

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Каліберда Мстислав Євгенович

УДК 537.87

ДИСЕРТАЦІЯ

**Чисельно-аналітичні методи в теорії дифракції хвиль на плоских
екранах**

01.04.03 – радіофізика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

М.Є.Каліберда

Харків – 2024

АНОТАЦІЯ

Каліберда М.Є. Чисельно-аналітичні методи в теорії дифракції хвиль на плоских екранах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.03 – радіофізика (фізико-математичні науки). – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2024.

Дисертацію присвячено розвитку чисельно-аналітичних методів в теорії дифракції електромагнітних та акустичних хвиль на ідеально провідних та імпедансних плоских екранах, розташованих у вільному просторі, у плоских діелектричних хвилеводах, хвилеводах з ідеально провідними стінками.

У роботі пропонується підхід, при використанні якого складна багатоелементна перешкода подається як об'єднання більш простих, якими можуть виступати поодинокі стрічка, диск, отвір у площині та інше. Розв'язок так званої ключової задачі, задачі про дифракцію на поодинокій перешкоді, є відомим або його отримано методами, які розвиваються у роботі. Властивості всієї структури визначаються за допомогою операторного методу. Водночас розглянуті задачі про дифракцію на поодиноких неоднорідностях, які є складовими складної багатоелементної перешкоди, представляють і самостійний інтерес. У якості імпедансних досліджено графенові стрічки.

В рамках сформульованого підходу з використанням класичних методів аналізу і підходів сучасної радіофізики і математичної фізики отримано наступні нові наукові результати

1. З використанням операторного методу у сукупності з методом сингулярних інтегральних рівнянь і методом моментів розроблено фізико-математичні моделі напівнескінченних систем неоднорідностей різних типів.

На основі цих моделей створено високоефективні обчислювальні алгоритми для розрахунку розсіяних полів та електродинамічних параметрів неоднорідностей.

1.1. *Вперше* отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на напівнескінченній решітці типу жалюзі як з ідеально-провідних, так і з імпедансних нескінченно тонких стрічок. Запропоновано розв'язок для напівнескінченної плоскої решітки.

1.2. На базі строгих методів кількісно визначено вплив краю стрічкових решіток на характеристики розсіяних полів, які мають як дискретний (плоскі хвилі), так і неперервний (циліндричні хвилі) спектри. Показано, що рівень відбиття від краю у бік опроміювача можна зменшити за рахунок розміщення додаткової скінченної решітки певної складної геометрії.

1.3. *Вперше* запропоновано процедуру регуляризації для виключення особливостей ядер операторних рівнянь для напівнескінченних структур, схему дискретизації на базі квадратурних формул, а також ітераційну процедуру з параметром релаксації для розв'язання нелінійного операторного рівняння.

1.4. Побудовано строгі розв'язки задач про дифракцію власних електромагнітних хвиль круглого хвилеводу на скінченній та напівнескінченній періодичній системах аксіально-симетричних неоднорідностей. Застосовано рекурентну процедуру до запису операторних рівнянь, що дозволило скоротити час обчислень. Проведено процедуру оптимізації параметрів на базі паралельного генетичного алгоритму.

2. Створено загальну теорію розсіяння електромагнітних хвиль на нескінченних періодичних решітках зі збоєм періодичності. Отримано строгі розв'язки задач про дифракцію та детально проаналізовано характеристики полів, які виникають за рахунок порушення періодичності.

2.1. *Вперше* з використанням розроблених строгих методів отримано результати про електродинамічні властивості хвилеводного каналу, сформованого на місці відсутніх стрічок двошарової нескінченної періодичної решітки.

2.2. Встановлено взаємний вплив ідеально провідних та графенових стрічок у періодичних решітках, направляючі властивості структур.

2.3. *Вперше* показано, що у випадку графенової нескінченної решітки, на відміну від решіток з ідеально провідних стрічок, у яких спостерігалася сильна взаємодія стрічок лише поблизу аномалій Релея-Вуда, взаємодія стрічок є помітно сильнішою як поблизу аномалії Релея-Вуда, так і поблизу плазмонних резонансів.

2.4. *Вперше* показано, що у випадку двошарової нескінченної графенової решітки без скінченної кількості стрічок шириною головного пелюстка діаграми спрямованості поля, яке пройшло, можна керувати, окрім зміни частоти або періоду, як у решітці з ідеально-провідних стрічок, ще й динамічно, за рахунок зміни хімічного потенціалу графену.

3. Розроблено узагальнюючу методологію для дослідження взаємодії імпедансних розсіювачах нульової товщини з плоскими електромагнітними хвилями.

3.1. *Вперше* отримано результати щодо електродинамічних характеристик графенових решіток, в тому числі напівнескінченної графенової стрічкової решітки у вакуумі та розміщеної в діелектричному хвилеводі, напівнескінченної системи шарів нескінченних графенових решіток у діелектричній плиті.

3.2. Виявлено та ретельно описано ефекти збудження цілої низки резонансів, які розглянуті структури здатні підтримувати, та їх вплив на характеристики полів: плазмонних резонансів, власних резонансів діелектричного шару, декількох типів резонансів, пов'язаних з періодичністю (резонанси поблизу аномалій Релея-Вуда, резонанси на решіткових модах, а

також два типи резонансів, пов'язаних з періодичністю у розташуванні шарів). Проведено класифікацію резонансів.

3.3. Запропоновано способи керування характеристиками структур. Виявлено параметри, при яких спостерігається максимальне поглинання та розсіювання падаючої плоскої хвилі. Запропоновано способи розширення смуги поглинання за рахунок збудження вказаних резонансів.

3.4. *Вперше* показано, що одночасне збудження плазмонних резонансів та резонансів на решіткових модах забезпечує можливість суттєвого керування потужністю, яку переносять власні хвилі діелектричного хвилеводу.

3.5. Розроблено ефективний алгоритм оптимізації параметрів на базі паралельного генетичного алгоритму.

4. Операторний метод розвинено на структури, розсіяні поля в яких формуються циліндричними і сферичними хвилями, а також є суперпозицією хвиль трьох типів: плоскої, циліндричної і сферичної. Запропоновано уніфіковану процедуру запису рівнянь, застосування єдиних процедур регуляризації та дискретизації.

4.1. *Вперше* операторний метод застосовано для аналізу дифракції плоскої електромагнітної та акустичної хвилі на нескінченно тонкому кільці або кільцевій щілині у площині.

4.2. *Вперше* отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідній структурі, яка складається з напівплощини та системи дисків.

4.3. Запропоновано процедуру регуляризації для виключення особливостей ядер в інтегральних рівняннях. Розроблено схему дискретизації рівнянь.

4.4. Показано, що навіть у випадку, коли диск не освітлюється падаючою плоскою хвилею, а цілком знаходиться у області тіні, відбувається збудження сферичних хвиль.

Сукупність отриманих результатів на базі розвинених строгих методів і узагальнення методології моделювання електродинамічних характеристик плоских екранів, в тому числі з імпедансними границями, зробили вагомий внесок в розвиток наукового напрямку – електродинаміку періодичних структур, розширили фундаментальні знання про фізичні процеси взаємодії полів різної природи зі складнокомпозиційними електродинамічними структурами. Важливим є те, розвинені методи і побудовані моделі дозволяють передбачати характеристики тієї чи іншої структури і, також, істотно скоротити матеріальні та часові затрати при створенні реальних функціональних пристроїв, що є дуже важливим при застосуванні дорогих матеріалів і елементів (наприклад, графена). Побудовані алгоритми реалізовано у вигляді комп'ютерних програм, на які отримано авторські свідоцтва на право інтелектуальної власності. Їх реалізація потребує значно менше комп'ютерного часу і пам'яті, ніж існуючі комерційні пакети, дозволяє проводити контроль точності розрахунків, дозволяє автоматизувати процес отримання фізичних результатів та створити систему взаємного зв'язку між різними алгоритмами.

Ключові слова: дифракція, метод сингулярних інтегральних рівнянь, операторний метод, метод моментів, генетичний алгоритм, стрічкова решітка, ідеально провідні стрічки, імпедансні стрічки, графен, диск, діелектричний хвилевід, круглий хвилевід.

ABSTRACT

Kaliberda M.E. Numerical-analytical methods in the theory of waves diffraction by plane screens. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in specialty 01.04.03 – Radio Physics. V. N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2024.

The dissertation is devoted to the development of the numerical-analytical methods in the diffraction theory of the electromagnetic and acoustic waves by perfectly electric conducting and impedance plane screens in free space, dielectric waveguides, waveguides with perfectly electric conducting walls.

The dissertation proposes an approach in which a complex multi-element obstacle is represented as a combination of more simple ones, which can be single strip, disk, whole in the plane, etc. The solution of the so-called key problem, the diffraction problem by a single discontinuity is known or it is obtained by the methods developed in the dissertation. The properties of the whole structure are determined with the help of the operator method. At the same time, the considered diffraction problems by single discontinuities are of interest alone. As impedance screens, the graphene strips are studied.

Within the framework of the formulated approach using classical methods of analysis and approaches of modern radiophysics and mathematical physics, the following new scientific results are obtained

1. The physico-mathematical models of the semi-infinite systems of discontinuities of various types are developed using the operator method in combination with the method of singular integral equations and the method of moments. On the basis of these models, highly efficient numerical algorithms are created for the calculation of the scattered fields and electrodynamic parameters of the discontinuities.

1.1. For the first time, a rigorous solution to the diffraction problem of the plane electromagnetic wave by the semi-infinite venetian-blind type grating of both perfectly electric conducting and impedance infinitely thin strips are obtained. The solution for the semi-infinite plane grating is proposed.

1.2. On the basis of rigorous methods, the influence of the edge of the strip gratings on the characteristics of the scattered fields, which have both discrete (plane waves) and continuous (cylindrical waves) spectra, is quantified. It is shown that the level of reflection from the edge towards the radiator can be reduced by placing an additional finite grating of a defined complex geometry.

1.3. For the first time, a regularization procedure for excluding of the singularities of the kernel-functions of the operator equations for the semi-infinite structures, a discretization scheme based on quadrature formulas, and an iterative procedure with a relaxation parameter for solving a nonlinear operator equation are proposed.

1.4. Rigorous solutions to the diffraction problems of the natural electromagnetic waves of a circular waveguide by finite and semi-infinite periodic systems of axially symmetric discontinuities are constructed. A recurrent procedure is applied to the writing of operator equations, which makes it possible to reduce the calculation time. The parameter optimization procedure is carried out on the basis of the parallel genetic algorithm.

2. A general theory of the scattering of electromagnetic waves by the infinite periodic gratings with a brake of periodicity is created. Rigorous solutions to diffraction problems are obtained and the characteristics of the fields that excites as a result of the brake of periodicity are analyzed in detail.

2.1. For the first time, using the developed rigorous methods, the results about electrodynamic properties of the waveguide channel formed at the place of the removed strips of a two-layer infinite periodic grating are obtained.

2.2. The mutual influence of the perfectly electric conducting and graphene strips in periodic gratings and the guiding properties of the structures are determined.

2.3. For the first time, it is shown that in the case of the graphene infinite grating, in contrast to grating made of the perfectly electric conducting strips, in which a strong interaction of strips is observed only near the Rayleigh-Wood anomalies, the interaction of strips is noticeably stronger both near the Rayleigh-Wood anomaly and near the plasmon resonances.

2.4. For the first time, it is shown that in the case of the two-layer infinite graphene grating without the finite number of strips, the width of the main lobe of the radiation pattern of the transmitted field can be controlled, in addition to changing the frequency or period, as in the grating of the perfectly electric conducting strips, also dynamically, by changing the chemical potential of graphene.

3. A generalized methodology for studying the interaction of zero thickness impedance scatterers with the plane electromagnetic waves is developed.

3.1. For the first time, the results about electrodynamic characteristics of graphene gratings, including the semi-infinite graphene strip grating in vacuum and placed inside a dielectric waveguide, a semi-infinite system of layers of infinite graphene gratings in a dielectric slab, are obtained.

3.2. The effects of excitation of a number of resonances, which the considered structures are able to support, and their influence on the characteristics of the fields are determined and carefully described: plasmon resonances, natural resonances of the dielectric layer, several types of resonances associated with the periodicity (resonances near the Rayleigh-Wood anomalies, grating-mode or lattice-mode resonances, as well as two types of resonances associated with periodicity in the arrangement of layers). Classification of the resonances is carried out.

3.3. Methods of control of the characteristics of structures are proposed. The parameters at which the maximum absorption and scattering of the incident plane wave are revealed. Methods of expanding the absorption band due to the excitation of the mentioned resonances are proposed.

3.4. For the first time, it is shown that the simultaneous excitation of the plasmon resonances and the grating-mode resonances provides the possibility of essential control of the power carried by the natural waves of the dielectric waveguide.

3.5. An efficient parameter optimization algorithm based on the parallel genetic algorithm is developed.

4. The operator method is developed for structures in which scattered fields are formed by the cylindrical and spherical waves, and are also a superposition of waves of three types: plane, cylindrical and spherical ones. A unified procedure for writing equations, applying of the uniform regularization and discretization procedures is proposed.

4.1. For the first time, the operator method is applied to analyze the diffraction of the plane electromagnetic and acoustic wave on an infinitely thin ring or an annular slot in the plane.

4.2. For the first time, a rigorous solution to the diffraction problem of the plane electromagnetic wave by the perfectly electric conducting scattering geometry consisting of a half-plane and a system of disks is obtained.

4.3. A regularization procedure is proposed to exclude the singularities in the kernel-functions of the integral equations. A discretization scheme of equations is developed.

4.4. It is shown that even in the case if the disk is not illuminated by the incident plane wave, but is entirely in the shadow region, spherical waves are excited.

The set of results obtained on the basis of developed rigorous methods and the generalization of the methodology of modeling of electrodynamic

characteristics of plane screens, including those with impedance boundaries, make a significant contribution to the development of the following scientific direction: the electrodynamics of periodic structures, expands fundamental knowledge about the physical processes of the interaction of fields of various nature with complex electrodynamic structures. It is important that the developed methods and built models allow to predict the characteristics of the structures and, at the same time, significantly reduce material and time costs when creating real functional devices, which is very important when using expensive materials and elements (for example, graphene). The constructed algorithms are implemented in the form of computer programs, for which copyright certificates for intellectual property rights are obtained. Their implementation requires significantly less computer time and memory than existing commercial packages, allows to control the accuracy of calculations, allows to automate the process of obtaining physical results and create a system of interconnection between different algorithms.

Keywords: diffraction, method of singular integral equations, operator method, method of moments, genetic algorithm, strip grating, perfectly electric conducting strips, impedance strips, graphene, disk, dielectric waveguide, circular waveguide.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Монографії:

1. Калиберда М. Е., Погарский С. А. Операторный метод в задачах дифракции волн на неоднородностях. Lambert Academic Publishing, 2014. 108 с. ISBN 978-3-659-64070-4

Внесок здобувача: постановка та розв'язання граничних задач, комп'ютерне моделювання, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

2. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Погарский С. А., Калиберда М. Е. Дифракция волн на периодических многослойных структурах. Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2017. 268 с.

Внесок здобувача: розв'язання задач дифракції на структурах, розсіяні поля у яких мають одночасно дискретний та неперервний спектр, розв'язання задач дифракції на системах перешкод у хвилеводах, оптимізація параметрів, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

3. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Моделирование графеновых решеток методами интегральных уравнений. Lambert Academic Publishing, 2018. 108 с. ISBN 978-613-9-89111-5.

Внесок здобувача: постановка та розв'язання граничних задач, комп'ютерне моделювання, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

4. Lytvynenko L.M., Prosvirnin S.L., Pogarsky S.A., Kaliberda M.E. Wave diffraction by periodic multilayer structures. Second Edition. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers. 2021. 272 p.

Внесок здобувача: розв'язання задач дифракції на структурах, розсіяні поля у яких мають одночасно дискретний та неперервний спектр, розв'язання задач дифракції на системах перешкод у хвилеводах, оптимізація параметрів, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

Наукові праці у наукових фахових виданнях України:

5. Каліберда М.Є., Погарський С.О., Білоусов В. А. Дифракція аксиально-симетричних хвиль на обмеженій та напівнескінченній послідовності гофр у круглому хвилеводі. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2011. Вип. 167. С. 10-13.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

6. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Білоусов В. А. Операторний метод у задачі випромінення з відкритого кінця круглого гофрованого хвилеводу. Радіофізика і радіоастрономія. 2012. Т. 17, № 1. С. 74-80.

Переклад англійською:

Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Belousov V. A. Operator method in the problem of radiation from an open end of a circular corrugated waveguide. Radio Physics and Radio Astronomy. 2012. Vol. 3, № 3. P. 259-264. DOI: 10.1615/RadioPhysicsRadioAstronomy.v3.i3.90

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

7. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Паралельний генетичний алгоритм у задачі оптимізації параметрів фільтра на основі коаксіального хвилеводу з системою щілин в порожнистому внутрішньому провіднику. Радіофізика і радіоастрономія. 2012. Т. 17, № 4. С. 362-368.

Внесок здобувача: постановка задачі, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

8. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by semi-infinite periodical multielement knife-type strip grating of fractals. Вісник Дніпропетровського університету. Серія “Фізика. Радіоелектроніка”. 2014. Вип. 21. Т. 22, № 1. С. 139-148.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

9. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про взаємодію напівнескінченної решітки типу жалюзі та скінченної решітки зі стрічок. Радіофізика і радіоастрономія. 2015. Т. 20, № 4. С. 322-339. DOI: 10.15407/rpra20.04.332

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

10. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Е-поляризованої хвилі на нескінченній періодичній стрічковій решітці за відсутністю однієї стрічки. Радіофізика і радіоастрономія. 2016. Т. 21, № 3. С. 189-197. DOI: 10.15407/rpra21.03.189

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

11. Калиберда М.Е., Погарский С.А., Роюк М.П., Ильина Т.А. Дифракция волны на плоской графеновой решетке, расположенной над идеально проводящей плоскостью. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2017. Вип. 27. С. 49-52.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

12. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у скалярній задачі дифракції на аксіально-симетричних неоднорідностях в екрані. Радіофізика і радіоастрономія. 2018. Т. 23, № 1. С. 36-42.

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

13. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі дифракції хвиль на напівнескінченній графеновій решітці. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2019. Вип. 196. С. 112-116.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

14. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої хвилі на плоскій графеновій решітці типу жалюзі. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2019. Вип. 197. С. 38-42.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

15. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про дифракцію Н-поляризованої плоскої хвилі на двошаровій нескінченній періодичній стрічковій решітці за відсутності однієї стрічки у кожному шарі. Радіофізика і радіоастрономія. 2020. Т.25, №2. С. 136-146. DOI: 10.15407/rpra25.02.136

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці у фахових виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних SCOPUS:

16. Lytvynenko L. M., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by semi-infinite venetian blind type grating. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2013. Vol. 61. No. 12. P. 6120-6127. DOI: 10.1109/TAP.2013.2281510

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

17. Kaliberda M.Ye., Pogarsky S.A., Ulyankin Ye.Ye. Electrodinamic characteristics of a coaxial hollow inner conductor waveguide with a system of axially symmetric nonperiodically arranged inhomogeneities. Telecommunications and Radio Engineering. 2015. Vol. 74, no. 7. P. 577-583. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v74.i7

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Погарський С. О., Ульянов Є. Є. Електродинамічні характеристики коаксіального хвилеводу з порожнім внутрішнім провідником з системою аксіально-симетричних неперіодично розташованих неоднорідностей. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2014. вип. 177. С. 109-113.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

18. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. N., Pogarsky S. A. Diffraction of H-polarized electromagnetic waves by a multi-element planar semi-infinite grating. Telecommunications and Radio Engineering. 2015. Vol. 74, no. 9. P. 753-767. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v74.i9.10

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої електромагнітної хвилі на багатoelementній плоскій напівнескінченній решітці. Радіофізика і радіоастрономія. 2014. Т. 19, № 4. С. 348-357. DOI: 10.15407/rpra19.04.348

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

19. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed. Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2016. Vol. 30, no. 18. P. 2411-2426. DOI: 10.1080/09205071.2016.1254071

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

20. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Poznyakov A. V. Analysis of periodic gratings with defects in the form of absence of a single strip. Telecommunications and Radio Engineering. 2017. Vol. 76, no. 6. P. 461-467. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v76.i6.10

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Погарський С. О., Позняков А. В. Аналіз дефектів періодичній решітці у вигляді відсутньої однієї стрічки. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2016. Вип. 187. С. 74-78.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

21. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: H -polarization case. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2017. Vol. 25. P. 4496-4509. DOI: 10.3906/elk-1703-170.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

22. Kaliberda M., Pogarsky S. Operator methods in the problem of wave diffraction by two graphene strips located within parallel planes. Telecommunications and Radio Engineering. 2017. Vol. 76, no. 13. P. 1141-1147.

