Розподіл частинок, досягнутий через 1000 орбітальних періодів від різних початкових станів. *Верхні* рисунки – початковим розподілом є еліптичний тор Кеплера ($r_0 = 0.5$); *середні* – круговий тор Кеплера ($r_0 = 0.5$); *нижні* – випадковий розподіл за елементами орбіт. Ліва колонка: проекція на площину симетрії тора; середня колонка: вид з ребра; права колонка: всі частинки зібрані в одну площину, яка перпендикулярна екваторіальній площині симетрії. Для всіх випадків $M_{torus} = 0.05M_c$ і $N = 8192$.

на рис. 7.6 нормовані на великий радіус тора: $(x, y, z) \longrightarrow (x/R, y/R, z/R)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Оскільки моделювання проводилося в системі одиниць $G = M_c = R = 1$, то $\zeta = z$. На рисунках 7.2, 7.4, 7.5, 7.7 представлено розподіл густини в перетині тора, який було отримано в такий спосіб. Всі частинки

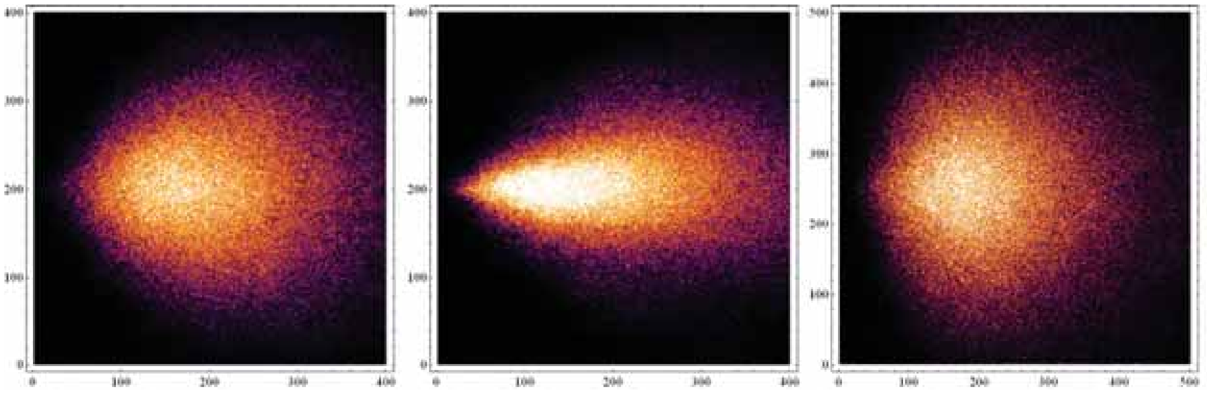


Рис. 7.7. Розподіл густини частинок в рівноважному перетині тора для трьох різних випадків початкових умов: *лівий* еліптичний тор Кеплера, *середній* круговий тор Кеплера, *правий* – випадковий розподіл за елементами орбіт при наявності анізотропії. Всі інші параметри відповідають рис.7.6.

збираються в одну площину, перпендикулярну екваторіальній площині тора (приклад на рис. 7.6 — права колонка). При цьому площина ділиться на сітку 500 × 500 і для кожної клітинки підраховується кількість частинок, що займають дану клітинку. Більш світлі кольори на рис. 7.7 відповідають максимальній кількості частинок, а темніші - мінімальній, відображаючи, таким чином, розподіл щільності в перетині тора. Масштаб за координатами $(l_1, l_2)$ на рис.7.7 пов'язаний з координатами $(\rho, \zeta)$ наступним чином: по осі абсцис $l_1 = 250\rho$, а по осі ординат $l_1 = 250z + 200$ (рис. 7.7 *лівий* і *середній*) і $l_1 = 250(z + 1)$ (рис. 7.7 *правий*). Видно, що у всіх трьох випадках (рис. 7.6, 7.7) тор в середньому зберігає геометричну товщину, що є результатом дії іррегулярних сил між частинками. Дійсно, при взаємодії частинок одні з них втрачають енергію і переходять на більш низькі орбіти, а енергія інших — збільшується і вони можуть переходити на більш витягнуті і нахилені орбіти. В результаті таких взаємодій межа перетину тора поступово збільшується, що може пояснювати гауссів розподіл частинок в його перерізі (рис. 7.7). При цьому розподіл частинок в площині симетрії тора (рис. 7.6 *ліва колонка*) слабо відрізняються для розглянутих трьох випадків початкових умов, але товщина тора залежить від початкових умов (рис. 7.6 *середня* і *права* колонки). Так, якщо початковою умовою є круговий тор Кеплера, то в рівноважному стані геометрична товщина тора менше (рис. 7.7 *середній*), ніж в разі, коли в початковому стані використовувався еліптичний тор Кеплера (рис. 7.7 *лівий*). Це означає, що не тільки нахили, але і еліптичності орбіт грають важливу роль в стабільності самогравітуючого тора. Якщо в початковому стані всі елементи орбіт задаються випадковим чином (при наявності анізотропії), то в рівноважному стані розподіл частинок формує ще більш товстий тор в порівнянні з двома попередніми випадками (рис. 7.7 *правий*). При цьому перетин тора відрізняється від овалоїдної форми.

Таким чином, для стабільності товстого тора необхідно, щоб в початковому стані елементи орбіт хмар мали розкид не тільки по нахилам, а й по ексцентриситетам. Як при цьому змінюються розподіли частинок за елементами орбіт, ми розглянемо в наступному розділі.

### *7.1.4 Розподіл частинок (хмар) за елементами орбіт в самогравітуючому торі*

В результаті моделювання для заданих початкових умов ми отримуємо координати і швидкості кожної частинки системи. Частинки взаємодіють одна з одною за рахунок сил гравітації і змінюють свої траєкторії в процесі руху. Ми можемо знайти елементи орбіт частинок на певний обраний момент часу (миттєві значення), обмежуючись задачею двох тіл (центральна маса і частинка тора). В цьому випадку ми використовуємо відомі вирази для визначення елементів орбіт за отриманими значеннями їх координат і швидкостей. Подібним чином оцінювалась зміна елементів орбіт при русі супутника в гравітаційному полі Землі і Місяця в рамках задачі трьох тіл [61, 222]. При цьому враховувалась зміна координат і швидкості супутника на кожному кроці за рахунок взаємного гравітаційного впливу Земля + Місяць (задача 3-х тіл), а потім відбувався перехід до елементів орбіти супутника. Ми використовували для цього формули для елементів орбіт еліптичного руху. Дійсно, реальна орбіта, яка отримана чисельним розв'язком задачі 3-х тіл, відрізняється від замкнутої еліптичної орбіти внаслідок впливу гравітаційного поля Землі, яка є в даній задачі збурюючим тілом. Зауважимо, що ми розглядали полярну орбіту (апоцентр 5000 км і перицентр порядку 100 км). При переході до елементів орбіт, оскільки збурююча сила мала, ми можемо представити реальну орбіту в першому наближенні як еліптичну (рішення задачі двох тіл), але кеплерівські елементи якої є функціями, залежними від часу, тобто, елементи орбіт змінюються в кожний момент часу відповідно до змін координат і компонентів швидкості. Як видно з [61, 222], періодичні зміни великої півосі та нахилу орбіти супутника відображають різну орієнтацію площини орбіти супутника щодо меридіональної площини Земля–Місяць. Згаданий метод являє собою метод обвідної, а спільним розв'язком є обвідна частинних розв'язків. В небесній механіці в збуреному русі цей метод називають методом оскулюючих елементів. Подібний метод ми також використовували в роботі [80], де форма ударного фронту також визначалася побудовою обвідних частинних розв'язків, отриманих методом розділення змінних. В даному випадку на кожну хмару в торі постійно діє збурююча сила з боку інших хмар, тобто еліптична орбіта, яка була б тільки для випадку "хмара і центральна маса" , в даному випадку збурюється під дією гравітаційних сил з боку інших $(N-2)$ хмар системи. При прагненні до рівноважного стану зміни координат і компонент швидкості хмар можуть бути істотними, що навіть може призводити до суттєвих змін траєкторій. Однак ми можемо припустити, що при досягненні рівноважного стану в середньому хмари перерозподіляються за елементами орбіт. Чи рухаються хмари на внутрішній межі тора по круговим орбітам або ж вони проходять через перицентр, а потім, рухаючись по еліптичним орбітам, формують зовнішню межу тора? Ці питання є важливими для розуміння не тільки динаміки, але й ефектів перевипромінювання хмар в торі. Для відповіді на поставлені питання ми фіксуємо отримані чисельно в рамках задачі $N$ тіл значення координат і компонент швидкості кожної хмари та визначаємо по ним відповідні елементи орбіт.

Для аналізу в рамках задачі $N$ тіл досить обмежитися тільки змінами нахилу, великої півосі і ексцентриситету [28]

$$i = \arccos\left(\frac{C_z}{C}\right), \qquad a = \frac{1}{2/r - V^2}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{C^2}{a}}, \tag{7.2}$$

де $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$ – вектор повного кінетичного моменту системи "частинка і центральна маса" , $C$ – його модуль, $V$ – модуль швидкості частинки. Координати і швидкості переобчислюються на кожному кроці в рамках задачі N-тіл. Потім ми визначаємо елементи орбіти на даний момент часу по формулам

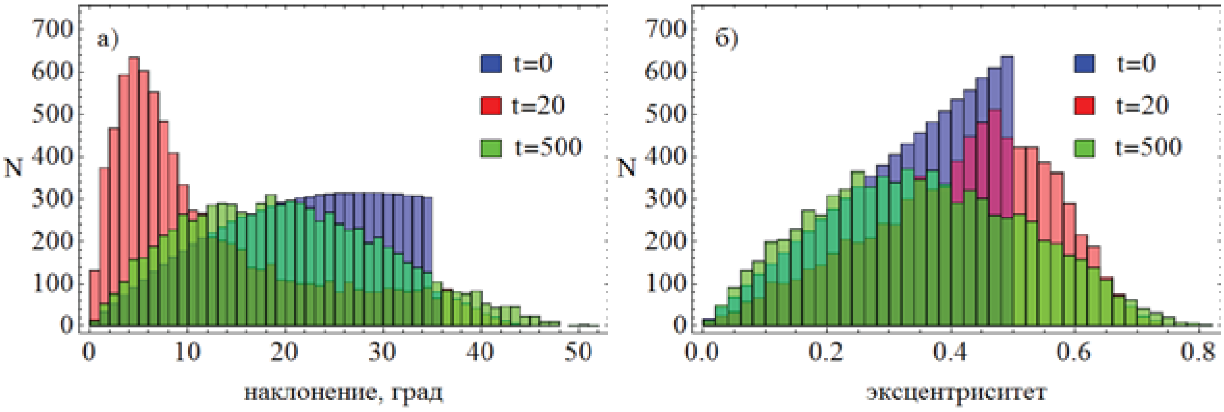


Рис. 7.8. Гістограми розподілу частинок в торі по нахилах (а) і ексцентриситетах (б) для початкового стану ($t = 0$) та через 20 і 500 середніх орбітальних періодів. Моделювання проводилося для тора з $M = 0.05M_c$ і $N = 8192$. В якості початкових умов ми використовували еліптичний тор Кеплера.

(7.2) і повторюємо це на кожному кроці. Таким чином, ми можемо простежити за миттєвими значеннями елементів орбіт хмар в торі. На рис. 7.8 представлені розподіли частинок по нахилам і ексцентриситетам на різних етапах еволюції тора. Для даного випадку в якості початкових умов ми використовували еліптичний тор Кеплера. Добре видно, що в перші 20 періодів елементи орбіт частинок значно змінюються в порівнянні з початковим станом. При цьому відбувається перерозподіл орбіт частинок по нахилам (рис. 7.8а), тому що під дією самогравітації форма перетину тора змінюється. Моделювання показує (див. також [27]), що вже через сотню періодів розподіл частинок по нахилам і ексцентриситетам практично не змінюється, що відображає досягнення системою свого квазірівноважного стану.

З рис. 7.9 видно, що початковий розкид по ексцентриситетам впливає на розподіл частинок по нахилам в рівноважному стані тора. Якщо в початковому стані тор був сформований з частинок, що рухаються по круговим орбітам з розкидом по великим півосям, то до рівноважного стану розподіл частинок зміщується в бік менших нахилів. Це призводить до більш сплющеного тору. Якщо ж в початковому стані частинки мали розкид по ексцентриситетам (при рівних великих півосях), то в рівноважному стані існують частинки з великими нахилами, що призводить до формування більш товстого тора. При випадковому початковому розподілі частинок по всім елементам орбіт, остаточно отримуємо пологий розподіл частинок по нахилам (рис. 7.9 а). В

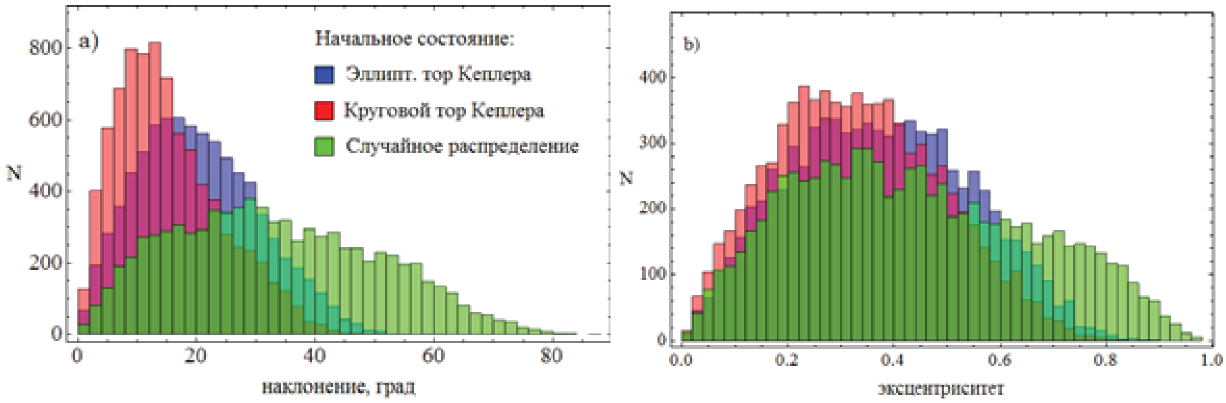


Рис. 7.9. Гістограми розподілу частинок по нахилам (а) і ексцентриситетам (б) через 1000 орбітальних періодів від різних початкових станів: еліптичний тор Кеплера (сині бари), круговий тор Кеплера (червоні бари) і випадковий розподіл частинок за елементами орбіт (зелені бари). Всі інші параметри відповідають рис.7.6.

цьому випадку присутні частинки з досить високими нахилами аж до 80°. Це призводить фактично до формування товстої тороїдальної структури з розмитими межами, що вимагає спостережуваний спектральний розподіл енергії в ІЧ-діапазоні (див., наприклад, [189, 190] та обговорення в підрозділі 1.1.6). Відмінності в розподілі частинок по ексцентриситетам для цих двох останніх випадків виявляються не таким значними (рис. 7.9 б). Відзначимо, що в разі, коли в початковому стані всі частинки мали кругові орбіти (круговий тор Кеплера), через 1000 орбітальних періодів розподіл частинок по ексцентриситетам має гауссів характер, що також підтверджує досягнення системою рівноважного стану.

При моделюванні, як приклад, ми обмежилися випадком, коли маса тора становить 5 відсотків від маси надмасивної чорної діри, а кількість частинок $N = 8192$. Такий вибір цілком обґрунтований. Оцінити масу тора можна тільки по кривим обертання, які були отримані за спостереженнями мегамазерного випромінювання в декількох найближчих сейфертівських галактиках. Для цих об'єктів значення маси тора не перевищують 10 відсотків від центральної маси, тому в якості верхньої межі для моделювання ми і обмежилися $M_{torus} = 0.05M_c$.

На рис. 7.10 показані гістограми розподілу хмар по нахилам, ексцентриситетам і великим півосям для різних значень параметра $\epsilon$, тобто для різних

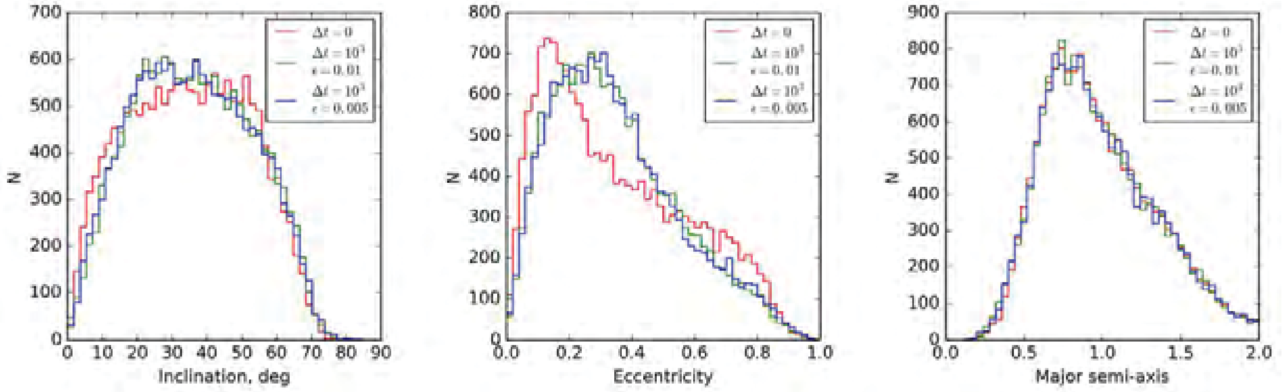


Рис. 7.10. Гістограми розподілу частинок по нахилам (*ліворуч*), ексцентриситетам (*середній*) і великим півосям (*Справа*) через 1000 орбітальних періодів від різних відносних значень розміру хмар $\varepsilon$ (пом'якшуючий параметр). Всі інші параметри відповідають рис. 7.6.

масштабів хмар. Видно, що цей параметр слабо впливає на поведінку системи.

## 7.2 Криві обертання та динаміка в торі активних ядер галактик

Як зазначалося раніше, для побудови кривих обертання в торі необхідно знати розподіл частинок (хмар) за швидкостями по перетину тора. Чисельне моделювання показує, що якщо в якийсь момент зафіксувати всі частинки, то на площині ексцентриситет-нахил вони заповнюють практично всю площу, тобто їх розподіл випадковий. Таким чином, можна припустити, що внутрішню або зовнішню межу тора будуть заповнювати частинки з випадковим набором елементів орбіт, також як і в центрі перетину тора. Подібний рух, а також відмінність гравітаційного потенціалу тора [81] від потенціалу товстого диска, повинні приводити до некеплерівської кривої обертання.

На рис. 7.11 (*лівий*) показано розподіл хмар в рівноважному перетині тора, де кольором відображено відмінність швидкості частинок від кругової швидкості (для випадку кеплеровського диска). Видно, що внутрішня межа тора (чорні точки) утворена частинками, швидкість яких у два рази менше кеплерівської швидкості. Таким чином, хмари на зовнішній межі будуть рухатися повільніше в порівнянні з рухом в кеплерівському диску. В "носику" тора, поблизу центральної маси, навпаки, хмари рухаються з суперкеплерів-

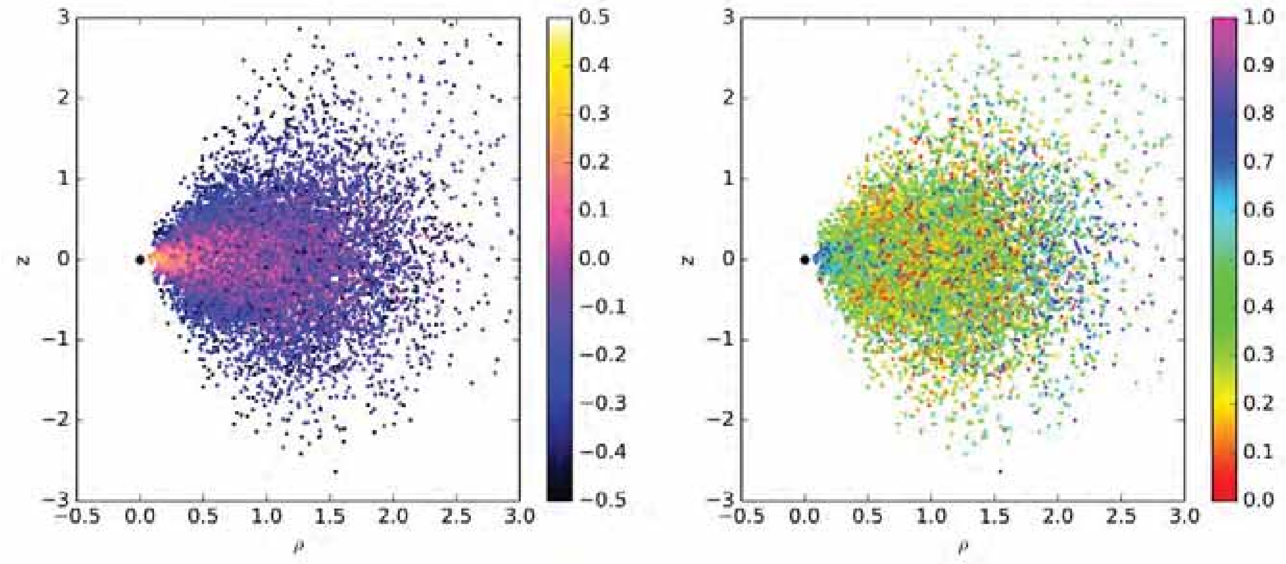


Рис. 7.11. Розподіл частинок в перетині тора. *Зліва*: кольором показано відхилення швидкості хмар ($V$) від кеплеровського ($V_{kep}$) значення: $V/V_{kep} - 1$. *Справа*: колір відображає значення ексцентриситетів орбіт.

скими швидкостями, що може створювати додаткові ефекти, пов'язані з відривом хмар від тора з подальшим підживленням акреційного диска.

Зазначимо, що хмари в торі здійснюють орбітальний рух в гравітаційному полі центральної маси. За рахунок того, що орбіти хмар мають розкид по ексцентриситетам і нахилам, вони і формують тороїдальну структуру. Хоча орбіти хмар зазнають збурення внаслідок їх взаємного тяжіння, в середньому їх швидкість поблизу центру перетину тора визначається орбітальною швидкістю:

$$V \simeq 210 \text{ км/с} \left(\frac{M_c}{10^7 M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{1 \text{ пк}}\right)^{-1/2}. \tag{7.3}$$

Орбітальний період хмари можна оцінити як:

$$P \simeq 30\ 000 \text{ років} \cdot \left(\frac{M_c}{10^7 M_\odot}\right)^{-1/2} \left(\frac{r}{1 \text{ пк}}\right)^{3/2}. \tag{7.4}$$

Для центральної маси $M_c = 10^7 M_\odot$ швидкість має значення $V = 150$ км/с на відстані $r = 2$ пк і відповідний орбітальний період $P \simeq 80\ 000$ років. Внутрішня межа тора ($r_{min}$) сформована хмарами, які рухаються по сильно витягнутим орбітам і проходять перицентр, в той час як зовнішня межа ($r_{max}$) сформована хмарами, що проходять через апоцентр. Таким чином, швидкості хмар в цих двох областях можна приблизно оцінити як

$$V_{\max} \simeq V_0\sqrt{\frac{1+r_0}{1-r_0}}, \qquad V_{\min} \simeq V_0\sqrt{\frac{1-r_0}{1+r_0}}, \tag{7.5}$$

де $V_0 = \sqrt{GM_c/a}$ и $a = (r_{max} + r_{min})/2$ – велика піввісь. Наприклад, якщо $r_{min} = 0.4$ пк і $r_{max} = 4$ пк, максимальна швидкість хмар $V_{\max} \simeq 330$ км/с і мінімальна швидкість $V_{\min} \simeq 60$ км/с для $r_0 = 0.7$.

Рис. 7.11 (*правий*) показує розподіл хмар по ексцентриситетам. Дійсно видно, що зовнішня область тора утворена головним чином тими хмарами, які рухаються по дуже витягнутим орбітам (блакитні точки). При цьому, рухаючись по витягнутим орбітам, вони проходять перицентр і формують "носик" тора (помаранчеві точки). Можна припустити, що подібні хмари можуть поглинатися центральною машиною в межах декількох орбітальних періодів. Внутрішня межа тора також утворена хмарами з ексцентриситетом аж до 0.5. Тобто дійсно видно відмінність руху від ідеально кеплерівського.

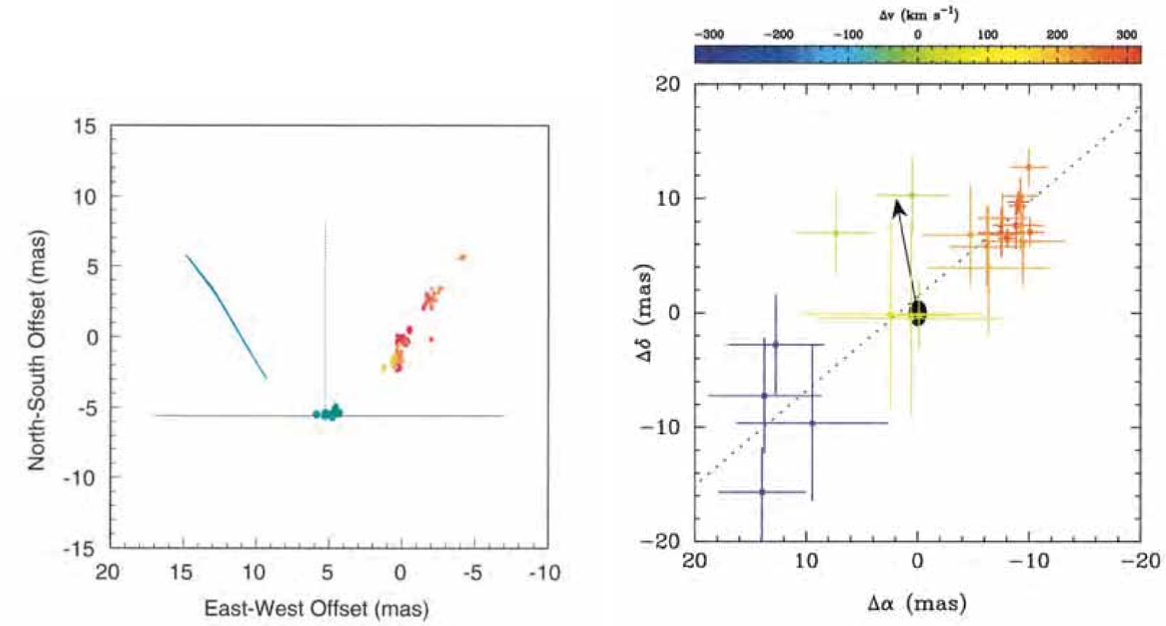


Рис. 7.12. *Лівий*: VLBI спостереження водяних мегамазерів в NGC 1068 (з роботи [149]); *Правий*: VLA зображення водяних мегамазерів в NGC 1068 з роботи [139].

Активні ядра галактик є джерелом мегамазерного випромінювання. Вважається, що мазерне випромінювання виникає в газопилових хмарах затінюючого тора при взаємодії з вітром від акреційного диска. Такий висновок зроблений з умови накачування, необхідного для формування мазерного випромінювання. Для формування водяних мазерів на довжині хвилі $\lambda = 1.35$ см необхідне зіштовхувальне накачування, тобто накачування ударною хвилею. Такі умови можуть виникати на межі взаємодії між тором (внутрішня межа) і вітром. В роботі [80] отримано точний розв'язок рівняння Компанейця для ударного фронту, який поширюється в середовищі, де густина змінюється за законом гіперболічного тангенса. Такий закон зміни густини відповідає межі між молекулярною (або пиловою) хмарою і міжзоряним середовищем. При цьому було показано, що густина за ударним фронтом максимальна поблизу лідируючої точки, що рухається в бік хмари і, відповідно, в цій області досягається підвищена оптична товщина, що, в свою чергу, створює умови для формування мазерного випромінювання в молекулі $H_2O$. Як було відзначено в розділі 1, мазерне випромінювання формується не тільки в хмарах на внутрішньої межі тора. У підрозділі 1.1.4 обговорювалися спостережні дані джета NGC 1068, які отримані на інтерферометрах MERLIN і VLBA [139], а саме, мазерне випромінювання в компоненті $C$ і вигин джета в цій області (рис. 1.9). Передбачається, що в компоненті $C$ сталася взаємодія джета з молекулярною хмарою з подальшим формуванням ударного фронту. Спостережуваний розподіл інтенсивності в радіодіапазоні може бути результатом прискорення електронів на ударній хвилі з подальшим випромінюванням синхротронним механізмом. При цьому форма ізофот радіовипромінювання повинна відображати форму ударного фронту при його поширенні на межі молекулярного хмари.

Картографування водяних мегамазерів в затінюючих торах АЯГ – задача досить складна, оскільки вимагає високої роздільної здатності в діапазоні довжин хвиль, який не дуже зручний для таких задач. Оскільки АЯГ – об'єкти далекі, то для отримання даних необхідно залучати інтерферометри з наддовгою базою. Тільки для найближчих АЯГ вдалося отримати розподіл мазерних спотів і отримати криву швидкості (див. також розділ 1). На рис. 7.13 показані спостережні дані, отримані незалежно двома групами: VLBI [149] та VLA [139].