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Погарський С. О. Операторний метод в задачі дифракції хвиль на двох графенових смужках, розташованих у паралельних площинах. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2017. Вип. 188. С. 12-15.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

23. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed: E-polarization case. Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2018. Vol. 32, no. 3. P. 332-347. DOI: 10.1080/09205071.2017.1383943.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

24. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Modeling of graphene planar grating in the THz range by the method of singular integral equations. *Frequenz*. 2018. Vol. 72, no. 5-6. P. 277-284. DOI: 10.1515/freq-2017-0059.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

25. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Singular integral equations in diffraction by multilayer grating of graphene strips in the THz range. *The European Physical Journal Applied Physics (EPJ Applied Physics)*. 2018. Vol. 82, no. 2. P. 21301. DOI: 10.1051/epjap/2018170324

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

26. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Simulation of infinite periodic graphene planar grating in the THz range by the method of singular integral equations. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*. 2018. Vol. 26, no.4. P. 1724-1735. DOI: 10.3906/elk-1712-92

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

27. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: E-polarization case. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*. 2018. Vol. 26, no.5. P. 2406-2416. DOI: 10.3906/elk-1802-19

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

28. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Diffraction of the H-polarized plane wave by a finite layered graphene strip grating. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2019. Vol.11, no.4. P. 326-333. DOI: 10.1017/S1759078718001290

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

29. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Electromagnetic interaction of two semi-infinite coplanar gratings of flat PEC strips with arbitrary gap between them. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2019. Vol. 33, no.12. P. 1557-1573. DOI: 10.1080/09205071.2019.1615996.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

30. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations analysis of THz wave scattering by an infinite graphene strip grating embedded into a grounded dielectric slab. *Journal of the Optical Society of America A (JOSA A)*, 2019. Vol. 36, no. 10. P. 1787-1794. DOI: 10.1364/JOSAA.36.001787

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

31. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. THz waves scattering by finite graphene strip grating embedded into dielectric slab. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2020. Vol. 56, no.1. P. 8500107. DOI: 10.1109/JQE.2019.2950679

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

32. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of the H-polarized plane wave by finite and semi-infinite multilayer systems of infinite graphene strip gratings in the THz range. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2020. Vol.12, no.5. P.380-386. DOI: 10.1017/S1759078719001430

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

33. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in THz plane wave scattering by graphene semi-infinite grating. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2020. Vol. 79, no. 9. P. 731-742. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v79.i9

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

34. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Method of singular integral equations in scattering by double-layer infinite strip grating with several strips removed in every layer. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2021. Vol. 35, no. 11. P. 1433-1447. DOI: 10.1080/09205071.2021.1893833

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

35. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in plane wave scattering by infinite graphene strip grating with brake of periodicity. *Frequenz*. 2021. Vol. 75, no. 7-8. P. 239-249. DOI: 10.1515/freq-2020-0030

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

36. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A., Sauleau R. Excitation of guided waves of grounded dielectric slab by a THz plane wave scattered from finite number of embedded graphene strips: Singular integral equation analysis. *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2021. Vol. 15. P. 1171-1180. DOI: 10.1049/mia2.12120

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

37. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of eigenmodes of planar dielectric waveguide with PEC wall by graphene strip grating at THz. *Waves in Random and Complex Media*. 2024. Vol. 34, no. 3. P. 1389-1406. DOI: 10.1080/17455030.2021.1938287

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

38. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію Н-поляризованої хвилі на двох однакових напівнескінченних решітках, розташованих в одній площині. *Радіофізика і радіоастрономія (Operator method in the problem of the H-polarized wave diffraction by two semi-infinite gratings place in the same plane. Radio Physics and Radio Astronomy)*. 2021. Т. 26, №3. С. 239-249. DOI: 10.15407/rpra26.03.239

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

39. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in scattering of planar dielectric waveguide eigenwaves by the system of graphene strips at THz. *Plasmonics*. 2022. Vol.17. P. 505-517. DOI: 10.1007/s11468-021-01511-9

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

40. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевій щілині в площині або на кільці. *Радіофізика і радіоастрономія (Operator method in the problem of a plane electromagnetic wave diffraction by an annular slot in the plane or by a ring. Radio Physics and Radio Astronomy)*. 2021. Т. 26, №4. С. 350-357. DOI: 10.15407/rpra26.04.350

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

41. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Electromagnetic wave scattering by half-plane and disk placed in the same plane or circular hole in half-plane. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2022. Vol. 36, no. 10. P. 1463-1483. DOI: 10.1080/09205071.2022.2032379

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

42. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering by PEC half-plane and disk placed on parallel planes. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2023. Vol. 15, no.2. P. 311-312. DOI: 10.1017/S1759078722000472

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

43. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію хвиль круглого хвилеводу на аксіально симетричних неоднорідностях. *Радіофізика і радіоастрономія (Operator method in diffraction problem of waves of circular waveguide by the annular discontinuities. Radio Physics and Radio Astronomy*. 2022. Т. 27, №1. С. 5-16. DOI: 10.15407/rpra27.01.005

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

44. Каліберда М. Є., Литвиненко Л.М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про дифракцію плоскої хвилі на нескінченно тонких ідеально провідних напівплощині та двох дисках. *Радіофізика і радіоастрономія (An operator method for the problem of plane wave diffraction by infinitely thin, perfectly conducting half-plane and two disks. Radio Physics and Radio Astronomy)*. 2022. Т. 27, №3. С. 167-180. DOI: 10.15407/rpra27.03.167

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці у фахових закордонних виданнях:

45. Kaliberda M.E., Pogarsky S.A. Solution of the diffraction problem by the semi-infinite grating with modified end with the help of singular integral equations

apparatus. *Waves, Wavelets and Fractals*. 2018. Vol. 4, no. 1. P. 1-9. DOI: 10.1515/wwfaa-2018-0001

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці апробаційного характеру (тези доповідей на наукових конференціях) за темою дисертації:

46. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Belousov V. A. The parameters of filters based on a system of slots in the hollow inner conductor of a coaxial waveguide with parallel genetic algorithm optimization. 2013 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. Kharkiv, Ukraine, 23-28 June, 2013. E-1.

Внесок здобувача: постановка задачі, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

47. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S.A. Operator method in the waves diffraction problem by a semiinfinite grating of strips placed in parallel planes. 2013 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. Kharkiv, Ukraine, 23-28 June, 2013. E-4. DOI: 10.1109/MSMW.2013.6622094

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

48. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by plane semi-infinite grating. The Seventh International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Kharkiv, Ukraine, 15-19 September, 2014. P. 96-99.

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

49. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Electromagnetic interaction of a single strip with a plane semi-infinite grating. 2015 International Conference on Antenna

Theory and Techniques (ICATT). Kharkiv, Ukraine, 21-24 April, 2015. P. 138-140. DOI: 10.1109/ICATT.2015.7136806

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

50. Калиберда М. Е., Погарский С. А., Шевченко Б. В., Позняков А. В. Модификация эффективной отражающей поверхности объекта за счет применения фрактальной решетки типа жалюзи с модифицированным краем. VIII Международная научная конференция "Функциональная база нанoeлектроники". Одесса, Украина, 28 сентября, 2015. с. 90-93.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

51. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Analysis of the H-polarized electromagnetic wave diffraction by an infinite periodical strip grating without one strip. 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'2016). Kharkiv, Ukraine, 20-24 June, 2016. H-4. DOI: 10.1109/MSMW.2016.7538194

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

52. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Analysis of the E-polarized electromagnetic wave diffraction by an infinite periodical strip grating without one strip. 2016 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Lviv, Ukraine, 05-07 July, 2016. P. 248-251. DOI:10.1109/MMET.2016.7544072

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів

53. Koval'ova A. A., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Analysis of the H-polarized electromagnetic wave diffraction by a semi-infinite periodical strip grating. 2016 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory

(MMET). Lviv, Ukraine, 05-07 July, 2016. P. 252-255. DOI: 10.1109/MMET.2016.7544073

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

54. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Infinite periodic grating with one strip removed in the case of small strips width relative to the period. The 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 05-11 September, 2016. P. 101-104. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2016.7724161

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

55. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Diffraction by two semi-infinite gratings placed in the same plane. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv, Ukraine, 29 May-2 June, 2017. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100345

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

56. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Diffraction by the semi-infinite knife-type grating of material strips. 2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2017. Lviv, Ukraine, 17-20 October, 2017. DOI: 10.1109/YSF.2017.8126627

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

57. Denisova A. R., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Rebrik A. A. Diffraction by material strips placed in parallel planes. 2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2017. Lviv, Ukraine, 17-20 October 2017. 2017. DOI: 10.1109/YSF.2017.8126626

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

58. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Modeling of wave scattering by graphene strip gratings using integral equations combined with operator method. 2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Kiev, Ukraine, 2018. P. 30-33. DOI: 10.1109/MMET.2018.8460262

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

59. Roiuk M., Kaliberda M., Pogarsky S., Lytvynenko L. Diffraction by finite graphene grating above perfectly electric conducting plane. The 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 04-07 September, 2018. P. 94-97. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8520112

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

60. Kaliberda M., Pogarsky S., Iliina T., Lytvynenko L. Operator method in diffraction by layered graphene grating. The 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 04-07 September, 2018. P. 98-101. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8520222

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

61. Kaliberda M., Pogarsky S., Roiuk M., Lytvynenko L. Diffraction by double layer graphene strip grating. IEEE 3th Міжнародна конференція з інформаційно-телекомунікаційних технологій та радіоелектроніки (УкрМіКо'2018/UkrMiCo'2018). Odessa, Ukraine, 10-14 September, 2018.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

62. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. THz wave scattering by graphene strip grating embedded into a dielectric slab with PEC plane. 2018 Asia-Pacific

Microwave Conference (APMC 2018). Kyoto, Japan, November 6-9, 2018. P. 639-641. DOI: 10.23919/APMC.2018.8617535

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

63. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Diffraction by double layer graphene strip grating. 2nd URSI AT-RASC. Gran Canaria, 28 May – 1 June 2018.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

64. Kaliberda M., Lytvynenko L., Ilna T., Pogarsky S. Excitation of guided waves and grating-mode resonances in the scattering by graphene strip grating inside dielectric slab. European Microwave Conference in Central Europe. Prague, Czech Republic, 13-15 May, 2019. P. 473-476.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

65. Pogarsky S., Smirnova K., Shcherbatiuk E., Kaliberda M. THz waves scattering by multilayer system of infinite graphene strip gratings. European Microwave Conference in Central Europe. Prague, Czech Republic, 13th-15th May, 2019. P. 477-480.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

66. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Scattering by infinite graphene strip grating with brake of periodicity. 2019 16th European Radar Conference. Paris, France. 2019. P. 19230988. Proceedings of the 49th European Microwave Conference. Paris, France, 1–3 October, 2019. P. 1028-1031. DOI: 10.23919/EuMC.2019.8910731

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

67. Kaliberda M., Pogarsky S., Lytvynenko L. Modeling of wave scattering by multilayer system of infinite graphene strip gratings using integral equations

combined with operator method. IEEE 39th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, 16-18 April, 2019. P. 18934763. DOI: 10.1109/ELNANO.2019.8783623

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

68. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M., Ugrimova A., Ilina T. A., Shcherbatiuk E. Waves scattering by graphene semi-infinite grating. IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2019). Lviv, July 2-6, 2019. P. 98-101. DOI: 10.1109/UKRCON.2019.8879907

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

69. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Modeling of scattering of dielectric waveguide eigenwaves by system of graphene strips at THz. 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, April 22-24, 2020. P. 230-233. DOI: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088799

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

70. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Radiation of planar dielectric waveguide eigenwaves scattered by graphene strip grating in THz range. 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Copenhagen, Denmark, 15-20 March, 2020. DOI: 10.23919/EuCAP48036.2020.9135852

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

71. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in scalar wave scattering by circular slot in screen in case of dirichlet conditions. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine, 21-25 September, 2020. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252632

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

72. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in scattering by double-layer infinite strip grating without one strip in every layer. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine, 21-25 September, 2020. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252628

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

73. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. THz wave scattering by double-layer infinite graphene strip grating without one strip in every layer. Proceedings of the 50th European Microwave Conference, Utrecht, Netherlands, 12-14 January, 2021. P. 20348903. DOI: 10.23919/EuMC48046.2021.9338085

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

74. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of natural waves of planar dielectric waveguide with PEC wall by graphene strip grating in THz range. Proceedings of the 50th European Microwave Conference. Utrecht, Netherlands, 12-14 January, 2021. P. 20348885. DOI: 10.23919/EuMC48046.2021.9338089

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

75. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. SLL reduction in planar dielectric waveguide with graphene strips using genetic algorithm. 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Düsseldorf, Germany, 22-26 March, 2021. DOI: 10.23919/EuCAP51087.2021.9411043

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

76. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Operator method in approximate solution of dielectric waveguide eigenwaves scattering by graphene strips. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2021). Lviv, Ukraine, 26-28 August, 2021. P. 84-87. DOI: 10.1109/UKRCON53503.2021.9575513

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

77. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in the E-polarized plane wave scattering by coplanar half-plane and disk: basic equations and convergence. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2021). Lviv, Ukraine, 26-28 August, 2021. P. 88-91. DOI: 10.1109/UKRCON53503.2021.9576051

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

78. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Singular integral equations in THz waves scattering by finite number of graphene strips with dielectric substrate. 2022 IEEE 41th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, 10-14, October, 2022. P.243-246. DOI: 10.1109/ELNANO54667.2022.9927016

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

79. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Plane wave scattering by two PEC zero-thickness disks placed above half-plane. 2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week. Kharkiv, 14-18 November, 2022. P. 22625890. DOI: 10.1109/UkrMW58013.2022.10037159

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

80. Калиберда М. Е., Погарский С. А., Дроздов К. С. Розрахунок характеристик діелектричного електронегативного метаматеріала у круглому хвилеводі на основі багат шарового діелектрика. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2012. Вип. 170. С. 28-31.

Переклад англійською:

Kaliberda M. Ye., Pogarsky S. A., Drozdov, K. S. Calculation of dielectric electronegative metamaterial properties in a circular multilayered dielectric waveguide. Telecommunications and Radio Engineering. 2013. Vol. 72, no. 16. P. 1481-1486. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i16.30 (**SCOPUS**)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

81. Калиберда М. Є., Погарський С. О., Білоусов В. А. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь у задачі дифракції на скінченному метаматеріалі на основі розімкнутих прямокутних рамок. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2013. вип. 172. С. 14-17.

Переклад англійською:

Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Belousov V. A. The method of hypersingular integral equations in a problem on diffraction by the finite metamaterial based upon open rectangular frames. Telecommunications and Radio Engineering. 2014. Vol. 73, no. 12. P. 1033-1040. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v73.i12.10 (**SCOPUS**)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

82. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Method of hypersingular integral equations in diffraction problem by strip grating of rectangular split-ring resonators. The VIII-th

International Conference “Antenna Theory and Techniques” (ICATT), Odessa, Ukraine. 2013. Vol. 8. P. 420-422. DOI: 10.1109/ICATT.2013.6650798 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв’язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

83. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик коаксіального хвилеводу з системою щілин. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 54309. 2014.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп’ютерної програми.

84. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Electrodynamic characteristics calculation of metamaterial in circular waveguide periodically filled by dielectric discs. International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dnipropetrovsk, Ukraine. 2014. P. 134-136.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв’язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

85. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик коаксіального хвилеводу з системою щілин у випадку аксіально-несиметричних хвиль. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 58013. 2015.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп’ютерної програми.

86. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Паралельний розрахунок фільтру частот на основі коаксіального хвилеводу з системою щілин у порожньому внутрішньому провіднику. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 62120. 2015.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп’ютерної програми.

87. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Шевченко Б. В. Фрактальна решітка типу жалюзі з модифікованим краєм як основа для створення бажаної ефективною площі розсіювання об’єкта. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2016. Вип. 185. С.54-57.

Переклад англійською:

Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Shevchenko B. V. Venetian blind type fractal grating with modified edge as the basis for creation of the required efficient scattering area of the object. *Telecommun. and Radio Engineering*. 2016. Vol. 75, no. 16. P. 1435-1441 DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v75.i16.20. (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

88. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик двох прямокутних хвилеводів, зв'язаних системою щілин у спільній стінці. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 72455 від 23.06.2017. 2017.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

89. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик одношарової графенової решітки// Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №81279 від 07.09.2018. 2018.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

90. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик одношарової графенової решітки. Визначення електродинамічних характеристик нескінченної періодичної графенової решітки зі стрічок. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №89874 від 18.06.2019. 2019.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

91. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Скінченна графенова решітка з металевою площиною. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №91487 від 09.08.2019. 2019.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

92. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Електродинамічні характеристики нескінченної графенової решітки зі стрічок. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №98244 від 18.06.2020. 2020.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

93. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Електродинамічні характеристики скінченної графенової стрічкової решітки в діелектричній пластині. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №100695 від 23.09.2020.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

94. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої хвилі на скінченній графеновій стрічковій решітці, розташованій на діелектричній підкладці. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2022. Вип. 36. С.66-73. DOI: 10.26565/2311-0872-2022-36-05

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

95. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. GPU acceleration of Nystrom type method for solving singular integral equations in H-polarized EM waves scattering by strip gratings. Frequenz. 2023. Vol.77, no.7-8. P. 329-336. DOI: 10.1515/freq-2022-0195 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

96. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Sierhieieva A. A. Integral equations in the H-polarized wave scattering from metasurface formed by finite multilayer graphene strip grating inside grounded dielectric slab. Optical and Quantum Electronics. 2023. Vol.55. P. 1050. DOI: 10.1007/s11082-023-05288-5(SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка і розв'язання задачі, аналіз результатів.

97. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Tunability of radiation pattern of the H-polarized natural waves of dielectric waveguide with infinite graphene plane and finite number of graphene strips at THz. Applied Sciences. 2023. Vol.13, no.19. P. 10563. DOI: 10.3390/app131910563 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка і розв'язання задачі, аналіз фізичних результатів.