Рис. 7.13 показує, що хмари на внутрішній поверхні тора можуть мати розкид по швидкості, відрізняючись від ідеально кеплерівської. Тобто ті хмари,

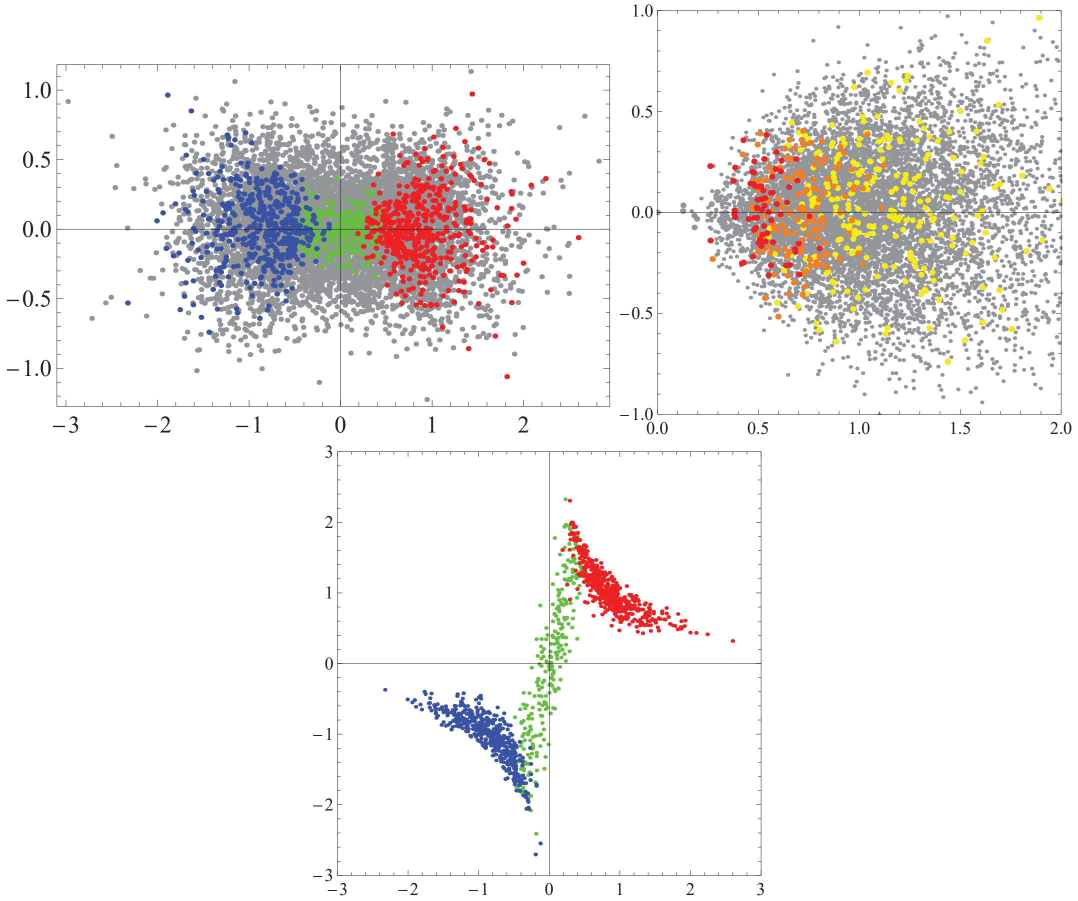
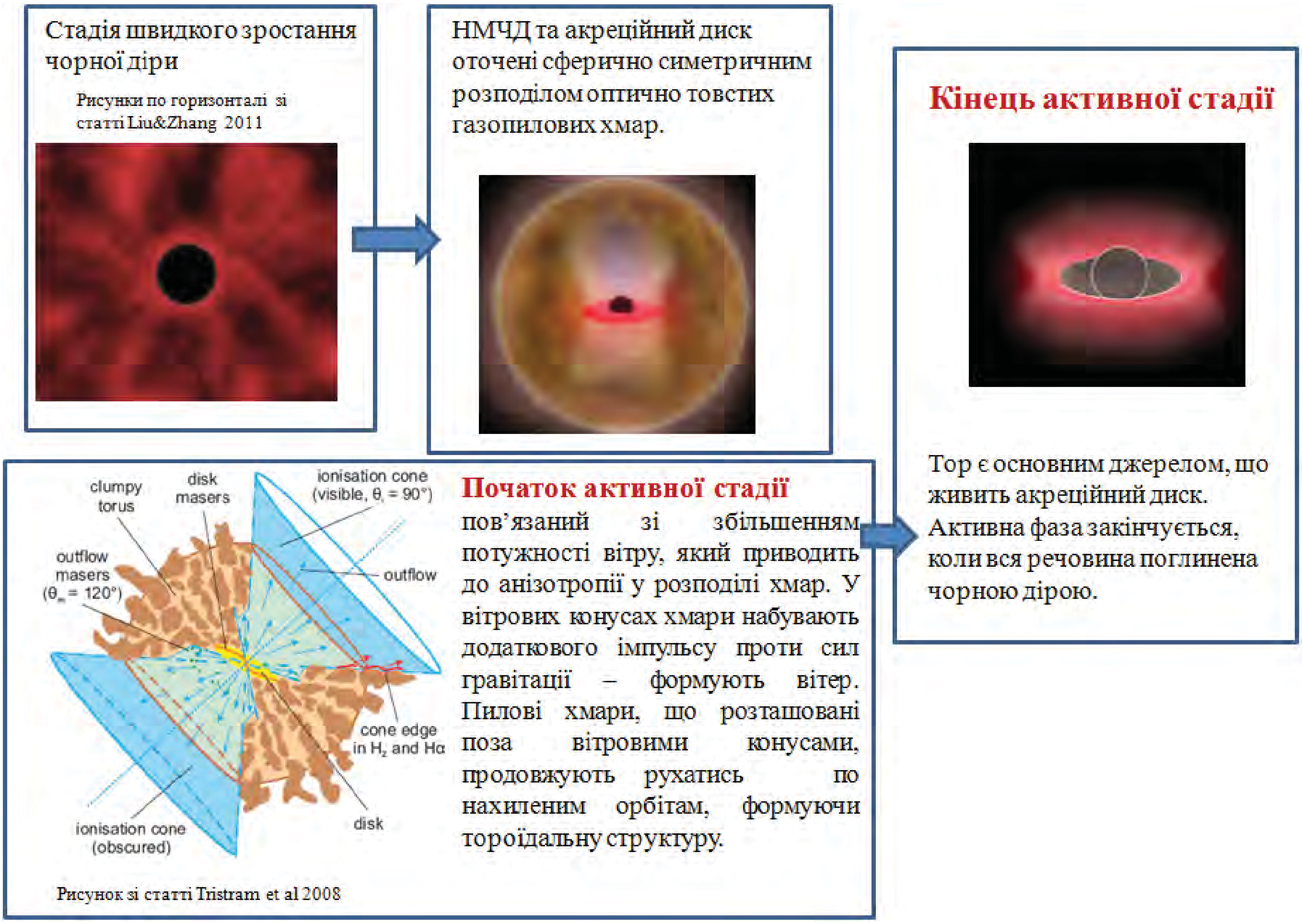


Рис. 7.13. Чисельне моделювання тора з масою $M_{torus} = 0.07M_c$, число частинок (хмар з центральною масою) $N = 8192$. *Лівий*: проекція всіх частинок на меридіональну площину. Зелений колір показує частинки в кільці, близькому до центральної маси. Червоні і сині частинки рухаються від/на спостерігача, відповідно. *Правий*: кольором вказані різні швидкості у відносній системі координат: $V_x = [0.4, 1]$ — жовтий, $V_x = [1, 1.3]$ — помаранчевий, $V_x = [1.3, 1.6]$ — червоний. *Нижній*: крива обертання.

які можуть взаємодіяти з вітром, демонструють дисперсію швидкості як і в мазерних спотах. Крива обертання також показує розкид за швидкостями. Залежно від того, в яких хмарах виникли умови для накачування, крива обертання може мати різний степеневий закон і, відповідно, мати субкеплерівськїй характер, що вимагають дані спостережень. З іншого боку, крива обертання може бути кеплерівською, але значення маси центральної чорної діри може бути занижена внаслідок того, що хмари на внутрішній межі можуть мати швидкості нижче кеплерівської для даної маси.

## 7.3 Формування газопилового тора в АЯГ

Дослідження еволюції самогравітуючого тора, що знаходиться в полі центральної маси продемонструвало, що для стабільності тора необхідна наявність в початковому стані розкиду орбіт по нахилам і ексцентриситетам. Початковий випадковий розкид по всім елементам орбіт при наявності анізотропії (уздовж осі симетрії) призводить в результаті самогравітації до формування товстої тороїдальної структури. При цьому гауссів розподіл хмар в перетині тора і відсутність чітких меж узгоджується з даними спостережень, які були отримані на основі аналізу спектрального розподілу енергії в ІЧ-діапазоні [189, 190]. Таким чином, основним механізмом, який підтримує геометричну товщину затінюючого тора, є рух хмар по нахиленим орбітам з розкидом по ексцентриситетам. Подібний рух може бути наслідком еволюційних процесів в АЯГ, які ми обговоримо нижче.



Стадія швидкого зростання чорної діри

Рисунки по горизонталі зі статті Liu&Zhang 2011

НМЧД та акреційний диск оточені сферично симетричним розподілом оптично товстих газопилових хмар.

**Кінець активної стадії**

Тор є основним джерелом, що живить акреційний диск. Активна фаза закінчується, коли вся речовина поглинена чорною дірою.

Рисунок зі статті Tristram et al 2008

**Початок активної стадії** пов'язаний зі збільшенням потужності вітру, який приводить до анізотропії у розподілі хмар. У вітрових конусах хмари набувають додаткового імпульсу проти сил гравітації – формують вітер. Пилові хмари, що розташовані поза вітровими конусами, продовжують рухатись по нахиленим орбітам, формуючи тороїдальну структуру.

Рис. 7.14. Схема формування тора в активних ядрах галактик.

Як відомо, активність ядра галактики проявляється потужним випромінюванням акреційного диска, яке може досягати еддінгтонівської межі, а також наявністю вітру і джетів. Судячи про всьому, активна фаза галактики включається в певний момент часу. Можна припустити, що до цього моменту хмари і зоряна складова рухаються навколо центральної чорної діри з випадковим розкидом за елементами орбіт, формуючи спочатку квазісферичний розподіл. Прикладом може служити система IRAS 16399-0937, що являє собою ядро галактики, занурене в квазісферичний розподіл оптично товстих хмар [211]. З спостережних даних випливає, що світність цього об'єкта становить всього лише 1 відсоток від еддінгтонівської світності. Це може вказувати на низький темп акреції, тобто речовини, що надходить в акреційний диск, недостатньо для забезпечення активності ядра. З іншого боку, сферично- симетричний розподіл оптично товстих хмар екранує слабке випромінювання акреційного диска. До збільшення темпу акреції може привести, наприклад, процес злиття галактик, при якому значно зростає вміст навколишньої речовини і, отже, відбувається підживлення акреційного диска (див., наприклад, [230, 167, 243]). Нагадаємо, що для забезпечення спостережної світності на рівні еддінгтонівської межі необхідно, щоб темп акреції становив приблизно $(0.1-1)M_{\odot}$/рік. Початок стадії активності призводить до анізотропії в розподілі хмар за рахунок наявності вітру [175], формування якого може бути пов'язано як з тиском випромінювання, так і з тиском газу або наявністю магнітного поля (див., наприклад, [109, 204, 208]). При цьому вітер являє собою конусоподібні області в двох протилежних напрямках, в яких хмари набувають додаткового імпульсу проти сил гравітації, що може призводити до викиду хмар на великі відстані. Подібні конуси іонізованої речовини, які характеризуються високими швидкостями, виявляють у багатьох активних ядрах [191, 192]. За рахунок впливу випромінювання ця область звільняється від пилу. Можливо, саме ці газові хмари на масштабах $(10 \div 100)$пк створюють область, де формуються вузькі емісійні лінії. При цьому хмари, що знаходяться поза вітрових конусів, слабо схильні до впливу вітру. Продовжуючи рухатися по нахиленим і ексцентричним орбітам, пилові хмари в цій області за рахунок гравітаційної взаємодії між собою, формують в результаті тороїдальний розподіл, який і грає роль затінюючої структури в активних ядрах галактик.

З результатів чисельного моделювання випливає, що гравітуючий тор з масою, приблизно рівною центральній масі, стабільний на часах, порівнянних з часом життя астрофізичних об'єктів. Отримані результати (форма перетину і розподіл речовини) можна безпосередньо застосувати до затінюючих торів АЯГ. При цьому ми будемо використовувати умови затінення, отримані з аналізу СРЕ: в екваторіальній площині для повного затінення необхідно більше 5 хмар [190]. Також врахуємо спостережуваний діапазон температур в торі NGC 1068 [163, 205].

Слід зазначити, що одним з важливих питань еволюції затінюючого тора є наявність зовнішньої акреції. Дійсно, можна оцінити, що при темпі акреції 0.1 сонячна маса в рік, яка необхідна для забезпечення високої світності на рівні еддінгтоновської межі, тор з масою $10^5 M_\odot$ буде поглинут НМЧД за час близько млн років. Для забезпечення більш тривалої активності ядра галактики, необхідна зовнішня акреция. Така зовнішня аккреция може забезпечуватися за рахунок падіння речовини під дією гравітаційних сил. Присутність анізотропії в розподілі речовини може призводити до формування зовнішнього тора [83], про що можуть свідчити нові спостереження на інтерферометрі ALMA [160].

## 7.4 Затінення тором акреційного диска в АЯГ

Знайдемо обмеження на масштаби і число хмар з вимоги повного затінення в екваторіальній площині. Також врахуємо, що під кутом близько 50° між променем зору та площиною симетрії тора затінення має бути незначним [190]. Припускаючи, що оптична товщина хмар в УФ і видимій області набагато більша від одиниці, будемо розглядати їх як непрозорі екрани з площею перетину $\pi\varepsilon^2 R^2$, де $R_{cl} = \varepsilon R$ — ефективний радіус хмари. Об'єм, що припадає на одну хмару, для кругового тора з однорідним розподілом густини має вигляд

$$V_N = \frac{V_{torus}}{N} = \frac{2\pi^2 R^3 r_0^2}{N}. \tag{7.6}$$

Середнє число хмар $N_s$ вздовж променя зору в екваторіальній площині тора визначимо, множачи їх об'ємну концентрацію $1/V_N$ на об'єм циліндра з площею перетину $\pi\varepsilon^2 R^2$ і довжиною, що дорівнює діаметру перетину тора $2r_0 R$:

$$N_s = \frac{N}{V_{torus}} \pi\varepsilon^2 R^2 2Rr_0 = \frac{N\varepsilon^2}{\pi r_0}. \tag{7.7}$$

Разом з тим перетин тора під дією самогравітації набуває форми овалу (рис. 6.18) і розподіл хмар в його перерізі неоднорідний, що було показано в попередньому розділі 6. Отже, вираз для середнього числа хмар вздовж променя зору відрізняється від (7.7). У цьому випадку значення нормованого множника $n_0$ в (6.31) може бути визначено з наступної умови: повне число хмар в торі залишається постійним, поки перетин тора змінює форму за рахунок самогравітації, тобто

$$N = 2\pi n_0 \iint\limits_S dS \exp[-f(\eta, \zeta; r_0)]. \tag{7.8}$$

Тут інтеграл береться по площі перетину тора $S$. Для того, щоб знайти залежність числа хмар як функцію від кута $\theta$ між екваторіальною площиною і променем зору, ми перейдемо в полярну систему координат з початком в центрі мас: $\rho = \eta + 1 = r\cos\theta$, $\zeta = r\sin\theta$. Тоді число хмар на промені зору як функція від кута

$$N_s(\theta) = \frac{N\varepsilon^2}{2} \frac{\int\limits_0^\infty e^{-f(r,\theta)} dr}{\iint\limits_S e^{-f(\eta,\zeta)} dS}. \tag{7.9}$$

Таким чином, середнє число хмар вздовж променя зору в екваторіальній площині тора, враховуючи неоднорідний розподіл частинок (7.8), визначаємо як:

$$N_s = N_s(0) = \frac{N\varepsilon^2}{2} \frac{\int\limits_0^\infty e^{-f(r,0)} dr}{\iint\limits_S e^{-f(\eta,\zeta)} dS}. \tag{7.10}$$

Коли ми переходимо до граничного випадку однорідного кругового тора, інтеграл в чисельнику дорівнює $2r_0$ і інтеграл в знаменнику дорівнює площі кола, таким чином, вираз (7.10) переходить в (7.7). Число хмар в торі вздовж променя зору є важливим параметром, оскільки він характеризує оптичну тов-

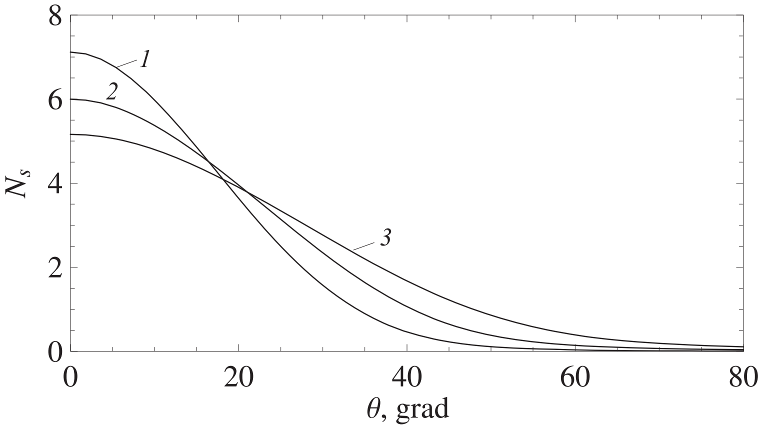


Рис. 7.15. Залежність числа хмар вздовж променя зору від кута $\theta$, знайденого по (7.10). Різні криві відповідають торам з різними рівноважними перетинами, отриманими з різних мас тора і початкового геометричного параметра: 1) $r_0 = 0.5$, $M_{torus} = 0.056M_c$ 2) $r_0 = 0.6$, $M_{torus} = 0.08M_c$, 3) $r_0 = 0.7$, $M_{torus} = 0.109M_c$. Повне число хмар в торі $N = 10^5$ і $\varepsilon = 0.01$

щину тора. Дійсно, в силу випадкового розподілу хмар в торі, частина неекранованої ними площі, що відповідає пропусканню випромінювання центральної машини $I_p$, визначається розподілом Пуассона $I_p = prob(k) = N_s^k e^{-N_s}/k!$ при $k = 0$, де $k$ — частота подій. Отже, $I_p = e^{-N_s}$. З іншого боку, оскільки $I_p = e^{-\tau_V}$, оптична товщина тора у видимій області спектра дорівнює середньому числу хмар: $\tau_V = N_s$. На рис. 7.15 показано число хмар вздовж променя зору як функція від кута $\theta$, який починається від екваторіальної площини, для трьох випадків, відповідних рівноважному перетину на рис. 6.18 b, c, d.

Для того, щоб задовольнити спостережним даним, число хмар на промені зору в екваторіальній площині тора $N_s$ має бути менше ніж 5 [190]. Якщо $\varepsilon = 0.01$, тоді ці умови мають місце для тора з повним числом хмар $N = 10^5$ і $r_0 \geq 0.5$. Повне число хмар зменшується з ростом відносного розміру об'єму, тому що $N \propto \varepsilon^{-2}$.

На рис. 7.16 показано, що в рамках нашої моделі центральна (гарячіша) ділянка просвічується крізь тор ,(тому що випромінювання проникає між хмарами), що узгоджується зі спостережуваним розподілом температури в торі NGC 1068, отриманим по ІЧ спостереженням [163, 205]. Порівняння зі спостережуваним розподілом температури в торі на рис.1.3 (також рис. 7.16 справа) демонструє якісний збіг. З урахуванням обмеженої роздільної здатності телескопу і нагріву хмар буде видно тільки частину зовнішньої області

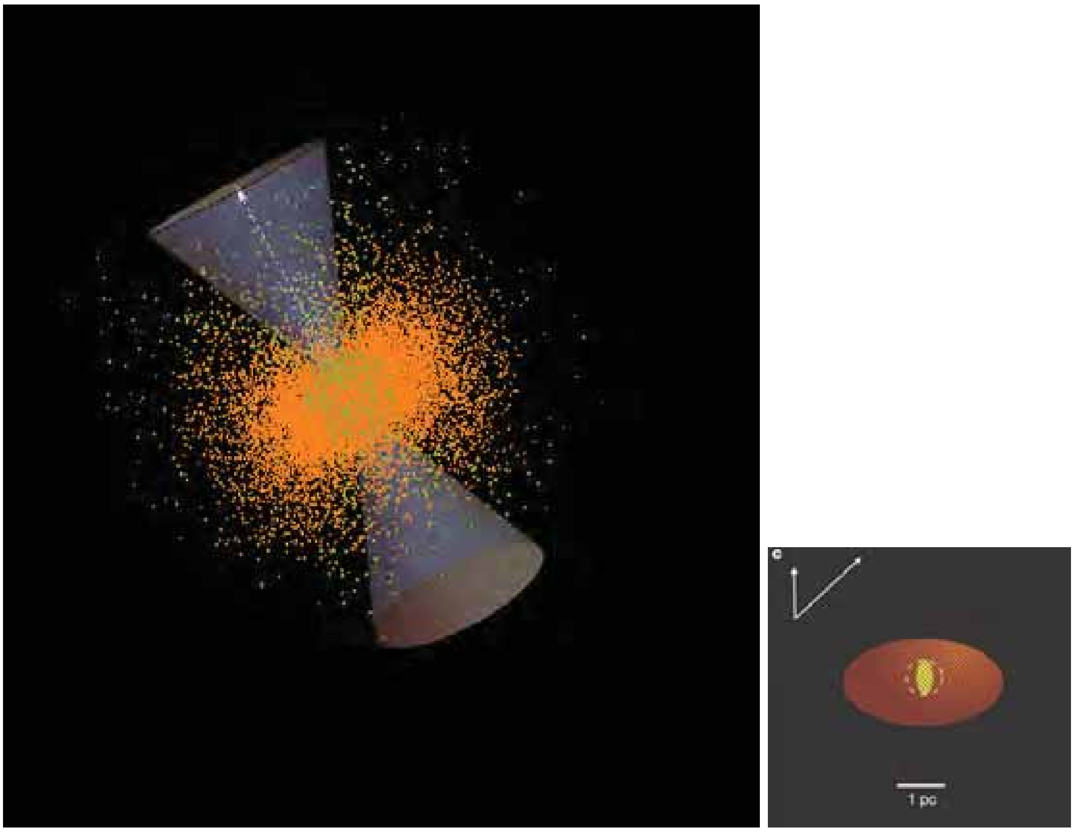


Рис. 7.16. *Зліва*: у межах нашої моделі розподіл хмар в торі і демонстрація проникнення випромінювання з внутрішньої межі тора, яка нагріта випромінюванням акреційного диска. *Справа*: розподіл температури, отриманий за спостереженнями VLTI/MIDI в ІЧ діапазоні — рис. з роботи [163].

тора, але внутрішні хмари, нагріті безпосередньо випромінюванням акреційного диска, також виявляються в рамках нашої моделі клампованого тора.

## 7.5 Температура хмар від нагрівання аккреційним диском

Одна з важливих властивостей тора – затінення ним центральної машини, була розглянута в попередньому підрозділі. Очевидно, що не менш важливою властивістю є розподіл температури в торі, який безпосередньо випливає з спостережних даних, наявних для NGC 1068. Оцінимо температуру хмар, які складають затінюючий тор. При цьому будемо спиратися на дані спостережень NGC 1068. Нагадаємо, що внутрішня область тора в NGC 1068 має температуру $T = 800$ K, а зовнішня – $T = 300$ K [163]. Вважається, що гаряча компонента тора є результатом нагріву хмар випромінюванням акреційнного диска, а холодна компонента – це безпосередньо тіло тора [205].

Для грубих оцінок температуру хмар, що знаходяться на різних відстанях від центральної машини, можна отримати, припускаючи, що вони знаходяться в термодинамічній рівновазі з акреційним диском. В рамках моделі стандартного геометрично тонкого і оптично товстого акреційнного диска (модель Шакури–Сюняєва), потік енергії, що випромінюється з поверхні диску має вигляд [221]

$$Q(r) = \frac{3}{8\pi}\dot{M}\frac{GM_{BH}}{r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right)^{1/2}. \qquad (7.11)$$

Тоді для розподілу температури, з урахуванням $Q = \sigma_B T^4$, отримуємо вираз для розподілу температури уздовж радіуса диска:

$$T(r) = \left[\frac{3GM_{BH}}{8\pi\sigma_B r^3}\dot{M}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right)\right]^{1/4}, \qquad (7.12)$$

де $M_{BH}$ — маса чорної діри, $\dot{M} \equiv dM/dt$ — темп акреції, $r_{in}$ — внутрішній край акреційного диска, $\sigma_B$ — постійна Стефана-Больцмана. Внутрішній край акреційного диска визначається останньою стійкою орбітою, радіус якої для не обертової чорної діри, тобто в разі розв'язку Шварцшильда, дорівнює $r_{in} = 3r_g$, де $r_g = 2GM_{BH}/c^2$ — гравітаційний радіус. Зручно ввести безрозмірну величину $\eta = r/r_{in}$, тоді вираз для температури акреційного диска (7.12):

$$T(\eta) = \left[\frac{c^6}{576\,\pi\sigma_B G^3}\right]^{1/4} M_{BH}^{-1/2}\dot{M}^{1/4} f(\eta), \qquad (7.13)$$

де

$$f(\eta) = \left[\frac{1}{\eta^3}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{\eta}}\right)\right]^{1/4}. \qquad (7.14)$$

З (7.13) видно, що температура акреційного диска обернено пропорційна кореню з маси чорної діри. Це відображає відомий результат, що чим масивніше чорна діра, тим холодніше акреційний диск. Для активних ядер галактик температура диска така, що максимум випромінювання припадає на оптичний/ультрафіолетовий діапазон (квазари/сейфертівські галактики), а для чорних дір зоряних мас максимум випромінювання припадає на рентгенівську область спектра. Цей відомий результат підтверджений даними спостережень для різних систем, які мають чорні діри. Ми ж спробуємо спростити вираз для температури акреційного диска таким чином, щоб отримати вираз для температури хмар, залежний від мінімальної кількості параметрів.

Оскільки множник перед функцією $f(\eta)$ в (7.13) містить тільки фундаментальні константи і параметри системи, то для визначення максимуму температури, досить знайти максимум $f(\eta)$ з умови $df(\eta)/d\eta = 0$. Таким чином $\eta_{max} = (7/6)^2 \simeq 1.36$, а $f_{max} \equiv f(\eta_{max}) \simeq 0.5$. Приведемо множник перед $f(\eta)$ в (7.13) до безрозмірних величин таким чином, щоб зручно було робити оцінки. А саме, введемо позначення $M_7 \equiv M_{BH}/(10^7 M_\odot)$, а темп акреції $\dot{M}$ будемо вимірювати в $M_\odot$/рік. Тоді

$$T(\eta) = 7.1 \cdot 10^5 K \times M_7^{-1/2} \dot{M}^{1/4} f(\eta). \tag{7.15}$$

Тут чисельний множник має розмірність температури, яку ми вимірюємо в кельвінах ($K$). Знормуємо вираз (7.15) на максимальне значення функції $f_{max}$ і введемо позначення

$$T_{max} = 7.1 \cdot 10^5 K \times f_{max} = 3.55 \cdot 10^5 K. \tag{7.16}$$

Тоді остаточно вираз для температури акреційного диска набуває вигляду

$$T(\eta) = 3.55 \cdot 10^5 K \times M_7^{-1/2} \dot{M}^{1/4}\, \tilde{f}(\eta), \tag{7.17}$$

де $\tilde{f}(\eta) = f(\eta)/f_{max}$. Оскільки функція $f\tilde{(\eta)}$ в максимумі дорівнює одиниці, то максимальна температура акреційного диска:

$$T_{max} = 3.55 \cdot 10^5 K \times M_7^{-1/2} \dot{M}^{1/4} \tag{7.18}$$

і радіальний розподіл температури по диску [1]

$$T(\eta; M_{BH}, \dot{M}) = T_{max}(M_{BH}, \dot{M}) \times \tilde{f}(\eta). \tag{7.19}$$

Світність елемента площі диска з розподілом температури $T(\eta)$:

$$dL = \sigma_B (3r_g)^2 T^4(\eta) \eta \, d\eta d\theta, \tag{7.20}$$

де $\theta$ — азимутальний кут. Вважаємо випромінювання в одній півплощині та, з урахуванням незалежності від кута $\theta$, після підстановки (7.19) в (7.20) отримуємо

$$L = 2\pi\sigma_B (3r_g)^2 \left(\frac{T_{max}}{f_{max}}\right)^4 \int_1^\infty f(\eta)\eta \, d\eta. \tag{7.21}$$

---

[1] Примітка 1. Нагадаємо, що $M_{BH}$ і $\dot{M}$ є параметрами системи, проте вони також пов'язані між собою через світність.

Інтеграл в (7.22) зходиться і дорівнює 1/3, а вираз для повної світності акреційного диска має вигляд

$$L = 6\pi\sigma_B r_g^2 \left(\frac{T_{max}}{f_{max}}\right)^4. \tag{7.22}$$

Для подальших оцінок зручно представити акреційний диск однорідним диском з температурою $T_{max}$ і деяким ефективним радіусом $R_{\text{eff}}$, що відповідає такому ж енерговиділенню (рис. 7.17).

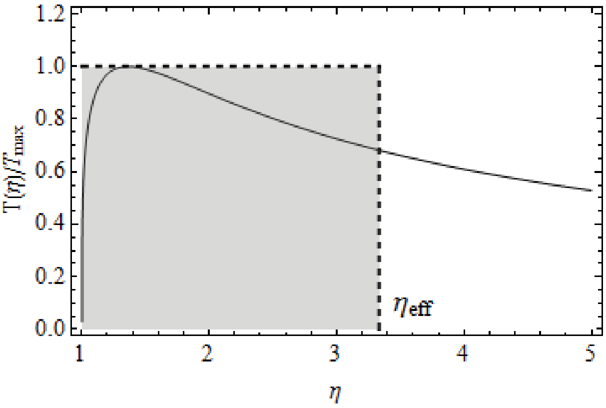


Рис. 7.17. Залежність температури акреційного диска від радіуса (суцільна крива). Сірим виділена область, відповідна диску з радіусом $R_{\text{eff}}$.

У цьому випадку, ми можемо представити світність диска як:

$$L = \pi\sigma_B T_{max}^4 R_{\text{eff}}^2. \tag{7.23}$$

Прирівнюючи (7.22) і (7.23), тобто замінюючи диск з розподілом температури $T(r)$ на еквівалентний диск з $T = T_{max}$ і радіусом $R_{\text{eff}}$, який характеризується тією ж потужністю енерговиділення, знаходимо оцінку ефективного радіуса акреційного диска

$$R_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{6}}{f_{max}^2} r_g \simeq 10 r_g. \tag{7.24}$$

Ця оцінка добре узгоджується з оцінками ефективного розміру акреційного диска у видимій області спектра, отриманими з аналізу мікролінзування гравітаційно лінзованних квазарів [168, 235]. У такому поданні болометрична світність ядра не залежить явно від маси чорної діри і визначається тільки темпом акреції. Дійсно, підставляючи (7.18) і (7.24) в (7.23), отримуємо

$$L \approx 4.7 \times 10^{45} \dot{M} \text{ ерг/с}. \tag{7.25}$$

В роботі [200] наведено вираз для оцінки болометричної світності досліджуваних Sy2-галактик

$$L_{bol} = 2.2 \times 10^{11} \left(\frac{f_{refl}}{0.01}\right)^{-1} \left(\frac{D}{22\text{Мпк}}\right)^{2} L_{\odot},$$

де $f_{refl}$ — частина потоку від ядра, який спостерігається як розсіяне світло, $D$ — відстань до об'єкта. Приймаючи, що для NGC 1068 $f_{refl} = 0.01$ [200] і $D = 18$Мпк, отримуємо оцінку болометричної світності для NGC 1068 $L_{bol} = 5.65 \times 10^{44}$ ерг/с. Порівнюючи спостережувану світність з (7.25), отримуємо, що темп акреції в ядрі NGC 1068 $\dot{M} = 0.12 M_{\odot}$/рік.

Оцінимо температуру хмари $T_{cl}$, припускаючи, що вона знаходиться в термодинамічної рівновазі з випромінюванням акреційного диска з потужністю енергії (7.23). Умова теродінамічної рівноваги дає вираз для температури хмари на відстані $R$ від центрального джерела:

$$T_{cl} = T_{disk} \sqrt{\frac{R_{\text{eff}}}{2R}}. \tag{7.26}$$

і, отже

$$T_{cl} \approx 660K \cdot \dot{M}^{1/4} \left(\frac{R}{1\text{пк}}\right)^{-1/2}. \tag{7.27}$$

При темпі акреції $\dot{M} = 0.1 M_{\odot}$/рік у центрі перетину тора $R = 2$ пк рівноважна температура хмари $T_{cl} \simeq 260K$. На внутрішній межі, яка з моделювання відповідає $R_{min} \simeq 0.2$ пк (для $M_c/M_{torus} = 0.08$), хмари мають максимальну температуру $T_{cl}^{max} \simeq 830$ K, а на зовнішній $R_{max} \simeq 3.8$ пк і $T_{cl}^{min} \simeq 190$ K. Таким чином, для даних значень темпу акреції і розміру тора оцінки температури хмар відповідають діапазону температур, отриманих зі спостережень [163, 205].

Нагадаємо, що $\varepsilon$ — радіус хмари, нормований на великий радіус тора, тому розмірний радіус хмари $R_{cl} = \varepsilon R$. Середню масу хмари визначаємо відношенням $M_{cl} = M_{torus}/N$, а масу тора визначимо через центральну масу. Для прикладу ми виберемо випадок $M_{torus} = 0.08 M_c$ (рис. 6.18 c). Оскільки центральна маса в АЯГ зосереджена в надмасивній чорній дірі, надалі покладемо $M_c = M_{BH}$. В таблиці 7.1 наведені значення радіусів і мас хмар для даного числа хмар в торі. Остання колонка відповідає умові затінення. Для

Таблиця 7.1. Число і параметри хмар в газопиловому торі АЯГ, що задовольняють необхідній умові затінення в екваторіальній площині для тора з $M_{torus} = 0.08M_c$, $r_0 = 0.6$, $R = 2$ пк; $M_{BH} = 10^7 M_\odot$ .

| $N \times 10^3$ | $R_{cl}$,пк | $M_{cl}/M_\odot$ | $N_s$ |
|---|---|---|---|
| 94 | 0.02 | 9 | 5 |
| 42 | 0.03 | 19 | 9 |
| 23 | 0.04 | 35 | 11 |
| 15 | 0.05 | 53 | 13 |
| 10.5 | 0.05 | 76 | 14 |

всіх $N$ значення густини вздовж променя зору (column density) у торі залишається постійною і дорівнює $6 \times 10^{23}$ см$^{-2}$, що узгоджується зі значеннями, що одержуються з аналізу спостережуваних спектрів в ІЧ діапазоні.

Параметри хмар, які ми отримали з умови необхідного затінення, не повинні суперечити джинсівській фрагментації. Масштаб і масу гравітаційної нестійкості можна оцінити таким чином [55]:

$$\lambda_J = 0.06\,\text{пк} \left(\frac{T_{cl}}{10K}\right)^{1/2} \left(\frac{10^4 \text{ см}^{-3}}{n_{H,cl}}\right)^{1/2}, \tag{7.28}$$

$$M_J = 0.4M_\odot \left(\frac{T_{cl}}{10K}\right)^{3/2} \left(\frac{10^4 \text{ см}^{-3}}{n_{H,cl}}\right)^{1/2}. \tag{7.29}$$

Оцінка середньої концентрації речовини в торі дає $n_H = M_{torus}/(V_{torus} m_H) \simeq 2.8 \times 10^5$ см$^{-3}$. Тоді, при даній концентрації і температурі хмар, в центрі перетину тора $T_{cl} \simeq 260$ К отримуємо $\lambda_J \simeq 0.06$ пк і $M_J \simeq 10 M_\odot$. На зовнішній межі тора температура хмар $T_{cl}^{min} \simeq 190$ К, масштаб і маса Джинса в цьому випадку $\lambda_J \simeq 0.05$пк і $M_J \simeq 6M_\odot$, а на внутрішньої границі $T_{cl}^{max} \simeq 830$ К, отже $\lambda_J \simeq 0.1$ пк і $M_J \simeq 57 M_\odot$.

Ми отримали параметри хмар, які задовольняють спостережуваному розподілу температури в торі і умові затінення. При цьому радіус хмар визначається тільки через $\varepsilon$ і великий радіус тора $R$. Маса хмари визначалася через повну масу тора і число хмар в ньому. Маса тора визначається через задане значення центральної маси, яка в свою чергу визначає максимальну температуру акреційного диска $T_{max}$ (7.18). Для отримання значення $T_{max}$ ми вважали $M_{BH} = 10^7 M_\odot$ при темпі акреції $\dot{M} = 0.1 M_\odot$/рік. Отримані параметри хмар можуть задовольнятися при іншому значенні маси $M_{BH}$. При збільшенні центральної маси, маса тора також збільшується якщо відношення $M_{torus}/M_{BH}$ залишити незмінним. При тому ж значенні $r_0$ і середньої густини в торі, отримані раніше оцінки температури і концентрації хмар, їх маси і радіуси не зміняться, якщо належним чином змінити масштаби тора і темп акреції. Наприклад, для $M_{BH} = 10^8 M_\odot$, маса тора $M_{torus} = 0.08 M_{BH} = 8 \times 10^6 M_\odot$, а великий радіус тора $R = \sqrt[3]{10} \times 2$пк $\simeq 4.3$пк. Оскільки температура хмар не залежить від величини центральної маси (7.27), а розміри тора збільшилися, то при тому ж темпі акреції хмари будуть холодніші. Але в АЯГ, де маса чорної діри більше, і темп акреції повинен бути вище. Якщо збільшити темп акреції до $\dot{M} = 0.5 M_\odot/$рік, то отримані вище параметри хмар зберігаються.

Позначимо $M_x \equiv 10^x M_7$, а $\dot{M}_x$ — відповідний темп акреції, а $R_x$ — великий радіус тора в цьому випадку. Тоді для АЯГ з надмасивними чорними дірами різних мас і з торами однакових $r_0$ (однакова об'ємна густина) виконується співвідношення для великих радіусів тора:

$$\frac{R_x}{R_7} = \left(\frac{M_x}{M_7}\right)^{1/3} . \tag{7.30}$$

Припускаючи, що температури хмар в торі однакові для різних мас НМЧД в центрах систем, з урахуванням (7.27) отримуємо співвідношення для темпу акреції

$$\frac{\dot{M}_x}{\dot{M}_7} = \left(\frac{M_x}{M_7}\right)^{2/3} . \tag{7.31}$$

Таблиця 7.2. Параметри затінюючих торів, розташованих в АЯГ різної маси. Припускаємо, що для всіх випадків $M_{torus}/M_{BH} = 0.08$ і $r_0 = 0.6$.

| $M_{BH}/M_\odot$ | $\dot{M}$ | $M_{torus}/M_\odot$ | $R$, пк | $N$ | $N_s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^7$ | 0.1 | $8 \times 10^5$ | 2 | $9.4 \times 10^4$ | 5.5 |
| $10^8$ | 0.46 | $8 \times 10^6$ | 4.3 | $9.4 \times 10^5$ | 11 |
| $10^9$ | 2.2 | $8 \times 10^7$ | 9.5 | $9.4 \times 10^6$ | 22 |

В таблиці 7.2 показані параметри АЯГ для умови, що різним значенням $M_{BH}$ відповідають однакові значення температури, розмірів та мас хмар в торі. Таким чином, чим більше маса центральної надмасивної чорної діри, тим більше просторові масштаби тора і число хмар (при однакових $r_0$ і відношенні $M_{torus}/M_{BH}$). В цьому випадку маса, радіус і температура хмар не залежать від маси чорної діри.

Ми зробили тут ряд обмежень. В реальності маси і розміри хмар можуть залежати від відстані від НМЧД, як було зазначено вище при грубій оцінці джинсівськіх масштабів; також для різних АЯГ можуть виконуватися різні співвідношення $M_{torus}/M_{BH}$. Однак навіть при такому розгляді можна отримати параметри системи для різних типів АЯГ, які повинні задовольняти умовам затінення. Однією з цікавих задач може бути детальне дослідження параметрів системи (в межах запропонованої ідеї) і порівняння їх з результатами спостережень для різних АЯГ. З урахуванням того, що в останні роки кількість АЯГ, в яких спостерігаються затінюючі тори, зростає, ця задача дійсно є актуальною.

Параметри тора при різних значеннях маси НМЧД, безумовно, представляють інтерес. Тут дуже важливі спостереження центральних областей радіогалактик і квазарів. Зокрема, завдяки новому інструменту GRAVITY на VLTI вдалося розділити центральну область (область широких ліній BLR) найяскравішого найближчого квазара 3C 273 за спостереженнями профілю лінії Pa$\alpha$ [147]. Маса НМЧД, оцінена за цими спостереженнями, становить $2.6 \times 10^8 M_\odot$. Кут розкриття BLR становить 45°. У роботі [184] на підставі конкуренції механізмів формування радіо- та рентгенівського випромінювання в вузлах джета, була отримана оцінка кута джета до променя зору. При цьому можуть впливати такі фактори, як злам в енергетичному спектрі електронів [183]. Основна ідея полягає в тому, що рентгенівське випромінювання в вузлах джета виникає за рахунок зворотнього Комптон-ефекту при розсіянні електронів на випромінюванні центрального джерела (для ближніх вузлів) і на реліктовому випромінюванні (для далеких вузлів). Дійсно, рентгенівське випромінювання квазара 3C 273 демонструє зменшення максимуму інтенсивності з віддаленням від ядра для перших двох вузлів, а потім вихід на постійну величину. Це може свідчити, що для далеких вузлів переважаючим є розсіювання на реліктовому фоні. Використовуючи ідею конкуренції механізмів випромінювання, була отримана оцінка кута джета з променем зору 30°

для 3C 273. Для більш загального випадку оцінка кута залежить від світності АЯГ [184]. Оскільки в торі присутній орбітальний рух, то вектор повного кінетичного моменту повинен збігатися з його віссю симетрії, а значить, і з орієнтацією джета, який, в свою чергу, збігається з вектором моменту акреційного диска. Таким чином, незалежне визначення кута джета дозволяє визначити орієнтацію тора по відношенню до спостерігача. Дана схема може працювати не тільки для квазарів, а й для радіогалактик, для яких також проблематично розділити газопилової тор. Крім того, сумісне знаходження орієнтації джета, області BLR і тора зможуть в майбутньому надати більш повну картину центральної області АЯГ. Нещодавно були опубліковані результати реверберацційного картування 3C 273 за 10 років [242], які узгоджуються з результатами, отриманими в [147]. У цій роботі обговорюється зв'язок між BLR і пиловим тором. Дійсно, було підтверджено, що BLR геометрично товста, так само як і пиловий тор [242]. Це підтримує гіпотезу, що BLR-хмари можуть поставлятися з пилового тора. В даний час складно визначити кут розкриття тора в 3C 273, оскільки ІЧ випромінювання від тора замивається нетепловим випромінюванням джета. Однак вдалося оцінити половину кута розкриву тора по лінії [O III], який виявився приблизно рівним 30° [242] (що збігається з оцінкою, отриманою в [184]). Автори даної роботи відзначають, що це може бути доказом зв'язку між хмарами BLR і хмарами в затінюючому торі, а майбутні спостереження за допомогою камери GRAVITY тора 3C 273 зможуть безпосередньо виявити геометрію цих структур і зробити висновки про процеси, що відбуваються на межі тора та BLR.

## 7.6 Інтерпретація спостережень ALMA тора в АЯГ

Як було відзначено в розділі 1, початок роботи міліметрового інтерферометра ALMA відкрило нові можливості для дослідження затінюючих торів в АЯГ. Висока роздільна здатність ALMA дозволила розділити тор в NGC1068 [159, 160]. При цьому було виявлено рух уздовж променя зору, який пов'язаний з глобальним орбітальним рухом тора.

На рис. 7.18 показано розподіл швидкості в торі, отриманий за спостере-

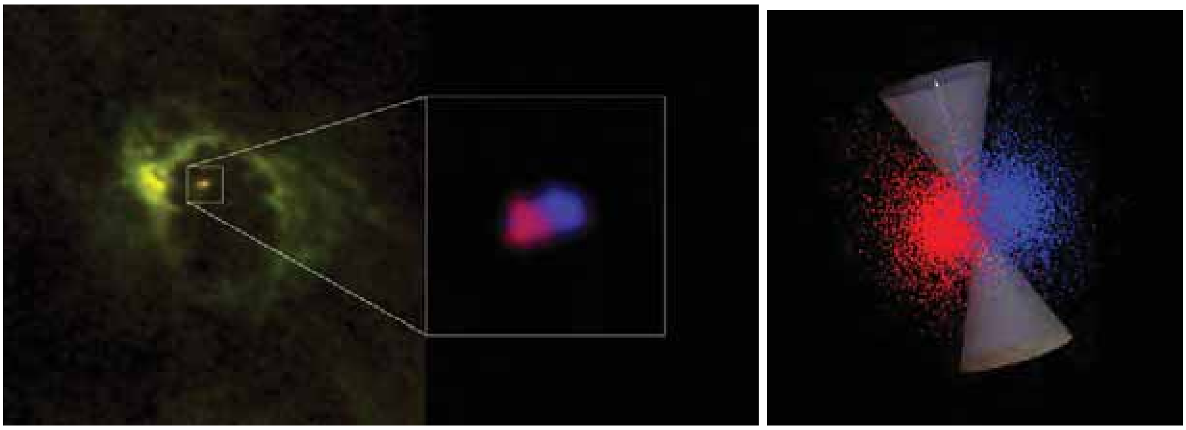


Рис. 7.18. *Зліва*: рух речовини навколо НМЧД (в затінюючому торі) в центрі NGC1068 з прес релізу ALMA (ESO/NAOJ/NRAO). Рисунок взятий з сайту https://www.almaobservatory.org/en/press-release/alma-observes-a-rotating-dust-and-gas-donut-around-a-supermassive-black-hole/ по роботі [160]. *Справа*: чисельне моделювання в рамках нашої моделі.

женнями ALMA. Синя і червона області показують відповідно рух на/від спостерігача. Справа представлено чисельне моделювання в рамках нашої моделі: задача $N$ тіл для тора з масою $M = 0.07 M_{BH}$, $N = 16384$, початкові умови відповідають випадковому розподілу хмар за елементами орбіт (розділ 7.1.2–7.1.3). Ми виділяємо промінь зору, що співпадає з віссю $x$, тобто відповідно $V_x$ є швидкістю вздовж променя зору. Конуси схематично показують вітер, половина кута розкриву яких обрана як $i = 25°$. Видно, що модельний розподіл за швидкостями (рис. 7.18 *правий*) відповідає спостережуваному розподілу в торі NGC 1068 (рис. 7.18 *лівий*).

Для оцінки абсолютної швидкості орбітального руху необхідно знати значення маси НМЧД. В роботі [149] приведена оцінка маси в межах циліндричного радіуса 0.65 пк, яка фактично дає масу НМЧД $M_{BH} \sim 1 \times 10^7 M_\odot$. Ця маса оцінена по кривим обертання мазерного випромінювання в молекулі $H_2O$. При цьому швидкість обертання досягає великих значень порядку на близьких до акреційного диску відстанях.

У таблиці представлені основні значення динаміки речовини в торі NGC 1068, отримані за спостереженнями на VLA і ALMA. Видно, що значення швидкості хмар в торі, отримані по мазерному випромінюванню, досягають 250 км/с в межах $0.4 - 0.65$ пк. При цьому також спостерігається дисперсія швидкостей. На масштабах близько 3–4 пк швидкості, які ототож-

Таблиця 7.3. Параметри затінюючого тора в NGC1068 за спостереженнями VLA і ALMA. Маси вказані в $M_{\odot}$ і швидкість $V$ в км/с.

| $M_{BH}$ | $M_{torus}$ | $r$, пк | $V_{rot}^{obs}$ | $V_{dis}$ | Ref. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sim 10^7$ | — | 0.4-0.65 | ±250 | 100 | Greenhil et al., 1996, VLA |
| — | $\sim 10^5$ (gas) | 4 | ±30 | 90 | Garciá - Burillo et al., 2016, ALMA |
| $9 \times 10^5$ | $\sim 2 \times 10^6$ в $(10 \times 14)$ пк | 3 | ±20 | 60 | Imanishi et al., 2018, ALMA |

нюються з орбітальним рухом, близько 40 км/с (з урахуванням нахилу тора). Однак дисперсія швидкостей залишається суттєвою.

Дані спостереження для тора в NGC 1068, які наведені в [160], дають оцінку молекулярної маси $\sim 2 \times 10^6 M_{\odot}$ в межах області 14 пк × 10пк. Швидкість хмар на відстані 3 пк від НМЧД становить 20 км/с, що з урахуванням кута нахилу тора відповідає орбітальної швидкості близько 36 км/сек. У припущенні моделі кеплерівського диска, маса НМЧД виявляється досить малою $9 \times 10^5 M_{\odot}$ [160]. В рамках динамічної моделі тора, запропонованої в дисертації, можна пояснити присутність хмар з низькими швидкостями. А саме, низькі орбітальні швидкості в торі є результатом того, що зовнішні хмари, які формують випромінювання в молекулах на масштабах декількох парсек, рухаються по еліптичним орбітам і проходять в цій області через апоцентр. Зауважимо, що такий рух є наслідком самогравітації тора. На рис. 7.19 (*лівий*) показано розподіл швидкості за спостереженнями на ALMA з роботи [160]. На рис. 7.19 (*правий*) показано модельний розподіл швидкості в торі для параметрів моделювання, відповідних рис. 7.18 але з кутом розкриву вітрів 90° та з урахуванням кута нахилу тора. На масштабах (3–4) пк швидкості хмар в торі мають розкид, що демонструє рис. 7.19, та також присутні хмари з

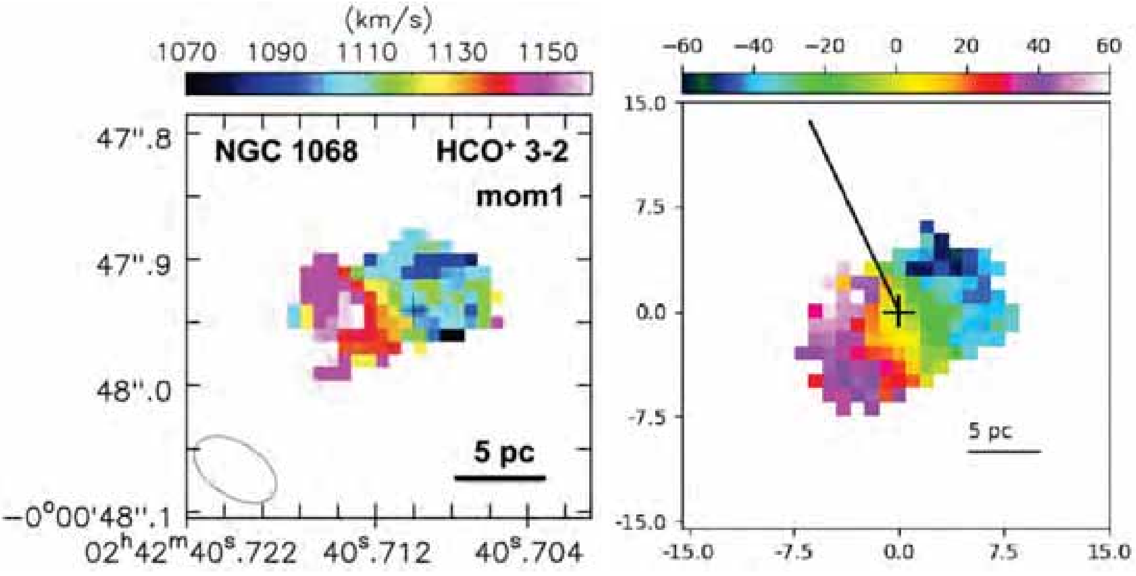


Рис. 7.19. *Зліва*: розподіл швидкості в торі, отриманий за спостереженнями на ALMA з роботи [160]. *Справа*: модельний розподіл швидкості в торі з урахуванням роздільної здатності ALMA. Початкові умови відповідають вітрам з кутом розкриття 90°.

низькою орбітальною швидкістю. При цьому спостережуваним швидкостям хмар 36 км/с на відстані 3 пк , що показують спостереження ALMA, відповідає значення маси НМЧД $M_{BH} = 5 \times 10^6 M_\odot$. Це значення вище ніж те, що було отримано в [160] у рамках моделі кеплерівського руху. Спостережувана дисперсія швидкості, яка була виявлена ALMA [160] (див. рис. 1.12) також потребує пояснення, яке може бути пов'язано з впливом залежності радіусів хмар на умови затінення або з зовнішньої акрецією. Це планується дослідити в майбутніх роботах. Для обраних параметрів поблизу радіусу сублімації швидкості хмар можуть досягати 250 км/с з істотним розкидом, що якраз може відповідати результатам спостережень мазерного випромінювання (VLA, VLBI).

Динамічна модель тора в АЯГ, яка представлена в наших роботах і в дисертації, дозволяє зняти багато питань, пов'язаних з інтерпретацією даних спостережень в різних діапазонах довжин хвиль. Для розвитку цієї моделі необхідно врахувати багато факторів: дисипація, вітри і т.д. Ми попередньо виконали ряд експериментів з урахуванням ефектів дисипацій при зіткненні хмар. Дійсно, коли хмари зіштовхуються, то частина кінетичної енергії перетворюється в теплову і, як результат, це буде впливати на динаміку в торі та розподіл густини в його перетині. Попередні результати експериментів показали, що при певному коефіцієнті дисипація призводить до руху хмар з носика тора в бік центральної маси. Таким чином, дисипація призводить до поповнення акреційного диска речовиною. При цьому можна оцінити, що при темпі акреції $0.1M_{\odot}/$рік тор з масою $10^5 M_{\odot}$ поглинеться чорною дірою за декілька десятків орбітальних періодів. Якщо зовнішня акреція відсутня, то це буде означати кінець активної фази ядра галактики. Тому істотною може бути роль зовнішньої акреції, яка може постійно поповнювати речовину в торі. З іншого боку, необхідно враховувати роль вітру. Тиск випромінювання на внутрішній межі тора може бути істотним і впливати на динаміку хмар в цій області. Слід зазначити, що попередні моделювання для низького коефіцієнта дисипації показали, що, незважаючи на акрецію хмар на центр, геометрична товщина тора зберігається довгий час. Більш детальне дослідження цих ефектів планується представити в найближчому майбутньому.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 7

В межах задачі двох тіл для кожної частинки системи запропонований круговий тор Кеплера, який є узагальненням кеплерівського диска. Досліджено вплив трьох різних початкових умов на рівноважну форму самогравітуючого тора в задачі $N$ тіл: круговий та еліптичний тор Кеплера, а також випадковий розподіл частинок по всім елементам орбіт з анізотропією в двох протилежних напрямках. Показано, що істотним є розкид орбіт в початковому стані не тільки по нахилам, а й по ексцентриситетам. При цьому найбільша геометрична товщина тора досягається для початкових умов, коли присутній випадковий розкид хмар за елементами орбіт та з анізотропією у двох протилежних напрямках, що моделюють вітер в АЯГ.

На підставі моделювання запропоновано сценарій формування затінюючих торів в АЯГ, основна ідея якого є наступною. Спочатку хмари рухаються навколо центральної маси і мають квазісферично-симетричний розподіл. Формування тора пов'язано з початком активної стадії в ядрах галактик, що призводить до виникнення вітрів в двох протилежних напрямках. Внаслідок тиску випромінювання речовина видувається у вітрових конусах і, як результат, формується тороїдальна структура.

З умов затінення акреційного диска, які випливають з аналізу спостережуваних СРЕ АЯГ, в рамках запропонованої моделі оцінено кількість хмар в торі та їх масштаби. В рамках механізму нагріву пилових хмар випромінюванням акреційного диска отримані оцінки температури хмар на різних просторових масштабах для NGC 1068, які узгоджуються зі спостережуваним на MIDI/VLTI розподілом температури в торі. Обговорюється можливість по спостережуваному радіо- (синхротронний механізм) і рентгенівському (зворотний Комптон-ефект) випромінюванню в вузлах джета визначення відносної орієнтації газопилового тора в припущенні, що джет збігається з віссю симетрії ядра галактики. Зі спостережного розподілу інтенсивності в радіодіапазоні слідує, що вигин джета в Sy2 галактиці NGC 1068 пов'язаний з його взаємодією з молекулярною хмарою, при якій формується ударний фронт. При цьому поведінка ударного фронту може інтерпретуватися в рамках рішення рівняння Компанейця для середовища з перепадом густини від молекулярного облака до міжзонярного середовища.

Запропоновано інтерпретацію спостережуваного за допомогою інтерферометра ALMA розподілу швидкостей в затінюючому торі Sy2 галактиці NGC 1068. А саме, наявність орбітального руху та розкид швидкостей в торі. При цьому розкид швидкостей виникає природньо в рамках запропонованої моделі, оскільки він пов'язаний з гравітаційною взаємодією між хмарами в тороїдальної структурі. Також запропоновано інтерпретацію спостережуваного некеплерівського руху хмар в торі, що представляло значні труднощі, тому що в існуючих роботах гравітаційне поле тора розглядалося в наближенні диска. Показано, що самогравітація тора і врахування того, що хмари рухаються по некруговим траєкторіям, призводить до некеплерівського руху. Останнє може пояснювати відхилення спостережуваних кривих обертання від кеплерівського випадку та низки швидкості на зовнішній границі тора, що відповідає результатам ALMA.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [4, 12, 16, 61, 74, 79, 86, 90, 92, 93, 80, 95, 222, 183, 184].