ЗМІСТ

Список умовних скорочень	41
Вступ.....	42
Розділ 1. Дифракція плоскої електромагнітної хвилі на напівнескінчених стрічкових решітках.....	58
1.1. Решітка типу жалюзі. Операторний метод	61
1.1.1. Постановка задачі.....	61
1.1.2. Операторні рівняння.....	64
1.1.3. Процедура регуляризації	66
1.1.4. Числові результати	69
1.2. Плоска напівнескінченна решітка. Операторний метод	92
1.3. Плоска напівнескінченна решітка. Метод сингулярних інтегральних рівнянь	101
1.3.1. Нескінченна періодична стрічкова решітка. Ідеально провідні стрічки.....	103
1.3.2. Нескінченна періодична стрічкова решітка. Імпедансні стрічки нульової товщини.....	106
1.3.3. Нескінченна періодична стрічкова решітка, розташована над ідеально провідною площиною. Імпедансні стрічки нульової товщини	111
1.3.4. Електродинамічні властивості плоскої нескінченної періодичної графенової решітки	113
1.3.5. Поле корекції у випадку Н-поляризації	127
1.3.6. Поле корекції у випадку Е-поляризації.....	131
1.3.7. Числові результати	134
1.4. Розв'язання ключової задачі.....	148
1.4.1. Методи розв'язання задачі про дифракцію на скінченній решітці з ідеально провідних стрічок.....	149

1.4.2. Метод сингулярних інтегральних рівнянь в задачі про дифракцію на скінченній решітці з імпедансних стрічок нульової товщини.....	151
1.4.3. Випадок імпедансної решітки, розташованої над ідеально провідною площиною	154
1.4.4. Електродинамічні властивості плоскої скінченної графенової решітки.....	157
1.4.5. Електродинамічні властивості напівнескінченної графенової решітки.....	169
Висновки до розділу 1.....	173
Розділ 2. Плоска нескінченна стрічкова решітка без однієї стрічки	176
2.1. Постановка задачі.....	177
2.2. Випадок Н-поляризації	178
2.2.1. Сингулярне інтегральне рівняння	178
2.2.2. Аналіз фізичних результатів	182
2.3. Випадок Е-поляризації	187
2.3.1. Сингулярне інтегральне рівняння	187
2.3.2. Аналіз фізичних результатів	191
Висновки до розділу 2.....	195
Розділ 3. Дифракція Н-поляризованої хвилі на двох напівнескінченних стрічкових решітках, що лежать в одній площині, з довільним зазором між ними	197
3.1. Постановка задачі.....	197
3.2. Метод сингулярних інтегральних рівнянь	198
3.2.1. Випадок ідеально провідних стрічок.....	199
3.2.2. Випадок імпедансних стрічок нульової товщини.....	200
3.3. Операторний метод	201
3.3.1. Операторні рівняння.....	202
3.3.2. Процедура регуляризації.....	205
3.4. Числові результати.....	208

3.4.1. Дискретизація рівнянь.....	208
3.4.2. Числове дослідження збіжності.....	210
3.4.3. Аналіз фізичних результатів.....	212
3.4.4. Графенові стрічки.....	221
Висновки до розділу 3.....	229
Розділ 4. Дифракція Н-поляризованої хвилі на двошаровій нескінченній решітці без скінченної кількості стрічок у кожному шарі.....	230
4.1. Постановка задачі.....	230
4.2. Метод сингулярних інтегральних рівнянь.....	232
4.2.1. Двошарова нескінченна ідеально періодична решітка.....	232
4.2.2. Поле корекції.....	234
4.3.3. Випадок імпедансних стрічок нульової товщини.....	236
4.3. Операторний метод.....	238
4.3.1. Надання полів.....	238
4.3.2. Нескінченна ідеально періодична двошарова решітка.....	238
4.3.3. Поле корекції.....	241
4.4. Числові результати.....	243
4.4.1. Ідеально провідні стрічки.....	243
4.4.2. Імпедансні (графенові) стрічки нульової товщини.....	251
Висновки до розділу 4.....	254
Розділ 5. Одношарові решітки з імпедансних стрічок нульової товщини, занурені у діелектричну пластину.....	256
5.1. Нескінченна решітка у діелектричній пластині.....	259
5.1.1. Сингулярне інтегральне рівняння.....	262
5.1.2. Числові результати.....	263
5.2. Нескінченна решітка у діелектричній пластині з ідеально провідною площиною.....	265
5.2.1. Сингулярне інтегральне рівняння.....	267
5.2.2. Числові результати.....	268

5.3. Скінченна решітка у діелектричній пластині	273
5.3.1. Сингулярне інтегральне рівняння	276
5.3.2. Регуляризація ядра рівняння.....	280
5.3.3. Наближений розв'язок операторним методом у випадку падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу	282
5.3.4. Числові результати. Падіння плоскої хвилі	284
5.3.5. Числові результати. Падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу.....	294
5.3.6. Оптимізація параметрів решітки	305
5.4. Скінченна решітка у діелектричній пластині з ідеально провідною площиною	310
5.4.1. Числові результати. Падіння плоскої хвилі	312
5.4.2. Числові результати. Падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу.....	320
5.4.3. Оптимізація параметрів решітки	326
Висновки до розділу 5.....	330
Розділ 6. Багатошарові решітки з імпедансних стрічок нульової товщини	333
6.1. Скінченна та напівнескінченна періодична багатошарова система нескінченних періодичних решіток, які розташовані в діелектричній пластині.....	334
6.1.1. Операторні рівняння.....	336
6.1.2. Числові результати	337
6.2. Скінченна багатошарова система скінченних решіток у вакуумі	343
6.2.1. Сингулярні інтегральні рівняння.....	345
6.2.2. Операторні рівняння.....	347
6.2.3. Числові результати	351
Висновки до розділу 6.....	365

Розділ 7. Дифракція плоскої електромагнітної хвилі на кільці або на напівплощині та нескінченно тонких ідеально провідних дисках	367
7.1. Нескінченно тонке ідеально провідне кільце	367
7.1.1. Падіння акустичної хвилі.....	368
7.1.2. Падіння плоскої електромагнітної хвилі.....	374
7.2. Дифракція на напівплощині та диску, які лежать в одній площині, або на круглому отворі в напівплощині	376
7.2.1. Постановка задачі.....	378
7.2.2. Операторні рівняння.....	381
7.2.3. Процедура регуляризації.....	382
7.2.4. Інтегральні рівняння.....	383
7.2.5. Дискретизація	385
7.2.6. Аналіз збіжності	387
7.2.7. Поля в далекій зоні.....	389
7.2.8. Поля в ближній зоні	393
7.3. Дифракція плоскої електромагнітної хвилі на напівплощині та диску, які лежать в паралельних площинах	395
7.3.1. Постановка задачі.....	396
7.3.2. Операторні рівняння.....	398
7.3.3. Інтегральні рівняння.....	399
7.3.4. Аналіз збіжності	401
7.3.5. Поля в далекій зоні.....	402
7.3.6. Поля в ближній зоні	407
7.4. Дифракція плоскої електромагнітної хвилі на напівплощині та двох дисках, які лежать в паралельних площинах.....	411
7.4.1. Постановка задачі.....	411
7.4.2. Операторні рівняння.....	413
7.4.3. Аналіз збіжності	415
7.4.4. Поля в далекій зоні.....	417

7.4.5. Поля в ближній зоні	420
Висновки до розділу 7.....	422
Розділ 8. Дифракція власних хвиль на системах аксіально-симетричних перешкод в круглому хвилеводі.....	424
8.1. Постановка задачі.....	427
8.2. Кругла діафрагма, диск, щілина	429
8.3. Кільце.....	433
8.4. Прямокутна гофра скінченної товщини.....	434
8.5. Скінченна та напівнескінченна система неоднорідностей. Операторний метод	436
8.6. Числові результати.....	493
8.7. Генетичний алгоритм оптимізації параметрів коаксіального хвилеводу з системою щілин в порожньому внутрішньому провіднику.....	450
8.7.1. Операторні рівняння.....	453
8.7.2. Алгоритм оптимізації параметрів.....	455
8.7.3. Числові результати	459
Висновки до розділу 8.....	463
Висновки.....	464
Список використаних джерел.....	472
Додаток А Список публікацій здобувача за темою дисертації.....	508
Додаток Б Поле у далекій зоні, розсіяне плоскою напівнескінченною решіткою.....	531
Додаток В Явний вигляд правої частини сингулярного інтегрального рівняння	533
Додаток Г Коефіцієнти рівнянь у випадку імпедансних решіток в діелектричному хвилеводі	535
Додаток Д Інтегральні рівняння	537

СПИСОК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

$\varepsilon_0 \approx 8,85418781762039 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – діелектрична проникність вакууму

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна проникність вакууму

ε – відносна діелектрична проникність діелектрика

$k = 2\pi / \lambda$ – хвильове число у вакуумі

$k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0}$ – хвильове число у діелектрику

λ – довжина хвилі у вакуумі

c – швидкість світла у вакуумі

ТГц – терагерцевий

НВЧ – надвисокочастотний

$v.p. \int_a^b f(x) dx$ – інтеграл у сенсі головного значення за Коші функції $f(x)$

φ_0 – кут падаючої плоскої хвилі до негативного напрямку осі Oy

$\delta(x)$ – дельта функція Дірака

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Математичне моделювання та теоретичне дослідження явища дифракції електромагнітних хвиль на плоских ідеально провідних або матеріальних перешкодах є невід'ємною частиною радіофізичної науки. Поодинокі стрічки, системи стрічок, дисків, отворів і їхні об'єднання у багат шарові структури стали природними компонентами частотно-селективних поверхонь, антенних систем, сенсорів, поглиначів, збуджувачів та інше. Створення нових елементів і пристроїв НВЧ та ТГц діапазону потребує подальшого розвитку та вдосконалення існуючого математичного апарату. Побудова узагальнюючих моделей, максимально наближених до реальних фізичних об'єктів, на основі строгих математично обґрунтованих методів і стійких схем, дає можливість всебічного дослідження характеристик систем, передбачення можливих нових фізичних ефектів та властивостей. Такі моделі дозволяють створювати алгоритми розрахунків, які практично не мають обмежень, на відміну від чисто числових методів, покладених в основу, в тому числі, комерційних пакетів.

Чисто числові методи використовують, наприклад, наближені умови випромінювання, не враховують умову на ребрі, яка з математичної точки зору необхідна для єдиності розв'язку. Тим самим точність обмежується декількома знаками, а також є імовірність того, що буде отримано невірний розв'язок взагалі. Деякі схеми навіть є нестійкими. Наближені асимптотичні методи також дозволяють отримувати результати з обмеженою точністю, описати лише основні фізичні ефекти, проте за набагато менший комп'ютерний час.

Науковій тематиці, пов'язаній з дифракцією хвиль на плоских екранах, присвячена велика кількість робіт вчених (в тому числі й авторів Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна).

Вдосконалення математичного апарату є невід'ємною частиною та передумовою аналізу фізичних явищ і ефектів. Дослідження цілого класу важливих об'єктів, таких як періодичні системи зі збоєм періодичності, системи, які комбінують розсіювачі різних типів, проводилося з суттєвими обмеженнями, наприклад, при певному співвідношенні розмірів елементів і довжини хвилі, відстані між ними. Сучасна електродинаміка, яка орієнтована на складнокомпозиційні багат шарові структури з елементами різного формоутворення, розвиток якої, в тому числі, пов'язано і з появою нових матеріалів, потребує подальшого вдосконалення математичного апарату.

Таким чином, розвинення чисельно-аналітичних методів, які аналітично враховують умови випромінювання та на ребрі, дозволяють отримати результати з будь-яким наперед заданим ступенем точності (який обмежується лише машинною точністю), з довільним співвідношенням параметрів і за прийнятний комп'ютерний час є **актуальною задачею**.

Однією з важливих задач теоретичного моделювання є скорочення витрат, пов'язаних з ресурсномісткими експериментальними дослідженнями, прогнозування властивостей перспективних матеріалів або прогнозування властивостей у недосяжних на цей час діапазонах частот, особливо у ближньому ТГц діапазоні.

Важливим є розробка методів, які дозволяють суттєво зменшити час обчислень. У роботі пропонується підхід, при використанні якого складна багатоелементна перешкода подається у вигляді об'єднання більш простих, якими можуть виступати поодинокі стрічка, диск, отвір у площині та інше. Розв'язок так званої ключової задачі, задачі про дифракцію на поодинокій перешкоді є відомим або його отримано методами, які розвиваються у роботі. Властивості всієї структури визначаються з операторних рівнянь, за допомогою операторного методу. Ці рівняння, у підсумку, зводяться до матричних або інтегральних з подальшою дискретизацією на базі схеми, яка використовує квадратурні формули. Такий підхід дозволяє суттєво скоротити

час обчислень. Час обчислень зростає пропорційно до кількості шарів, а не кубічно.

Задачі про дифракцію на поодиноких неоднорідностях, які є складовими складної багатоелементної перешкоди, представляють і самостійний інтерес. Важливо розробити методологію, яка дозволяє однаково ефективно досліджувати як ідеально провідні структури, які є у певному сенсі спрощенням, так і матеріальні. У якості прикладу імпедансної стрічки у роботі розглянуто стрічку з реально існуючого матеріалу, яким є графен. Графен – це відносно новий матеріал, який має низку корисних властивостей. Він є доволі міцним, у 100 разів міцніше за сталь, здатен підтримувати поверхневі плазмон-поляритонні хвилі та відповідні плазмонні резонанси вже у ближньому ТГц діапазоні, його властивостями можна керувати динамічно за рахунок прикладання електростатичного або магнітостатичного поля, тим самим змінюючи хімічний потенціал графену та, як наслідок, його провідність. Всі ці властивості обумовлюють перспективність використання графену у перестроюваних пристроях.

Електромагнітні властивості нових матеріалів, таких як, наприклад, графен, доволі точно описуються за допомогою використання імпедансних граничних умов у припущенні, що провідність є комплексно значною скалярною функцією. Тому розширення методів аналізу ідеально провідних стрічок на імпедансні стрічки є актуальною задачею.

Дослідження впливу краю на характеристики розсіяних полів потребує розвинення методів аналізу напівнескінчених структур. На відміну від класичної нескінченної ідеально періодичної структури, напівнескінченна система у розсіяному полі має хвилі з неперервним і дискретним спектром. Подальшим розвиненням моделі напівнескінченної структури є модель нескінченної періодичної, але зі збоєм у періодичності розташування елементів.

Потребує розв'язання актуальна задача дистанційного виявлення дефектів у багат шарових багатоелементних періодичних структурах шляхом аналізу розсіяного електромагнітного поля. Потребують вивчення системи при різних розмірах поодинокого розсіювача, відстані між ними, відстані між шарами. Розвинена теорія також може бути застосована і при аналізі антен з можливістю керування діаграмою спрямованості за рахунок виключення елементів з періодичного масиву.

Для ефективного керування характеристиками розсіяних полів необхідно розв'язання задачі оптимізації. Детерміністичні алгоритми мають суттєвий недолік, проблему збіжності до локального, а не глобального максимуму. До того ж в плані розвитку комп'ютерних технологій чітко просліджується тенденція до багатоядерності, багатопотоковості. Тому актуальним є розвиток паралельних недетермінованих стохастичних алгоритмів, одним з яких є паралельний генетичний алгоритм.

Фундаментальною науковою проблемою, на вирішення якої спрямовано дослідження, є розвиток чисельно-аналітичних методів в теорії дифракції хвиль на багатоелементних структурах, побудова фізично коректних моделей для всебічного дослідження електродинамічних характеристик таких систем, включаючи системи, які базуються на використанні як ідеально провідних, так і імпедансних плоских екранів. Такі моделі можуть стати основою ефективних процедур оптимізації параметрів періодичних, напівнескінчених періодичних, обмежених багатоелементних структур з метою ефективного керування характеристиками розсіяних полів на основі недетермінованих стохастичних алгоритмів, одним з яких є паралельний генетичний алгоритм. Вирішення зазначеної проблеми дозволяє вказати нові ефективні шляхи розв'язання цілого ряду прикладних задач, в тому числі задачі дистанційної дефектоскопії в багат шарових багатоелементних періодичних структурах шляхом аналізу розсіяних полів, задачі керування характеристиками діаграм спрямованості антен за рахунок

виключення елементів з періодичного масиву, задачі створення та суттєвого покращення робочих характеристик відомих радіотехнічних і радіоелектронних систем. Зазначений комплекс питань обумовлює як власне актуальність теми дисертаційної роботи, так і вибір напрямку досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі фізики надвисоких частот факультету радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна і є узагальненням результатів досліджень автора в рамках наукового напрямку кафедри. Тематика дослідження пов'язана з пріоритетними напрямами розвитку науки і техніки, затвердженими Кабінетом Міністрів України «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави», а також з пріоритетними напрямками фундаментальних наукових досліджень, затвердженими Міністерством освіти і науки України. Матеріали дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт (НДР), номер державної реєстрації 0111U010367, 0112U000563, 0115U000465, 0116U000819, 0123U102871, 0116U000036, 0119U002540, 0118U002038, 0117U004964, 0119U002535, 0122U001486, 0122U001436, 0124U000670. Автор був керівником двох НДР і виконавцем 11 НДР.

Мета і завдання дослідження. *Метою роботи* є розвинення строгих чисельно-аналітичних методів і формулювання єдиних підходів до розв'язання задач про дифракцію хвиль різної фізичної природи (акустичних, електромагнітних) на структурах з періодичним розміщенням розсіювачів, в тому числі скінченноелементних періодичних, нескінченних періодичних,

нескінченних зі збоєм періодичності, напівнескінченних періодичних і їх комбінаціях. В рамках таких підходів створюються фізично коректні моделі, які дозволяють проводити як аналіз характеристик розсіяних полів, так і проводити оптимізацію параметрів по вибраних критеріях.

Реалізація мети досягається за рахунок розв'язання наступних задач:

Розв'язання задач про дифракцію електромагнітних хвиль на напівнескінченних періодичних структурах, кількісне визначення впливу краю на електродинамічні властивості періодичних стрічкових решіток з ідеально провідних та імпедансних (графенових) стрічок.

Побудова строгих математичних моделей нескінченних періодичних систем зі збоєм в періодичності розташування елементів, вивчення впливу цього збою на характеристики розсіяних полів.

Побудова фізично коректних моделей випромінюючих, поглинаючих систем, хвилеводних збуджувачів, які складаються з імпедансних розсіювачів, оптимізація їх параметрів.

Розвинення єдиної методології на задачі про дифракцію акустичних й електромагнітних хвиль на аксіально-симетричних структурах.

Розвинення строгих методів аналізу дифракції хвиль на структурах, які поєднують в собі нескінченні та скінченні розсіювачі, а розсіяні поля в яких подаються як суперпозиція полів плоских, циліндричних та сферичних хвиль.

Розв'язання граничних задач електродинаміки у строгій постановці для багатоелементних систем неоднорідностей, розташованих в хвилеводах з ідеально провідними металевими стінками, в діелектричних хвилеводах та у вільному просторі з використанням операторного методу, методу сингулярних інтегральних рівнянь, методу моментів та їх комбінацій.

Об'єкт та предмет дослідження.

Об'єктом дослідження є фізичні процеси взаємодії хвиль різної природи з плоскими екранами, розсіяні поля яких мають як дискретний, так і неперервний спектр.

Предметом дослідження є фізичні закономірності взаємодії хвиль з плоскими екранами з різною топологією та кількісним складом, керування характеристиками розсіяння та їх оптимізація за обраними критеріями.

Методи дослідження. В дисертації для розв'язання поставлених задач застосовуються наступні чисельно-аналітичні методи: операторний метод, який використовує оператори проходження та відбиття поодинокого елемента багатоеlementної електродинамічної структури; метод сингулярних інтегральних рівнянь; метод моментів. Для дискретизації отриманих інтегральних рівнянь пропонуються алгоритми типу Найстрема (метод дискретних особливостей, інтерполяційний метод). З використанням комбінації вказаних методів сформульовано єдиний підхід до дослідження електродинамічних об'єктів з різною внутрішньою топологією: скінченноеlementних періодичних, нескінченних періодичних, нескінченних зі збоєм періодичності, напівнескінченних періодичних та їх об'єднань, електродинамічних об'єктів, розсіяні поля в яких складаються з плоских, циліндричних, сферичних хвиль та їх суперпозицій.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати, які було отримано під час виконання дисертаційної роботи дозволили виявити та пояснити природу цілої низки фізичних ефектів і закономірностей взаємодії хвиль різної фізичної природи з багатоеlementними періодичними електродинамічними структурами, які характеризуються не лише різною внутрішньою топологією, але і різними матеріальними параметрами розсіювачів і середовища (ідеально провідні, графенові розсіювачі,

діелектрик з втратами та інше). На базі розвинених методів отримано результати стосовно ефективного керування характеристиками розсіяних полів за рахунок вибору геометричних параметрів структури, матеріальних параметрів середовища, а також динамічно з використанням, наприклад, електростатичного поля для керування хімічним потенціалом речовини.

В рамках сформульованого підходу з використанням класичних методів аналізу і підходів сучасної радіофізики і математичної фізики отримано наступні нові наукові результати

1. З використанням операторного методу у сукупності з методом сингулярних інтегральних рівнянь і методом моментів розроблено фізико-математичні моделі напівнескінчених систем неоднорідностей різних типів. На основі цих моделей створено високоефективні обчислювальні алгоритми для розрахунку розсіяних полів та електродинамічних параметрів неоднорідностей.