# РОЗДІЛ 8

# ЕФЕКТИ ГРАВІТАЦІЙНОГО ЛІНЗУВАННЯ НА СИСТЕМІ ТОР І ЦЕНТРАЛЬНА МАСА

У ньютонівській механіці промінь світла відхиляється в гравітаційному полі маси, яка притягує, що також справедливо і для релятивістського випадку. Однак в рамках загальної теорії відносності (ЗТВ), кут відхилення променя при його проходженні поблизу точкового джерела відрізняється рівно вдвічі. Передбачене А. Ейнштейном в 1916 р., а потім спостережене А. Еддінгтоном 1919 р., значення кута відхилення променя світла на 1.75 кутових секунди для Сонця стало одним з перших підтверджень ЗТВ. Майже через два десятиліття в 1936 році А. Ейнштейн [125] опублікував коротку замітку про формування зображення у вигляді кільця при лінзуванні на точковому джерелі, коли спостерігач, точкова лінза і джерело знаходяться на одній лінії. Це кільце згодом стали називати кільцем Ейнштейна. Довгі роки ця робота не привертала уваги. А. Ейнштейн відзначав, що цей ефект навряд чи можна буде спостерігати, оскільки радіус кільця-зображення виявився неймовірно малим. Це не дивно, тому що Ейнштейн при оцінках використовував лінзування на зірці, що дійсно приводить до малих значень радіуса кільця Ейнштейна. Особливу увагу на ефекти гравітаційного лінзування звернули у зв'язку з дослідженням темної матерії, яку можна виявити тільки за її гравітаційними властивостями. В даний час ця невелика замітка А. Ейнштейна виросла в цілий напрям в астрофізиці. Дійсно, ефекти гравітаційного лінзування дозволяють відновити масу в галактиці-лінзі, отримати інформацію про масштаби області квазара, яка випромінює, відновити розподіл маси не тільки баріонів, але також і темної матерії, яка недоступна для реєстрації за електромагнітним випромінюванням. Огляди неба (SDSS, Wise, KIDs/VST та ін.), які отримані різними телескопами, дають можливість використовувати їх для відкриття нових гравітаційних лінз (наприклад, [225, 220]). Відхилення від точкової лінзи, а саме врахування того, що в реальності речовина в галактиці-лінзі розподілена за певним законом, показує, що можуть формуватися чотири зображення. Такі об'єкти, квадруполі, є рідкісною знахідкою [220]. Самим відомим об'єктом такого типу є гравітаційна лінза "хрест Ейнштейна". Рідкісні об'єкти є ключем в розумінні фізики цілого класу систем, тому що найчастіше саме в цих унікальних об'єктах відкриваються ті особливості, які замиті в звичайних випадках. Так, змінність в компонентах зображення квадруполя дозволяє визначити масштаби області квазара, яка випромінює (фактично масштаби акреційного диска), що неможливо зробити іншими методами.

Виявлення кільця Ейнштейна здавалося малоймовірною подією. Зараз ми можемо насолоджуватися дивовижним зображенням практично повного кільця Ейнштейна в об'єкті $B1938+666$ [165]. До теперішнього часу вже відомо кілька гравітаційних лінз, які являють собою розірване кільце Ейнштейна, що виникають, якщо джерело трохи відхиляється від лінії спостерігач-лінза. Також були виявлені гравітаційні лінзи, наприклад $SDSSJ0924+021$ і $SDSSJ0946+100$, в яких спостерігається два кільця Ейнштейна [124, 145]. Два кільця Ейнштейна можуть формуватися, якщо лінзування відбувається на двох точкових масах, розташованих на одній осі джерело–лінза–спостерігач. При цьому, якщо одна з лінз має світність, то вона грає роль другого джерела, що може приводити до формування трьох кілець Ейнштейна [238]. Мультикільця також можуть формуватися в релятивістських системах при гравітаційному лінзуванні на чорній дірі [196, 107].

Як буде видно нижче [76], гравітаційне лінзування на об'єкті типу кільцевої галактики також призводить до формування декількох кілець Ейнштейна. При цьому інтенсивності і ширини кілець Ейнштейна в даній системі залежать від деяких параметрів (маси диска і його поверхневої густини). Ми побачимо, що подібна система може "маскуватися" під точкову лінзу або, навпаки, формувати три кільця Ейнштейна. Ці результати можуть бути важливими для правильної інтерпретації спостережних даних. Ця система також становить інтерес з точки зору класичної теорії гравітаційного лінзування, оскільки вона є узагальненням відомих випадків: лінзування на точковій масі, на диску, на нескінченно тонкому кільці [1]. Як буде видно з цього розділу, всі

---

[1] Примітка 1. Лінзуванню на кільці без урахування центральної маси був присвячений невеликий пункт в книзі [215], де згадується про можливе формування другого кільця. Там же було зазначено, що задача про лінзування на кільці являє "невеликий астрофізичний інтерес". Проте, включення в систему центральної маси робить цю задачу актуальною.

ці випадки є граничними (або виродженими) випадками даної системи.

## 8.1 Рівняння лінзи для системи: однорідний диск і центральна маса

Розглянемо кільце (тонкий тор) та спроектуємо всю речовину в площину, перпендикулярну променю зору, і припустимо, що оптична товщина диска настільки мала, що ми можемо вважати його прозорим. У цьому випадку отримана структура буде являти собою тонкий диск з центральним отвором. Для того, щоб проаналізувати ефекти першого порядку, будемо припускати, що густина в диску постійна. Тоді гравітаційна лінза являє собою тонкий прозорий диск з внутрішнім ($R_1$) і зовнішнім ($R_2$) радіусами та точкову масу, розташовану в центрі симетрії. Повна маса системи ($M$) є сумою маси диска ($M_{disc}$) і центральної маси ($M_0$): $M = M_0 + M_{disc}$. Нехай $\boldsymbol{\eta}$ і $\boldsymbol{\xi}$ – вектори, що визначають координати джерела і зображення, відповідно. Як відомо, рівняння гравітаційної лінзи має вигляд [215, 223]

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}), \tag{8.1}$$

де $\boldsymbol{y} = (D_d/D_s)\,(\boldsymbol{\eta}/\xi_0)$ і $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}/\xi_0$ — безрозмірні координати джерела і зображення. Радіус кільця Ейнштейна, створюваний сумарною масою $M$,

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{ds} D_d}{D_s}}, \tag{8.2}$$

$D_s$ і $D_d$ – відстані від спостерігача до джерела і лінзи, відповідно, а $D_{ds}$ – відстань від лінзи до джерела. Оскільки лінзою є система, що складається з центральної маси і диска, то сумарний кут відхилення має вигляд

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_{disc}, \tag{8.3}$$

де кут відхилення від центральної маси

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = m_0 \frac{\boldsymbol{x}}{x^2}, \tag{8.4}$$

$m_0 = M_0/M$ — центральна маса, нормована на повну масу системи. Кут, пов'язаний з відхиленням променя світла за рахунок гравітаційного впливу диска з довільним розподілом густини, має вигляд

$$\boldsymbol{\alpha}_{disc} = \frac{1}{\pi} \int d^2x' \kappa(\boldsymbol{x}') \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2}. \tag{8.5}$$

Тут відносна маса диска $m_{disc} = M_{disc}/M$; $\boldsymbol{x}'$ — вектор до елемента площі диска, а інтегрування відбувається по всій площі диска. Відносну поверхневу густину[1] для довільного розподілу можна представити у вигляді $\kappa(\boldsymbol{x}) = \kappa_0 f(\boldsymbol{x})$, где $\kappa_0 = m_{disc}/(r_2^2 - r_1^2)$ і $r_{1,2} = R_{1,2}/\xi_0$. У разі рівномірного розподілу густини $\kappa = \text{const} = \kappa_0$.

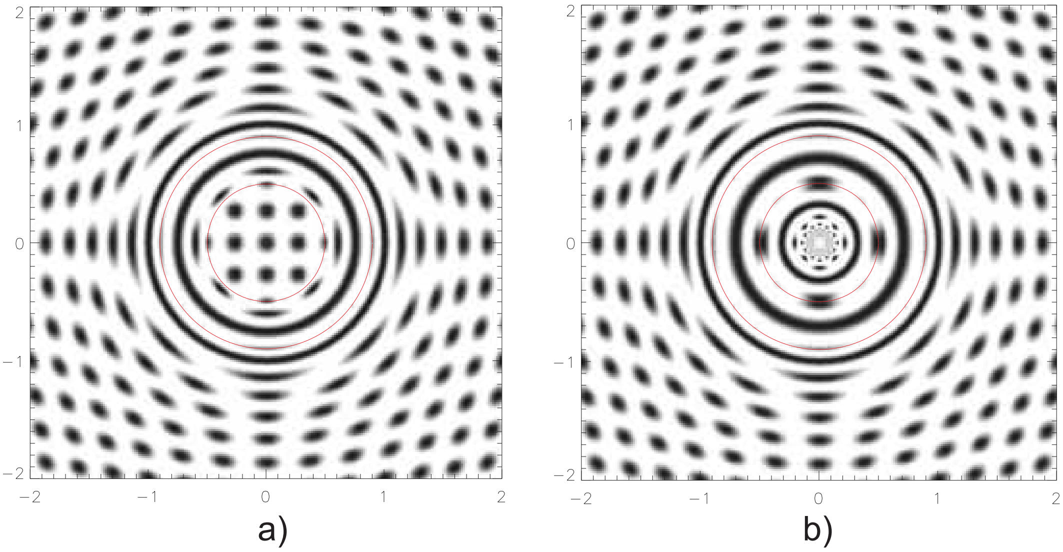


Рис. 8.1. Зображення сітки джерел (15×15) з радіусами $r_s = 0.1$, які отримані за рахунок гравітаційного лінзування a) на однорідному диску $m_{disc} = 1$; b) на центральній точковій масі $m_0 = 0.1$ та на однорідному диску. На обох рисунках границі диска відзначені тонкими лініями: внутрішній радіус $r_1 = 0.5$ і зовнішній $r_2 = 0.9$. На всіх наступних рисунках границі диска показані червоними лініями.

Таким чином, рівняння гравітаційної лінзи (8.1) для центральної маси і кільця з довільним розподілом густини в ньому має вигляд

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - m_0 \frac{\boldsymbol{x}}{x^2} - \frac{1}{\pi} \int d^2x' \kappa(\boldsymbol{x}') \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2}, \tag{8.6}$$

У рівняння (8.6) входять нормовані маси, які задовольняють умові $m_0 + m_{disc} = 1$. Оскільки розглянута система має осьову симетрію, перейдемо в полярну систему координат: $\boldsymbol{x}' = x' \times (\cos\varphi, \sin\varphi)$ і $\kappa(\boldsymbol{x}') = \kappa(x')$. Після інтегрування по азимутальному куту $\varphi$ (див. [31]), рівняння лінзи (8.6)

---

[1] Примітка 1. Ми винесли $1/\pi$ за знак інтеграла, тому що цей множник надалі скоротитися після інтегрування по азимутальному куту. Тому у виразі для поверхневої густини число $\pi$ відсутне.

призводить до системи трьох векторних рівнянь:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \begin{cases} \left(1 - \dfrac{m_0}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} \int\limits_{r_1}^{r_2} \kappa(x')x'dx'\right), & x \geq r_2 \\ \left(1 - \dfrac{m_0}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} \int\limits_{r_1}^{x} \kappa(x')x'dx'\right), & r_1 \leq x \leq r_2 \\ \left(1 - \dfrac{m_0}{x^2}\right), & x \leq r_1. \end{cases} \tag{8.7}$$

У разі рівномірного розподілу густини неважко побачити, що система рівнянь (8.7) набуває вигляду

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right), & x \geq r_2 \qquad \text{(a)} \\ \left(1 - \dfrac{m_0}{x^2} - \kappa\dfrac{x^2 - r_1^2}{x^2}\right), & r_1 \leq x \leq r_2 \quad \text{(b)} \\ \left(1 - \dfrac{m_0}{x^2}\right), & x \leq r_1 \qquad \text{(c).} \end{cases} \tag{8.8}$$

Таким чином, ми отримали рівняння лінзи (8.8) для системи "центральна маса і однорідний диск". В області за зовнішньою границею диска сформоване зображення збігається із зображенням від точкової маси, що дорівнює масі всієї системи (8.8a). В області отвору диска на відхилення променя світла впливає тільки центральна маса $m_0$ (8.8c). І нарешті, на самому диску формуються зображення, характеристики яких залежать, головним чином, від поверхневої густини в диску $\kappa$ (8.8b).

Відзначимо, що в разі граничного переходу, коли $m_0 \to 0$, $m_{disc} = 1 - m_0 \to 1$, рівняння (8.8) переходять в рівняння лінзи для випадку однорідного диска, отримані в [215]. Оскільки цей випадок докладно не був досліджений, ми коротко зупинимося на ньому в підрозділі 8.5.

На рис. 8.1 показані зображення на сітці гауссових джерел, які виникають при лінзуванні на однорідному диску (рис. 8.1 a) і в разі, коли лінзою є центральна маса та однорідний диск (рис. 8.1 b). Видно, що лінзування на однорідному диску призводить до формування двох кілець Ейнштейна. При цьому зображення в отворі диска залишаються неспотвореними, а в області поза диском спотворюються, як при лінзуванні на точковій масі $m = 1$. Наявність центральної маси в центрі симетрії диска може призводити до формування трьох кілець (рис. 8.1 b). При цьому в області, всередині третього кільця зображення мають форму згідно з лінзуванням на точковій масі $m_0$. Зображення, отримані на рис. 8.1 і на всіх наступних рисунках отримані в такий спосіб. Ми пробігаємо всі значення за координатами зображення в картинній площині $\boldsymbol{x}_i$ з кроком $h$. Потім по аналітичним виразам (8.8) для лінзової системи із заданими параметрами ($m_0$, $r_1$, $r_2$) знаходимо відповідні координати $\boldsymbol{y}_i$. З отриманого масиву ($\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$) ми вибираємо такі $\boldsymbol{y}_i$, для яких різниця $|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{r}_i| < h$, де $\boldsymbol{r}_i$ — координати джерела. Потім за знайденими $\boldsymbol{y}_i$ ми знаходимо відповідні координати зображення $\boldsymbol{x}_i$.

### *8.1.1 Радіуси кілець Ейнштейна (для випадку точкового джерела)*

Із системи (8.8) видно, що якщо $\boldsymbol{y} = 0$, тобто точкове джерело, центр лінзи і спостерігач перебувають на одній лінії, то можливе формування трьох кілець Ейнштейна. Для зручності пронумеруємо кільця в порядку зменшення їх радіусів (рис. 8.2). Першим (або головним) кільцем ми будемо називати кільце з радіусом $x_\text{I} = 1$ (розв'язок рівняння (8.8a)). Перше кільце формується якщо $x_\text{I} > r_2$ при $r_2 < 1$. Рівняння (8.8b) при $\boldsymbol{y} = 0$ призводить до квадратного рівняння, яке легко розв'язується відносно $x$:

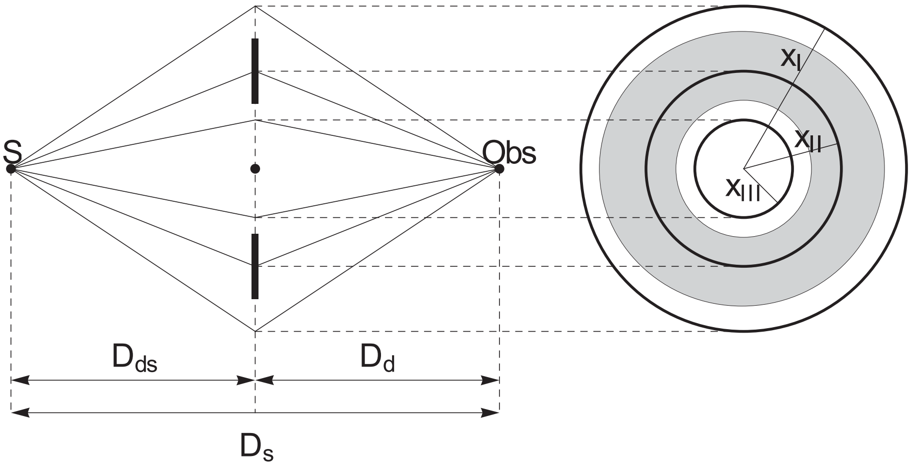


Рис. 8.2. Схема формування кілець Ейнштейна.

$$x_\text{II} = \sqrt{\left|\frac{\kappa r_1^2 - m_0}{\kappa - 1}\right|} = \sqrt{\left|\frac{\kappa r_2^2 - 1}{\kappa - 1}\right|}. \tag{8.9}$$

Кільце Ейнштейна з радіусом $x_\text{II}$ ми будемо називати другим кільцем Ейнштейна, яке завжди виникає на диску-лінзі $r_1 < x_\text{II} < r_2$ і залежить від поверхневої густини диска. З рівняння (8.8c) видно, що в даній системі з'являється третє кільце Ейнштейна, радіус якого дорівнює $x_{\mathrm{III}} = \sqrt{m_0}$. Третє кільце виникає в отворі диска $x_{\mathrm{III}} < r_1$ або $r_1 > \sqrt{m_0}$.

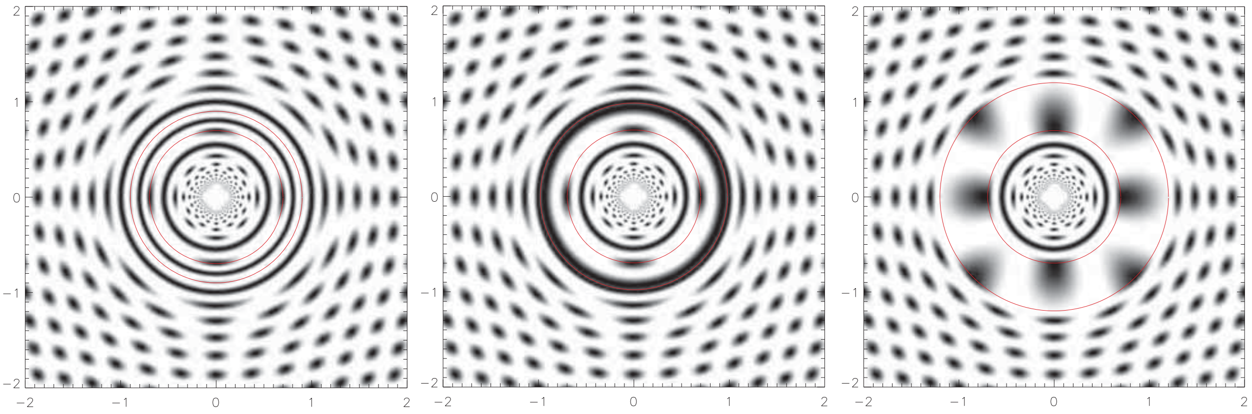
## 8.2 Ширина кілець Ейнштейна та їх границі

Кінцеві розміри джерела будуть впливати на результуюче зображення. При цьому можливі різні ефекти, що призводять до перекриття кілець, в деяких випадках можливе злиття двох кілець в одне. Розглянемо це детально, досліджуючи зовнішні і внутрішні границі кілець Ейнштейна для кожного кільця окремо.

а) Зовнішня і внутрішня границі *головного кільця Ейнштейна*, як відомо, мають вигляд

$$x_{\mathrm{I}}^{Out,In} = \pm\frac{r_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 + 1}, \tag{8.10}$$

де знак "плюс" відповідає зовнішній границі ($x_{\mathrm{I}}^{Out}$), а знак "мінус" — внутрішній границі ($x_{\mathrm{I}}^{In}$) головного кільця, $r_s$ — радіус джерела. Вираз (8.10) легко отримати з рівняння (8.8a) при $\boldsymbol{y} = \pm r_s$. Ширина головного кільця Ейнштейна дорівнює радіусу джерела: $\triangle x_{\mathrm{I}} = x_{\mathrm{I}}^{Out} - x_{\mathrm{I}}^{In} = r_s$. Внаслідок того, що головне кільце має ширину, що залежить від радіуса джерела, головне кільце може перекриватися диском-лінзою. Головне кільце "видно" повністю, якщо $r_2 < x_{\mathrm{I}}^{In}$. В іншому випадку, може бути часткове ($x_{\mathrm{I}}^{In} < r_2 < x_{\mathrm{I}}^{Out}$) або повне ($r_2 \geq x_{\mathrm{I}}^{Out}$) "екранування" головного кільця диском. На рис. 8.3 наведені зображення сітки джерел при лінзуванні на системі "точкова маса + диск". Рис. 8.3a відповідає випадку, коли головне кільце не перекривається диском ($x_{\mathrm{I}}^{In} \approx 0.95 > r_2$) і добре видно всі три кільця Ейнштейна. На рис. 8.3 b наведені зображення, для яких реалізується випадок часткового перекриття головного кільця диском-лінзою ($x_{\mathrm{I}}^{In} < r_2$, $x_I^{Out} \approx 1.05 > r_2$). Крім того, для даних параметрів системи перше і друге кільця зливаються в одне (широке) кільце і в результаті ми бачимо два кільця Ейнштейна. На рис. 8.3 c ми бачимо, що головне кільце повністю екранується диском ($r_2 > x_{\mathrm{I}}^{Out}$). В цьому випадку "зникло" і друге кільце Ейнштейна і в результаті зображення являє собою одне кільце (третє кільце Ейнштейна). Таким чином, ми бачимо, що



a) b) c)

Рис. 8.3. Зображення сітки гауссових джерел ($r_s = 0.1$) у випадку гравітаційного лінзування на центральній точковій масі з $m_0 = 0.3$ і однорідному диску з внутрішнім радіусом $r_1 = 0.7$ для трьох випадків: a) $r_2 = 0.9$, b) $r_2 = 0.98$, c) $r_2 = 1.2$.

існує різноманіття можливих випадків формування як трьох, так і двох, і, навіть, одного кільця Ейнштейна.

b) Узагальнюючи вираз (8.10) на випадок точкової маси $m_0$, ми відразу можемо виписати вираз для зовнішньої і внутрішньої границі *третього кільця Ейнштейна*:

$$x_{\mathrm{III}}^{Out,In} = \pm\frac{r_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 + m_0}. \tag{8.11}$$

Серединний радіус третього кільця $r_{\mathrm{III}} = \sqrt{m_0}$ отримуємо з (8.11) при $r_s = 0$. Очевидно, що ширина третього кільця така ж, як і ширина головного кільця і дорівнює радіусу джерела $\triangle x_{\mathrm{III}} = \triangle x_{\mathrm{I}} = r_s$. Для третього кільця також існують умови перекриття. Якщо зовнішній радіус третього кільця менше радіуса диска $x_{\mathrm{III}}^{Out} < r_1$, третє кільце виявляється повністю (рис. 8.3 a). Часткове перекриття третього кільця диском виникає, якщо виконуються наступні умови: $x_{\mathrm{III}}^{Out} > r_1$, $x_{\mathrm{III}}^{In} < r_1$.

На рис. 8.4 a представлений випадок, коли третє кільце Ейнштейна частково перекривається. При цьому $x_{\mathrm{III}}^{In} = 0.5$ і $x_{\mathrm{III}}^{Out} = 0.6$ і друге кільце зливається з третім. При цьому параметри лінзової системи такі, що ширини головного і результуючого внутрішнього кільця практично рівні. Таке зображення (візуально) важко відрізнити від випадку лінзування на двох точкових масах, коли також виникає два кільця Ейнштейна [238]. На рис. 8.4 b, третє кільце повністю екранується диском-лінзою, оскільки виконується умова $x_{\mathrm{III}}^{In} > r_1$.

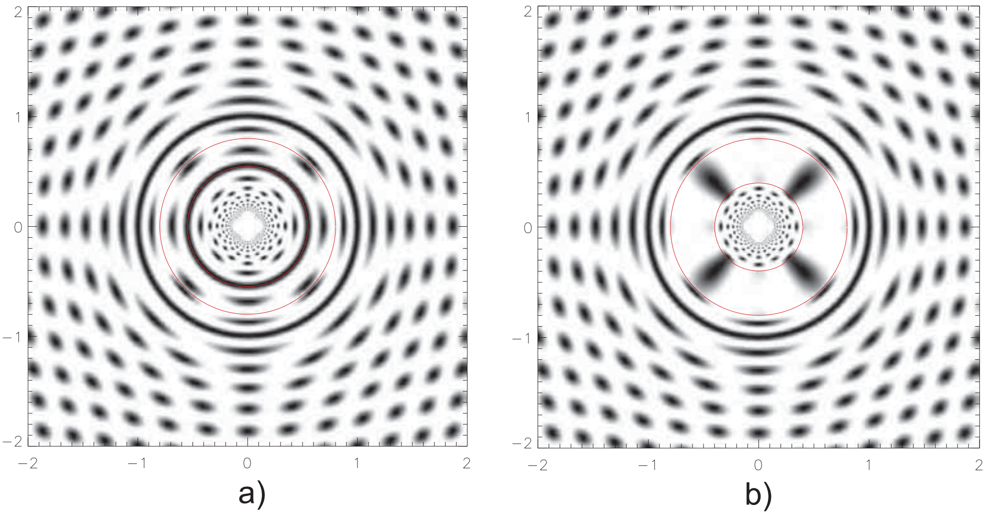


Рис. 8.4. Зображення сітки гауссових джерел ($r_s = 0.1$) у випадку гравітаційного лінзування на центральній точковій масі з $m_0 = 0.3$ і однорідним диском із зовнішнім радіусом $r_2 = 0.8$ для двох випадків: a) $r_1 = 0.55$, b) $r_1 = 0.4$.

Тут реалізується випадок, подібний випадку на рис. 8.3 c, тобто з трьох можливих кілець формується тільки одне кільце — головне кільце Ейнштейна. Для даної поверхневої густини диска друге кільце не формується (детально умови існування другого кільця ми розглянемо в наступному розділі).

c) Границі та ширина *другого кільця Ейнштейна*, на відміну від головного і третього, мають більш складний вид. Рівняння (8.8b) для $\boldsymbol{y} = \pm r_s$ призводить до квадратного рівняння виду

$$(1-\kappa)x^2 \pm r_s x + \kappa r_2^2 - 1 = 0. \tag{8.12}$$

Розв'язок цього рівняння в загальному випадку має вигляд

$$x_{\mathrm{II}}^{Out,In} = \frac{1}{2(1-\kappa)}\left[\pm r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4(1-\kappa)(\kappa r_2^2 - 1)}\right]. \tag{8.13}$$

Знаки при першому доданку у квадратних дужках пов'язані, як і для попередніх випадків, з зовнішньою та внутрішньою границями кільця. Однак вибір знака перед коренем, який однозначно визначається для головного і третього кільця (формули (8.10), (8.11)), в даному випадку визначається в залежності від параметрів лінзової системи. Ширина другого кільця залежить від густини диска-лінзи і для більшості випадків (див. наступний підрозділ) має вигляд

$$\triangle x_{\mathrm{II}} = \frac{r_s}{|\kappa - 1|}. \tag{8.14}$$

Таким чином, ширина другого кільця залежить не тільки від радіуса джерела, але і від поверхневої густини в диску. Моделювання, продемонстровані на попередніх рисунках 8.3 a,b і 8.4 b), показують, що формування другого кільця залежить від параметрів лінзової системи. Оскільки в астрофізичних задачах джерело має малий розмір, досліджуємо умови існування другого кільця, обмежуючись випадком $r_s \ll 1$.

## 8.3 Геометрична інтерпретація формування кілець Ейнштейна

Тут ми хочемо представити геометричний підхід, що дозволяє без побудови зображень, яке вимагає наявності чисельного коду, зробити висновок про конфігурацію кілець Ейнштейна в залежності від параметрів лінзової системи. Рівняння лінзи для променів, що йдуть від зовнішніх границь джерела $(\pm r_s)$ зводиться до вигляду:

$$x \pm r_s = \alpha. \tag{8.15}$$

Кут відхилення $\alpha$ отримуємо зі скалярного виду вираження (8.6), з огляду на осьову симетрію лінзи

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq r_2 \qquad \text{(a)} \\ \frac{\mu_0}{x} + \kappa \frac{x^2 - r_1^2}{x}, & r_1 \leq x \leq r_2 \quad \text{(b)} \\ \frac{m_0}{x}, & x \leq r_1 \qquad \text{(c).} \end{cases} \tag{8.16}$$

На рис. 8.5 показано поведінку кута відхилення для випадку диск і "диск + центральна маса". Видно, що кут відхилення при лінзуванні на диску при $x < r_1$ має постійне значення і в цій області зображення джерела не спотворюється.

З рівняння (8.15) видно, що різниця координати зображення і координати джерела і є кут відхилення. Графічний розв'язок рівняння лінзи (8.15) дозволяє зробити висновок про те, скільки формується кілець Ейнштейна і якої ширини буде друге кільце без чисельного моделювання. Параметри, для яких були побудовані залежності на рис. 8.6, відповідають параметрам чисельного моделювання на рис. 8.3. Звідси видно, що три кільця Ейнштейна відповідають випадку, коли смуга джерела перетинає криву в трьох точках

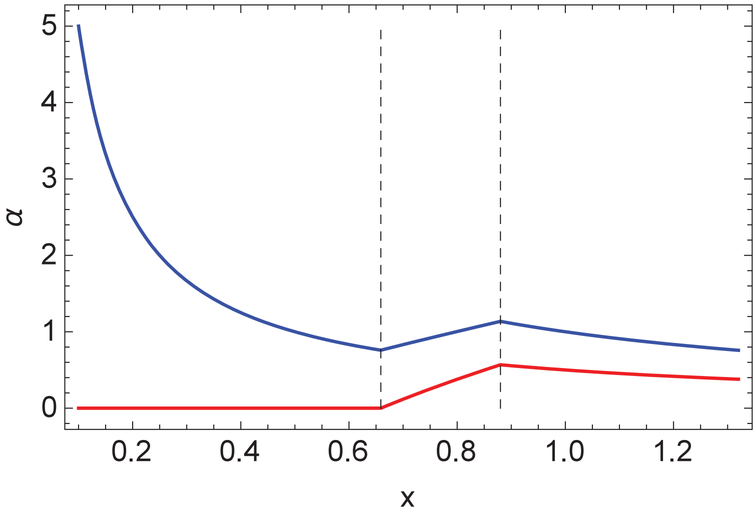


Рис. 8.5. Залежність кута відхилення від координати для випадку, коли лінзою є диск (*червона крива*) і система диск + центральна маса (*синя крива*).

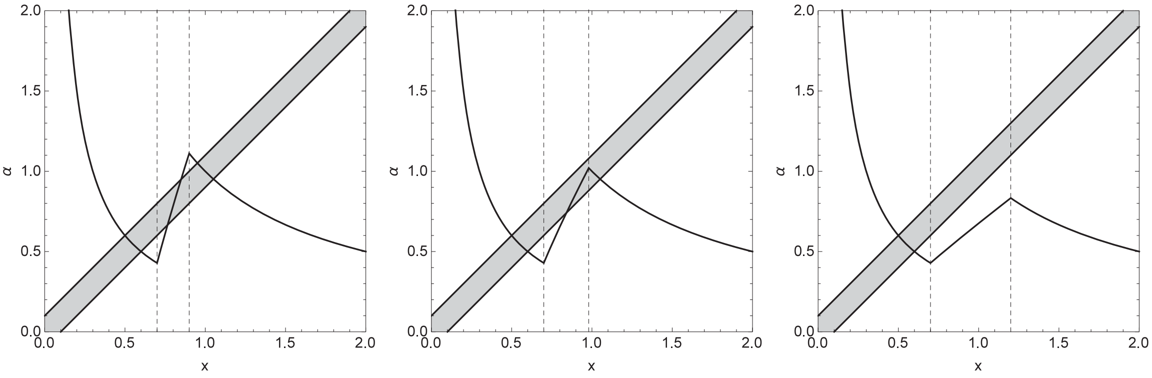


Рис. 8.6. Графічний розв'язок рівняння лінзи для $m_0 = 0.3$ і $r_1 = 0.7$ для трьох випадків: a) $r_2 = 0.9$ (*лівий*), b) $r_2 = 0.98$ (*середній*), c) $r_2 = 1.2$ (*правий*). Радіус джерела $r_s = 0.1$ показаний сірою смугою.

(рис. 8.3 *лівий*), одне кільце Ейнштейна формується при перетині в одній області (рис. 8.3 *правий*). Неповне пересічення відповідає вузькому кільцю Ейнштейна.

Також відзначимо, що в даній системі, крім тангенціальних критичних кривих (умова $y/x = 0$), які призводять до витягнутих у вигляді дуг зображень, також існують радіальні критичні криві (умова $dy/dx = 0$), що відповідає витягнутим уздовж радіуса зображенням джерела. Це може бути додатковим критерієм, який дозволить виділити систему, яка містить кільцеву структуру.

## 8.4 Умови існування другого кільця Ейнштейна

З (8.13) видно, що для $r_s \ll 1$, вирази для внутрішньої і зовнішньої границь кільця можуть бути записані як

$$x_{\text{II}}^{Out,In} = \frac{1}{2|\kappa-1|}\left[\sqrt{r_s^2 + 4|(\kappa-1)(\kappa r_2^2 - 1)|} \pm r_s\right] \tag{8.17}$$

за умови, що a) $\kappa > 1$, $\kappa r_2^2 > 1$ або b) $\kappa < 1$, $\kappa r_2^2 < 1$. Ці умови відповідають існуванню дійсних значень (8.17). Зручно аналізувати розв'язки, розділивши їх на два випадки ($r_2 < 1$ і $r_2 > 1$) і ввівши позначення $\kappa_{cr} = 1/r_2^2$ або $\kappa_{cr} = m_0/r_1^2$. Тоді *необхідні умови існування другого кільця* можна сформулювати наступним чином:

$$\begin{array}{lll} \text{при} \;\; r_2 > 1 \;\; \text{необхідно, щоб} & \kappa < \kappa_{cr} \;\; (\kappa < 1) & a) \\ \text{при} \;\; r_2 < 1 \;\; \text{необхідно, щоб} & \kappa > \kappa_{cr} \;\; (\kappa > 1) & b). \end{array} \tag{8.18}$$

Фізичний сенс цих умов полягає в "конкуренції" областей гравітаційного впливу центральної маси та диска.

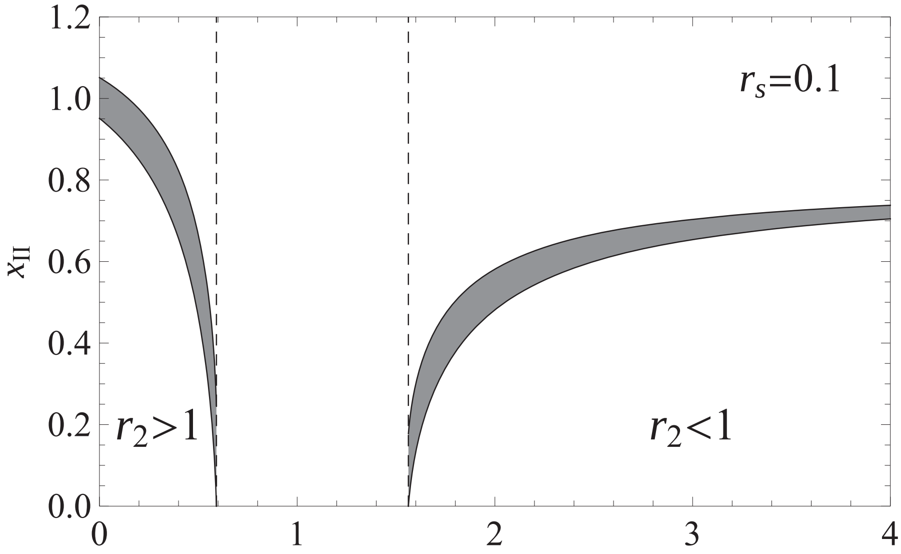


Рис. 8.7. Залежність $x_{\text{II}}^{Out,In}(\kappa)$ для двох випадків: $r_2 = 0.8$ і $r_2 = 1.3$. Для всіх випадків радіус джерела $r_s = 0.1$. Сірі області показують зміну ширини другого кільця Ейнштейна. Область "відчуженості" другого кільця позначені пунктирними лініями і відповідають умовам на параметри $\kappa > \kappa_{cr}$ (для $r_2 < 1$) і $\kappa < \kappa_{cr}$ ($r_2 > 1$).

На рис. 8.7 показані зміни радіуса і ширини другого кільця як функція від поверхневої густини для фіксованих значень зовнішнього радіуса диска

$r_2 < 1$ і $r_2 > 1$, для яких другого кільця не існує ( "область відчуженості"). При $\kappa \gg \kappa_{cr} \gg 1$ $(r_2 < 1)$ ширина другого кільця зменшується, а його радіус асимптотично прагне до $r_2$. Цей випадок відповідає граничному переходу до нескінченно тонкого кільця, який ми розглянемо в наступному підрозділі. З іншого боку, при $\kappa \to 0$ $(r_2 > 1)$ серединний радіус другого кільця $x_{\mathrm{II}} \to 1 = x_{\mathrm{I}}$, а ширина $\triangle x_{\mathrm{II}} \to r_s$. Цей випадок відповідає граничному переходу лінзування тільки на центральній масі $m_0 \to 1$.

Вищевказані необхідні умови (8.18) не є достатніми умовами, оскільки при дійсних значеннях зовнішнього і внутрішнього радіусів другого кільця вони можуть виходити за область застосовності (8.8b), тобто за границі диска-лінзи. Наприклад, з (8.17) видно, що при $\kappa \to 1/r_2^2 \pm 0$ зовнішній радіус $x_{\mathrm{II}}^{Out} \to \triangle x_{\mathrm{II}}$ і $x_{\mathrm{II}}^{In} \to 0$. Однак, якщо $x_{\mathrm{II}} < r_1$, то друге кільце не формується. *Достатні умови існування другого кільця*: $x_{\mathrm{II}}^{Out} \le r_2$ або $x_{\mathrm{II}}^{In} \ge r_1$. Якщо ці дві умови виконуються одночасно, то друге кільце видно повністю, якщо виконується одна з цих умов, то друге кільце видно частково, тому що його частина екранується диском.

*Умови повної видимості другого кільця* мають такий вигляд : $x_{\mathrm{II}}^{Out} \le r_2$ і $x_{\mathrm{II}}^{In} \ge r_1$. Ці умови зручно виразити через мінімальне число параметрів ($r_s$ і $m_0$):

$$\begin{array}{l} \text{при} \quad r_2 \ge 1 \quad r_1 \le x_{\mathrm{III}}^{In} \quad \text{і} \quad r_2 \ge x_{\mathrm{I}}^{Out} \quad a) \\ \text{при} \quad r_2 \le 1 \quad r_1 \ge x_{\mathrm{III}}^{Out} \quad b) \end{array} \tag{8.19}$$

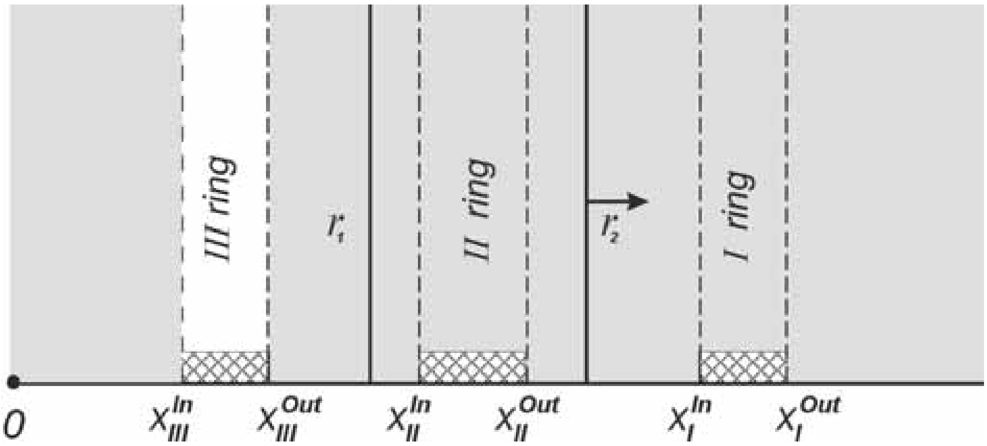
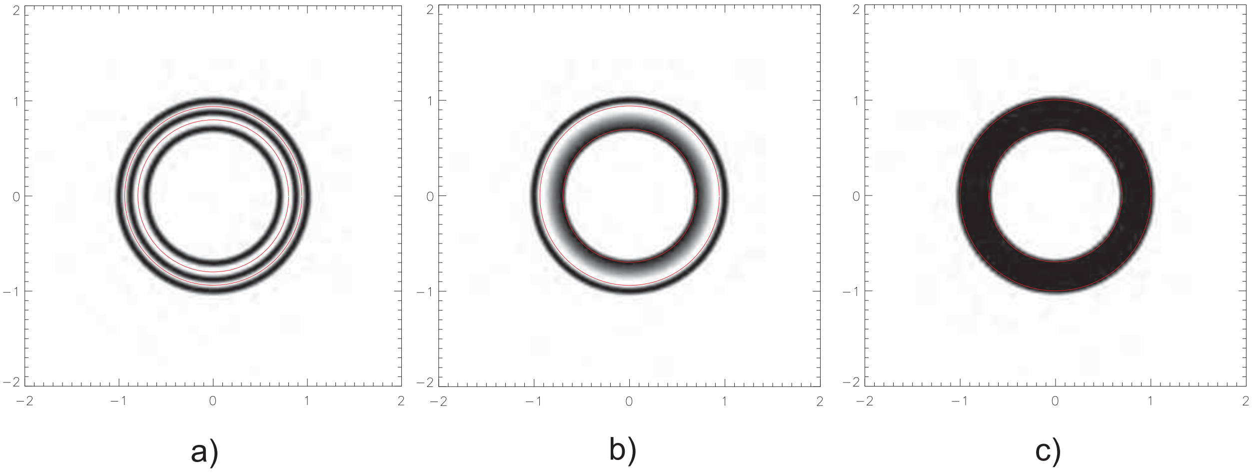


Рис. 8.8. Схема, що відображає області повної видимості (сірий фон) другого кільця Ейнштейна.

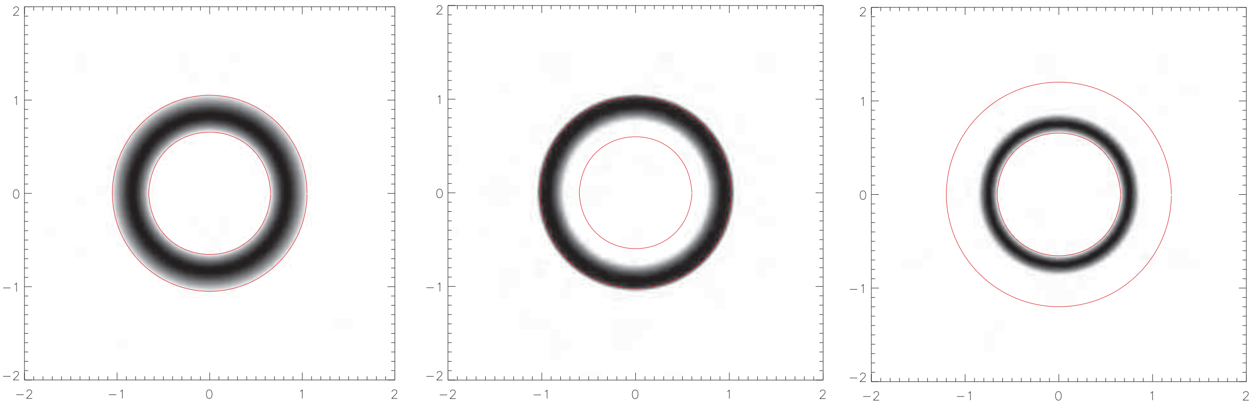
З цих умов видно наступне (рис. 8.8). Якщо $r_2 \le 1$ і задовольняються умови (8.18b) і (8.19b), то друге кільце завжди існує. При цих умовах третє кільце також видимо повністю, а перше кільце може частково перекриватися диском при $r_2 > x_{\mathrm{I}}^{In}$. Таким чином, задаючи як параметри радіус джерела $r_s$ і значення центральної маси $m_0$, можна знайти відповідні значення $r_1$, $r_2$, для яких формуються три, два або одне кільце Ейнштейна. Для астрофізики найцікавіший випадок, коли центральна маса дорівнює (або більше) маси диска. Наприклад, в статті [79] було показано, що для стабілізації гравітуючого тора необхідна наявність орбітального руху речовини в ньому, а отже, важлива роль центральної маси. Вважається, що система найбільш стійка, якщо центральна маса дорівнює або більше, ніж маса тора. Тому для прикладу ми наведемо моделювання для $m_0 = 0.5$ і $r_s = 0.1$. В цьому випадку $x_I^{In} = 0.95$, $x_I^{Out} = x_I^{In} + r_s = 1.05$; $x_{III}^{Out} = x_{III}^{In} + r_s = 0.76$.



a)  b)  c)

Рис. 8.9. Зображення гаусового джерела ($r_s = 0.1$) у випадку гравітаційного лінзування на центральній точковій масі з $m_0 = 0.5$ і однорідному диску із зовнішнім радіусом $r_2 < 1$ для наступних випадків: a) $r_1 = 0.8 > x_{\mathrm{III}}^{Out}$, $r2 = 0.94 < x_{\mathrm{I}}^{In}$, b) $r_1 = 0.7 < x_{\mathrm{III}}^{Out}$, $r_2 = 0.94$, c) $r_1 = 0.7$, $r_2 = 1.0$.

На рисунках 8.9 і 8.10 представлені результати моделювання для $m_0 = 0.5$ і $r_s = 0.1$. Рис. 8.9a демонструє, що в разі, коли центральна маса порівняння з масою диска можливе існування трьох кілець Ейнштейна. Оскільки $x_{\mathrm{III}} = \sqrt{m_0}$, то при збільшенні значення центральної маси (при фіксованих $r_1$, $r_2$) третє кільце буде екрануватися диском. При цьому радіус другого кільця буде зменшуватися і воно буде поступово зникати, оскільки $x_{\mathrm{II}}^{Out,In}$ почнуть виходити за межі диска (умова (8.19b)). На рис. 8.9 b внутрішнє кільце є



a) b) c)

Рис. 8.10. Зображення гауссового джерела ($r_s = 0.1$) за рахунок гравітаційного лінзування на центральній точковій масі з $m_0 = 0.5$ і однорідному диску із зовнішнім радіусом $r_2 < 1$ для наступних випадків: a) $r_1 = 0.658 = x^{In}_{\mathrm{III}}$, $r2 = 1.051 = x^{Out}_{\mathrm{I}}$, b) $r_1 = 0.6 < x^{In}_{\mathrm{III}}$, $r_2 = 1.02 < x^{Out}_{I}$, c) $r_1 = 0.658 = x^{In}_{III}$, $r_2 = 1.2 > x^{Out}_{I}$.

результатом злиття третього і частково другого кільця. Особливий випадок показаний на рис. 8.9 c ($\kappa = 0.98 \to 1$), тобто значення поверхневої густини близьке до одиниці. Випадок $\kappa =\to 1$ аналогічний граничному випадку лінзування на суцільному диску з $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ і масою $m_{disk} = 1$, але з вирізаним центральним колом радіуса $r_1$. Дійсно, в цьому випадку ширина другого кільця Ейнштейна $\triangle x_{\mathrm{II}} \to \infty$ (згідно (8.14)), але в межах $[r_1, 1]$. В результаті виникає кільце-зображення, ширина якого дорівнює ширині дискалінзи, а інтенсивність в кожній точці дорівнює інтенсивності джерела в його максимумі (в центрі для гауссового джерела).

Якщо зовнішній радіус диска $r_2 > 1$, зображенням буде одне кільце Ейнштейна, але різної товщини, оскільки можливий ефект злиття другого і першого, або другого і третього кілець (рис. 8.10). На рис. 8.10 a показаний граничний випадок умов (8.19a) $r_1 = x^{In}_{\mathrm{III}}$ і $r_2 = x^{Out}_{\mathrm{I}}$, для якого зображенням є широке (друге) кільце, яке повністю заповнює диск. При цьому головне і третє кільця Ейнштейна не формуються, оскільки "екрануються" диском. На рис. 8.10 b показаний випадок, коли перше кільце частково екранується диском і зливається з другим кільцем. При цьому не задовольняються умови (8.19a) і зовнішній радіус другого кільця $x^{Out}_{\mathrm{II}}$ виходить за межі диска, тобто друге кільце також видно частково. На рис. 8.10 c друге кільце торкається до внутрішньої границі диска і видно повністю. В цьому випадку, якщо збільшувати значення $m_0$, то радіус другого кільця $x_{\rm II}$ буде збільшуватися аж до одиниці. Навпаки, якщо збільшувати зовнішній радіус диска (при даному фіксованому $m_0$), то $x_{\rm II}$ буде зменшуватися і друге кільце поступово зникне. Зникнення другого кільця буде супроводжуватися появою третього кільця Ейнштейна. Такі зміни радіуса другого кільця від параметрів лінзової системи зручно розглядати, досліджуючи граничні випадки. Ми розглянемо це в наступному підрозділі.

Відзначимо, що крім розглянутого розв'язку (8.17), існує розв'язок виду

$$x_{\rm II}^{Out,In}=\frac{1}{2|\kappa-1|}\left[r_s\pm\sqrt{r_s^2-4|(\kappa-1)(\kappa r_2^2-1)|}\right]. \qquad (8.20)$$

Цей розв'язок працює для джерела з великим радіусом, тому ми не будемо детально на ньому зупинятися. Відзначимо тільки, що цей розв'язок потрапляє в область значень для поверхневої густини $1\leq\kappa\leq\kappa_{cr}$ при $r_2\leq 1$ і $\kappa_{cr}\leq\kappa\leq 1$ при $r_2\geq 1$. Для малого джерела це дуже вузькі області, що примикають до значень $\kappa\to 1$ і/або $\kappa\to\kappa_{cr}$. Для джерела з великим значенням $r_s$ ці області можуть "працювати", але у вузькому діапазоні параметрів лінзової системи.

Можна передбачити без моделювання конфігурацію кілець Ейнштейна з урахуванням релятивістських ефектів, тобто враховуючи, що центральна маса є чорною дірою. В цьому випадку всі особливості кілець Ейнштейна, досліджені вище, залишаться незмінними, але з додатковими кільцями в близькому оточенні чорної діри.

На рис. 8.4 були продемонстровані ефекти гравітаційного лінзування на сітці джерел. Це відразу охоплює велику кількість варіантів, коли джерело зміщено від центру. Дійсно, варіант зміщеного джерела зустрічається часто і дослідження ефектів в цьому випадку також становить інтерес. На рис. 8.11 показані, як приклад, різні конфігурації зображень при лінзуванні на одному зміщеному джерелі. Видно, що можуть виникати два зображення принципово різної форми: дуга і радіально витягнуте зображення, яке формується на лінзі (рис. 8.11 *лівий*, *середній*). На рис. 8.11 *правий* формуються п'ять дуг. Це демонструє можливу різноманітність в зображеннях, які формуються, в

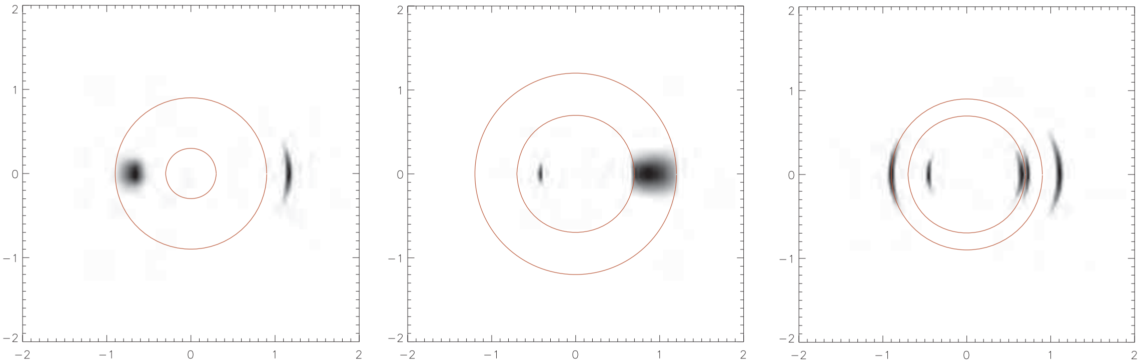


Рис. 8.11. Лінзування гауссового джерела для $m_0 = 0.3$ при різних параметрах. *Зліва*: $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.9$, координати джерела $\mathbf{r} = (0.3, 0)$, *середній*: $r_1 = 0.7$, $r_2 = 1.2$, $\mathbf{r} = (0.3, 0)$, *справа*: $r_1 = 0.7$, $r_2 = 0.9$, $\mathbf{r} = (0.2, 0)$.

залежності від параметрів лінзи. Зображення, які формуються на диску-лінзі баріонної речовини, складно виділити, оскільки в реальності кільцева структура має власне випромінювання. Однак при дослідженні розподілу темної речовини подібні ефекти можуть бути виявлені. Кільце темної речовини може формуватися при зіткненні двох скупчень галактик та їх гало, що було продемонстровано в роботі [164] для випадку, коли зіткнення відбувається уздовж променя зору. Зауважимо, що одним з найвідоміших скупчень є 1E 0657-558 (скупчення Куля — "bullet cluster"). Таку назву скупчення отримало завдяки незвичайному розподілу газу (результат спостережень в рентгенівському діапазоні) і розподілу темної речовини, відновлене по ефектах гравітаційного лінзування [114]. Форма розподілу газу і темної речовини нагадує кулю, що може бути наслідком зіткнення перпендикулярно променю зору. Роль початкових умов у можливому формуванні кільця темної речовини при зіткненні систем до сих пір обговорюються, також як і обговорюється виявлене кільце темної речовини в скупченні CL0024+17 (див. розділ 1 дисертації і огляд в [202]). Чи може формуватися кільце темної речовини, подібно до того, як формуються кільця в баріонній речовині в кільцевих галактиках — це питання залишається відкритим. Відповідь на це питання дозволить дізнатися нові властивості темної матерії. Однією з цікавих задач може бути пошук гравітаційних лінз, в яких структурним елементом є гравітуюче кільце. Дійсно, в даний час є багато оглядів неба (SDSS, PanSTARRS, DES, KIDs, WISE, т.і.), в яких ведеться активний пошук нових гравітаційно лінзованих систем за допомогою методів машинного навчання [225, 220]. Запропоновані методи машинного навчання [225] дозволяють протестувати алгоритм на відомих оглядах неба з ідентифікованими джерелами для відпрацювання пошуку гравітаційних лінз, які характеризуються певними ознаками: наявність декількох зображень в межах одного невеликого просторового масштабу і наявність центральної галактики. Саме ці ознаки є базовими для виділення гравітаційно лінзірованного об'єкта. Уже ототожнені гравітаційні лінзи в відомих оглядах дозволяють навчити алгоритм на виборі об'єктів необхідного типу, а потім використовувати його для пошуку гравітаційно лінзових об'єктів в нових оглядах. Одним з таких оглядів є огляд південного неба KIDS, отриманий на телескопі VST, який має широке поле зору і високу якість зображень і дозволяє проводити пошук різних типів об'єктів, в тому числі і гравітаційно лінзових джерел: галактика– на–галактиці або квазар–на–галактиці. Завдяки співпраці між групами італійських та харківських астрофізиків, за участю автора, вдалося отримати нові бази даних оглядів, які в свою чергу дозволили виявити нові претенденти на гравітаціонні лінзі також із конфігурацією, яка досить рідко зустрічається, така як квадруполь [220]. Методи машинного навчання у застосуванні до пошуку об'єктів, де гравітаційною лінзою є, наприклад, кільцева галактика або скупчення галактик з кільцевою структурою темної речовини з урахуванням виявлених в дисертації і в [76] відмінностей (три кільця Ейнштейна, радіальні зображення), дозволять використовувати ці методи в майбутньому при пошуку подібних об'єктів. При цьому наступним кроком є урахування неоднорідного розподілу речовини як в центральній галактиці, так і в кільці, і порівняння результуючих ефектів з уже знайденими. Також необхідно охопити якомога більше різноманіття можливих конфігурацій подібних гравітаційних линз з урахуванням орієнтації їх в просторі і різного відхилення осі симетрії лінзи з променем зору. Такі дослідження дозволяють відкрити новий напрямок в області пошуку гравітаційних лінз з нетривіальною топологією. Дійсно, кількість нових оглядів неба буде тільки зростати, особливо з вступом в дію телескопів наступного покоління, наприклад LSST, Euclid і т.і. Можна припустити, що перша гравітаційна лінза, яка складається з кільцевої структури баріонів або темної речовини, буде відкрита таким методом в найближчі 10 років.

## 8.5 Граничні переходи до відомих випадків сильного лінзування

Отриманий розв'язок для лінзової системи "однорідний диск з отвором + центральна маса" є узагальненням відомих випадків більш простих лінзових систем. Ми коротко розглянемо їх, оскільки це буде корисним для розуміння формувань кілець в даній системі при різних параметрах лінзи.

a) Граничний перехід до точкової маси $m_0 \to 1$ ($m_{disc} \to 0$, $\kappa \to 0$). З виразів (8.9) і (8.14) легко побачити, що $x_{\rm II} \to x_{\rm I} = 1$ і $\triangle x_{\rm II} \to r_s$, тобто друге кільце вироджується в головне кільце Ейнштейна. Таким чином, при зменшенні значення маси диска і незмінній його площі друге кільце буде зміщуватися в бік головного кільця Ейнштейна. Якщо внутрішній радіус другого кільця вийде за границі диска $x_{\rm II}^{In} \to x_{\rm I}^{In} > r_2$, то друге кільце повністю зникне.

b) Граничний перехід до широкого диска $r_2 \gg 1$ також відповідає $\kappa \to 0$. У цьому випадку головне кільце екранується диском. Оскільки центральна маса має фіксоване значення $m_0 < 1$, то $x_{\rm II}^{Out,In} \to (\sqrt{r_s^2 + 4|\kappa r_1^2 - m_0|} \pm r_s)/2 \to x_{\rm III}^{Out,In}$ і в цьому випадку друге кільце вироджується в третє кільце Ейнштейна. Відзначимо, що при $r_2 \gg 1$, збільшення внутрішнього радіуса диска призводить до зменшення радіуса другого кільця. При цьому друге кільце "стягується" до внутрішнього краю диска. При подальшому збільшенні $r_2$, значення $x_{\rm II}^{Out,In}$ виходять за межі застосування і друге кільце зникає. При цьому зникнення другого кільця супроводжується появою третього, оскільки виконується умова $x_{\rm III}^{Out} < r_1$. Також подібний ефект виникає в разі зменшення маси диска при фіксованих значеннях його радіусів (площі).

c) Граничний перехід до нескінченно тонкого кільця $r_1 \to r_2 \to r$ відповідає $\kappa \to \infty$. З виразів (8.9) і (8.14) видно, що в цьому випадку $x_{\rm II} \to r$ і $\triangle x_{\rm II} \to 0$, а рівняння лінзи (8.8) має вигляд

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \begin{cases} \left(1 - \dfrac{m_0}{x^2}\right), & x < r \qquad \text{(a)} \\ \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right), & x > r \qquad \text{(b).} \end{cases} \tag{8.21}$$

Якщо $r < 1$, то існують перше і третє кільця одночасно, що можливо тільки в цьому граничному випадку. В системі "диск і центральна маса" зникнення другого кільця завжди відбувається в парі з першим або третім. Якщо $m_0 = 0$, то розв'язок відповідає відомому рішенню для лінзування на нескінченно тонкому кільці [31]. У цьому випадку, як відомо, існує одне кільце Ейнштейна і неспотворене зображення джерела в центрі.

d) Граничний перехід до суцільного диску (без центрального отвору) $r_1 \to 0$. При $m_0 \to 0$ ($m_{disk} \to 1$) і рівняння лінзи (8.8) приймає вид

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{r^2}\right), \quad |x| < r \qquad \text{(a)} \\ \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right), \quad |x| > r \qquad \text{(b)} \end{cases} \tag{8.22}$$

де зручно позначити $r_2 = r$. Цей розв'язок добре відомий [215, 31], але нам здається корисним привести зображення для деяких випадків. З рівняння (8.22a) видно, що радіус зображення на диску збільшується або зменшується в залежності від величини радіуса диска: $r_{im} = r_s|1 - 1/r^2|^{-1}$. При $r < 1/\sqrt{2}$

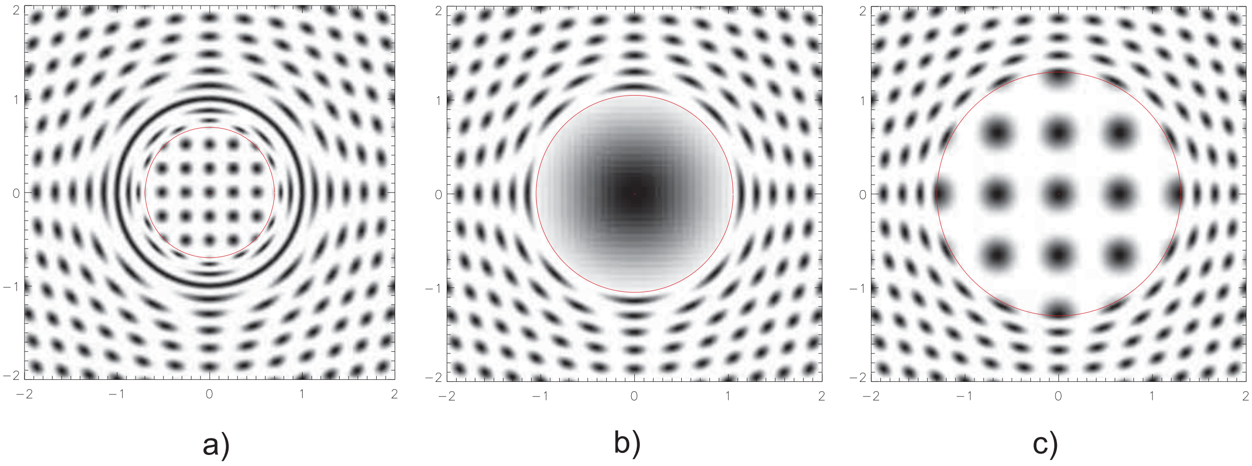


Рис. 8.12. Зображення сітки гауссових джерел ($r_s = 0.1$) за рахунок гравітаційного лінзування на однорідному диску ($m_{disc} = 1$ і $r_1 = 0$) для наступних випадків: a) $r = 0.7$, b)$r = 1.05 = x_{\mathrm{I}}^{Out}$, c) $r = 1.3$.