1.1. *Вперше* отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на напівнескінченній решітці типу жалюзі як з ідеально-провідних, так і з імпедансних нескінченно тонких стрічок. Запропоновано розв'язок для напівнескінченної плоскої решітки.

1.2. На базі строгих методів кількісно визначено вплив краю стрічкових решіток на характеристики розсіяних полів, які мають як дискретний (плоскі хвилі), так і неперервний (циліндричні хвилі) спектри. Показано, що рівень відбиття від краю у бік опромінювача можна зменшити за рахунок розміщення додаткової скінченної решітки певної складної геометрії.

1.3. *Вперше* запропоновано процедуру регуляризації для виключення особливостей ядер операторних рівнянь для напівнескінчених структур, схему дискретизації на базі квадратурних формул, а також ітераційну

процедуру з параметром релаксації для розв'язання нелінійного операторного рівняння.

1.4. Побудовано строгі розв'язки задач про дифракцію власних електромагнітних хвиль круглого хвилеводу на скінченній та напівнескінченній періодичній системах аксіально-симетричних неоднорідностей. Застосовано рекурентну процедуру до запису операторних рівнянь, що дозволило скоротити час обчислень. Проведено процедуру оптимізації параметрів на базі паралельного генетичного алгоритму.

2. Створено загальну теорію розсіяння електромагнітних хвиль на нескінченних періодичних решітках зі збоєм періодичності. Отримано строгі розв'язки задач про дифракцію та детально проаналізовано характеристики полів, які виникають за рахунок порушення періодичності.

2.1. *Вперше* з використанням розроблених строгих методів отримано результати про електродинамічні властивості хвилеводного каналу, сформованого на місці відсутніх стрічок двошарової нескінченної періодичної решітки.

2.2. Встановлено взаємний вплив ідеально провідних та графенових стрічок у періодичних решітках, направляючі властивості структур.

2.3. *Вперше* показано, що у випадку графенової нескінченної решітки, на відміну від решіток з ідеально провідних стрічок, у яких спостерігалася сильна взаємодія стрічок лише поблизу аномалій Релея-Вуда, взаємодія стрічок є помітно сильнішою як поблизу аномалії Релея-Вуда, так і поблизу плазмонних резонансів.

2.4. *Вперше* показано, що у випадку двошарової нескінченної графенової решітки без скінченної кількості стрічок шириною головного пелюстка діаграми спрямованості поля, яке пройшло, можна керувати, окрім зміни частоти або періоду, як у решітці з ідеально-провідних стрічок, ще й динамічно, за рахунок зміни хімічного потенціалу графену.

3. Розроблено узагальнюючу методологію для дослідження взаємодії імпедансних розсіювачів нульової товщини з плоскими електромагнітними хвилями.

3.1. *Вперше* отримано результати щодо електродинамічних характеристик графенових решіток, в тому числі напівнескінченної графенової стрічкової решітки у вакуумі та розміщеної в діелектричному хвилеводі, напівнескінченної системи шарів нескінченних графенових решіток у діелектричній плиті.

3.2. Виявлено та ретельно описано ефекти збудження цілої низки резонансів, які розглянуті структури здатні підтримувати, та їх вплив на характеристики полів: плазмонних резонансів, власних резонансів діелектричного шару, декількох типів резонансів, пов'язаних з періодичністю (резонанси поблизу аномалій Релея-Вуда, резонанси на решіткових модах, а також два типи резонансів, пов'язаних з періодичністю у розташуванні шарів). Проведено класифікацію резонансів.

3.3. Запропоновано способи керування характеристиками структур. Виявлено параметри, при яких спостерігається резонансне максимальне поглинання та розсіяння падаючої плоскої хвилі. Запропоновано способи розширення смуги поглинання за рахунок збудження вказаних резонансів.

3.4. *Вперше* показано, що одночасне збудження плазмонних резонансів та резонансів на решіткових модах забезпечує можливість суттєвого керування потужністю, яку переносять власні хвилі діелектричного хвилеводу.

3.5. Розроблено ефективний алгоритм оптимізації параметрів на базі паралельного генетичного алгоритму.

4. Операторний метод розвинено на структури, розсіяні поля в яких формуються циліндричними і сферичними хвилями, а також є суперпозицією хвиль трьох типів: плоскої, циліндричної і сферичної. Запропоновано

уніфіковану процедуру запису рівнянь, застосування єдиних процедур регуляризації та дискретизації.

4.1. *Вперше* операторний метод застосовано для аналізу дифракції плоскої електромагнітної та акустичної хвилі на нескінченно тонкому кільці або кільцевій щілині у площині.

4.2. *Вперше* отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідній структурі, яка складається з напівплощини та системи дисків.

4.3. Запропоновано процедуру регуляризації для виключення особливостей ядер в інтегральних рівняннях. Розроблено схему дискретизації рівнянь.

4.4. Показано, що навіть у випадку, коли диск не освітлюється падаючою плоскою хвилею, а цілком знаходиться у області тіні, відбувається збудження циліндричних хвиль.

Практичне/теоретичне значення отриманих результатів.

Сукупність отриманих результатів на базі розвинених строгих методів і узагальнення методології моделювання електродинамічних характеристик плоских екранів, в тому числі з імпедансними границями, зробили вагомий внесок в розвиток наукового напрямку – електродинаміку періодичних структур, розширили фундаментальні знання про фізичні процеси взаємодії полів різної природи зі складнокомпозиційними електродинамічними структурами.

Побудовані та реалізовані у вигляді алгоритмів багатокритеріального моделювання параметрів розглянутих структур математичні моделі дозволили реалізувати ще один етап в еволюції важливого напрямку прикладної електродинаміки, який пов'язано зі створенням систем автоматизованого проєктування частотно-селективних поверхней, антенних систем, фільтрів, цілого класу керованих збуджувачів, поглиначів

надвисокочастотного, субтерагерцевого та терагерцевого діапазонів частот. Привабливість запропонованих і реалізованих алгоритмів у порівнянні з різними комерційними пакетами полягає в тому, що ці алгоритми дозволяють здійснювати контроль точності розрахунків на всіх етапах моделювання та створювати систему взаємозв'язку між різними алгоритмами, що є істотним при проведенні процедури оптимізації параметрів.

На базі запропонованого підходу встановлено потенційні можливості електродинамічних структур, які моделюють реальні об'єкти, при наявності ряду факторів, впливаючих на процеси взаємодії електромагнітних хвиль у них. При розв'язанні задач дефектоскопії в реальних багатoelementних періодичних об'єктах наявність дефекту може бути встановлено по розсіяних полях на базі побудованих моделей систем зі збоєм періодичності, при створенні датчиків для контролю та вимірювання діелектричної та магнітної проникностей матеріалів і сумішей цінними є результати розрахунків електродинамічних характеристик хвилеводних систем з матеріальними включеннями, при створенні перестроюваних частотно-селективних поверхонь, поглиначів і антенних систем з контрольованою діаграмою спрямованості практично важливими і перспективними є багат шарові періодичні структури зі збоєм періодичності та графеновими включеннями.

Ще одним фактором, який визначає практичну цінність, – є фактор ресурсозбереження. Розвинені методи і побудовані моделі дозволяють передбачати характеристики тієї чи іншої структури і, при цьому, істотно скоротити матеріальні та часові затрати при створенні реальних функціональних пристроїв, що є дуже важливим при застосуванні дорогих матеріалів і елементів (наприклад, графена).

Побудовані алгоритми реалізовано у вигляді комп'ютерних програм, на які отримано авторські свідоцтва на право інтелектуальної власності.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 79 працях: 4 монографіях (1 з яких англomовна у видавництві Cambridge Scientific Publishers), 11 статтях у наукових фахових виданнях України, 29 статтях у фахових виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних SCOPUS, 1 статті у фахових закордонних виданнях (які не входять до SCOPUS), 34 тезах доповідей на наукових конференціях. Також наукові результати додатково відображено у 7 статтях, 2 тезах доповідей, 9 свідоцтвах про авторське право.

Особистий внесок здобувача. У роботах [1], [3] здобувач виконав постановку та розв'язання граничних задач, комп'ютерне моделювання, аналіз та узагальнення отриманих результатів. У роботах [2], [4] здобувач виконав розв'язання задач дифракції на структурах, розсіяні поля в яких мають одночасно дискретний та неперервний спектр, розв'язання задач дифракції на системах перешкод у хвилеводах, оптимізація параметрів, аналіз та узагальнення отриманих результатів. У роботах [5], [6], [12], [15], [16], [18], [38], [40], [41], [42], [43], [44] здобувач виконав побудову математичної моделі, аналіз фізичних результатів. У роботах [8], [9], [17], [22] здобувач виконав постановку задачі, вибір методу розв'язання, побудову математичної моделі, аналіз фізичних результатів. У роботах [13], [14], [24], [25], [26], [28], [30], [31], [35], [36] здобувач виконав постановку задачі, вибір методу розв'язання, отримав сингулярне інтегральне рівняння, провів аналіз фізичних результатів. У роботах [10], [19], [21], [23], [27], [29], [33], [34], [45] здобувач виконав вибір методу розв'язання, отримав сингулярне інтегральне рівняння, провів аналіз фізичних результатів. У роботах [11], [37], [39] здобувач виконав постановку задачі, вибір методу розв'язання, отримав сингулярне інтегральне рівняння, провів оптимізацію параметрів, виконав аналіз фізичних результатів. У роботах [20], [32] здобувач вибрав метод розв'язання, побудував математичну модель, провів аналіз фізичних

результатів. У роботі [7] здобувач виконав постановку задачі, провів оптимізацію параметрів, виконав аналіз фізичних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації було представлено та обговорено на наступних міжнародних конференціях:

1. 2013 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. Kharkiv, Ukraine, 23-28 June, 2013.
2. The Seventh International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Kharkiv, Ukraine, 15-19 September, 2014.
3. 2015 International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT). Kharkiv, Ukraine, 21-24 April, 2015.
4. VIII Международная научная конференция "Функциональная база нанoeлектроники". Одесса, Украина, 28 сентября, 2015.
5. 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'2016). Kharkiv, Ukraine, 20-24 June, 2016.
6. 2016 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Lviv, Ukraine, 05-07 July, 2016.
7. The 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 05-11 September, 2016.
8. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv, Ukraine, 29 May-2 June, 2017.
9. 2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2017. Lviv, Ukraine, 17-20 October, 2017.
10. 2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Kiev, Ukraine, 2018.
11. The 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS), Odessa, Ukraine, 04-07 September, 2018.

12. IEEE 3th Міжнародна конференція з інформаційно-телекомунікаційних технологій та радіоелектроніки (UkrMiKo'2018/UkrMiCo'2018). Odessa, Ukraine, 10-14 September, 2018.
13. 2018 Asia-Pacific Microwave Conference (APMC 2018). Kyoto, Japan, November 6-9, 2018.
14. 2nd URSI AT-RASC. Gran Canaria, 28 May – 1 June 2018.
15. European Microwave Conference in Central Europe, Prague, Czech Republic, 13-15 May, 2019.
16. 49th European Microwave Conference, Paris, France, 1–3 October, 2019.
17. IEEE 39th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), Kyiv, 16-18 April, 2019.
18. IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2019), Lviv, July 2-6, 2019.
19. 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, April 22-24, 2020.
20. 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Copenhagen, Denmark, 15-20 March, 2020.
21. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine, 21-25 September, 2020.
22. 50th European Microwave Conference. Utrecht, Netherlands, 12-14 January, 2021.
23. 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Düsseldorf, Germany, 22-26 March, 2021.
24. 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2021). Lviv, Ukraine, 26-28 August, 2021.
25. 41th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, 10-14, October, 2022.
26. 2nd Ukrainian Microwave Week. Kharkiv, 14-18 November, 2022.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, 8 розділів, загальних висновків, списку використаних джерел, 5 додатків. Загальний обсяг дисертації складає 539 сторінок, із них 414 сторінок основного тексту. Робота ілюстрована 5 таблицями та 243 рисунками. Список використаних джерел містить 314 найменувань.

Розділ 1. Дифракція плоскої електромагнітної хвилі на напівнескінченних стрічкових решітках

Електродинамічні структури з періодичними послідовностями перешкод представляють інтерес як у практичному, так і у теоретичному сенсі. Під періодичною будемо розуміти будь яку, скінченну або нескінченну багатоеlementну структуру, яка складається з однакових елементів. Відстань між сусідніми елементами однакова. Серед таких структур, напівнескінченні періодичні решітки з різною геометрією поодинокого елемента, утворюючого періодичний масив, як круглий циліндр, гофра, стрічка та інше, займають особливе місце.

Напівнескінченні періодичні структури не є періодичними у класичному сенсі цього терміну. Вони є нескінченними лише у одному напрямку. Проте у протилежному напрямку вони мають край. Саме наявність краю суттєво відрізняє напівнескінченні періодичні решітки від нескінченних ідеально періодичних. З математичної точки зору, з одного боку, це означає, що для їх аналізу неможливо застосувати теорему Флоке. З іншого боку, у зв'язку з тим, що напівнескінченна періодична структура є нескінченною, методи аналізу скінченних решіток до них також неможна застосувати напряму.

На цей час є декілька підходів до аналізу напівнескінченних структур. Один з них використовує наступну ідею. У зв'язку з тим, що напівнескінченна періодична структура є нескінченною в одному з напрямків, то припускається, що на великій (у порівнянні з довжиною хвилі) відстані від краю її властивості наближаються до властивостей ідеально періодичної решітки. Відмінність поля нескінченної ідеально періодичної структури від напівнескінченної описують за допомогою так званого поля корекції. Таким чином, густина струмів на металевих розсіювачах напівнескінченної періодичної решітки представляється у вигляді суми

густини струмів, які течуть елементами ідеально періодичної решітки і густини струмів корекції. На даний час більшість розв'язків отримано у припущенні малого розміру поперечного перетину розсіювача або великої відстані між розсіювачами у порівнянні з довжиною хвилі.

У роботах [1], [2] розглядається дифракція плоскої електромагнітної хвилі на напівнескінченній системі циліндрів з використанням методу Вінера-Хопфа. Припускається, що радіуси є малими у порівнянні з довжиною хвилі. Схожа задача розв'язується у [3], [4] з використанням варіаційного підходу, а в [5] використовується перетворенням Кумера. У [6] розглядається напівнескінченна система циліндрів довільної форми. У [7] розглядається дифракція акустичної хвилі на напівнескінченній системі циліндрів з використанням методу Фолді у випадку граничних умов Діріхле. Поперечний розмір циліндрів припускається малим у порівнянні з довжиною хвилі. У роботі [8] розвивається підхід, запропонований у [7], на систему циліндрів довільного радіусу як у випадку граничних умов Діріхле, так і у випадку граничних умов Неймана. У [9] розглядається напівнескінченна система гофр у ідеально провідній площині. Як і у попередніх роботах припускається, що поле поблизу кожної гофри є сумою поля нескінченної ідеально періодичної системи і додаткового поля, поля корекції, амплітуда якого спадає при збільшенні відстані від краю структури.

Решітки, складовим елементом яких є плоска металева стрічка, представляють практичний інтерес. На їх базі можливе створення фільтрів, частотно-селективних поверхонь, елементів антенних систем та інше.

У [10], [11] розглядається напівнескінченна решітка зі стрічок, розташованих в одній площині у випадку E - поляризації (вектор напруженості електричного поля паралельний до стрічок). Ширина стрічки є малою у порівнянні з довжиною хвилі. У [10] використовується метод Вінера-Хопфа, а у [11] – метод моментів. Причому, для апроксимації струмів на стрічках використовується лише одна базисна функція (одномодове

наближення). У [12] використовуються наближені граничні умови і метод Зомерфельда-Малюженця до решітки з тонких стрічок, період якої є набагато меншим за довжину хвилі. У [13] з використанням методу моментів розглядається дифракція власної хвилі плоского діелектричного хвилеводу на напівнескінченній системі стрічок у припущенні одномодового режиму роботи хвилеводу.

Інший підхід до аналізу напівнескінченних періодичних структур базується на так званій властивості трансляційної симетрії. Її можна сформулювати наступним чином [14]: електродинамічні властивості напівнескінченної структури не зміняться, якщо видалити один крайній елемент. Тобто, з одного боку, напівнескінченну структуру можна розглядати як таку, яка починається з першого, $n=1$, елемента. З іншого боку, напівнескінченну структуру можна розглядати як таку, яка починається з другого, $n=2$, елемента та взаємодіє з першим елементом. Ця ідея реалізується при застосуванні операторного методу до напівнескінченних систем нескінченних ідеально періодичних решіток, які розташовані у паралельних площинах у [15]-[21], а також до плоских або багат шарових напівнескінченних решіток у [14]-[31]. Властивості всієї структури можуть бути виражені за допомогою оператора відбиття. Цей оператор знаходиться з нелінійного операторного рівняння другого роду. Рівняння може бути матричним, у разі напівнескінченної системи нескінченних ідеально періодичних решіток, або інтегральним, у разі напівнескінченної системи стрічок.

Важливо відмітити, що поле, розсіяне напівнескінченною системою стрічок, складається з поля плоских хвиль, які розсіяні нескінченною частиною структури і поля циліндричних хвиль, розсіяних краєм. В результаті інтегральний оператор відбиття може мати особливості у точках, які відповідають постійним поширення плоских хвиль. Ці особливості є не

інтегрованими на дійсній осі і являють собою полюси ядра оператора. Для їх виключення пропонується провести процедуру регуляризації.

Інтерес представляють решітки, у яких стрічки повернуті на певний кут відносно осі структури, так звані решітки типу жалюзі. Вони мають такі ж резонансні властивості, як і плоскі решітки, проте також здатні перенаправляти енергію падаючого поля в бік від опромінювача, що робить їх перспективними у технологіях типу стелс наряду з їх природнім використанням у, наприклад, антенних системах [32], [33], [34].

1.1. Решітка типу жалюзі. Операторний метод

У даному параграфі розглянемо напівнескінченну решітку типу жалюзі. Задача про дифракцію плоскої хвилі зводиться до нелінійного операторного рівняння другого роду відносно оператора відбиття структури. Для розв'язання операторного рівняння пропонується ітераційна процедура з параметром релаксації або метод Зейделя. Введення параметру релаксації, у порівнянні з методом простої ітерації, дозволяє забезпечити збіжність процесу у більш широкому діапазоні змін геометричних параметрів, а також дозволяє впливати на швидкість збіжності. Операторне рівняння використовує оператори розсіяння (проходження, відбиття) поодинокі стрічки. Будемо вважати їх відомими. У наступних параграфах буде наведено методи отримання цих операторів.

Розв'язок задачі отримано вперше.

1.1.1. Постановка задачі

Розглянемо дифракцію плоскої H -поляризованої монохроматичної хвилі на напівнескінченній стрічковій решітці типу жалюзі. Геометрія структури наведена на рис.1.1.

де $\gamma(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2}$, причому вибирається та гілка кореня, для якої дійсна і уявна частини є невід'ємними, $\text{Re } \gamma \geq 0$, $\text{Im } \gamma \geq 0$. Введемо інтегральний оператор відбиття напівнескінченної решітки R^1 . Тоді амплітуда Фур'є відбитого поля $a(\xi)$ і вираз для відбитого поля (в області $z > 0$) $H_x^{\text{refl}}(y, z)$ можна записати у вигляді перетворення Фур'є:

$$a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} R^1(\xi, \zeta) q(\zeta) d\zeta, \quad (1.2)$$

$$H_x^{\text{refl}}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi, \quad z > 0. \quad (1.3)$$

Змінна ζ має сенс косинуса кута поширення падаючої плоскої хвилі до осі Oy , а змінна ξ – косинуса кута поширення відбитої плоскої хвилі. Причому самі кути можуть бути комплексними.