зображення менше розміру джерела (рис. 8.12 a), а при $1/\sqrt{2} < r < 1$ зображення джерела збільшується і при $r \to 1 \pm 0$. На рис. 8.12b показаний випадок, коли зображення збільшено в 11 раз і практично повністю заповнює диск. При подальшому збільшенні радіуса диска розмір зображення зменшується (рис. 8.12 c) і $r_{im} \to r_s$ при $r \to \infty$. Подібний ефект спостерігається і на даній системі "диск + центральна маса". Збільшення зображення на диску (при зміщеному джерелі) може призводити до помітних ефектів для кривих блиску, які ми розглянемо в наступному підрозділі.

## 8.6 Коефіцієнт підсилення і криві блиску

Розглянемо залежність коефіцієнта підсилення від положення джерела для випадку точкового джерела. Критичні криві визначаються умовою $\det A = 0$, коефіцієнт підсилення $\mu = 1/\det A$, де визначник матриці $\det A = |\partial y_i/\partial x_j|$. Рівняння лінзи (8.8) дає

$$\det A = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^4}, & x \geq r_2 \qquad \text{(a)} \\ (1-\kappa)^2 - \left(\dfrac{\kappa r_2^2 - 1}{x^2}\right)^2, & r_1 \leq x \leq r_2 \qquad \text{(b)} \\ 1 - \dfrac{m_0^2}{x^4}, & x \leq r_1 \qquad \text{(c).} \end{cases} \tag{8.23}$$

З (8.23) легко побачити, що критичними кривими є окружності, радіуси яких дорівнюють радіусам кілець Ейнштейна:

$$x_{\mathrm{I}}^{cr} = x_{\mathrm{I}} = 1,$$
$$x_{\mathrm{II}}^{cr} = x_{\mathrm{II}} = \sqrt{|(\kappa r_2^2 - 1)/(\kappa - 1)|},$$
$$x_{\mathrm{III}}^{cr} = x_{\mathrm{III}} = \sqrt{m_0}.$$

Тому очевидно, що каустика (з урахуванням всіх трьох областей) являє собою точку з координатами $(0, 0)$. Коефіцієнти підсилення для кожної з трьох областей має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{I}}^{\pm} &= \frac{1}{4}\frac{\left(y \pm \sqrt{y^2+4}\right)^2}{y\sqrt{y^2+4}}, && \text{(a)} \\ \mu_{\mathrm{II}}^{\pm} &= \frac{1}{4(\kappa-1)^2}\frac{\left(y \pm \sqrt{y^2+4(\kappa-1)(\kappa r_2^2-1)}\right)^2}{y\sqrt{y^2+4(\kappa-1)(\kappa r_2^2-1)}}, && \text{(b)} \\ \mu_{\mathrm{III}}^{\pm} &= \frac{1}{4}\frac{\left(y \pm \sqrt{y^2+4m_0}\right)^2}{y\sqrt{y^2+4m_0}}. && \text{(c)} \end{aligned} \tag{8.24}$$

Знак '+' відповідає зображенню позитивної парності, а знак '-' відповідає зображенню негативної парності. Як і слід було очікувати, коефіцієнти підсилення для першої (8.24a) і третьої (8.24c) областей є коефіцієнти підсилення для точкової лінзи з масою, що дорівнює 1 і $m_0$, відповідно. Зауважимо, що коефіцієнт підсилення від диска (8.24b) можна отримати шляхом наступної заміни в виразі (8.24a): в знаменнику $4 \to 4(\kappa - 1)^2$ і під знаком кореня $4 \to 4(\kappa - 1)(\kappa r_2^2 - 1)^2$. Повний коефіцієнт підсилення з урахуванням всіх областей $\mu = \mu_{\mathrm{I}} + \mu_{\mathrm{II}} + \mu_{\mathrm{III}}$.

Розглянемо джерело, яке рухається по прямій лінії на деякій відстані від центру гравітаційної лінзи. Тоді зручно параметризувати $y$ наступним чином:

$$y = \sqrt{r_0^2 + t^2},$$

де $r_0$ — найменша відстань, на яку наближається джерело до початку координат, $t$ — умовний безрозмірний "час" руху джерела (при $t = 0$ маємо $y = r_0$). Ми отримуємо криву блиску наступним чином. Для заданого значення $t$ обчислюємо значення $y_\pm$, потім знаходимо значення $x_\pm$ з рівняння лінзи (8.8) для різних областей і відповідні коефіцієнти підсилення по формулі (8.24). На рис. 8.13 показані різні приклади залежності коефіцієнта підсилення від положення джерела (будемо називати їх надалі для зручності "криві підсилення"). Добре видно три піки на кожному з рисунків 8.13. Існу-

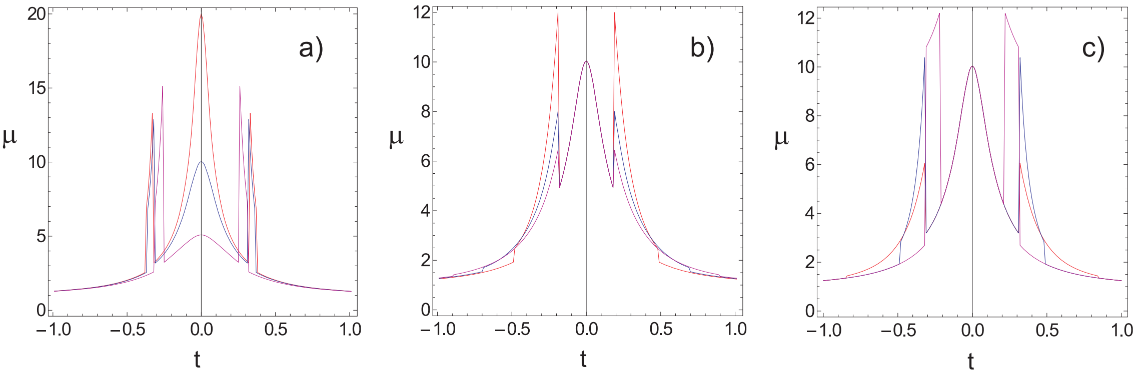


Рис. 8.13. Залежність коефіцієнта підсилення від положення джерела при лінзуванні a) на диску з $r_1 = 0.67$, $r_2 = 0.85$ і центральної маси з $m_0 = 0.7$ при $r_0 = 0.05$ (помаранчева), 0.1 (синя), 0.2 (фіолетова); b) на диску з $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.9$ для різних значень центральної маси: $m_0 = 0.5$ (помаранчева); $m_0 = 0.6$ (синя); $m_0 = 0.7$ (фіолетова); c)$m_0 = 0.5$, $r_2 = 0.85$, $r_1 = 0.4$ (помаранчева), $r_1 = 0.5$ (синя), $r_1 = 0.6$ (фіолетова).

ють відмінності у формі піків від диска і від центральної маси. З рис. 8.13 a видно, що при збільшенні $r_0$ внесок в криву блиску при лінзуванні на диску стає переважним. З іншого боку, максимальні значення коефіцієнта підсилення досягаються при меншому значенні центральної маси (рис. 8.13 b). рис. 8.13 c демонструє, що різна ширина диска призводить до різної форми кривих блиску. Таким чином, спостереження і аналіз кривих блиску віддалених об'єктів можуть дозволити виявити лінзи, що містять кільцевий розподіл речовини. Звичайно, для реальних об'єктів необхідно враховувати неоднорідний розподіл густини в кільці-лінзі і можливий нахил площини диска до картинної площини. Врахування цих ефектів може бути наступним кроком для дослідження ефектів гравітаційного лінзування на об'єктах, що мають кільцеві (тороїдальні) структури.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 8

У розділі досліджені ефекти гравітаційного лінзування на системі центральна маса і тор (в наближенні диска з отвором). Аналіз сформованих кілець Ейнштейна при лінзуванні на диску і центральній масі показав різноманітність можливих варіантів. В першу чергу, це формування трьох кілець Ейнштейна. Припускаючи для більшості астрофізичних об'єктів $m_0 \geq m_{disc}$, отримуємо грубе обмеження на радіуси диска, при якому три кільця існують: $r_1 \geq 0.7$ і $r_2 < 1$ при відносно високій поверхневій густині $\kappa > \kappa_{cr}$.

Більш поширений варіант – це два кільця Ейнштейна, які виникають в широкому діапазоні параметрів лінзової системи. При цьому добре видно, що поверхнева яскравість одного з кілець залежить від густини в диску і може спадати як до внутрішнього краю диска, так і до зовнішнього. Формально, отримуючи розподіл яскравості в одному з кілець, можна відновити розподіл густини в диску, що може бути важливим для відновлення маси в диску. Отримано необхідні та достатні умови існування другого кільця Ейнштейна. Відзначимо, що якщо друге кільце зникає (при певних параметрів), то воно зникає разом з першим або третім. Навпаки, перше і третє кільце Ейнштейна може зникати "на самоті".

Найбільш поширений випадок (за параметрами) — одне кільце Ейнштейна, яке може не відрізняться від головного кільця Ейнштейна або, навпаки, мати значну ширину, повністю заповнюючи диск. Фактично, кільцевий розподіл речовини в лінзі може "маскуватися" під точкову масу. Якщо кільце-лінза не виявляється в оптичному або іншому діапазоні (темна речовина), то можна зробити неправильні висновки про величину і розподіл маси в лінзі і відстань до неї. Навпаки, спостереження широкого яскравого кільця Ейнштейна може бути критерієм для виявлення об'єктів з кільцевою структурою. Також відзначимо, що зображення джерела може збільшуватися при проходженні по диску (в проекції на площину лінзи). Це призводить до значного підсилення на кривій блиску, що також може бути критерієм для виявлення подібних лінз.

Успішність застосування методів машинного навчання для пошуку нових гравітаційних лінз за сучасними оглядам неба, з урахуванням виявлених ефектів лінзування на розглянутій системі, дозволять використовувати їх в майбутньому (при введенні до ладу космічних телескопів LSST і Euclid) для пошуку об'єктів з тороїдальними (кільцевими) структурами.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [13, 76, 89, 94, 220, 225].

# ВИСНОВКИ

Головні результати, що були отримані у дисертації, є наступними.

1. Показано, що на площині (2D) задача про пару вихорів в радіальному потоці допускає точне рішення. А саме, при певному співвідношенні між параметрами виникають області "позаднього" руху вихору. У розбіжному потоці відстань між компонентами пари збільшується, але цілісність пари не порушується. У збіжному потоці вихори в парі зближуються, а швидкість руху пари зростає. В обох випадках пара йде на нескінченність з області потоку, змінивши відстань між компонентами на скінченну величину. Для вихорів одного знака з рівними інтенсивностями відстань між вихорами лінійно залежить від часу. У розбіжному потоці вони необмежено віддаляються один від одного. У збіжному потоці відстань між ними обертається в нуль за скінченний час. Знайдені точні розв'язки для дипольного тороїдального вихору в радіальному потоці в наближенні чотирьох плоских вихорів, що моделює дипольний тороїдальний вихор. Показано, що в цьому випадку компоненти пар викидаються акреційним потоком. При цьому швидкість викиду збільшується експоненціально в порівнянні з початковою і залежить від відношення циркуляції вихору до потужності стоку. Досліджено вплив на динаміку вихорів в більш складному потоці (джерело і диполь, квадруполь). Показано, що основний результат, пов'язаний з прискоренням викидів, зберігається і для більш складної течії, оскільки основний вплив має монопольна компонента. Однак присутні відмінності (виникає асиметрія) динаміки вихорів в порівнянні з попереднім випадком монопольного потоку.

2. Показано, що існують як аналогії, так і якісні відмінності динаміки дипольного тороїдального вихорів в 3D від поведінки систем вихорів в 2D випадку. У збіжному (акреційному) потоці кільцеві вихори, так само як і їх плоскі аналоги, прискорюються. У разі дипольного тороїдального вихору це призводить до викиду прискорених компонент, але при достатній потужності потоку відбувається захоплення кільцевих вихорів потоком, що супроводжується їх колапсом. Показано, що закрутка (орбітальний рух) може призводити до зміни напрямку руху кільцевого вихору, а також впливає на умови колапсу.

Показано, що інтеграл спіральністі для тороїдального вихору із закруткою (орбітальним рухом) і максимум швідкості на твірній вихору відрізняється від відомої формули Моффата на числовий коефіцієнт.

3. Отримано точний інтегральний вираз для потенціалу однорідного кругового тора, справедливий в довільній точці простору шляхом складання тора з нескінченно тонких кілець. Вперше показано, що зовнішній потенціал тора з високою точністю представляється потенціалом нескінченно тонкого кільця тієї ж маси аж до поверхні тора. Показана аналогія між потенціалами тора і нескінченно тонкого кільця і потенціалами кулі і матеріальної точки. Отримані наближені вирази для потенціалу тора в зовнішній і внутрішній областях. Показано, що внутрішній потенціал тора може бути представлений потенціалом циліндра і складовою, що містить гауссову кривизну поверхні тора ( "потенціал кривизни"). Показано, що існує зв'язок між потенціалом тороїдальної оболонки і гауссовою кривизною. Шляхом зшивання внутрішнього і зовнішнього потенціалу отримано вираз для внутрішнього потенціалу тора у вигляді розкладання в степеневий ряд з числовими коефіцієнтами. Коефіцієнти ряду знайдено шляхом зшивання внутрішнього і зовнішнього потенціалу на поверхні тора. Отримані наближені вирази, які набагато простіше інтегральних та дозволяють вирішувати задачі динаміки аналітично і навіть в спеціальних випадках в елементарних функціях.

4. Аналітично досліджено динаміку в гравітаційному полі центральної маси і тонкого тора. Знайдено рівняння для окружності нестійкої рівноваги "кільце Лагранжа" , яке є аналогією з точкою Лагранжа $L_1$ в задачі трьох тіл. Показано, що в такій системі замкнуті кругові орбіти існують тільки до певного радіуса, який відповідає останній стійкій орбіті. За аналогією з релятивістським випадком, де сталий рух можливий аж до останньої внутрішньої стійкій орбіти "the innermost stable circular orbit (ISCO)" , ми назвали останню стійку орбіту в даній системі як "the outermost stable circular orbit (OSCO)". Показано, що в кільцевих галактиках типу об'єкта Хога, де маса центральної галактики порівняна з масою кільця, існує область нестійких орбіт між кільцем Лагранжа та OSCO, природа якої пов'язана з конкуренцією гравітаційних сил з боку центральної галактики та кільця. Як результат, існування

цієї області нестійких орбіт може призводити до вимітання зірок за рахунок тісних зближень і утворення щілини в розподілі густини між центральною галактикою і кільцем, що спостерігається в усіх кільцевих галактиках. Також показано, що в такій системі в меридіональній площині існують замкнуті орбіти нових типів, які можуть свідчити про існування в такій системі третього незалежного інтеграла.

5. Показана істотна роль центральної маси в стабільності систем, що містять гравітуючий тор. Чисельне моделювання можливих траєкторій у внутрішньому потенціалі тора при наявності центральної маси показало, що існують принаймні два типи орбіт в супутньої системі: гало і коробчаті орбіти. Показано, що можливо існування квазізамкнених гало-орбіт. Знайдено рівняння руху і його рішення для коробчатих орбіт, які відіграють істотну роль при аналізі подальших чисельних експериментів по стійкості тора в задачі $N$ тіл. Показано, що в рамках задачі про незбурений рух можливо сформувати тор, в якому частинки рухаються по кеплерівським орбітам, "тор Кеплера" , який є узагальненням кеплерівського диска.

6. Вперше показано, що самогравітуючий тор в полі центральної маси залишається стабільним, а рівноважний перетин має форму овалу з гауссовим розподілом густини, що узгоджується з даними спостережень. Побудована динамічна модель затінюючого тора в активних ядрах галактик в рамках задачі $N$ тіл при врахуванні гравітаційних взаємодій між хмарами. Показано, що спостережувану геометричну товщину затінюючого тору в АЯГ можна пояснити за рахунок руху хмар по нахиленим орбітам з розкидом по ексцентриситетам, що в свою чергу є результатом гравітаційної взаємодії центральної маси і хмар в торі. Отримано вираз, який дозволяє прогнозувати поведінку системи для довільного значення маси тора і числа частинок в ньому.

7. Чисельні експерименти дослідження еволюції самогравітуючого тора з різними початковими умовами показали, що геометрична товщина тора є більшою, якщо в початковому стані присутній розкид орбіт частинок не тільки по нахилам, але й по ексцентриситетам. На підставі отриманих результатів запропоновано сценарій формування тора в АЯГ, який пов'язаний з початком

активної стадії ядра. Показано в рамках задачі $N$ тіл, що рівноважний розподіл хмар в торі, досягнутий за рахунок самогравітації, задовольняє умовам затінення акреційного диска в активних ядрах галактик (АЯГ). Показано, що спостережувані некеплеровскі криві обертання та розподіл швидкості в торі сейфертівській галактиці NGC 1068 можна пояснити особливостями руху хмар в торі за рахунок ефектів самогравітації. Отримано оціночні вирази для температури хмар внаслідок нагріву їх випромінюванням аккреційнного диска, які узгоджуються з даними спостережень.

8. Аналітично та чисельно досліджені ефекти гравітаційного лінзування на системі центральна маса і тор (в наближенні тонкого диска з отвором). Показано, що лінзування на такій системі забезпечує різноманітність можливих конфігурацій залежно від поверхневої густини в диску-лінзі. У даній системі можливе формування трьох кілець Ейнштейна, якщо маса диска порівняна з центральною масою, а ширина диска задовольняє знайденим нами умовам. Два кільця Ейнштейна виникають в широкій області параметрів, при цьому яскравість кілець може істотно відрізнятися. Також може формуватися одне кільце Ейнштейна. В залежності від параметрів лінзової системи одне кільце Ейнштейна може бути ідентично випадку лінзування на точковій лінзі або, навпаки, мати істотну ширину і високу яскравість. Показано, що в разі відхилення джерела від осі спостерігач–лінза, можливе формування не тільки дугоподібних зображень, але також і радіально витягнутих зображень, що також може бути критерієм для пошуку систем, що містять кільцеві структури. Показано, що розглянута система є узагальненням багатьох класичних випадків лінзових систем.

# ПОДЯКИ

Автор дякує Віктору Мусійовичу Конторовичу, який навчив мене працювати в різних областях астрофізики та фактично визначив область моїх досліджень. З Віктором Мусійовичем ми вперше почали обговорювати питання дослідження тороїдальних структур у гідродинаміці (тороїдальні вихори) і в гравітації (починаючи з ідеї кільця Лагранжа) із пристосуванням до астрофізичних задач. Моя вдячність Сергію Олександровичу Пославському, з яким ми провели дослідження по динаміці вихорів і написали ряд спільних статей, а також Григорію Михайловичу Резніку за сумісну роботу, в який він ввів нас в цікавий світ точкових вихорів в потоці. Світла пам'ять моєму другу і блискучому вченому Віктору Григоровичу Вакуліку, з яким ми досліджували гравітаційний потенціал тора, пройшовши разом складні шляхи крізь математичні розрахунки, а також з ним ми почали проводити перші експерименти по стійкості тора в задачі $N$ тіл. Автор дякує Олексію Володимировичу Сергєєву, спільно з яким проводилися і тривають далі дослідження задачі $N$ тіл для динамічної моделі тора в АЯГ. Я вдячна Валерію Михайловичу Шульзі за його підтримку під час моєї роботи у відділі Міліметрової астрономії. З ним ми обговорювали різні астрофізичні задачі, які потім реалізувалися у вигляді спільних робіт. Моя вдячність Юрію Григоровичу Шкуратову, з яким мені пощастило працювати над задачею обчислення орбіти супутника, а його підтримка і допомога дозволили нам більш оптимально проводити чисельні експерименти стійкості тора за допомогою нового GPU. Також дякую Альберту Тадеушевичу Котвицькому, сумісно з яким була зроблена наша робота по гравітаційному лінзуванню на торі з центральною масою. Я дякую Массімо Капаччіолі за плідне обговорення останніх робіт по об'єкту Хога і динамічної моделі АЯГ, що значно поліпшило наші статті, а також за створення італійсько-українського співробітництва, яке відкрило нам можливості спільних робіт в різних областях астрофізики. Я дякую моїм молодих співавторам Марині Сергійовні Михайловій і Анні Володимирівні Донець, з якими ми починали працювати, коли вони були ще студентками, і моїй нинішній студентці Ніні Олександрівні Акерман, з якою ми продовжуємо працювати

над моделлю АЯГ. Автор висловлює величезну вдячність Олександру Петровичу Железняку, Вячеславу Володимировичу Захаренку, Віктору Павловичу Тишковцю, Дмитру Федоровичу Лупішку, Володимиру Анатолійовичу Захожаю, Андрію Олександровичу Терещенку, Юрію Івановичу Великодському за уважне прочитання дисертації і автореферату і цінні зауваження, які дозволили значно поліпшити текст. Моя вдячність Генадію Петровичу Марченку за його підтримку і готовність завжди обговорити результати кожної роботи.

Some of the chapters of this thesis make use of the following ALMA data: ADS/JAO.ALMA♯2016.1.00052.S., ADS/JAO.ALMA♯2013.1.00055.S. ALMA is a partnership of ESO (representing its member states), NSF (USA) and NINS (Japan), together with NRC (Canada), MOST and ASIAA (Taiwan), and KASI (Republic of Korea), in cooperation with the Republic of Chile. The Joint ALMA Observatory is operated by ESO, AUI/NRAO and NAOJ.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. Москва: Наука, 1979. 830 с.
2. Алексеенко С. В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Москва-Ижевск: ИКИ. 2005. 504 с.
3. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы. Москва: МЦНМО. 2007. 392 с.
4. Банникова Е.Ю. Распределение облаков в затеняющем торе активных ядер галактик // Радиофизика и радиоастрономия. 2015. Т.20, №3. С. 191 – 204.
5. Банникова Е.Ю. Эволюционные модели и тонка структура вихрей и струй космических радиоисточников // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. На правах рукописи. 2006. 144 с.
6. Банникова Е.Ю., Конторович В.М. Конторович В.М. Тороиальный вихрь как структурный элемент активных ядер галактик // Радиофизика и радиастрономия. 2006. Т. 11, №1. С. 42–48.
7. Банникова Е.Ю., Блиох К.Ю., Конторович В.М. Эволюция и коллапс самогравитирующего тороидального вихря // Нелинейные волны'2004. Нижний Новгород, Изд-во: ИПФ РАН. 2004. С. 243–256.
8. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Пославский С.А. Ускорение и выброс тороидального вихря как механизм образования компонент джетов активных ядер галактик // Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность: Сборник трудов международной конф. под ред. Н.С. Ерохина, 23–25 ноября 2009, Москва: ЛЕНАНД, 2009. С. 304–309.
9. Банникова Е.Ю., Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Взаимодействие ударного фронта с молекулярным облаком // Astronomy and Beyond: Proceedings of the 10th G. Gamow International Summer School, 23–28 August 2010, Odessa, 2010. P. 132–134.

10. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Пославский С.А. Спиральность кольцевого вихря, закрученного вокруг своей оси // Современные проблемы естественных наук: Сборник тезисов докладов международной конф. "Тараповские чтения-2016" , 17–22 апреля 2011 г., Харьков, 2016. С. 79–80.

11. Банникова Е. Ю., Конторович В. М., Пославский С. А. Динамика точечных и кольцевых вихрей в потоках с особенностями // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Труды XVIII Международного симпозиума, 26–28 июня 2017 г., Харьков, 2017. С. 36–39.

12. Банникова Е.Ю. Формирование газопылевого тора в активных ядрах галактик // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Тезисы докладов XXXIII международной конференции, 19–22 апреля 2016, Пущино, 2016. С. 7.

13. Банникова Е.Ю., Котвицкий А.Т. Три кольца Эйнштейна: точное решение и численное моделирование // Астрофизика высоких энергий: Сборник тезисов международной конференции, 22–25 декабря, 2014, Москва, 2014. С. 34.

14. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Пославский С.А. Динамика кольцевого вихря в осесимметричном потоке с распределенными особенностями на оси симметрии // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Сборник тезисов международной конф., 1–31 мая 2012, Харьков, 2012. С. 26.

15. Банникова Е.Ю., Вакулик В.Г., Шульга В.М. Равновесное сечение самогравититрующего тора: применение к активным ядрам галактик // Astronomy and beyond: Book of Abstract of 12th International Gamow conference, 20–26 August 2012, Odessa 2012. С. 27.

16. Банникова Е.Ю., Вакулик В.Г. Газопылевые торы в активных ядрах галактик: новые результаты // Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра: Тезисы докладов Всеросийсской астрономической конференции,

24–27 декабря 2012, Институт космических исследований РАН, Москва, 2012. С. 28.

17. Банникова Е.Ю., Вакулик В.Г., Шульга В.М. Гравитационный потенциал однородного кругового тора // От эпохи Галилея до наших дней: Тезисы докладов Всероссийской астрономической конференции, 12–19 сентября 2010, Специальная астрофизическая обсерватория, Нижний Архыз, 2010. С. 122.
18. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости / перевод с англ., под ред Степанова Г.Ю. Москва: Мир, 1973. 758 с.
19. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.:Наука, 1977. 430 с.
20. Бескин В. С. Осесимметричные стационарные течения в астрофизике. Москва: Физматлит, 2006. 384 с.
21. Блиох К.Ю., Конторович В.М. Об эволюции и гравитационном коллапсе тороидального вихря // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2003. Т.123, №6. С. 1123–1130.
22. Болотин Ю.Л., Тур А.В., Яновский В.В. Конструктивный хаос. Харьков: Изд-во Института Монокристаллов. 2005. 420 с.
23. Бочкарев Н.Г. Основы физики межзвездной среды. Москва: Изд. МГУ., 1992. 352 с.
24. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. Перевод с немецкого под ред. Чаплыгина С. А., Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 82 с.
25. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. Москва: Наука, 1975. 414 С.
26. Грандштейн И. С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физ.-мат.лит., 1963. 1100 с.
27. Должанский Ф.В. Лекции по геофизической гидродинамике. Москва: ИВМ РАН, 2006. 378 с.

28. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Москва: Наука, 1968. 800 с.
29. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Москва: Наука, 1979. 760 с.
30. Железняк О.А., Терещенко А.А. Равновесие и устойчивость тонкого тора в гравитационном поле галактики // Вiсник астрономiчної школи. 2012. Т.8, №2. С. 129–135.
31. Захаров А.Ф. Гравитационнные линзы и микролинзы. Москва: Янус-К, 1997. 328 с.
32. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем // Успехи физических наук. 2012. Т.182, №6. С. 569–592.
33. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. Перевод с немецкого Е.М.Лифшица. Москва: ИЛ. 1954. 486 с.
34. Ковалевская С.В. Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна: Научные работы. Изд. Академии наук СССР, 1948. 368 с.
35. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. Москва: Мир. 2007. 512 с.
36. Конторович В.М. Линейные и нелинейные волны (элементарное введение в теорию гамильтоновых переменных с приложениями к физике и астрофизике) // Радиофизика и радиоастрономия. 2001. Т.6, №3. С. 165–211.
37. Куликовский П.Г. Звездная астрономия. Москва: Наука, 1978. 256 с.
38. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамими и их математические модели. Москва: Наука, 1973. 416 с.
39. Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К. Математические модели сплошных сред. Изд."Наукова думка"НАН Украины, 2010. 551 с.

40. Ламб Г. Гидродинамика. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1947. 929 с.

41. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Москва : Наука, 1973. 208 с.

42. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 736 с.

43. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Москва: Наука, 1982. 621 с.

44. Ляпунов Е.М. Об устойчивости элипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук, 1884. 126 с.

45. Маршер А.П. и Эрштадт С.Г., В сборнике "Астрономия: традиции, настоящее, будущее". Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2007. 117 с.

46. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. Киев: Наукова Думка, 1990. 282с.

47. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. Пер. с англ. под ред. С.П. Аллилуева и др. Москва: ИЛ, 1958. 931 с.

48. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. Москва: Энергоатомиздат, 1989. 200 с.

49. Пославский С. А., Банникова Е.Ю., Конторович В.М. Движение вихревой пары в стационарном центральном потоке со знакопеременной радиальной скоростью // Тараповские чтения: Сборник материалов международной научной конференции, 21-25 апреля 2008 г., Харьков, 2008. С. 126–127.

50. Пуанкаре А. Теория вихрей. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" , 2000. 160 с.

51. Риман Б. "О потенциале тора". Сочинения. Под ред. Гончарова В.Л. Москва: ОГИЗ, 1948. 543 с.

52. Саслау У. Гравитационная физика звездных и галактических систем. Москва: Мир, 1989. 542 с.

53. Смайт В. Электростатика и электродинамика. Москва: ИЛ, 1954. 604 с.

54. Сэффмен Ф.Дж. Динамика вихрей. Москва: Научный Мир, 2000. 376 с.
55. Сурдин В.Г.Рождение звезд. Москва: УРСС, 2001. 264 с.
56. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Том 3. Ленинград-Москва: Гостехиздат, 1949. 280 с.
57. Ткачов В.Н., Захаренко В.В., Васильева Я.Ю., Царин Ю.А., Банникова Е.Ю., Илюшин В.В., Саваневич В.Е., Герасименко О.В., Анненков А.Б., Кулишенко С.Ф., Кулишенко Д.Ф. Использование грид-технологий в решении задач радиофизики и радиоастрономии // Радиофизика и радиоастрономия. 2013. Т. 18. С. 176–188.
58. Тур А.В., Яновский В.В. Гидродинамические вихревые структуры. Харьков: НТК "Ин-т монокристаллов"НАНУ, 2012. 292 с.
59. Физика внегалактических источников излучения. Под редакцией Р.Д.Дагкесаманского. Москва: Мир, 1987. 368 с.
60. Черемных О.К. О движении вихревых колец в несжимаемой жидкости // Нелинейная димнамика. 2008. Т.4, №2. С. 417–428.
61. Шкуратов Ю.Г., Коноваленко А.А., Захаренко В.В., Станиславский А.А., Банникова Е.Ю., Кайдаш В.Г., Станкевич Д.Г., Корохин В.В., Ваврив Д.М., Галушко В.Г., Ерин С. , Бубнов И., Токарский П., Ульянов О., Степкин С. , Литвиненко Л.Н., Яцкив Я. С. , Вайдин Г., Зарка Р., Рюккер Х. Украинская миссия на луну: цели и полезная нагрузка // Украинская миссия на луну: цели и полезная нагрузка // Космическая наука и технология. 2018. Т. 24(1). С. 3–30.
62. Шапиро С., Тьюколски С. Черный дыры, белые карлики, нейтронные звезды.Москва: Мир, 1985. 656 с.
63. Яновский В.В. Лекции о нелинейных явлениях. Т.1. Харьков: Институт монокристаллов, 2006. 456 с.
64. Aarseth S. J. Dynamical evolution of clusters of galaxies // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1963. Vol. 126. P. 223–255.

65. Aarseth S. J. Gravitational N-Body Simulation: Tools and Algorithms. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003. 408 p.

66. Abramowicz M. A., Fragile P. C. Foundations of Black Hole Accretion Disk Theory // Living Reviews in Relativity. 2013. Vol. 16. P. 1–89.

67. Alonso-Herrero A., Pereira-Santaella M., Garcia-Burillo S., Davies R.I., Combes F., et al. Resolving the Nuclear Obscuring Disk in the Compton-thick Seyfert Galaxy NGC 5643 with ALMA // Astrophys. J. 2018. Vol. 859, Is. 2.- article id. 144. 12 pp.

68. Antonucci R.R.J. Optical spectropolarimetry of radio galaxies // Astrophys. J. 1984. Vol. 278. P. 499–520.

69. Antonucci R.R.J., Miller J.S. Spectropolarimetry and the nature of NGC 1068 // Astrophys. J. 1985. Vol. 297. P. 621–632.

70. Antonucci R. Unified models for active galactic nuclei and quasars // An.Rev.Astron. and Astroph. 1993. Vol. 31. P. 473–521.

71. Aref H. 150 Years of vortex dynamics // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2010. Vol. 24, Issue 1-4. P. 1-7.

72. Asensio Ramos A., Ramos Almeida C. BayesCLUMPY: Bayesian Inference with Clumpy Dusty Torus Models // Astrophys. J. 2009. Vol. 696. P. 2075–2085.

73. Bannikova E.Yu. The structure and stability of orbits in Hoag-like ring systems// Mon. Not. R. Astron. Soc. Vol. 476. P. 3269–3277.

74. Bannikova E.Yu. and Sergeyev A.V. Dynamics and formation of obscuring tori in AGNs // Frontiers in Astronomy and Space Sciences. 2017. Vol. 4, id.60. P. 1–6.

75. Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Helicity of a toroidal vortex with swirl // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2016. Vol. 122. P.769–775.

76. Bannikova E.Yu., and Kotvytskiy A.T. Three Einstein rings: explicit solution and numerical simulation // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2014. Vol. 445. P. 4435–4442.

77. Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Influence of Orbital Motion on the Collapse of Ring Vortices in an Accretion Flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2014. Vol. 119, №3. P. 584–589.

78. Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Collapse and backward motion of axisymmetric toroidal vortices in an accretion flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2013. Vol. 117, №2. P. 378–384.

79. Bannikova E.Yu., Vakulik V.G., Sergeev A.V. N-body simulation of a clumpy torus: application to active galactic nuclei // Mon. Not. R. Astron. Soc. Vol. 424. P. 820–829.

80. Bannikova E.Yu., Karnaushenko A.V., Kontorovich V.M., Shulga V.M. A new exact solution of Kompaneets equation for a shock front // Astronomy Reports. 2012. Vol. 56, №7. P. 496–503.

81. Bannikova E.Yu., Vakulik V.G., Shulga V.M. Gravitational potential of a homogeneous circular torus: new approach // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2011. Vol. 411. P. 557–564.

82. Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M. Acceleration and ejection of interacting ring vortices by radial flow // Physics Letters A. 2009. Vol. 373. P. 1856–1860.

83. Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M. A dipolar vortex model for the obscuring tori in active galactic nuclei. Astronomy Reports. 2007. Vol. 51. P. 264–273.

84. Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M., Reznik G.M. Dynamics of a vortex pair in radial flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2007. Vol. 105. P. 542–548.

85. Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M. Dipole-vortex structure of the obscuring tori in active galactic nuclei // Black Holes from Stars to Galaxies - Across the Range of Masses, editors V.Karas and G.Matt: Proceedings of the

International Astronomical Union, 21–25 August 2006, Prague, №238, 2006. P. 323–324.

86. Bannikova E.Yu. Dynamics and formation of obscuring tori in AGNs // Quasars at all epochs: Book of abstracts of International Conference, 2–7 April, 2017, Padova, 2017. P. 60.

87. Bannikova E.Yu., V.M. Kontorovich, Poslavskii S.A. Influence of a vortex motion on global rotation of Hoag's object // Фізичні явища в твердих тілах: Матеріали XIII Міжнародної конференції, 5–8 грудня 2017, Харків, ХНУ, 2017. С. 98.

88. Bannikova E.Yu. Lagrangian ring and region of unstable orbits in ring galaxies // Astronomy and beyond: Book of Abstract of International Gamow conference, 13–20 August 2017, Odessa, 2017. P. 9.

89. Bannikova E.Yu. and Kotvytsky A.T. Gravitational lensing effects on a homogeneous ring with a central mass // Astronomy and beyond: Book of Abstract of International Gamow conference, 13–20 August 2017, Odessa, 2017. P. 9.

90. Bannikova E.Yu. Evolution of obscuring tori in active galactic nuclei // All wave astronomy. Shklovsky-100: Book of abstract of International conference, 20–22 June 2016, Institute of Space Research, Moscow, 2016. P. 11.

91. Bannikova E.Yu. Lagrangian ring // Multi-spin Galaxies: Book of abstract of International conference, 26–30 September 2016, Special Astrophysical Observatory of RAS, Nizhnij Arkhyz, 2016. P. 26.

92. Bannikova E.Yu. Clouds distribution in obscuring tori of active galactic nuclei // Astrophysics and cosmology after Gamov: Program and abstracts of 5-th G.Gamov Memorial International Conference dedicated to 111-th anniversary of George Gamov, 16–23 August, 2015, Odessa, 2015. C. 30.

93. Bannikova E.Yu. N-body simulation of a dusty torus in AGN // The European Week of Astronomy and Space Science: Book of abstracts of the International conference, 30 June–4 July 2014, Geneva, 2014. Abstract 00058.

94. Bannikova E.Yu. and Kotvitskiy A.T. and Kotvitskiy A.T. Three Einstein rings: explicit solution and numerical simulation // The European Week of Astronomy and Space Science: Book of abstracts of the International conference, 30 June–4 July 2014, Geneva, 2014. Abstract 00059.

95. Bannikova E.Yu. N-body simulation of a self-gravitating torus: application to active galactic nuclei // Dynamics and kinetic theory of self-gravitating systems: Abstract Book of International Workshop, 4–8 November 2013, Henri Poincare Institute, Paris, 2013. P. 8.

96. Bannikova E.Yu., Vakulik V.G., Sergeev A.V., Shulga V.M. Dynamics of clouds in dusty tori of Active Galactic Nuclei // Astronomy and Space Physics: Book of abstract of International Conference, 22–25 May 2012, Kyiv, 2012. P. 5.

97. Bannikova E.Yu. and Kontorovich V.M. Vortex ring acceleration and ejection by the convergent radial stream as a model of AGN jet components formation // Book of Abstract of International Lyapunov Memorial Conference, 24–30 June 2007, Kharkiv, 2007. P. 8–9.

98. Bannikova E.Yu. Vortex ring ejection as a model of AGN jet components formation // Abstract Book of XXXVII Young European Radio Astronomers Conference, 4–7 September 2007, Bordeaux, 2007. P. 13.

99. Barvainis R. Hot dust and the near-infrared bump in the continuum spectra of quasars and active galactic nuclei // Astrophys. J. 1987. Vol. 320. P. 537–544.

100. Beckert T., Duschl W.J. The dynamical state of a thick cloudy torus around an AGN // Astron. & Astrophys. 2004. Vol. 426. P. 445–454.

101. Binney J., Tremaine S. Galactic Dynamics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994. 747 p.

102. Bisnovatyi-Kogan G.S., Ruzmaikin A.A. The accretion of matter by a collapsing star in the presence of a magnetic field. II - Selfconsistent stationary picture // Astrophysics and Space Science. 1976. Vol. 42. P. 401–424.

103. Blandford R.D. Accretion disc electrodynamics - A model for double radio sources // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1976. Vol. 176. P. 465–481.

104. Belleman R. G., Bedorf J., Portegies Zwart S. F. High performance direct gravitational N-body simulations on graphics processing units II: An implementation in CUDA // New Astron. 2008. Vol. 13. P. 103–112.

105. Beckmann V., Shrader C.R. Active Galactic Nuclei. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2012. 350 p.

106. Bianchi S., Maiolino R., Risaliti G. AGN Obscuration and the Unified Model // Advances in Astronomy. 2012. Vol. 2012. article ID 782030. 17 p.

107. Bisnovatyi-Kogan G.S., Tsupko O.Yu. Gravitational lens // Memorie della Societa Astronomica Italiana. 2012. Vol. 83. P. 54–67.

108. Blandford R.D. Quasar jets and their fields // Royal Society of London Transactions Series A. 2000. Vol. 358, Is.1767. P. 811–829.

109. Blandford R.D., Payn D.G. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1982. Vol. 199. P. 883–903.

110. Bournaud F., Combes F. Formation of polar ring galaxies // Astron. & Astrophys. 2003. Vol. 401. P. 817–833.

111. Brook C.B., Governato F., Quinn T., Wadsley J., Brooks A.M., Willman B. et al. The Formation of Polar Disk Galaxies // Astrophys. J. 2008. Vol. 689, Is. 2. P. 678–686.

112. Brosch N. The nature of Hoag's object - The perfect ringed galaxy // Astron. & Astrophys. 1985. Vol. 153. P. 199– 206.

113. Carilli C. L., Perley R.A., Dhawan V., Perley D.A. Imaging the AGN torus in Cygnus A // asro-ph/1904.01365.- 2019.- 14 p.

114. Clowe D., Bradac M., Gonzalez A. H., Markevitch M., Randall W.S., et al. A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter // Astrophys. J. 2006. Vol. 648. Is. 2. P. L109–L113.

115. Combes F., Garcia-Burillo S., Audibert A., Hunt L., Eckart A., et al. ALMA observations of molecular tori around massive black holes // Astron. & Astrophys. 2019. Vol. 623. id.A7. 19 p.

116. Das V., Crenshaw D. M., Kraemer S. B., Deo R. P. Kinematics of the Narrow-Line Region in the Seyfert 2 Galaxy NGC 1068: Dynamical Effects of the Radio Jet // Astron. J. 2006. Vol. 132, №2. P. 620–632.

117. Del Zanna L., Amato E., Bucciantini N. Axially symmetric relativistic MHD simulations of Pulsar Wind Nebulae in Supernova Remnants. On the origin of torus and jet-like features // Astron. & Astrophys. 2004. Vol. 421. P. 1063–1073.

118. Dönmez O. On the development of the Papaloizou-Pringle instability of the black hole-torus systems and quasi-periodic oscillations // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2014. Vol. 438, Is. 1. P. 846–858.

119. Dorodnitsyn A., Kallman T. Parsec-scale Obscuring Accretion Disk with Large-scale Magnetic Field in AGNs // Astrophys. J. 2017. Vol. 842, Is. 1. P. 43D–59D.

120. Dorodnitsyn A., Kallman T., Bisnovatyi-Kogan G. S. AGN Obscuration through Dusty, Infrared-dominated Flows // Astrophys. J. 2012. Vol. 747. P. 8–19.

121. Draine B.T., Lee H.M. Optical properties of interstellar graphite and silicate grains // Aastrophys. J. 1984. Vol. 285. P. 89–108.

122. Dullemond C. P., van Bemmel I. M. Clumpy tori around active galactic nuclei // Astron. & Astrophys. 2005. Vol. 436. P. 47–56.

123. Dyson F. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1892. Vol. 184, 1041–1106.

124. Eigenbrod A., Courbin F., Dye S., Meylan G., Sluse D., Vuissoz C., Magain P. COSMOGRAIL: the COSmological MOnitoring of GRAvItational Lenses. II. SDSS J0924+0219: the redshift of the lensing galaxy, the quasar spectral variability and the Einstein rings // Astron. & Astrophys. 2006. Vol. 451, Issue 3. P. 747–757.

125. Einstein A. Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field // Science. 1936. Vol. 84, Is. 2188. P. 506–507.

126. Elitzur M., Shlosman I. The AGN-obscuring Torus: The End of the "Doughnut" Paradigm? // Astrophys. J. 2006. Vol. 648. P. L101–L104.

127. Elvis M. A Structure for Quasars // Astrophys. J. 2000. Vol. 545. P. 63–76.

128. Evans I. N., Ford H. C., Kinney A. L., Antonucci R. R. J., Armus L., Caganoff S.HST imaging of the inner 3 arcseconds of NGC 1068 in the light of forbidden O III 5007 A // Astrophys. J. 1991. Vol. 369. P. L27–L30.

129. Farquhar R.W. The Utilization of Halo Orbits in Advanced Lunar Operations. NASA Technical Note.-Washington: NASA, 1971. 101 p.

130. Farquhar R.W. and Kamel A.A. Quasi-periodic orbits about the translunar libration point // Celestial Mechanics. 1973. Vol. 7. P. 458–473.

131. Finkelman I., Moiseev A., Brosch N., Katkov I. Hoag's Object: evidence for cold accretion on to an elliptical galaxy // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2011. Vol. 418, Is. 3. P. 1834–1849.

132. Freeman K. C., Karlsson B., Lynga G., Burrell J. F., van Woerden H., Goss W. M., Mebold, U. A large new galaxy in Circinus // Astron. & Astrophys. 1977. Vol. 55, №. 3. P. 445–458.

133. Fukushima T. Zinal toroiadal harmonic expansions of external gravitational fields for ring-like objects // Astron. J. 2016. Vol. 152.-article id.35. 31 p.

134. Gallimore J. F., Baum S. A., O'Dea C. P., Brinks E., Pedlar A. H2O and OH Masers as Probes of the Obscuring Torus in NGC 1068 // Astrophys. J. 1996. Vol. 462. P. 740–745.

135. Gallimore J.F., Baum S.A., O'Dea C.P. The Subarcsecond Radio Structure in NGC 1068. II. Implications for the Central Engine and Unifying Schemes // Astrophys. J. 1996. Vol. 464. P. 198–211.

136. Gallimore J.F., Baum S.A., O'Dea C.P., Pedlar A. The Subarcsecond Radio Structure in NGC 1068. I. Observations and Results // Astrophys. J. 1996. Vol. 458. P. 136–148.

137. Gallimore J.F., Baum S.A., O'Dea C.P., Brinks E., Pedlar A. H 2O and OH Masers as Probes of the Obscuring Torus in NGC 1068 // Astrophys. J.. 1996. Vol. 462. P. 740–745.

138. Gallimore J.F., Henkel C., Baum S.A., Glass I.S., Claussen M.J., et al. The Nature of the Nuclear H2O Masers of NGC 1068: Reverberation and Evidence for a Rotating Disk Geometry // Astrophys. J. 2001. Vol. 556. P. 694–810.

139. Gallimore J.F., Baum S.A., O'Dea C.P. The Parsec-Scale Radio Structure of NGC 1068 and the Nature of the Nuclear Radio Source // Astrophys. J. 2004. Vol. 613, Issue 2. P. 794–715.

140. Galliano E., Alloin D., Granato G. L., Villar-Mart?n M. Revisiting the location and environment of the central engine in NGC 1068 // Astron. & Astrophys. 2003. Vol. 412. P. 615–631.

141. Garcia-Gonzalez J., Alonso-Herrero A., Hönig S. F., Hernan-Caballero A., Ramos Almeida C., et al. A mid-infrared statistical investigation of clumpy torus model predictions // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2017. Vol. 470. Issue 3. P. 2578–2598.

142. Garcia-Burillo S., Combes F., Ramos Almeida C., Usero A., Krips M., Alonso-Herrero, A., Aalto, S., et al. ALMA Resolves the Torus of NGC 1068: Continuum and Molecular Line Emission // Astrophys. J. Letters. 2016. Vol. 823, Issue 1. P. L12–L18.

143. Garcia-Burillo S., Combes F., Usero A., Aalto S., Krips M., Viti S., Alonso-Herrero A., Hunt L.K., et al. Molecular line emission in NGC 1068 imaged with ALMA. I. An AGN-driven outflow in the dense molecular gas // Astron. & Astrophys. 2014. Vol. 567. P. A125–A149.

144. Garcia-Lorenzo B., Mediavilla E., Arribas S., del Burgo C. Evidence of Two Kinematically Different Stellar Systems in NGC 1068 // Astrophys. J. 1997. Vol. 483, Issue 2. P. L99–L102.

145. Gavazzi R., Treu T., Koopmans L.V.E., Bolton A.S., Moustakas L.A., Burles S., Marshall P.J. The Sloan Lens ACS Survey. VI. Discovery and Analysis of a Double Einstein Ring // Astrophys. J. 2018. Vol. 677, Issue 2. P. 1046–1059.

146. Gerber R.A., Lamb S.A., Balsara D.S. A model for ring galaxies: Arp 147 - like system // Astrophys. J. 1992. Vol. 399. P. L51–L54.

147. Gravity Collaboration, Sturm E., Dexter J., Pfuhl O., Stock M.R., Davies R.I., et al. Spatially resolved rotation of the broad-line region of a quasar at sub-parsec scale // Nature. 2018. Vol. 563. P. 657–660.

148. Gravity Collaboration, Abuter R., Amorim A., Bauböck M., Berger J.P., Bonnet H., et al. A geometric distance measurement to the Galactic center black hole with 0.3% uncertainty // Astron. & Astrophys. 2019. Vol. 625. article id L10. 10 p.

149. Greenhill L. J., Gwinn C. R., Antonucci R. et al. VLBI Imaging of Water Maser Emission from the Nuclear Torus of NGC 1068 // Astrophys. J. 1996. Vol. 472. P. L21–L25.

150. Greenhill L.J., Booth R.S., Ellingsen S.P., Herrnstein J.R., Jauncey D.L., McCulloch P.M., Moran J.M., Norris R.P., Reynolds J.E., Tzioumis A.K. A Warped Accretion Disk and Wide-Angle Outflow in the Inner Parsec of the Circinus Galaxy // Astrophys. J. 2003. Vol. 590. P. 162–173.

151. Gröbli W., 1877. Speziele Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. // Vierteljahrsch. d. Naturforsch. Geselsch. Vol. 22(37-81). P. 129–165.

152. Harfest S., Gualandris A., Merritt D., SpurzemR., Zwart S.P. and Berczik P. Performance analysis of direct N-body algorithms on special-purpose supercomputers // New Astronomy. 2007. Vol. 12, Issue 5. P. 357–377.

153. von Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew. Math. 1858. Vol. 55. P. 25–55. [English transl. by Tait P.G. On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion // Philos. Mag. 1867. Vol. 4(33). P. 485–512.]

154. Henon M. and Heiles C. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments // Astron. J. 1964. Vol. 69. P. 73–79.

155. Hoag A.A. A pecular object in Serpens // Astron. J. 1950. Vol. 55. P. 170.

156. Hönig S.F., Kishimoto M. Dusty Winds in Active Galactic Nuclei: Reconciling Observations with Models // Astrophys. J. Letters. 2017. Vol. 838, Issue 2. P. L20–L26.

157. Huré J.-M. Origin of non-Keplerian motions of masers in NGC 1068 // Astron. & Astrophys. 2002. Vol. 395. P. L21–L24.

158. Huré J.-M., Trova A., Karas V., Lesca C. Interior potential of a toroidal shell from pole values // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2019. Vol. 486. P. 5656–5669.

159. Imanishi M., Nakanishi K., Izumi T. ALMA 0.1-0.2 arcsec Resolution Imaging of the NGC 1068 Nucleus: Compact Dense Molecular Gas Emission at the Putative AGN Location // Astrophys. J. Letters. 2016. Vol. 822, Isssue 1. P. L10–L17.

160. Imanishi M., Nakanishi K., Izumi T., Wada K. ALMA Reveals an Inhomogeneous Compact Rotating Dense Molecular Torus at the NGC 1068 Nucleus // Astrophys. J. Letters. 2018. Vol. 853, Issue 2. P. L25–L32.

161. Interacting Galaxies Arp 147. Hubblesite – Images. Official URL: https://hubblesite.org/image/2422/category/19-interacting-galaxies .

162. Iodice E., Arnaboldi M., Bournaud F., Combes F., Sparke L.S., van Driel W., Capaccioli1 M. Polar Ring Galaxies and the Tully-Fisher Relation: Implications for the Dark Halo Shape // Astrophys. J. 2003. Vol. 585. P. 730–738.

163. Jaffe W., Meisenheimer K., Röttgering H.J.A., Leinert Ch., Richichi A., Chesneau O., Fraix-Burnet D., Glazenborg-Kluttig A., Granato G.-L., Graser U., Heijligers B., Köhler R., Malbet F., Miley G. K., Paresce F., Pel J.-W., Perrin G., Przygodda F., Schoeller M., Sol H., Waters L. B. F. M., Weigelt G., Woillez J., and de Zeeuw P. T. The central dusty torus in the active nucleus of NGC 1068 // Nature. 2004. Vol. 429, Issue 6987. P. 47–49.

164. Jee M. J., Ford H. C., Illingworth G. D., White R. L., Broadhurst T. J., et al. Discovery of a Ringlike Dark Matter Structure in the Core of the Galaxy Cluster Cl 0024+17 // Astrophys. J. 2007. Vol. 661, Issue 2. P. 728–749.

165. King L.J., Jackson N., Blandford R.D., Bremer M.N., Browne I.W.A., de Bruyn A.G., Fassnacht C., Koopmans L., Marlow D., Wilkinson P.N. A complete infrared Einstein ring in the gravitational lens system B1938 + 666 // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1998. Vol. 295, Issue 2. P. L41–L45.

166. Kiuchi K., Shibata M., Montero P.J., Font J.A. Gravitational Waves from the Papaloizou-Pringle Instability in Black-Hole-Torus Systems // Physical Review Letters. 2011. Vol. 106, Issue 25. P. 251102–251107.

167. Kontorovich V.M. The connection between the interaction of galaxies and their activity // Astron.& Astrophyc. Transaction. 1994. Vol. 5. P. 259–278.

168. Kochanek C.S. Quantitative Interpretation of Quasar Microlensing Light Curves // Astrophys. J. 2004. Vol. 605, Issue 1. P. 58–77.

169. Kondratyev B.P. Expansion of the Potential of a Homogeneous Circular Torusin Terms of Geometrical Parameter // Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki. 2018. Vol. 63, №3. P. 311–314.

170. Korobkin O., Abdikamalov E., Stergioulas N., Schnetter E., Zink B., Rosswog S., Ott C.D.The runaway instability in general relativistic accretion discs // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. Vol. 431, Issue 1. P. 349–354.

171. Krolik J.H., Begelman M.C. Molecular tori in Seyfert galaxies - Feeding the monster and hiding it // Astrophys. J. 1988. Vol. 329. P. 702–711.

172. Krolik J.H. AGN Obscuring Tori Supported by Infrared Radiation Pressure // Astrophys. J. 2007. Vol. 661. P. 52–59.

173. Lister M. L., Aller M. F., Aller H. D., Homan D. C., Kellermann K. I., et al. MOJAVE. X. Parsec-scale Jet Orientation Variations and Superluminal Motion in Active Galactic Nuclei // Astron. J. 2013. Vol. 146, Issue 5. P. 120L–142L.

174. Livio M. Astrophysical jets: a phenomenological examination of acceleration and collimation // Physics Reports. 1999. Vol. 311. P. 225–245.

175. Liu Y., Zhang N. Dusty Torus Formation by Anisotropic Radiative Pressure Feedback of Active Galactic Nuclei // Astrophys. J. 2011. Vol. 728. P. L44–L49.

176. Lodato G., Bertin G. Non-Keplerian rotation in the nucleus of NGC 1068: Evidence for a massive accretion disk? // Astron. & Astrophys. 2003. Vol. 398. P. 517–524.

177. Lovelace R.V.E. Dynamo model of double radio sources // Nature. 1976. Vol. 262. P. 649–652.

178. Lynden-Bell D. Magnetic activity in stars, discs and quasars // Royal Society of London Transactions Series A. 2000. Vol. 358, Issue 1767. P. 635–639.

179. Lynden-Bell D. Magnetic collimation by accretion discs of quasars and stars // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1996. Vol. 279, Issue 2. P. 389–401.

180. Maiolino R., Alonso-Herrero A., Anders S., Quillen A., Rieke M. J., Rieke G. H., Tacconi-Garman L. E. Discovery of a Nuclear Gas Bar Feeding the Active Nucleus in Circinus // Astron. J. 2000. Vol. 531. Issue 1. P. 219–231.

181. Meleshko V.V. Coaxial axisymmetric vortex rings: 150 years after Helmholtz // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2010. Vol. 24, Issue 1-4. P. 403–431.

182. Mirabel I.F., Rodriguez L.F., Cordier B., et al. A double-sided radio jet from the compact Galactic Centre annihilator 1E1740.7-2942 // Nature. 1992. Vol. 358. P. 215–217.

183. Mikhailova M.S., Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M. The break in the energy spectrum of relativistic electrons in jet of the quasar 3C273 defined by intensity jet radiation in radio, optical and X-ray bands // Problems of Nuclear Science and Technology. 2008. №4. P. 128–132.

184. Mikhailova M.S., Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M. Determining the Inclination of the Kiloparsec-Scale Jet of the Quasar 3C 273 Based on

Competition of Mechanisms for the Knot X-ray Emission // Astronomy Reports. 2010. Vol. 54. №6. P. 531–538.

185. Mirabel I.F. Magnetism in microquasars // Royal Society of London Transactions Series A. 2000. Vol. 358. P. 841-851.

186. Moiseev A.V., Smirnova K.I., Smirnova A.A., Reshetnikov V.P. A new catalogue of polar-ring galaxies selected from the Sloan Digital Sky Survey // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2011. Vol. 418, Issue 1. P. 244–257.

187. Maccio A.V., Moore B., Stadel J. The Origin of Polar Ring Galaxies: Evidence for Galaxy Formation by Cold Accretion // Astrophys. J. 2006. Vol. 636, Issue 1. P. L25–L28.

188. Moffatt H. K., Tsinober A. Helicity in laminar and turbulent flow // Annual review of fluid mechanics. 1992. Vol. 24. P. 281–312.

189. Nenkova M., Sirocky M. M., Ivezic Z., Elitzur M. AGN Dusty Tori. I. Handling of Clumpy Media; II. Observational Implications of Clumpiness // Astrophys. J. 2008. Vol. 685. P. 147–180.