Рівняння (1.2) описує дію інтегрального оператора R^1 з ядром $R^1(\xi, \zeta)$ на амплітуду Фур'є падаючого поля. У операторній формі (1.2) можна переписати у вигляді

$$a = R^1 q. \quad (1.4)$$

Наряду з амплітудою Фур'є відбитого поля введемо амплітуди Фур'є поля між n -ю та $(n+1)$ -ю стрічками C_n і B_n . Тоді поле між стрічками можна надати як інтеграли Фур'є у кожній з областей

$$\begin{aligned} H_x(y, z) = & \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\xi) \exp(ik\xi(y - (n-1)\Delta) - ik\gamma(\xi)(z + (n-1)h)) d\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi) \exp(ik\xi(y - n\Delta) + ik\gamma(\xi)(z + nh)) d\xi, \quad (n-1)h < z < nh. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будемо вважати, що оператори проходження та відбиття поодинокі стрічки відомі. Позначимо їх як t і r . Дія цих операторів описується за допомогою інтегралу. В результаті їх дії на амплітуду Фур'є $g(\zeta)$ поля, падаючого на поодинокі стрічку, отримуємо амплітуди Фур'є поля, яке пройшло, та відбитого поля:

$$(tg)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} t(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta,$$

$$(rg)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta,$$

де $t(\xi, \zeta)$, $r(\xi, \zeta)$ ядра операторів. Причому

$$t(\xi, \zeta) = \delta(\xi - \zeta) - r(\xi, \zeta), \quad (1.6)$$

де $\delta(\xi)$ – дельта функція Дірака.

1.1.2. Операторні рівняння

У цьому пункті будуть записані вирази для амплітуд Фур'є розсіяного поля, а також нелінійне операторне рівняння відносно оператора відбиття напівнескінченної решітки типу жалюзі.

Відмітимо, що наряду з (1.4) для амплітуди Фур'є відбитого поля може бути отримано ще одне рівняння. Відбите поле можна представити як суперпозицію двох полів. Одне з них – це поле хвилі з амплітудою rq , яке отримано в результаті відбиття поля падаючої хвилі поодинокую першою стрічкою. Інше – це поле хвилі з амплітудою ts^-eB_1 . Воно враховує взаємодію першої стрічки напівнескінченної решітки і всіх інших стрічок. Оператор e визначає зміну амплітуд поля при зсуві системи координат на відстань h вздовж осі Oz у напрямку поширення хвилі. Оператори s^\pm визначають зміну амплітуд поля при зсуві системи координат у позитивному або негативному напрямку осі Oy на відстань Δ . Їх дія на довільну функцію $g(\xi)$ зводиться до множення на експоненту

$$(eg)(\xi) = \exp(ikh\gamma(\xi))g(\xi), \quad (1.7)$$

$$(s^\pm g)(\xi) = \exp(\pm ik\Delta\xi)g(\xi). \quad (1.8)$$

Тоді

$$a = rq + ts^-GB_1. \quad (1.9)$$

Використовуючи такі ж міркування можна записати вирази для амплітуд Фур'є поля між стрічками

$$C_1 = tq + rs^-eB_1, \quad (1.10)$$

$$B_1 = R^1s^+eC_1, \quad (1.11)$$

$$B_n = R^1s^+eC_n, \quad (1.12)$$

$$C_n = t_{n-1}q + r_nS^-eB_n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

де t_n і r_n – оператори проходження та відбиття системи, яка складається з n стрічок.

Як видно, амплітуди Фур'є розсіяного поля виражаються через відому амплітуду Фур'є падаючого поле за допомогою оператора відбиття напівнескінченної решітки R^1 . Тому основною задачею є його визначення.

Підставимо амплітуду a з (1.4) у (1.9), а амплітуду C_1 з (1.10) у (1.11), використовуючи (1.6) отримаємо

$$R^1q = rq + s^-eB_1 - rs^-eB_1, \quad (1.13)$$

$$B_1 = R^1s^+eq - R^1s^+e rq + R^1s^+e rs^-eB_1. \quad (1.14)$$

Як було зазначено вище, з одного боку, на великій у порівнянні з довжиною хвилі відстані від краю, властивості напівнескінченної решітки наближаються до властивостей нескінченної ідеально періодичної решітки. Тому розсіяне поле має дискретний спектр. З іншого боку, поле, розсіяне краєм решітки, має неперервний просторовий спектр. Таким чином, розсіяне всією напівнескінченною решіткою поле може бути надано як сума поля з дискретним і неперервним спектром.

Після підстановки (1.14) у (1.13) отримаємо

$$R^1q - s^-eR^1s^+eq = rq - s^-eR^1s^+e rq + s^-eR^1s^+e rs^-eB_1 - rs^-eB_1. \quad (1.15)$$

Ядро оператора $R^1 - s^-eR^1s^+e$ у лівій частині (1.15), який діє на функцію $q(\zeta)$, є $R^1(\xi, \zeta)f(\xi, \zeta)$, де

$$f(\xi, \zeta) = 1 - \exp(ik(\Delta(\zeta - \xi) + h(\gamma(\xi) + \gamma(\zeta)))).$$

Функція $f(\xi, \zeta)$ може обертатись у нуль на дійсній осі. Ядро $R^1(\xi, \zeta)$ оператора R^1 може мати особливості в точках, які співпадають з нулями функції $f(\xi, \zeta)$. Ці точки відповідають постійним поширення плоских хвиль поля, розсіяного нескінченною періодичною частиною решітки і вони є полюсами. Таким чином, оператор R^1 є сингулярним інтегральним оператором.

Для кожного фіксованого значення ξ функція $f(\xi, \zeta)$ може мати $N_1(\xi)$ нулів (за аргументом ζ). Позначимо ці нулі як $\zeta_m(\xi)$, $m = 1, 2, \dots, N_1(\xi)$. Так само і для кожного фіксованого значення ζ функція $f(\xi, \zeta)$ може мати $N_2(\zeta)$ нулів (за аргументом ξ). Позначимо ці нулі як $\xi_m(\zeta)$, $m = 1, \dots, N_2(\zeta)$. Тоді

$$f(\xi, \zeta_m(\xi)) = 0, \quad m = 1, \dots, N_1(\xi),$$

$$f(\xi_m(\zeta), \zeta) = 0, \quad m = 1, \dots, N_2(\zeta).$$

Для усунення особливостей у (1.15) необхідно провести процедуру регуляризації.

1.1.3. Процедура регуляризації

Метою процедури регуляризації є зведення сингулярного інтегрального рівняння до такої форми, щоб його можна було розв'язати чисельно за допомогою апроксимації квадратурними формулами.

Перетворимо шлях інтегрування у комплексній площині по змінній ζ . Припустимо, що шлях інтегрування Γ співпадає з дійсною віссю всюди, за виключенням нулів функції $f(\xi, \zeta)$. У випадку $\Delta > 0$ нулі функції $f(\xi, \zeta)$ обходяться знизу. Такий спосіб обходу особливостей у вигляді полюсів продиктовано умовою випромінювання: плоскі хвилі, відбиті періодичною нескінченною частиною структури, повинні поширюватися в бік від решітки

на нескінченність. З міркувань симетрії зрозуміло, що при $\Delta < 0$ особливості необхідно обходити зверху.

Введемо оператор R за формулою

$$R = R^1 - s^- e R^1 e s^+, \quad (1.16)$$

з ядром $R(\xi, \zeta) = R^1(\xi, \zeta) f(\xi, \zeta)$, який вже не має особливостей.

Проведемо процедуру регуляризації за наступним алгоритмом. Від ядра інтегрального оператора, яке має особливості, віднімемо таку функцію, щоб їх різниця вже не мала особливостей, а інтеграл від цієї функції можна було обчислити аналітично. Для того, щоб збереглась тотожність, інтеграл від функції також додається. Врахуємо, що [37]

$$\int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\zeta - \xi} = \pi i.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (R^1 q)(\xi) &= \int_{\Gamma} \frac{R(\xi, \zeta)}{f(\xi, \zeta)} q(\zeta) d\zeta = \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{R(\xi, \zeta) \prod_{m=1}^{N(\xi)} (\zeta - \zeta_m(\xi)) q(\zeta)}{f(\xi, \zeta) \prod_{m=1}^{N(\xi)} (\zeta - \zeta_m(\xi))} \frac{1}{\prod_{m=1}^{N(\xi)} (\zeta - \zeta_m(\xi))} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{N(\xi)} R(\xi, \zeta_n(\xi)) \alpha_n(\xi) q(\zeta_n(\xi)) \frac{1}{\zeta - \zeta_n(\xi)} \right) d\zeta + \\ &\quad + \pi i \sum_{n=1}^{N(\xi)} R(\xi, \zeta_n(\xi)) \alpha_n(\xi) q(\zeta_n(\xi)), \end{aligned} \quad (1.17)$$

де границя

$$\alpha_n(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_n(\xi)} \frac{\zeta - \zeta_n(\xi)}{f(\xi, \zeta)}$$

має скінченне значення. Інтеграл у правій частині (1.17) є регулярним. Значить його можна розглядати і як інтеграл у сенсі головного значення за Коші. Використовуючи рівність [37]

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta - \xi} = 0,$$

остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{R}^1 q)(\xi) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, \zeta) q(\zeta) \frac{\prod_{m=1}^{N(\xi)} (\zeta - \zeta_m(\xi))}{f(\xi, \zeta)} \frac{d\zeta}{\prod_{m=1}^{N(\xi)} (\zeta - \zeta_m(\xi))} + \\
 + \pi i \sum_{n=1}^{N(\xi)} R(\xi, \zeta_n(\xi)) \alpha_n(\xi) q(\zeta_n(\xi)) = (\mathbf{R}F_1 q)(\xi).
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Відмітимо, що границя

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_n(\xi)} \frac{\prod_{m=1}^{N(\xi)} (\zeta - \zeta_m(\xi))}{f(\xi, \zeta)}, \quad n = 1, 2, \dots, N(\xi).$$

має скінченне значення.

Аналогічно

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rR}^1)(\eta, \zeta) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} r(\eta, \xi) R(\xi, \zeta) q(\zeta) \frac{\prod_{l=1}^{N(\xi)} (\xi - \xi_l(\zeta))}{f(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{\prod_{m=1}^{N(\xi)} (\xi - \xi_m(\zeta))} + \\
 + \pi i \sum_{n=1}^{N(\xi)} r(\eta, \xi_n(\zeta)) R(\xi_n(\zeta), \zeta) \beta_n(\zeta) = (\mathbf{rF}_0 \mathbf{R})(\eta, \zeta),
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

де

$$\beta_n(\zeta) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_n(\zeta)} \frac{\xi - \xi_n(\zeta)}{f(\xi, \zeta)}$$

є скінченною границею.

Введені таким чином оператори F_0 і F_1 є регуляризуючими.

Введемо оператор \mathbf{B} за формулою

$$\mathbf{B}q = B_1 - \mathbf{R}^1 s^+ e q.$$

Як і у (1.16) у амплітуди B_1 відняли доданок, який містить особливості.

Таким чином, оператор \mathbf{B} не має особливостей. Після перетворень (1.13), (1.14), використовуючи (1.18), (1.19), маючи на увазі той факт, що функція $q(\xi)$ – довільна, отримаємо нелінійне операторне рівняння відносно оператора \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + s^- e \mathbf{B} - \mathbf{r} s^- e \mathbf{B} - \mathbf{r} s^- e F_0 \mathbf{R} s^+ e, \tag{1.20}$$

$$B = (I - RFs^+ers^-e)^{-1}(RFs^+e rs^-eF_0Rs^+e - RFs^+er),$$

де I – одиничний оператор.

Вираз для поля у ближній зоні можна переписати у вигляді

$$H_x(y, z) = (PF_0Rq)(y, z),$$

де дія оператора P виражається наступним чином:

$$(Pg)(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi.$$

Поле у далекій зоні можна отримати з використанням методу перевалу [38].

Результат буде представлено пізніше.

1.1.4. Числові результати

1.1.4.1. Ітераційна процедура розв'язання нелінійного операторного рівняння

Рівняння (1.20) дозволяє знайти оператор відбиття напівнескінченної структури. У зв'язку з тим, що воно є нелінійним, необхідно обрати метод його розв'язання.

Для розв'язання отриманого нелінійного рівняння пропонується використовувати ітераційну процедуру з параметром релаксації, а також метод Зейделя.

Після дискретизації (1.20) його можна представити у вигляді $\tilde{R} = P(\tilde{R})$, де $\tilde{R} = (\tilde{R}^i)_{i=1}^{N \times N}$ – вектор, отриманий після дискретизації інтегрального оператора R з його матриці перенумеруванням його елементів, P – права частина (1.20), N – розмірність матриці. Тоді ітераційний процес з параметром релаксації можна організувати за формулою

$$\tilde{R}_j = \hat{\tau}^{-1} \left((\hat{\tau} - 1) \tilde{R}_{j-1} + P(\tilde{R}_{j-1}) \right), \quad j = 1, 2, \dots, j_{\max}, \quad (1.21)$$

де $\hat{\tau}^{-1}$ і $(\hat{\tau} - 1)$ – діагональні матриці розмірності $(N \cdot N) \times (N \cdot N)$ з елементами на діагоналях $1/\tau$ і $(\tau - 1)$ відповідно, τ – дійсний параметр.

Завдяки вибору значення параметра τ вдається керувати швидкістю збіжності.

На рис.1.2 наведено залежності коефіцієнта $\tilde{R}_j^{i_0}$ від числа ітерацій j ітераційного процесу (1.21) для різних значенні параметра релаксації τ .

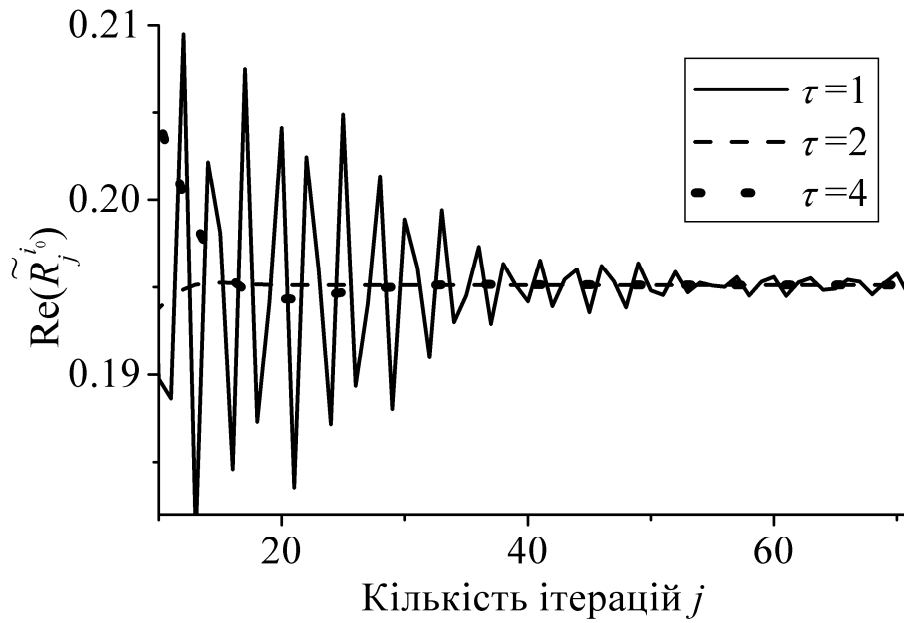


Рис.1.2 Залежність коефіцієнта $\text{Re}(\tilde{R}_j^{i_0})$ від числа ітерацій j при $\tau = 1$ (суцільна крива), $\tau = 2$ (штрихова крива), $\tau = 4$ (пунктирна крива), $d = 0.2\lambda$, $\Delta = 0.25\lambda$, $\Delta/h = 1.5$, $(l = 0.3\lambda, \psi = 33^\circ)$, $\varphi_0 = 90^\circ$

Плоска хвиля одиничної амплітуди нормально, $\varphi_0 = 90^\circ$, падає з області $z > 0$. Параметри структури вибрані таким чином, що лише одна відбита плоска хвиля може поширюватися. Коефіцієнт $\tilde{R}_j^{i_0}$ є елементом матриці $\tilde{\mathbf{R}}_j$ і є пропорційним до амплітуди відбитої плоскої хвилі. У якості початкового наближення взято нульовий вектор, $\tilde{\mathbf{R}}_0 = 0$. Починаючи з деякого значення номеру ітерації j похибка повинна спадати, що є свідчення збіжності ітераційного процесу. У випадку, якщо у залежностях спостерігалися осциляції з не спадаючою амплітудою (див. рис.1.2, $\tau = 1$) за прийнятну кількість ітерацій, значення τ збільшувалося. Також числові дослідження

збіжності процесу (1.21) показали, що при збільшенні ширини стрічки значення τ слід збільшувати. Наприклад, при розглянутих параметрах $l = 0.3\lambda$, $\psi = 33^\circ$ при $d/\lambda = 0.2$ ($kd \approx 1.25$) вибиралося $\tau = 2$; при $d/\lambda = 0.5$ ($kd \approx 3.14$) вибиралося $\tau = 4$; при $d/\lambda = 0.75$ ($kd \approx 4.7$) вибиралося $\tau = 20$. Як відомо, існує деяке оптимальне значення параметру релаксації [39], [40] для якого кількість ітерацій є найменшою. З одного боку, при збільшенні ширини стрічки для збіжності ітераційного процесу необхідно збільшувати значення τ . З іншого боку, це призводить до того, що кількість ітерацій також зростає. Тому при $d/\lambda > 0.75$ має сенс використовувати метод Зейделя [39], [40], організувавши процес за формулою.

$$\tilde{\mathbf{R}}_j^{p,M} = \hat{\tau}^{-1} \left[(\hat{\tau} - 1) \tilde{\mathbf{R}}_{j,j-1}^p + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{R}}_{j,j-1}^p) \right], \quad (1.22)$$

де вектор $\tilde{\mathbf{R}}_j^{p,M} = (\tilde{R}_j^p, \dots, \tilde{R}_j^{p+M})$ містить M елементів вектору $\tilde{\mathbf{R}}_{j,j-1}^p = (R_j^1, \dots, R_j^{p-1}, R_{j-1}^p, R_{j-1}^{p+1}, \dots)$. Вибиралося лише $M \times M$ елементів матриці у квадратних дужках у (1.22). За рахунок вибору параметру M зменшувався час обчислень. Одна ітерація за методом Зейделя займає у N^2/M разів більше часу, ніж одна ітерація за ітераційною процедурою з параметром релаксації (1.21). Тому з точки зору машинного часу є ефективним при $d/\lambda \leq 0.75$ використовувати (1.21), а при $d/\lambda > 0.75$ – (1.22).

Для дискретизації (1.20) нескінченний інтервал інтегрування замінювався скінченним, $\xi, \zeta \in (-a, a)$, $a > 1$, і представлявся як об'єднання менших інтервалів. На кожному меншому інтервалі у якості вузлів квадратурної формули вибиралися нулі поліномів Лежандра. Таким чином, дискретизація відбувалася з використанням складеної квадратурної формули. Також маючи на увазі характер спадання амплітуд Фур'є, розбиття інтервалу $(-a; a)$ на підінтервали було нерівномірним. На інтервалі $(-1, 1)$ вибиралося n_1 вузлів, а на інтервалі $(-\sigma; -1) \cup (1, \sigma)$ – n_2 вузлів.

Для того, щоб оцінити похибку, використовувався коефіцієнт, який відповідає енергії розсіяного поля,

$$\chi = \max_{\zeta \in (-1,1)} \left(\int_{-1}^1 |R(\xi, \zeta)|^2 \sqrt{1-\xi^2} d\xi + \sum_{m=1}^{N(\zeta)} |R(\xi_m(\zeta), \zeta)|^2 \right).$$

Числові дослідження збіжності показують, що для отримання похибки коефіцієнта χ у 10^{-3} при значеннях нормованої відстані $0.1 < kh < 2.5$, достатньо вибрати a з інтервалу $2 < a < 4$, а кількість вузлів $n_1 = 30$, $n_2 = 15(\sigma - 1)$. При збільшенні значення h можна вибрати менше значення a . Це пояснюється присутністю експоненційно спадаючого множника у (1.20) при $|\xi|, |\zeta| > 1$. Матриця оператора R , отримана після дискретизації, є нескінченною. Проте вона редукувалася до матриці розмірності $N \times N$, що є обґрунтованим завдяки присутності експоненційно спадаючого множника.