190. Nenkova M., Sirocky M. M., Nikutta R., Ivezic Z., Elitzur M. AGN Dusty Tori. II. Observational Implications of Clumpiness // Astrophys. J. 2008. Vol. 865, Issue 1. P. 160–180.

191. Netzer H. The physics and evolution of active galactic nuclei. Cambridge university press, 2013. 378 p.

192. Netzer H. Revisiting the Unified Model of Active Galactic Nuclei// Annual Review of Astron. and Astrophys. 2015. Vol. 53. P. 365–408.

193. Nincović S., and Jovanović B. On Orbits for a Particular Case of Axial Symmetry // Serb. Astron. J. 2009. Vol. 178. P. 29–37.

194. Norbury J. A family of steady vortex rings // Journal of Fluid Mechanics. 1973. Vol. 57. P. 417–431.

195. O'Connel R.W., Scargle J.D. The nature of Hoag's object // Astrophys. J. 1974. Vol. 19. P. 61–62.

196. Ohanian H.C. The black hole as a gravitational "lens"// American Journal of Physics. 1987. Vol. 55, Issue 5. P. 428–432.
197. Padmanabhan T. Theoretical Astrophysics. Volume 3: Galaxies and Cosmology. Cambridge University Press, 2002. 638 p.
198. Pudritz R.E. Jets from accretion discs // Royal Society of London Transactions Series A. 2000. Vol. 358, Issue 1767. P. 741–758.
199. Papaloizou J.C.B., Pringle J. E. The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1984. Vol. 208. P. 721–750.
200. Pier E.D., Antonucci R., Hurt T. et al. The intrinsic nuclear spectrum of NGC 1068 // Astron. J. 1994. Vol. 428. P. 124–129.
201. Plummer H. C. On the problem of distribution in globular star clusters // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1911. Vol. 71. P. 460–470.
202. Ponente P. P. and Diego J. M. Systematics in lensing reconstruction: darkmatter rings in the sky? // Astron.& Astrophys. Vol. 535. P. 119–230.
203. Poslavsky S.A., Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M. Acceleration and ejection of ring vortices as a mechanism for formation of jet components in AGN // Astrophysics. 2010. Vol. 53. P. 174–188.
204. Proga D. Theory of Winds in AGNs // The Central Engine of Active Galactic Nuclei. 2007. ASP Conference Series. Vol. 373. P. 267–276.
205. Raban D., Jaffe W., Röttgering H. J. A., Meisenheimer K., and Tristram K. R. W. Resolving the obscuring torus in NGC 1068 with the power of infrared interferometry: revealing the inner funnel of dust // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2009. Vol. 394, Issue 3. P. 1325–1337.
206. Reshetnikov V., Sotnikova N. Global structure and formation of polar-ring galaxies // Astron. & Astrophys. 1997. Vol. 325. P. 933–942.
207. Reshetnikov V.P., Mosenkov A.V. New candidates to polar-ring galaxies from the Sloan Digital Sky Survey // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2019. Vol. 483, Issue 2. P. 1470–1480.

208. Reynolds C.S. Constraints on Compton-thick Winds from Black Hole Accretion Disks: Can We See the Inner Disk? // Astrophys. J. Letters. 2012. Vol. 759. P. L15–L20.

209. Reznik G.M. Dynamics of singular vortices on a beta-plane // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 240. P. 405–532.

210. Reznik G., Kizner Z. Singular vortices in regular flows // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2010. Vol. 24, Issue 1-4. P.65-75.

211. Sales D.A., Robinson A., Axon D.J. et al. An Embedded Active Nucleus in the OH Megamaser Galaxy IRAS16399-0937 // Astrophys. J. 2015. Vol. 799. article id. 25. 28 p.

212. Schartmann M., Meisenheimer K., Camenzind M., et al. Towards a physical model of dust tori in Active Galactic Nuclei // Astron.& Astrophys. 2005. Vol. 437. P. 861–881.

213. Schartmann M., Meisenheimer K., Camenzind M., Wolf S., Tristram K.R.W., Henning T. Three-dimensional radiative transfer models of clumpy tori in Seyfert galaxies // Astron. & Astrophys. 2008. Vol. 482, Issue 1. P. 67–80.

214. Schartmann M., Burkert A., Krause M. et al. Gas dynamics of the central few parsec region of NGC 1068 fuelled by the evolving nuclear star cluster // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010. Vol. 403. P. 1801–1811.

215. Schneider P., Ehlers J., Falco E.E. Gravitational Lenses. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1992. 560 p.

216. Schmitt H. R., Antonucci R. R. J., Ulvestad J. S., Kinney A. L., Clarke C. J., and Pringle J. E. Testing the Unified Model with an Infrared-selected Sample of Seyfert Galaxies // Astrophys. J. 2001. Vol. 555, Issue 2. P. 663–672.

217. Schweizer F., Ford.W.K. The structure and evolution of Hoag's object // Astrophys. J. 1987. Vol. 320. P. 454–463.

218. Semerák O., Suková P. Free motion around black holes with discs or rings: between integrability and chaos - I // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010. Vol. 404. P. 545–574.

219. Semerák O., Suková P. Free motion around black holes with discs or rings: between integrability and chaos - II // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2012. Vol. 425. P. 2455–2476.

220. Sergeyev A., Spiniello C., Khramtsov V., Napolitano N. R., Bannikova E., Tortora C., Getman F. I., and Agnello A. // Research Notes of the AAS. 2018. Vol. 2, №4. article id.189. P. 1–4.

221. Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in Binary System. Observational Appearence // Astron. & Astrophys. 1973. Vol. 24. P. 337–355.

222. Shkuratov Y.G., Konovalenko A.A., Zakharenko V.V., Stanislavsky A.A., Bannikova E.Y., Kaydash V.G., Stankevich D.G., Korokhin V.V., Vavriv D.M., Galushko V.G., Yerin S.N., Bubnov I.N., Tokarsky P.L., Ulyanov O.M., Stepkin S.V., Lytvynenko L.N., Yatskiv Y.S., Videen G., Zarka P., Rucker H.O. A twofold mission to the moon: Objectives and payloads // Acta Astronautica. 2018. Vol. 154. P. 214–226.

223. Schneider P., Kochanek C. S., Wambsganss J., in Meylan G., Jetzer P., North P. Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro. Proc. 33rd Saas-Fee Advanced Course. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 541 p.

224. Shemmer O., Netzer H., Maiolino R., Oliva E., Croom S., Corbett E., and di Fabrizio L. Near-Infrared Spectroscopy of High-Redshift Active Galactic Nuclei. I. A Metallicity-Accretion Rate Relationship // Astrophys. J. 2004. Vol. 614, Issue 2. P. 547–557.

225. Spiniello C., Agnello A. Napolitano N.R., Sergeyev A.V., Getman F.I., Tortora C., Spavone M., Bilicki M., Buddelmeijer H., Koopmans L.V.E., Kuijken K., Vernardos G., Bannikova E., Capaccioli M. KiDS-SQuaD: The KiDS Strongly lensed Quasar Detection project // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2018. Vol. 480. P. 1163–1173.

226. Springob C.M., Haynes M.P., Giovanelli R., Kent B.R. A Digital Archive of H I 21 Centimeter Line Spectra of Optically Targeted Galaxies // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2005. Vol. 160. P. 149–162.

227. Stashko O.S., Zhdanov V.I. Spherically symmetric configurations in General Relativity in the presence of a linear massive scalar field: separation of a distribution of test body circular orbits // Ukr.J.Phys. 2019. Vol. 64, №3. P. 189–195.

228. Thatte N., Quirrenbach A., Genzel R., Maiolino R., Tecza M. The Nuclear Stellar Core, the Hot Dust Source, and the Location of the Nucleus of NGC 1068 // Astrophys. J. 1997. Vol. 490. P. 238–246.

229. Tacconi L. J., Genzel R., Blietz M., Cameron M., Harris A. I., Madden S. The nature of the dense obscuring material in the nucleus of NGC 1068 // Astrophys. J. 1994. Vol. 426, Issue 2. P. 77–80.

230. Tran H.D. The Unified Model and Evolution of Active Galaxies: Implications from a Spectropolarimetric Study // Astrophys. J. 2003. Vol. 583, Issue 2. P. 632–648.

231. Tristram K.R.W., Meisenheimer, K.; Jaffe, W. et al. Resolving the complex structure of the dust torus in the active nucleus of the Circinus galaxy // Astron. & Astrophys. 2007. Vol. 474. P. 837–850.

232. Tsupko O. Y., Bisnovatyi-Kogan G. S., Jefremov P. I. Parameters of innermost stable circular orbits of spinning test particles: Numerical and analytical calculations // Gravitation and Cosmology. 2016. Vol. 22. P. 138–147.

233. Urry C. M. and Padovani P. Unified Schemes for Radio- Loud Active Galactic Nuclei // Publ. Astron. Soc. Pac. 1995. Vol. 107. P. 803–845.

234. Ustyugova G.V., Lovelace R.V.E., Romanova M.M., Li H., Colgate S.A. Poynting Jets from Accretion Disks: Magnetohydrodynamic Simulations // Astrophys. J. 2000. Vol. 541, Issue 1. P. L21–L24.

235. Vakulik V.G., Schild R.E., Smirnov G.V., Dudinov V.N., Tsvetkova V.S. Q2237+0305 source structure and dimensions from light-curve simulation // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2007. Vol. 382, Issue 2. P. 819–825.

236. Vermeulen R.C., Cohen M.H. Superluminal motion statistics and cosmology // Astrophys. J. 1994. Vol. 430, Issue 2. P. 467–494.

237. Wada K., Papadopoulos P. P., Spaans M. Molecular Gas Disk Structures Around Active Galactic Nuclei // Astrophys. J. 2009. Vol. 702. P. 63–74.

238. Werner M.C., An J., Evans N.W. On multiple Einstein rings // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2008. Vol. 391, Issue 2. P. 668–674.

239. Whitmore B.C., Lucas R.A., McElroy D.B.; Steiman-Cameron T.Y., Sackett P.D., Olling R.P. New Observations and a Photographic Atlas of Polar-Ring Galaxies // Astron. J. 1990. Vol. 100. P. 1489–1522

240. Wong C.Y. Toroidal figures of equilibrium // Astrophys. J. 1974. Vol. 190. P. 675–694.

241. Woodward J.W., Sankaran S., Tohline J.E. Tidal disruption of a star by a massive disk (The axisymmetric Roche problem) // Astrophys. J. 1992. Vol. 394. P. 248–254.

242. Z.-X. Zhang, P. Du, P.S. Smith, Y. Zhao, C. Hu, et al. Kinematics of the Broad-line Region of 3C 273 from a 10yr Reverberation Mapping Campaign // Astrophys. J. 2019. Vol. 876. P. 49–63.

243. Zhu L., Zhang S.-N, Tang S.-M. Evidence for an Intermediate Line Region in Active Galactic Nuclei's Inner Torus Region and its Evolution from Narrow to Broad Line Seyfert I Galaxies // Astrophys. J. 2009. Vol. 700. P. 1173–1189.

244. Zöge A. Das Potential ringförmiger Korper, insbesondere eines Rongkorpers mit Kreisquerschnitt // J. Reine. Angew. Math. 1889. Band 104. P. 89–101.

# ДОДАТОК А

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці у зарубежних наукових фахових виданнях*

1. **Bannikova E.Yu.** The structure and stability of orbits in Hoag-like ring systems // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. Vol. 476. P. 3269–3277. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

2. **Bannikova E.Yu.**, and Kotvytskiy A.T. Three Einstein rings: explicit solution and numerical simulation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 445. P. 4435–4442. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *У роботах, де дисертант є першим автором, автор брав активну участь у постановкі задачі, частині аналітичних обчислень, чисельних моделювань, аналізу результатів, написанні та підготовці статей до публікації, відповіді рецензентам.*

3. **Bannikova E.Yu.**, Vakulik V.G., Sergeev A.V. N-body simulation of a clumpy torus: application to active galactic nuclei // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 424. P. 820–829. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

4. **Bannikova E.Yu.**, Vakulik V.G., Shulga V.M. Gravitational potential of a homogeneous circular torus: new approach // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. Vol. 411. P. 557–564. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

5. **Bannikova E.Yu** and Sergeyev A.V. Dynamics and formation of obscuring tori in AGNs // Frontiers in Astronomy and Space Sciences. 2017. Vol. 4, id.60. P. 1–6. (Видання входить до міжнародної наукометричної бази Web of Science.)

6. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Helicity of a toroidal vortex with swirl // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2016. Vol. 122. P. 769–775. (Видання входить до міжнародних наукометричних

баз Scopus і Web of Science.)

7. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Acceleration and ejection of interacting ring vortices by radial flow // Physics Letters A. 2009. Vol. 373. P. 1856–1860. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

8. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Influence of Orbital Motion on the Collapse of Ring Vortices in an Accretion Flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2014. Vol. 119, №3. P. 584–589. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

9. Shkuratov Y.G., Konovalenko A.A., Zakharenko V.V., Stanislavsky A.A., **Bannikova E.Y.**, Kaydash V.G., Stankevich D.G., Korokhin V.V., Vavriv D.M., Galushko V.G., Yerin S.N., Bubnov I.N., Tokarsky P.L., Ulyanov O.M., Stepkin S.V., Lytvynenko L.N., Yatskiv Y.S., Videen G., Zarka P., Rucker H.O. A twofold mission to the moon: Objectives and payloads // Acta Astronautica. 2019. Vol. 154. P. 214–226. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

Шкуратов Ю.Г., Коноваленко А.А., Захаренко В.В., Станиславский А.А., **Банникова Е.Ю.**, Кайдаш В.Г., Станкевич Д.Г., Корохин В.В., Ваврив Д.М., Галушко В.Г., Ерин С., Бубнов И., Токарский П., Ульянов О., Степкин С., Литвиненко Л.Н., Яцкив Я.С., Вайдин Г., Зарка Р., Рюккер Х. Украинская миссия на луну: цели и полезная нагрузка // Космическая наука и технология. 2018. Т. 24(1). С. 3–30. (Видання входить до міжнародної наукометричної бази Web of Science.) *Автором були проведені чисельні експерименти по вибору орбіти супутника та розрахунки змін елементів обраної орбіти, підготовлені відповідні частини статей.*

10. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., and Poslavsky S.A. Collapse and backward motion of axisymmetric toroidal vortices in an accretion flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2013. Vol. 117, №2. P. 378–384. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

11. Spiniello C., Agnello A. Napolitano N.R., Sergeyev A.V., Getman F.I., Tortora C., Spavone M., Bilicki M., Buddelmeijer H., Koopmans L.V.E., Kuijken K., Vernardos G., **Bannikova E.**, Capaccioli M. KiDS-SQuaD: The KiDS Strongly lensed Quasar Detection project // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. Vol. 480. P. 1163–1173. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *Автор брав участь у обговоренні постановки задачі, аналізу проміжних і фінальних результатів.*

12. Sergeyev A., Spiniello C., Khramtsov V., Napolitano N. R., **Bannikova E.**, Tortora C., Getman F. I., and Agnello A. KiDS0239-3211: A New Gravitational Quadruple Lens Candidate // Research Notes of the AAS. 2018. Vol. 2, №4. article id.189. P. 1–4. *Автор брав участь у обговоренні постановки задачі, аналізу проміжних і фінальних результатів.*

13. **Bannikova E.Yu.**, Karnaushenko A.V., Kontorovich V.M., Shulga V.M. A new exact solution of Kompaneets equation for a shock front// Astronomy Reports. 2012. Vol. 56, №7. P. 496–503. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

14. Poslavsky S.A., **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Acceleration and ejection of ring vortices as a mechanism for formation of jet components in AGN // Astrophysics. 2010. Vol. 53. P. 174–188. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *Автор брав участь в постановці задачі, виконав частину аналітичних і числових розрахунків, обговорював результати роботи та запропонував астрофізичну інтерпретацію, підготував текст статті.*

15. Mikhailova M.S., **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Determining the Inclination of the Kiloparsec-Scale Jet of the Quasar 3C 273 Based on Competition of Mechanisms for the Knot X-ray Emission // Astronomy Reports. 2010. Vol. 54, №6. P. 531–538. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.) *Автор брав участь в формулюванні за-*

*дачі, аналітичних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті.*

16. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M., Reznik G.M. Dynamics of a vortex pair in radial flow // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2007. Vol. 105, №3. P. 542–548. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

17. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. A dipolar vortex model for the obscuring tori in active galactic nuclei // Astronomy Reports. 2007. Vol. 51, №4. P. 264–273. (Видання входить до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science.)

18. Михайлова М.С., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Излом в энергетическом спектре релятивистских электронов в джете квазара 3C273, определяемый по интенсивности излучения джета в радио-, оптическом и рентгеновском диапазонах // Вопросы атомной науки и техники. 2008, № 4. С. 128–132. (Видання входить до міжнародної наукометричної бази Web of Science.) *Автор брав участь в формулюванні задачі, аналітичних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті.*

*Наукові праці у наукових фахових виданнях України*

19. **Банникова Е.Ю.** Распределение облаков в затеняющем торе активных ядер галактик // Радиофизика и радиоастрономия. 2015. Т.20, N3. С. 191 – 204. .

20. Ткачов В.Н., Захаренко В.В., Васильева Я.Ю., Царин Ю.А., **Банникова Е.Ю.**, Илюшин В.В., Саваневич В.Е., Герасименко О.В., Анненков А.Б., Кулишенко С.Ф., Кулишенко Д.Ф. Использование грид-технологий в решении задач радиофизики и радиоастрономии // Радиофизика и радиоастрономия. 2013. Т. 18. С. 176–188. *Автор брав участь в обговоренні ідеї статті, провів числове моделювання в рамках задачі N-тіл для самогравітуючого тора, написав відповідний розділ статті.*

21. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Тороиальный вихрь как струк-

турный элемент активных ядер галактик // Радиофизика и радиастрономия. 2006. Т. 11, №1. С. 42–48.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

*Праці конференцій*

22. **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Dipole-vortex structure of the obscuring tori in active galactic nuclei // Black Holes from Stars to Galaxies - Across the Range of Masses, editors V.Karas and G.Matt: Proceedings of the International Astronomical Union, 21–25 August 2006, Prague, №238, 2006. P. 323–324.

23. Mikhailova M., **Bannikova E.Yu.** Distribution of X-ray emission from jet knots of 3C273, 14th Young Scientist's Conference on Astronomy and Space Physics: Proceedings of Contributed Papers, 23–27 April 2007, Kyiv, 2007. P. 64–67. *Автор брав участь в формулюванні задачі, аналітичних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті.*

24. Karnaushenko A., **Bannikova E.Yu.**, Kontorovich V.M. Frequency dependence of radio images of jet knots and supernova remnants // 14th Young Scientist's Conference on Astronomy and Space Physics, Proceedings of Contributed Papers, 23–27 April 2007, Kyiv, 2007. P. 36–39. *Автор брав участь в формулюванні задачі, в чисельних розрахунках, в обговоренні проміжних і фінальних результатів, в написанні тексту статті.*

25. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Ускорение и выброс тороидального вихря как механизм образования компонент джетов активных ядер галактик // Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность: Сборник трудов международной конф. под ред. Н.С. Ерохина, 23–25 ноября 2009, Москва: ЛЕНАНД, 2009. С. 304–309.

26. **Bannikova E.Yu.**, Karnaushenko A.V., Kontorovich V.M., Shulga V.M. Interaction of the Supernova Remnant with Molecular Cloud // Proceedings of the

16th Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics, 27 April–2 May 2009, Kyev, 2009. P. 20–23.

27. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Взаимодействие ударного фронта с молекулярным облаком // Astronomy and Beyond: Proceedings of the 10th G. Gamow International Summer School, 23–28 August 2010, Odessa, 2010. P. 132–134.

28. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Шульга В.М. Внешний и внутренний гравитационный потенциал однородного кругового тора // Astronomy and Beyond: Proceedings of the 10th G. Gamow International Summer School, 23–28 August 2010, Odessa, 2010. P. 79–82.

29. Пославский С.А., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Движение вихревой пары в стационарном центральном потоке со знакопеременной радиальной скоростью // Тараповские чтения: Сборник материалов международной научной конференции, 21-25 апреля 2008 г., Харьков, 2008. С. 126–127. *Автор брав участь в постановці задачі, виконав частину аналітичних і чисельних розрахунків, та підготував текст статті.*

30. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Спиральность кольцевого вихря, закрученного вокруг своей оси // Современные проблемы естественных наук: Сборник тезисов докладов международной конф. "Тараповские чтения-2016" , 17–22 апреля 2011 г., Харьков, 2016. С. 79–80.

31. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В. М., Пославский С. А. Динамика точечных и кольцевых вихрей в потоках с особенностями // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Труды XVIII Международного симпозиума, 26–28 июня 2017 г., Харьков, 2017. С. 36–39.

*Тези та презентації доповідей на конференціях*

32. **Bannikova E.Yu.**, Sergeyev A.V., Akerman N. Hidden properties of AGNs and ring galaxies // Second Italy-Ukraine Meeting in Astronomy "Multiwavelength Astrophysics from Radio to Gamma Rays" , Kharkiv, Ukraine, 23–25 September, 2018, the presentation of the talk is posted on webpage of the meeting: http://www.astron.kharkov.ua/conference/ItUk2018/index.php

33. **Bannikova E.Yu.** Astrophysical Research // Italy-Ukraine Meeting in Astronomy, Rome, Italy, 22 March, 2018, the presentation of the talk is posted on webpage of the meeting: https://indico.ict.inaf.it/event/675/

34. **Bannikova E.Yu.** Dynamics and formation of obscuring tori in AGNs // Quasars at all epochs: Book of abstracts of International Conference, 2–7 April, 2017, Padova, 2017. P. 60.

35. **Bannikova E.Yu.** Self-gravitating tori in astrophysical objects // Seminar of INAF-Astronomical Observatory of Padova, 30 March 2017
URL: http://www.oapd.inaf.it/index.php/it/component/eventlist/details/427-seminario-dr-ssa-elena-bannikova.html

36. **Bannikova E.Yu.**, V.M. Kontorovich, Poslavskii S.A. Influence of a vortex motion on global rotation of Hoag's object // Фізичні явища в твердих тілах: Матеріали XIII Міжнародної конференції, 5–8 грудня 2017, Харків, ХНУ, 2017. С. 98.

37. **Bannikova E.Yu.** Lagrangian ring and region of unstable orbits in ring galaxies // Astronomy and beyond: Book of Abstract of International Gamow conference, 13–20 August 2017, Odessa, 2017. P. 9.

38. **Bannikova E.Yu.** and Kotvytsky A.T. Gravitational lensing effects on a homogeneous ring with a central mass // Astronomy and beyond: Book of Abstract of International Gamow conference, 13–20 August 2017, Odessa, 2017. P. 9.

39. **Банникова Е.Ю.** Формирование газопылевого тора в активных ядрах галактик // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Тезисы докладов XXXIII международной конференции, 19–22 апреля 2016, Пущино, 2016. С. 7.

40. **Bannikova E.Yu.** Evolution of obscuring tori in active galactic nuclei // All wave astronomy. Shklovsky-100: Book of abstract of International conference, 20–22 June 2016, Institute of Space Research, Moscow, 2016. P. 11.

41. **Bannikova E.Yu.** Lagrangian ring // Multi-spin Galaxies: Book of

abstract of International conference, 26–30 September 2016, Special Astrophysical Observatory of RAS, Nizhnij Arkhyz, 2016. P. 26.
URL: https://www.sao.ru/hq/multispin16/program.html

42. **Bannikova E.Yu.** Clouds distribution in obscuring tori of active galactic nuclei // Astrophysics and cosmology after Gamov: Program and abstracts of 5-th G.Gamov Memorial International Conference dedicated to 111-th anniversary of George Gamov, 16–23 August, 2015, Odessa, 2015. C. 30.

43. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. О возможности возвратных движений в активных ядрах галактик // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Программа и тезисы докладов конференции, 22–25 апреля 2014 г., Пущино, 2014. С. 5.

44. **Банникова Е.Ю.**, Котвицкий А.Т. Три кольца Эйнштейна: точное решение и численное моделирование // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Программа и тезисы докладов конференции, 22–25 апреля 2014 г., Пущино, 2014. С. 8.

45. **Bannikova E.Yu.** N-body simulation of a dusty torus in AGN // The European Week of Astronomy and Space Science: Book of abstracts of the International conference, 30 June–4 July 2014, Geneva, 2014. Abstract 00058.

46. **Bannikova E.Yu.** and Kotvitskiy A.T. Three Einstein rings: explicit solution and numerical simulation // The European Week of Astronomy and Space Science: Book of abstracts of the International conference, 30 June–4 July 2014, Geneva, 2014. Abstract 00059.

47. **Банникова Е.Ю.**, Котвицкий А.Т. Три кольца Эйнштейна: точное решение и численное моделирование // Астрофизика высоких энергий: Сборник тезисов международной конференции, 22–25 декабря, 2014, Москва, 2014. С. 34.

48. **Bannikova E.Yu.** N-body simulation of a self-gravitating torus: application to active galactic nuclei // Dynamics and kinetic theory of self-

gravitating systems: Abstract Book of International Workshop, 4–8 November 2013, Henri Poincare Institute, Paris, 2013. P. 8.

49. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Динамика кольцевого вихря в осесимметричном потоке с распределенными особенностями на оси симметрии // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Сборник тезисов международной конф., 1–31 мая 2012, Харьков, 2012. С. 26.

50. **Bannikova E.Yu.**, Vakulik V.G., Sergeev A.V., Shulga V.M. Dynamics of clouds in dusty tori of Active Galactic Nuclei // Astronomy and Space Physics: Book of abstract of International Conference, 22–25 May 2012, Kyiv, 2012. P. 5.

51. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Шульга В.М. Равновесное сечение самогравититрующего тора: применение к активным ядрам галактик // Astronomy and beyond: Book of Abstract of 12th International Gamow conference, 20–26 August 2012, Odessa 2012. С. 27.

52. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Сергеев А.В., Шульга В.М. Динамика облаков в газопылевых тора активных ядер // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Тезисы докладов XXIX конференции, 17–19 апреля 2012, Пущино, 2012. С. 7.

53. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г. Газопылевые торы в активных ядрах галактик: новые результаты // Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра: Тезисы докладов Всеросийсской астрономической конференции, 24–27 декабря 2012, Институт космических исследований РАН, Москва, 2012. С. 28.

54. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А. Движение кольцевых вихрей в центральном радиальном потоке // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Сборник тезисов междунар. конф. 17–22 апреля 2011, Харьков: Апостроф, 2011. С. 18.

55. **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М., Пославский С.А Ускорение и

захват тороидальных вихрей аккреционным потоком // Совет РАН по нелинейной динамике: Программа XIX научной сессии, Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, 20–21 декабря 2010, Москва, 2010. С. 2.

56. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Форма ударного фронта остатка сверхновой при взаимодействии с молекулярным облаком // // От эпохи Галилея до наших дней: Тезисы докладов Всероссийской астрономической конференции, 12–19 сентября 2010, Специальная астрофизическая обсерватория, Нижний Архыз, 2010. С. 88.

57. **Банникова Е.Ю.**, Вакулик В.Г., Шульга В.М. Гравитационный потенциал однородного кругового тора // От эпохи Галилея до наших дней: Тезисы докладов Всероссийской астрономической конференции, 12–19 сентября 2010, Специальная астрофизическая обсерватория, Нижний Архыз, 2010. С. 122.

58. Пославский С.А., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М. Асимметрия ускорения выбросов вихрей в аккреционном потоке с дипольной составляющей // Совет РАН по нелинейной динамике: Программа XIX научной сессии, 21–22 декабря 2009, Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН Москва, 2009. С. 4. *Автор брав участь в постановці задачі, виконав частину аналітичних і числових розрахунків, обговорював результати роботи та запропонував астрофізичну інтерпретацію, підготував текст статті.*

59. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Взаимодействие остатка сверхновой с молекулярным облаком // Актуальные проблемы внегалактической астрономии: Программа конференции, 21–23 апреля 2009, Пущино, С. 5.

60. **Банникова Е.Ю.**, Карнаушенко А.В., Конторович В.М., Шульга В.М. Точное решение уравнение Компанейца для ударного фронта применительно к взаимодействию остатка сверхновой с молекулярным облаком // Программа Научной сессии Совета по нелинейной динамике РАН, 22–23 февраля 2008, Москва, Институт океанологии РАН, С. 2.

61. Михайлова М.С., **Банникова Е.Ю.**, Конторович В.М.Физическая ин-

терпретация и геометрические следствия рентгеновского излучения в узлах джета 3С273 // Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра: Тезисы докладов конференции, 24–26 декабря 2007, Институт космических исследований РАН, Москва, 2007. С. 24.

62. **Bannikova E.Yu.** and Kontorovich V.M. Vortex ring acceleration and ejection by the convergent radial stream as a model of AGN jet components formation // Book of Abstract of International Lyapunov Memorial Conference, 24–30 June 2007, Kharkiv, 2007. P. 8–9.

63. **Bannikova E.Yu.** Vortex ring ejection as a model of AGN jet components formation // Abstract Book of XXXVII Young European Radio Astronomers Conference, 4–7 September 2007, Bordeaux, 2007. P. 13.

Також доповіді за результатами дисертації були представлені на семінарах в Обсерваторії в Падуї, Італія, фізичний факультет Університету Падуї, Італія; НДІ астрономії ХНУ ім. В.Н. Каразіна; Радіоастрономічного інституту НАН України.

### *Навчальний посібник*

64. **Баннікова О.Ю.**, Конторовіч В.М. Теоретична астрофізика // Навчально-методичний посібник. Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2010. 80 с.