У разі, якщо необхідно було досліджувати поле у ближній зоні, то на вибір параметрів n_1 і n_2 суттєво впливала умова, що амплітуди Фур'є спадають як $|\xi|^{-3/2}$, при $\xi \rightarrow \infty$ [10], [11], [19]. Проте, якщо необхідно було досліджувати лише поле у далекій зоні, тобто використовувати асимптотичне представлення інтегралів у (1.3), з урахуванням експоненційно спадаючого множника у (1.20), вибиралося $n_2 \ll n_1$.

1.1.4.2. Решітка типу жалюзі з ідеально провідних стрічок

Будемо розглядати ідеально провідні стрічки. Для верифікації отриманих результатів проведено числову перевірку виконання граничних умов і умов неперервності, тобто умови рівності нулю дотичної компоненти електричного поля на металі і умови неперервності дотичних компонент поля поза металом. Дотична компонента електричного поля може бути знайдена за формулою

$$E_y = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial H_x}{\partial z}.$$

На рис.1.3 зображено залежності модуля повного поля, компоненти H_x^\pm і E_y^\pm , від координати y . Знак “+” відповідає полю над решіткою ($z \rightarrow +0$), яке виражається формулами (1.1), (1.2), (1.3), а знак “-” – полю під першою стрічкою ($z \rightarrow -0$), яке виражається формулою (1.5). Амплітуди знайдено з (1.10), (1.11), (1.12). Значення модулів відповідних компонент поля поза стрічкою співпадають с графічною точністю, в той же час на стрічі вдалині від її країв модуль компоненти E_y наближається до нуля. Поблизу країв стрічки спостерігається зростання $|E_y|$, яке пояснюється виконанням умови на ребрі. Для побудови графіків вибиралось $\tau = 2$, $j_{\max} = 30$.

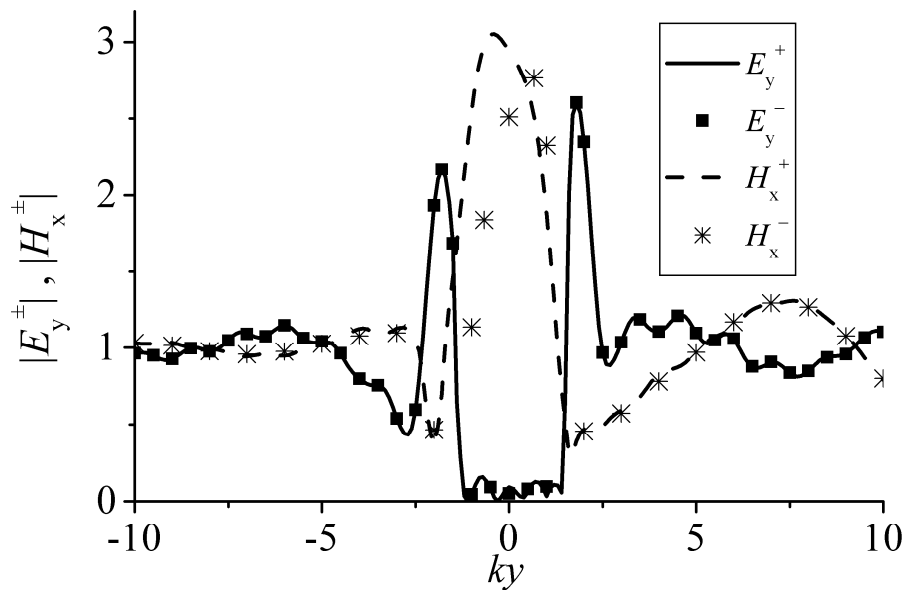


Рис.1.3 Модуль повного поля при $d = 0.25\lambda$, $\Delta = 0.25\lambda$, $\Delta/h = 1.5$ ($l = 0.3\lambda$, $\psi = 33^\circ$), $\varphi_0 = 90^\circ$.

На рис.1.4 наведено розподіл відбитого поля (дійсна частина H_y^{refl}) в області над решіткою, $z > 0$. Два типа хвиль поширюються в бік від решітки. Один з них – це циліндрична хвиля, яка виникає в результаті розсіяння краєм напівнескінченної решітки. Інший – це плоска хвиля, яка відповідає нескінченній частині решітки. Параметри структури вибрано таким чином,

що лише одна плоска хвиля може поширюватися. На рис.1.4 чітко видно, що плоска хвиля існує лише в області $\varphi > w$, де φ – полярний кут (див. рис.1.1). Це є у повній відповідності з результатами, отриманими [1], [2], [11]. Тут w – це кут поширення відбитої плоскої хвилі,

$$w = w(\zeta_0) = 180^\circ - \arccos \xi_1(\zeta_0),$$

$$\zeta_0 = \cos \varphi_0.$$

Амплітуда поля у ближній зоні в області $y < -d$ практично зникає.

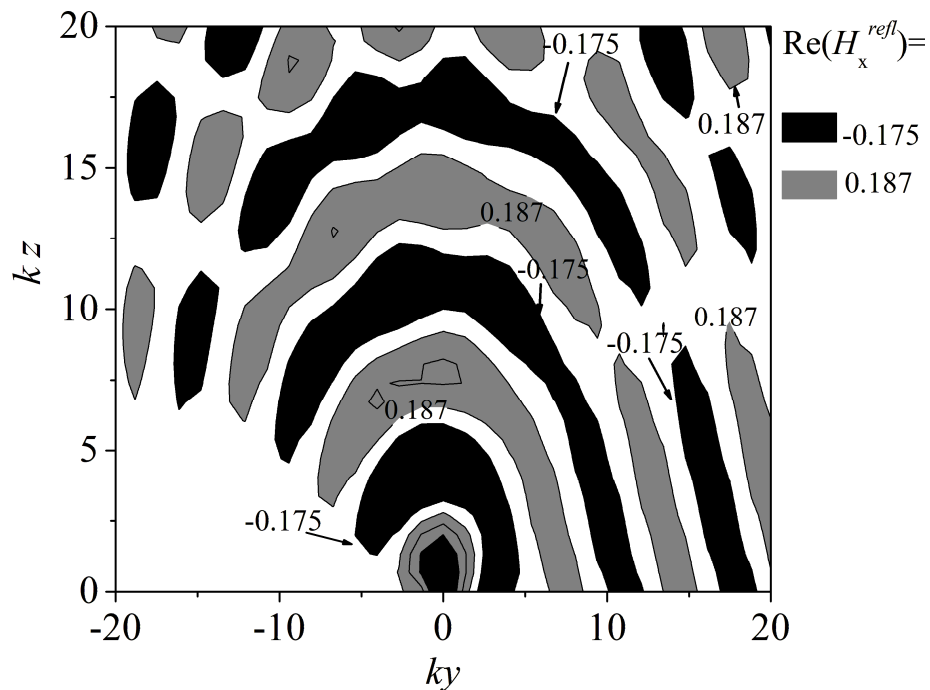


Рис.1.4 Відбите поле в області над решіткою, компонента $\text{Re } H_x^{refl}$, при $d = 0.25\lambda$, $\Delta = 0.25\lambda$, $\Delta/h = 1.5$ ($l = 0.3\lambda$, $\psi = 33^\circ$), $\varphi_0 = 90^\circ$

Для порівняння властивостей нескінченної ідеально періодичної і напівнескінченної решітки введемо коефіцієнт

$$r_1 = \frac{\pi - w}{\pi} |2\pi R(w, \zeta_0)|^2,$$

який нормується на інтенсивність падаючої хвилі на поодинокую стрічку. Множник $\pi - w$ вводиться через те, що відбита хвиля існує лише у області $\varphi > w$. Очевидно, що r_1 не залежить від відстані до решітки $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$.

На рис.1.5 наведено залежності r_1 від половини довжини стрічки d . Залежності є майже періодичними з періодом $d \approx \lambda/4$. У випадку нормального падіння, $\varphi = 90^\circ$, при $d \approx 0.21\lambda + n\lambda/4$ спостерігаються максимуми коефіцієнта, а при $d \approx 0.33\lambda + n\lambda/4$ – мінімуми, $n=0,1,\dots$. Ці співвідношення є вірними і для нескінченних ідеально періодичних решіток [35].

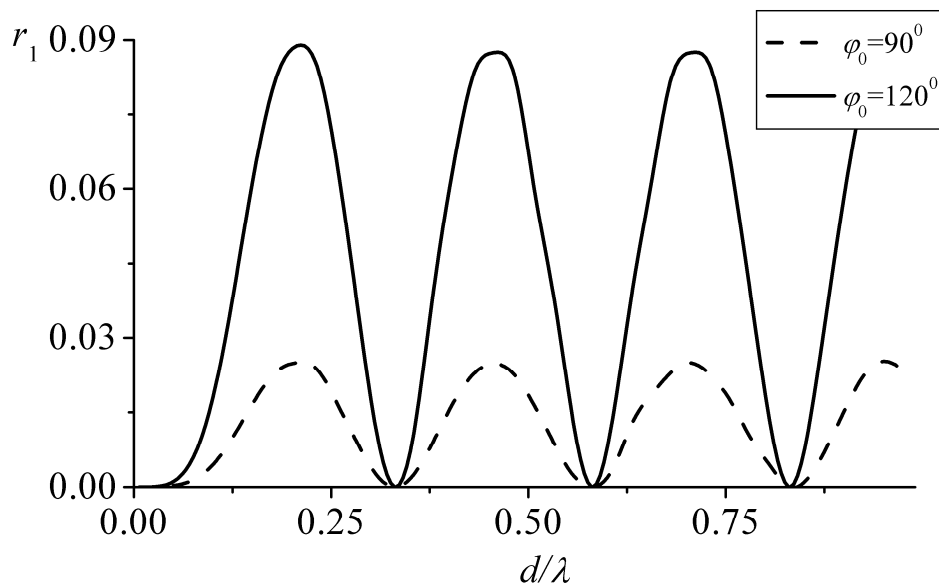


Рис.1.5 Залежності коефіцієнта відбиття r_1 від половини ширини стрічки d при $\Delta = 0.25\lambda$, $\Delta/h = 1.5$ ($l = 0.3\lambda$, $\psi = 33^\circ$), $\varphi_0 = 90^\circ$

Дослідимо поле у далекій зоні, яке виникає в результаті розсіяння на краї. Відповідно до [38] при $k\rho \gg 1$ розсіяне поле можна подати як суму трьох доданків

$$H_x^{ref}(\varphi, \rho) \cong H_x^F(\varphi, \rho) + H_x^c(\varphi, \rho) + H_x^{efc}(\varphi, \rho). \quad (1.23)$$

Перший доданок справа у (1.23) – це множина плоских хвиль. Його модуль не спадає при $k\rho \rightarrow \infty$. Другий доданок справа у (1.23) – циліндрична хвиля, розсіяна краєм. Його модуль спадає як $1/\sqrt{k\rho}$, при $k\rho \rightarrow \infty$. Третій доданок справа у (1.23) $H_x^{erfc}(\varphi, \rho)$ забезпечує неперервне асимптотичне подання поля. У зв'язку з тим, що в області $\varphi < w$ плоска хвиля не існує [1], [2], [11], поле створюється лише циліндричною хвилею, амплітуда якої спадає зі збільшенням відстані ρ . Поле в області $\varphi > w$ визначається, в тому числі, і плоскою хвилею, амплітуда якої не спадає зі збільшенням відстані ρ . Тоді при $\rho \rightarrow \infty$ і $\varphi = w$ поле має мати розрив стрибок, тобто не бути неперервним. Це суперечить умовам неперервності. Доданок $H_x^{erfc}(\varphi, \rho)$ як раз і забезпечує неперервність поля. Він виражається через функцію помилки Гауса. Наведемо явний вигляд доданків з (1.23):

$$\begin{aligned}
 H_x^F(\varphi, \rho) &= \\
 &= 2\pi i \sum_{l=1}^{N_2(\zeta_0)} \varepsilon_l(\theta) R(\xi_l(\zeta_0), \zeta_0) \cos(\omega_l) \lim_{\omega' \rightarrow \omega_l} \left(\frac{\omega' - \omega_l}{f(\sin \omega', \zeta_0)} \right) \exp(ik\rho \cos(\theta - \omega_l)), \\
 \varepsilon_l(\theta) &= \begin{cases} 0, & \theta < \omega_l, \\ 1, & \theta > \omega_l. \end{cases} \\
 H_x^c(\varphi, \rho) &= \frac{\exp\left(ik\rho - \frac{\pi i}{4}\right)}{\sqrt{k\rho}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \\
 &\times \left[\frac{2R(\sin \theta, \zeta_0)}{f(\sin \theta, \zeta_0)} \cos \theta + \sum_{l=1}^{N_2(\zeta_0)} \frac{R(\sin \omega_l, \zeta_0) \cos(\omega_l)}{\sin \frac{\omega_l - \theta}{2}} \lim_{\omega' \rightarrow \omega_l} \left(\frac{\omega' - \omega_l}{f(\sin \omega', \zeta_0)} \right) \right], \\
 H_x^{erfc}(\varphi, \rho) &= i\pi \exp\left(ik\rho - \frac{\pi i}{4}\right) \sum_{l=1}^{N_2(\zeta_0)} \operatorname{sgn}(\omega_l - \theta) \times \exp\left(-2ik\rho \left(\sin \frac{\theta - \omega_l}{2}\right)^2\right) \times \\
 &\times R(\sin \omega_l, \zeta_0) \cos(\omega_l) \lim_{\omega' \rightarrow \omega_l} \left(\frac{\omega' - \omega_l}{f(\sin \omega', \zeta_0)} \right) \times \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}C(X) - \sqrt{2}iS(X) \right),
 \end{aligned}$$

де

$$X = 2\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \sin\left|\frac{\omega_l - \theta}{2}\right|,$$

$\theta = \varphi - 90^\circ$ – кут падіння плоскої хвилі, який відраховується від осі Oz ,

$$\omega_l = \arcsin \xi_l(\zeta_0) \quad \zeta_0 = \cos \varphi_0, \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \quad -$$

інтеграли Френеля.

Введемо функцію діаграми спрямованості за формулою

$$D(\varphi, \rho) = \frac{\pi |H_x^c(\varphi, \rho) + H_x^{erfc}(\varphi, \rho)|^2}{kd \sin \varphi_0},$$

яка описує відбите поле без урахування плоских хвиль і нормується на потужність падаючої на поодинокую стрічку хвилі. На рис.1.6 зображено залежності $D(\varphi, \rho)$ від кута φ при відстані $k\rho = 30$ для різних кутів падіння плоскої хвилі і значень ширини стрічок при фіксованому куті $\psi = 33^\circ$.

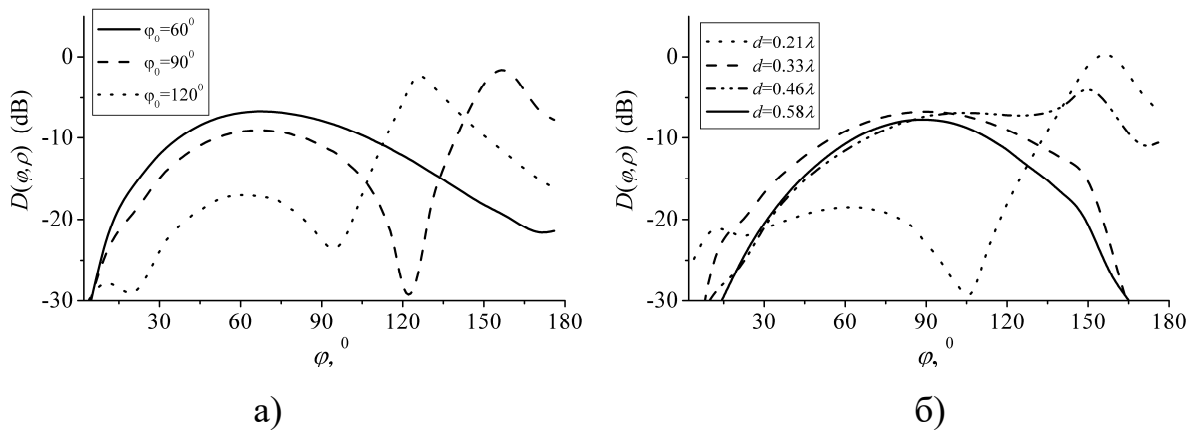


Рис.1.6 Діаграми спрямованості при $\Delta = 0.25\lambda$, $\Delta/h = 1.5$ ($l = 0.3\lambda$, $\psi = 33^\circ$), $k\rho = 30$. а) $d = 0.25\lambda$, б) $\varphi_0 = 90^\circ$

У випадку кута падіння $\varphi_0 = 60^\circ$ плоска відбита хвиля у області $z > 0$ не збуджується, а в діаграмі спрямованості спостерігається лише один максимум при $\varphi \approx 68^\circ$. Зі збільшенням кута падіння φ_0 з'являється другий максимум, а значення діаграми спрямованості у першому максимумі

зменшується. Це пов'язано зі збудженням плоскої хвилі ($\varphi = w(90^\circ) = 155^\circ$, $\varphi = w(120^\circ) = 125^\circ$) і перерозподілом енергії падаючого поля між циліндричною і плоскою хвилею. Рис.1.6 б) побудовано у точках екстремуму рис.1.5. У випадках, які відповідають точкам мінімуму рис.1.5, випромінювання у напрямку $\varphi = w(90^\circ) = 155$ практично відсутнє. Головний внесок у поле робиться випромінюванням у напрямку $\varphi = 90^\circ$. При розрахунках кількість ітерацій не перевищувала $j_{\max} = 50$.

Решітка типу жалюзі має властивість змінювати напрям поширення відбитої плоскої хвилі в залежності від кута ψ . На рис.1.7 наведено залежності r_1 від кута нахилу ψ . Поведінка кривих при $\varphi_0 = 90^\circ$ і $\varphi_0 = 120^\circ$ співпадає. Значення r_1 зростають при збільшенні φ_0 . Це також видно і на рис.1.5.

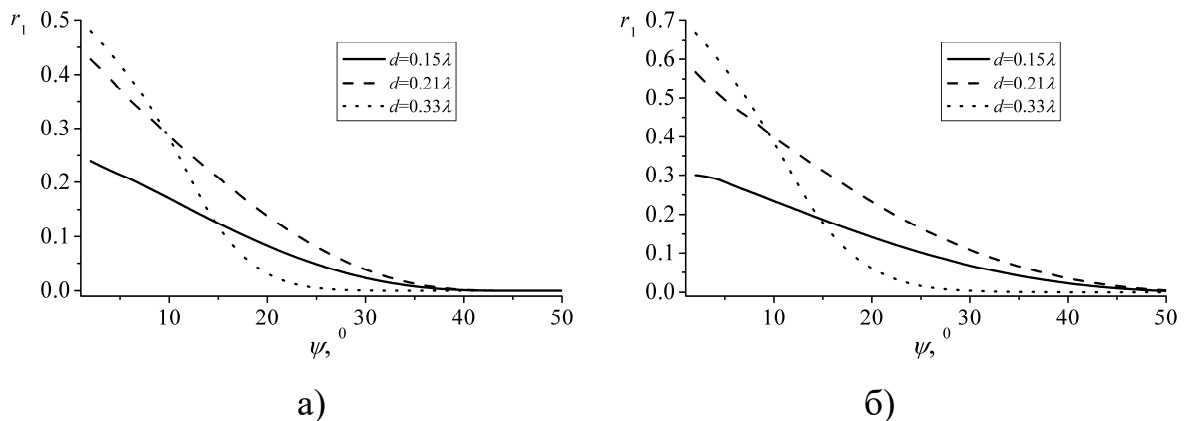


Рис.1.7 Залежності коефіцієнта відбиття r_1 від кута ψ при $l = 0.4\lambda$.

а) $\varphi_0 = 90^\circ$, б) $\varphi_0 = 120^\circ$

1.1.4.3. Напівнескінченна ножова решітка

Ножова решітка – це решітка, у якій стрічки розташовані в паралельних площинах строго одна під іншою. Напівнескінченну ножову решітку можна отримати, поклавши $\Delta = 0$. Ножові решітки знаходять широке застосування,

наприклад, при створенні поляризаторів, частотно-селективних пристроїв, відбиваючих екранів [33], [36], [41]. Серед плоских дифракційних решіток варто виділити особливий тип решіток – решіток на основі фракталів. Інтерес до решіток на основі фракталів викликаний їхньою компактністю та багатодіапазонністю. Своє застосування фрактальні решітки вже знаходять у медицині, військових додатках, системах стільникового зв'язку [42], [43]. Тому представляється цікавим дослідження напівнескінченної періодичної ножевої решітки, складовими частинами якої є фрактальні решітки [24], [44], [45].

Поклавши $\Delta = 0$ рівняння (1.20) переписеться у вигляді

$$\begin{aligned} R = r + e(I - RFere)^{-1}(RFereF_0Re - RFe) - \\ - re(I - RFere)^{-1}(RFereF_0Re - RFe) - reF_0Re, \end{aligned} \quad (1.24)$$

Проведемо порівняння характеристик розсіяних полів напівнескінченних решіток, одиночним шаром яких є поодинокі стрічки та предканторові решітки (див рис.1.8).

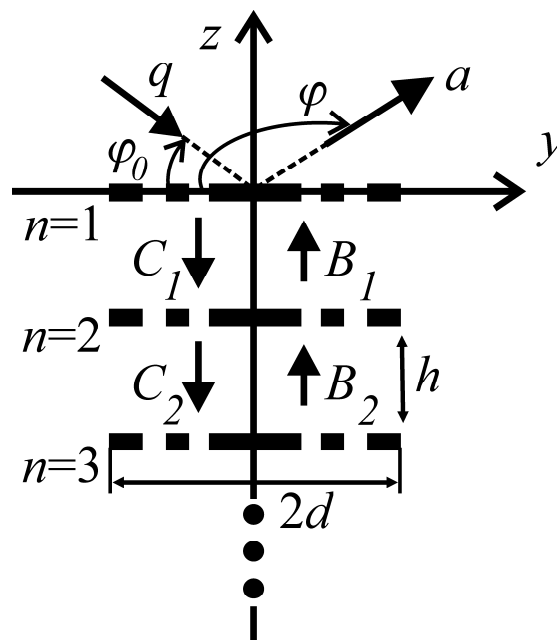


Рис.1.8 Геометрія багатоелементної напівнескінченної ножевої решітки

Позначимо як K_n множину, отриману за принципом канторової множини на n -му кроці на інтервалі $(-d; d)$ [46]:

$$K_0 = (-d; d),$$

$$K_1 = \left(-d; -d + \frac{2d}{3}\right) \cup \left(-d + \frac{2 \cdot 2d}{3}; d\right),$$

$$K_2 = \left(-d; -d + \frac{2d}{9}\right) \cup \left(-d + \frac{2 \cdot 2d}{9}; -d + \frac{2d}{3}\right) \cup \left(-d + \frac{2 \cdot 2d}{3}; -d + \frac{7 \cdot 2d}{9}\right) \\ \cup \left(-d + \frac{8 \cdot 2d}{9}; d\right),$$

і т.д. Позначимо $CK_n = (-d; d) \setminus K_n$ – доповнення множини K_n на інтервалі $(-d; d)$. Будемо називати CK_n предканторовою множиною порядку n .

Результати на рис.1.9 і рис.1.10 надаються при однакових значеннях відстані між шарами $kh = 5$ ($h/\lambda = 0.8$), але різної геометрії решіток, які утворюють поодинокий шар. Введемо параметр L , який дорівнює сумі довжин всіх стрічок поодинокого шару (вздовж осі Oy). Дані, наведені на рис.1.9 а), рис.1.10 (крива 1), отримано для решітки, поодинокий шар якої складається з поодинокій стрічки. Її ширина дорівнює половині довжини хвилі, $kd = kL/2 = 1.57$ ($d/\lambda = 0.25$). На рис.1.9 б) і рис.1.10 (крива 2) наведено результати для предканторової множини стрічок четвертого порядку, $n = 4$, $kL = 2.52$, яка утворює поодинокий шар. На рис.1.9 в) і рис.1.10 (крива 3) наведено результати, обчислені для напівнескінченної ножової решітки, кожен шар якої складається з поодинокій стрічки, довжина якої співпадає з сумою довжин стрічок предканторової решітки, $kd = 1.26$, $kL = 2.52$. Вибір таких параметрів дозволяє порівняти напівнескінченну ножову структуру з шарами, які складаються з предканторової решітки і поодинокій стрічки. Помітимо, що коефіцієнт відбиття плоскої хвилі для нескінченної ідеально періодичної решітки на основі предканторової множини практично в 4 рази менше за коефіцієнт відбиття одноелементних

решіток з таким же параметром $kL = 2.52$. На рис.1.9 наведено розподіл відбитого поля в ближній зоні (дійсна частина компоненти H_x^{refl}).

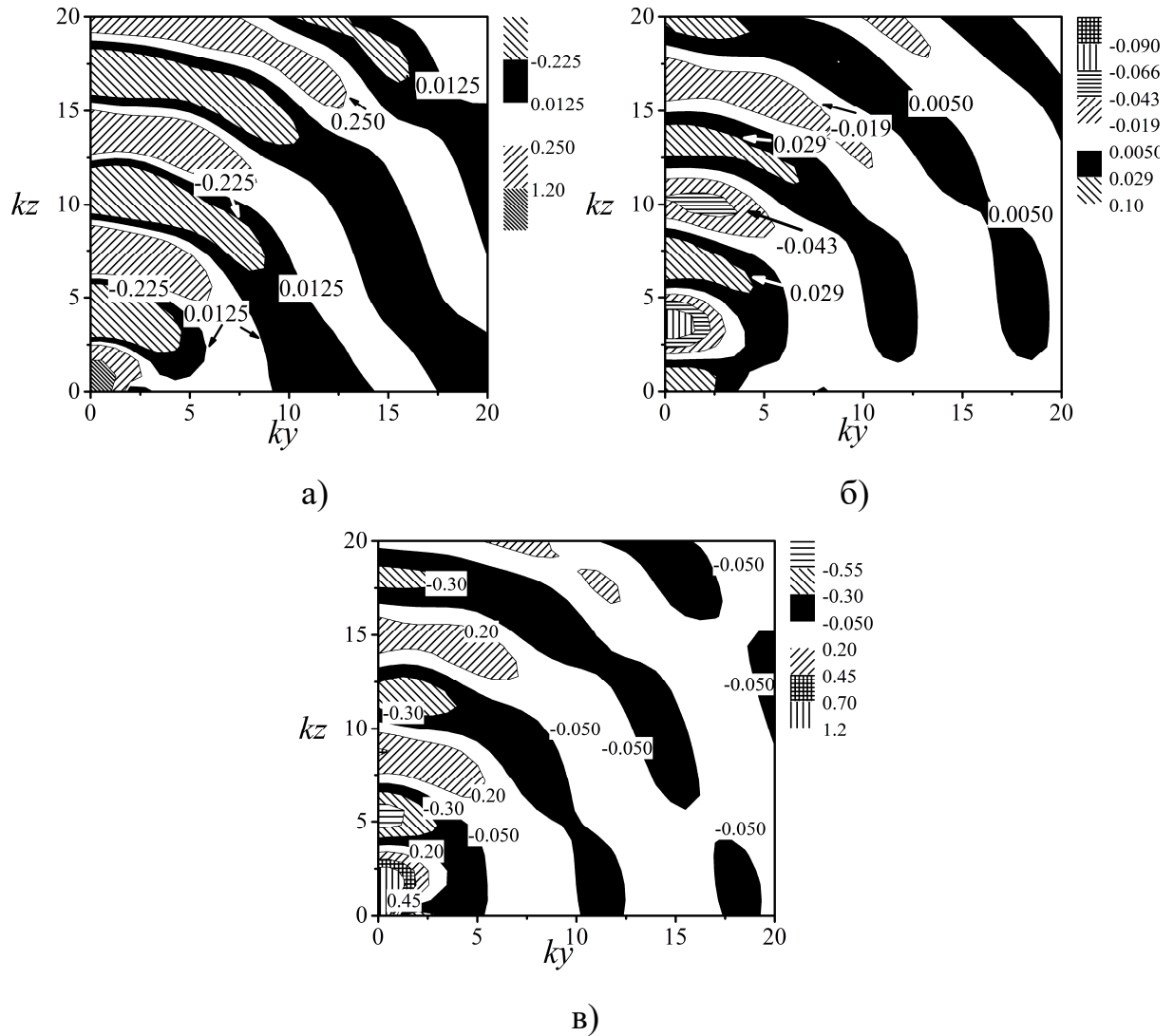


Рис.1.9 Відбите поле у області над ножиною решіткою, компонента $\text{Re } H_x^{refl}$ при $kh = 5$, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) Поодинокі стрічки у кожному шарі довжини $kd = kL/2 = 1.57$, б) предканторова решітка у кожному шарі, $kL = 2.52$, в) поодинокі стрічки у кожному шарі, $kL = 2.52$

Досить зручно [14] обчислювати відбите поле на відстані $z = 0.1\lambda$ від структури. На рис.1.10 наведено розподіл поля при $z = 0.1\lambda$. Максимум поля розташовано поблизу $y = 0$. Для решітки з поодинокими стрічками, зі

зменшенням ширини $2d$, максимум поля спадає. Максимум поля для структури з шарами з предканторових решіток є значно меншим, ніж для структури з шарами з поодиноких стрічок. В області над решіткою присутні осциляції, викликані впливом згасаючих плоских хвиль на поле в ближній зоні. Очевидно, що у зв'язку з тим, що решітки є симетричними відносно осі Oz , то всі наведені залежності так само є симетричними відносно осі Oz . З рис.1.9, рис.1.10 видно, що амплітуда відбитого поля предканторовою решіткою є значно меншою за амплітуду відбитого поля одноелементними решітками. Таким чином, предканторова решітка є практично прозорою для плоскої хвилі. Проведені числові дослідження показали, що збільшення порядку предканторової множини $n > 4$ призводить до незначних змін характеристик розсіяних полів.

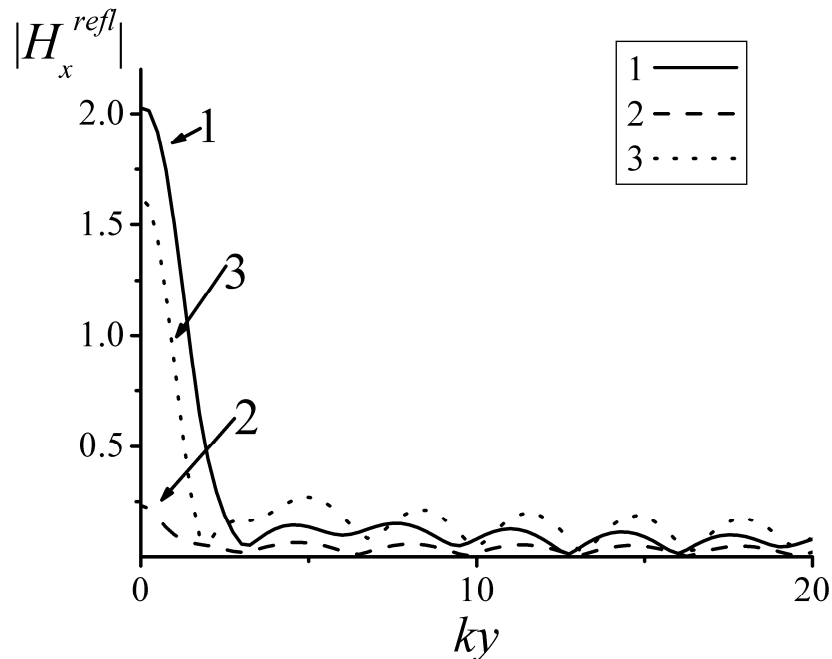


Рис.1.10 Відбите поле у області над ножевою решіткою при $z = 0.1\lambda$, $kh = 5$, $\varphi_0 = 90^\circ$. Поодинокі стрічка у кожному шарі довжини $kd = kL/2 = 1.57$ (крива 1), предканторова решітка у кожному шарі, $kL = 2.52$ (крива 2), поодинокі стрічка у кожному шарі, $kL = 2.52$ (крива 3)

1.1.4.4. Взаємодія напівнескінченної решітки типу жалюзі і скінченної решітки

Розглянемо задачу дифракції плоскої хвилі на структурі, яка складається зі скінченної стрічкової решітки і напівнескінченної періодичної решітки типу жалюзі.

Розташуємо напівнескінченну періодичну решітку типу жалюзі в області $z \leq -h_1$. Перша стрічка лежить у площині $z = -h_1$ і її середина відстоїть від осі Oy на величину Δ_1 . Кожна наступна n -а стрічка напівнескінченної решітки розташовуються в площині $z = -h_1 - h(n-1)$ так, щоб y -координати середин сусідніх стрічок відрізнялися на величину Δ , $n \geq 1$. Період решітки, як і раніше, дорівнює l , половина ширини стрічок – d . Розташуємо скінченноелементну стрічкову решітку в площині $z = 0$. Геометрію структури надано на рис.1.11 у випадку, коли в площині $z = 0$ розташована поодинокі стрічка ширини $2d_1$.

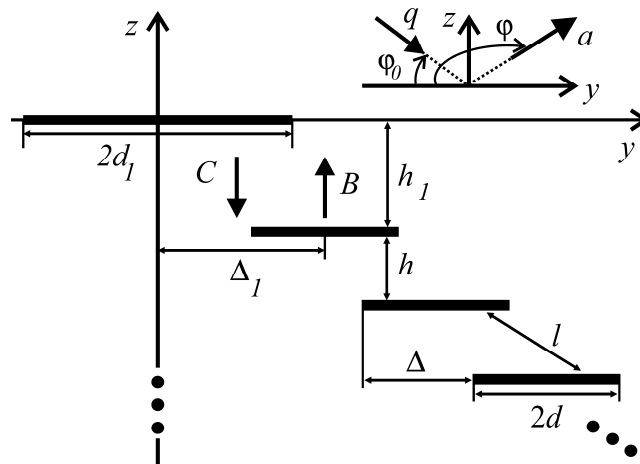


Рис.1.11 Геометрія напівнескінченної решітки типу жалюзі і поодинокі стрічки, розташовані в площині $z = 0$

Відбите структурою поле надамо за допомогою невідомої амплітуди Фур'є $a(\zeta)$ у вигляді (1.3), а поле між скінченною і напівнескінченною решіткою у наступному вигляді:

$$H_x(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\zeta) \exp(ik\zeta y - ik\gamma(\zeta)z) d\zeta + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} B(\zeta) \exp(ik\zeta(y - \Delta_1) + ik\gamma(\zeta)(z + h_1)) d\zeta, \quad -h_1 < z < 0,$$

де $C(\zeta)$ і $B(\zeta)$ – невідомі амплітуди Фур'є.

Позначимо невідомий оператор відбиття всієї структури як R^2 . Спектральні функції відбитого поля та поля між скінченною та напівнескінченною решіткою пов'язані наступними операторними рівняннями

$$a = R^2 q \quad (1.25)$$

$$a = r q + t s_1^- e_1 B. \quad (1.26)$$

$$C = t q + r s_1^- e_1 B, \quad (1.27)$$

$$B = R^1 s_1^+ e_1 C, \quad (1.28)$$

Оператор e_1 визначає зміну амплітуд поля при зсуві системи координат на величину h_1 у напрямку поширення поля. Оператори s_1^\pm визначають зміну амплітуд поля при зсуві системи координат на величину Δ_1 в позитивному або негативному напрямку осі Oy . Їхня дія на довільну функцію $g(\xi)$ зводиться до множення на експоненту

$$(e_1 g)(\xi) = \exp(ikh_1 \gamma(\xi)) g(\xi),$$

$$(s_1^\pm g)(\xi) = \exp(\pm ik \Delta_1 \gamma(\xi)) g(\xi).$$

Підставимо C з рівняння (1.27) у рівняння (1.28). Тоді з (1.26), (1.28) отримаємо:

$$a = r q + s_1^- e_1 B - r s_1^- e_1 B, \quad (1.29)$$

$$B = R^1 s_1^+ e_1 q - R^1 s_1^+ e_1 r q + R^1 s_1^+ e_1 r s_1^- e_1 B. \quad (1.30)$$

Спектральна функція B може бути знайдена з виразу (1.30), в правій частині якого лише перший доданок $R^1 s_1^+ e_1 q$ може містити особливості, а два

інших є регулярними. Віднімемо від B доданок, що містить особливості. Введемо оператор B за формулою

$$Bq = B - R^1 s_1^+ e_1 q, \quad (1.31)$$

який вже особливостей не має. Оператор R^2 , як і оператор R^1 , є сингулярним. Введемо оператор R_2

$$R_2 = R^2 - s_1^- e_1 R_1 e_1 s_1^+. \quad (1.32)$$

Виразивши B через Bq з (1.31), підставивши в (1.29) і скориставшись рівностями (1.25), (1.26), (1.32) помітимо, що оператор R_2 з (1.32) не має особливостей.

Після перетворень (1.29), (1.30), використовуючи (1.31), можна отримати вирази для визначення спектральної функції відбитого поля

$$a = rq + s_1^- e_1 R^1 s_1^+ e_1 q + s_1^- e_1 Bq - r s_1^- e_1 Bq - r s_1^- e_1 F_0 R_1 s_1^+ e_1 q, \quad (1.33)$$

$$B = (I - R_1 F s_1^+ e_1 r s_1^- e_1)^{-1} (R_1 F s_1^+ e_1 r s_1^- e_1 F_0 R_1 s_1^+ e_1 - R_1 F s_1^+ e_1 r). \quad (1.34)$$

З (1.33), використовуючи (1.25) і (1.32) можна отримати вираз для визначення регулярної частини оператора відбиття всієї структури

$$R_2 = r + s_1^- e_1 B - r s_1^- e_1 B - r s_1^- e_1 F_0 R_1 s_1^+ e_1,$$

де оператор B може бути знайдено з (1.34).

Використовуючи (1.33), (1.34), проведено дослідження характеристик відбитого поля. Розглянемо декілька типів решіток, формуючих кожен шар структури, поодинокую стрічку, дві стрічки та предканторову множину стрічок.

Спочатку в площині $z = 0$ розмістимо поодинокую стрічку ширини $2d_1$ так, щоб вісь Oy перетинала її посередині (див. рис.1.11). На рис.1.12 наведено залежності функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від кута φ при різних значеннях кута падіння плоскої хвилі одиничної амплітуди φ_0 і величини зсуву Δ_1 , $k\rho = 30$, $kd = kd_1 = \pi/2$ ($d = d_1 = \lambda/4$), $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$ ($kl = 1.86$). Параметри структури вибрані таким чином, що лише одна відбита плоска хвиля може

поширюватися від решітки. При $\Delta = \Delta_1$ графіки залежностей співпадають для напівнескінченної решітки і в цьому пункті решітки, що може слугувати перевіркою розв'язку на достовірність. При $\varphi_0 = 90^\circ$ і $k\Delta_1 \leq \pi/2$ у залежностях спостерігається один максимум, при $k\Delta_1 \geq 3\pi/4$ їх уже два. Подальше збільшення значення $k\Delta_1$ призводить до появи додаткових максимумів. Таке поведіння характерно для діаграми спрямованості решіток, які складаються з двох стрічок при збільшенні відстані між стрічками. Величина $|H_x^F(\varphi, \rho)|$ не змінюється при зміні $k\Delta_1$. Це пов'язане з тим, що вона визначає внесок оише плоскої хвилі в розсіяне поле, а модуль амплітуди плоскої хвилі залежить винятково від параметрів напівнескінченної решітки. При $\varphi_0 = 90^\circ$ $|H_x^F(\varphi, \rho)| \approx 0.37$, кут поширення відбитої плоскої хвилі є $\omega_1 + 90^\circ \approx 155^\circ$. При $\varphi_0 = 154^\circ$ $|H_x^F(\varphi, \rho)| \approx 0.4$ і $\omega_1 + 90^\circ \approx 90^\circ$. Тут кут $\varphi > \pi/2 + \omega_1$.

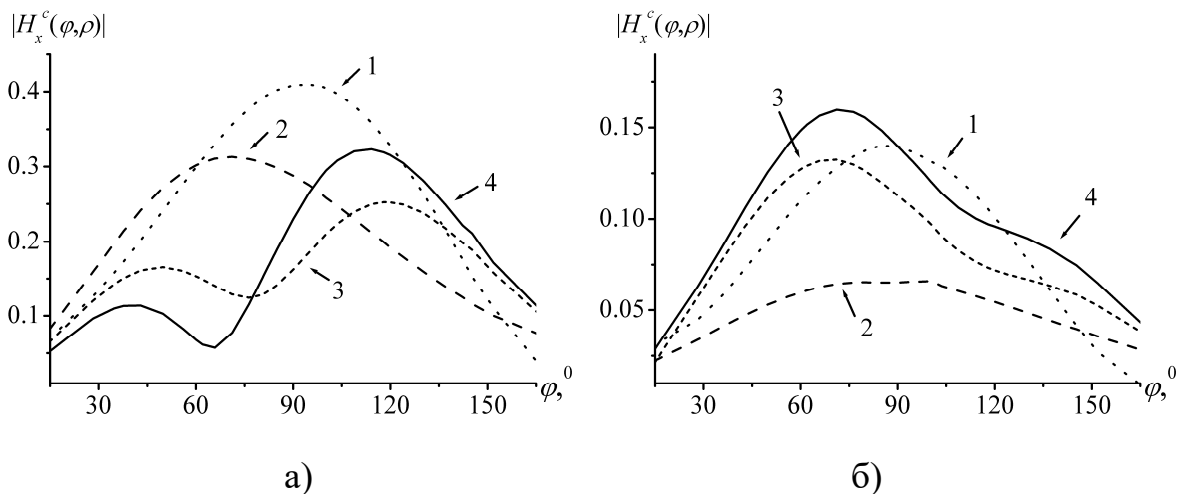


Рис.1.12 Залежності функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від кута φ при $k\Delta_1 = 0$ (крива 1), $k\Delta_1 = \pi/2$ (крива 2), $k\Delta_1 = 3\pi/4$ (крива 3), $k\Delta_1 = \pi$ (крива 4), $k\rho = 30$, $kd = kd_1 = \pi/2$ ($d = d_1 = \lambda/4$), $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$ ($kl = 1.86$). а) $\varphi_0 = 90^\circ$, б) $\varphi_0 = 154^\circ$

На рис.1.13 наведено залежності функції $|H_x^c(\varphi, \rho) + H_x^{erfc}(\varphi, \rho)|$ від кута φ для двох кутів падіння $\varphi_0 = 90^\circ$ (криві 1) і $\varphi_0 = 154^\circ$ (криві 2) при $k\Delta_1 = 0$. Параметри структури вибрані такими ж, як і для рис.1.12. Для порівняння у вигляді пунктирних кривих також зображено залежності функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від φ . Графіки залежності $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ і $|H_x^c(\varphi, \rho) + H_x^{erfc}(\varphi, \rho)|$ приблизно співпадають при $|\varphi - (90^\circ + \omega_1)| \gg 0$, тобто тут функція $|H_x^{erfc}(\varphi, \rho)|$ мала. При кутах φ , що наближаються до $90^\circ + \omega_1$, істотний вплив на графік залежності $|H_x^c(\varphi, \rho) + H_x^{erfc}(\varphi, \rho)|$ має плоска хвиля, що поширюється.

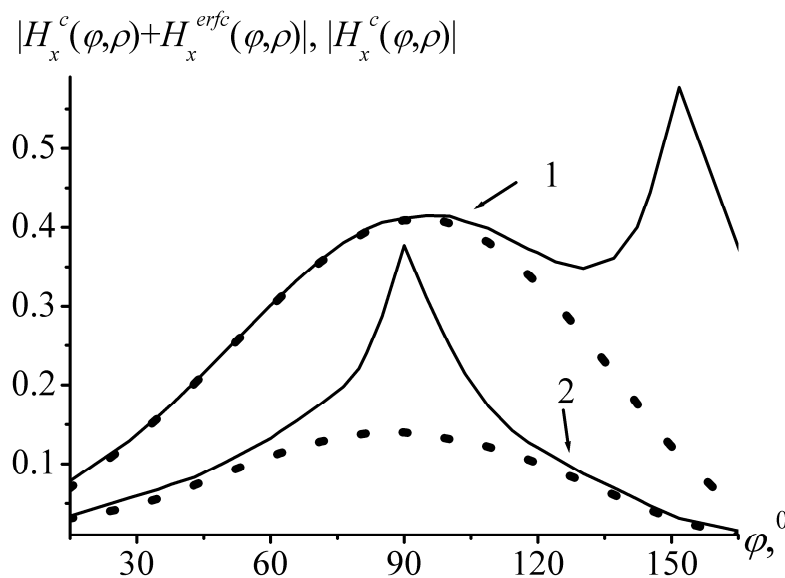


Рис.1.13 Залежності функцій $|H_x^c(\varphi, \rho) + H_x^{erfc}(\varphi, \rho)|$ (суцільні криві) і $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ (пунктирні криві) від кута φ для двох кутів падіння $\varphi_0 = 90^\circ$ (криві 1) и $\varphi_0 = 154^\circ$ (криві 2) при $k\Delta_1 = 0$, $k\rho = 30$, $kd = kd_1 = \pi/2$ ($d = d_1 = \lambda/4$),
 $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$ ($kl = 1.86$)

Виберемо в якості скінченної решітки дві стрічки рівної ширини. Половину ширини кожної стрічки позначимо як d_1 , відстань між стрічками – як δ . Розташуємо систему координат так, щоб вісь Oy перетинала середину

щілини між стрічками (див. рис.1.14). На рис.1.15 наведено залежності функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від кута φ при $k\rho = 30$, $kd_1 = \pi/4$ ($d_1 = \lambda/8$), $k\delta = \pi/2$, $kd = \pi/2$, $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$. Параметри напівнескінченної решітки вибрані такими ж, як і для рис.1.12, рис.1.13. Вигляд залежностей подібний з випадком, наведеним на рис.1.12. Додаткові максимуми з'являються при менших значеннях параметра $k\Delta_1$, у порівнянні з випадком, наведеним на рис.1.12.

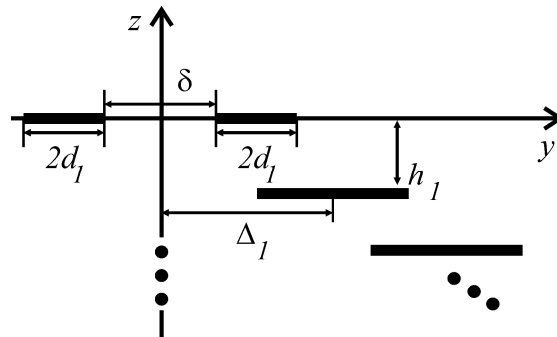


Рис.1.14 Геометрія напівнескінченної решітки типу жалюзі і двох стрічок, розташованих в площині $z = 0$

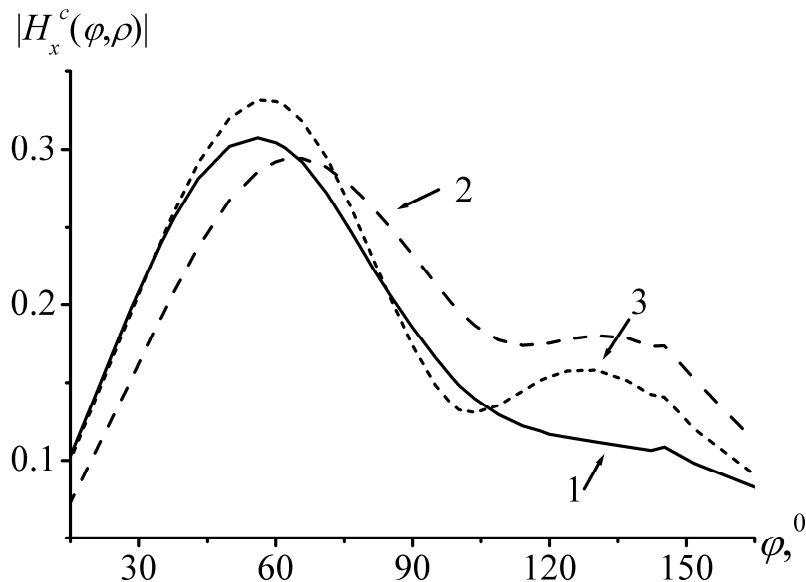


Рис.1.15 Залежності функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від кута φ при $k\Delta_1 = 0$ (крива 1), $k\Delta_1 = \pi/2$ (крива 2), $k\Delta_1 = 3\pi/4$ (крива 3), $k\rho = 30$, $kd_1 = \pi/4$ ($d_1 = \lambda/8$), $k\delta = \pi/2$, $kd = \pi/2$, $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$

Інтерес представляє задача по зменшенню відбиття від краю, яка має пряме відношення до технології типу стелс. Для цього розглянуто предканторову решітку. Метою є зменшити відбиття в бік опромінювача (тобто при $\varphi = 90^\circ$). Плоска відбита хвиля перенаправляється в бік від опромінювача і поширюється під кутом w за рахунок геометрії решітки типу жалюзі. Необхідно зменшити рівень випромінювання циліндричної хвилі.

На рис.1.16 наведено залежність функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від полярного кута φ при $k\rho = 30$, $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$. Тоді кут нахилу шарів до осі напівнескінченної решітки приблизно дорівнює $\psi \approx 33^\circ$.

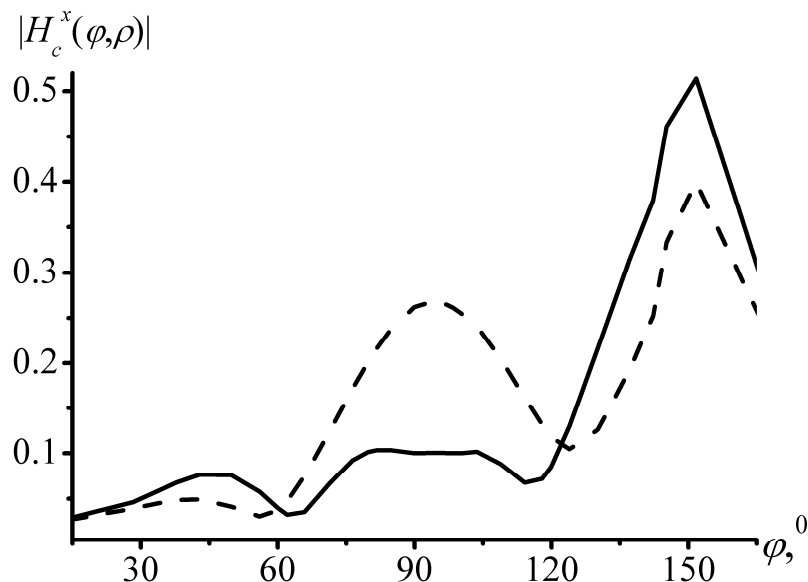


Рис.1.16 Залежності функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від полярного кута φ при $k\rho = 30$, $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$. Випадок присутньої решітки у площині $z = 0$ (суцільна крива), випадок відсутньої решітки у площині $z = 0$ (штрихова крива)

Параметри структури вибрані таким чином, що лише одна плоска хвиля може поширюватися від решітки під кутом, приблизно рівним 154° . Кожен шар напівнескінченної решітки типу жалюзі складається з трьох стрічок рівної ширини $2/k$. Відстань між сусідніми стрічками дорівнює $2/k$.

У площині $z = 0$ розташовується скінченноелемента періодична решітка, що складається з п'яти предканторових решіток. На кожному періоді розташовується одна предканторова решітка $СК_3$. Довжина відрізка, на якому будується кожна предканторова решітка, дорівнює $2/k$, а відстань між решітками дорівнює $1/(2k)$. Таким чином, період решітки дорівнює $3/(2k)$. Величина $k\Delta_1 = 3.4$. При виборі параметрів структури метою було перенаправляти енергію розсіяного поля в бік від опромінювача. Функція $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ має яскраво виражений максимум поблизу кута $\varphi_1 \approx 154^\circ$ поширення плоскої хвилі, $|H_x^c(\varphi_1, 30/k)| \approx 0.52$. При $\varphi < 120^\circ$ значення функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ не перевершують величини в п'ять разів менше максимальної, $|H_x^c(\varphi, \rho)| < \frac{1}{5}|H_x^c(\varphi_1, 30/k)|$. Для порівняння у якості пунктирної кривої наведено залежність для напівнескінченної решітки у випадку відсутності решітки, розташованої в площині $z = 0$. У цьому випадку випромінювання у напрямку $\varphi = 90^\circ$ є значно більшим.

На рис.1.17 наведено залежність функції $|H_x^c(\varphi, \rho)|$ від полярного кута φ при $k\rho = 30$, $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$. Кожний шар напівнескінченної структури складається з двох предканторових решіток. Кожна решітка побудована на основі $СК_3$ на відрізку шириною $2\pi/k$. Відстань між решітками дорівнює $1/k$. У площині $z = 0$ розташована решітка, що складається із трьох однакових стрічок, кожна шириною $1.4/k$. Відстань між стрічками дорівнює $(\pi - 1.4)/k$. Схематично геометрію надано на рис.1.18. Штриховою кривою побудовано залежність для напівнескінченної решітки у випадку відсутності решітки, розташованої в площині $z = 0$. У залежності для напівнескінченної решітки присутній яскраво виражений максимум поблизу кута падіння плоскої хвилі $\varphi_0 = 90^\circ$. Введення додаткової решітки в області $z = 0$ дозволило значно знизити випромінювання під кутом $\varphi = \varphi_0$.

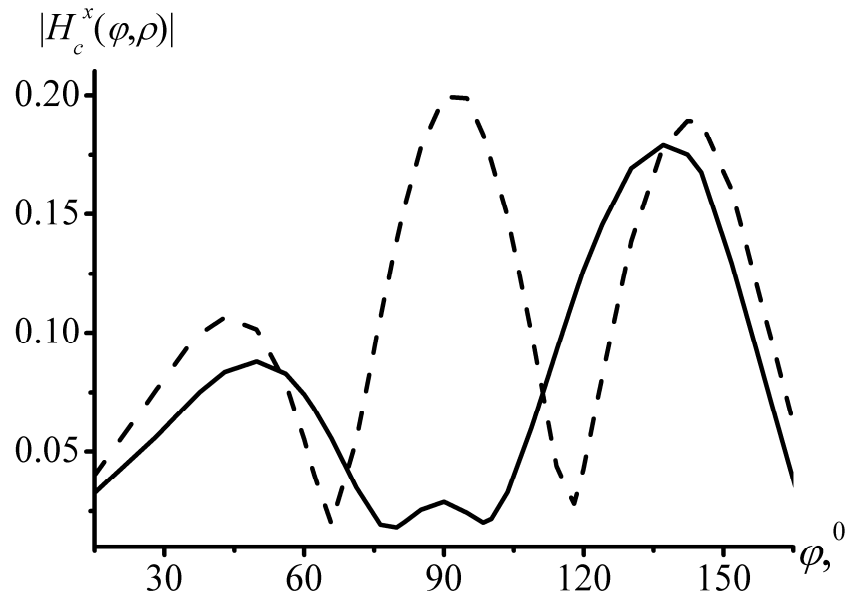


Рис.1.17 Залежності функції $|H_c^x(\varphi, \rho)|$ від полярного кута φ при $k\rho = 30$, $k\Delta = \pi/2$, $kh = kh_1 = 1$. Кожний шар напівнескінченної структури складається з двох предканторових решіток. Випадок присутньої решітки у площині $z = 0$ (суцільна крива), випадок відсутньої решітки у площині $z = 0$ (штрихова крива)

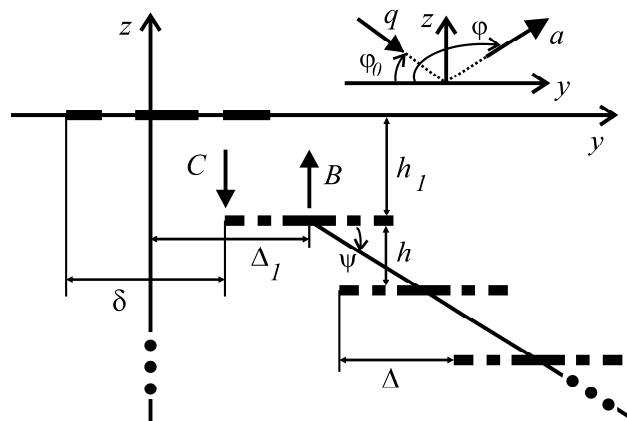


Рис.1.18 Геометрія напівнескінченної решітки типу жалюзі і фрактальної решітки, розташованої в площині $z = 0$

1.2. Плоска напівнескінченна решітка. Операторний метод

Розглянемо задачу про дифракцію H - поляризованої хвилі на багатоеlementній плоскій напівнескінченній стрічковій решітці. Решітка розташована в площині xOy . Період решітки дорівнює l . Сумарна ширина всіх стрічок на одиночному періоді дорівнює $2d$. Вздовж осі Ox структура однорідна. Геометрія структури наведена на рис.19 для випадку одноелементної решітки. Стрічки є ідеально провідними і нескінченно тонкими.

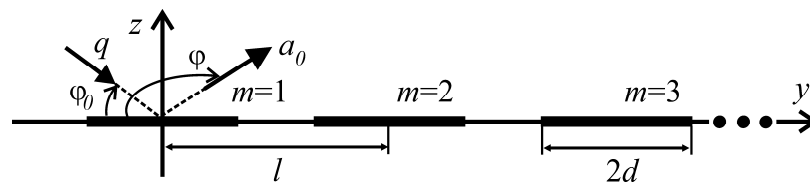


Рис.1.19 Плоска напівнескінченна одноелементна решітка

Припустимо, що на решітку з області $z > 0$ падає плоска хвиля вигляду (1.1). Відбите (в області $z > 0$) поле і поле, яке пройшло (в області $z < 0$), представимо у вигляді

$$H_x^{refl}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi, \quad z > 0,$$

$$H_x^{trans}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (q(\xi) - a(\xi)) \exp(ik\xi y - ik\gamma(\xi)z) d\xi, \quad z < 0.$$

У роботах [22], [23] отримано вираз для амплітуди Фур'є відбитого поля і нелінійне операторне рівняння для такої структури

$$a = r(q - s^- a) + s^- R^1 s^+ (q - r(q - s^- a)). \quad (1.35)$$

$$R^1 = r + s^- R^1 s^+ (I - r) + (s^- R^1 s^+ - I) r s^- R^1. \quad (1.36)$$

При записі рівнянь (1.35), (1.36) використовувалися наступні міркування. Перший доданок у правій частині (1.35) означає, що збудження крайньої стрічки відбувається як падаючим полем, так і полем струмів, які течуть

стрічками напівнескінченної решітки, що починається зі стрічки з номером $n = 2$, а другий доданок у правій частині (1.35) описує відбиття падаючого поля від цієї ж напівнескінченної решітки з урахуванням впливу на неї поля струму, який тече стрічкою з номером $n = 1$.

У даній роботі пропонується інший підхід. Будемо використовувати вже отримані рівняння для напівнескінченної решітки типу жалюзі. Відзначимо, що решітка типу жалюзі при $\psi = 0^\circ$ ($h = 0$) перетворюється в плоску решітку.

Перед дослідженням параметрів плоскої напівнескінченної решітки необхідно встановити, наскільки правочинним є перехід до границі при $h \rightarrow 0$. На рис.1.20, рис.1.21 наведено залежності модуля компоненти відбитого поля H_y^{refl} від координати y при $z = 0.1\lambda$ і функції $D(\varphi, \rho)$ від кута φ при $k\rho = 30$, $kl = 7$, $kd = 1.57$ ($2d = \lambda/2$) для одноелементної напівнескінченної решітки. Параметри структури обрані таким чином, що три плоскі хвилі (гармоніки Флоке) поширюються з номерами -1 , 0 і 1 , які відповідають спектру хвиль нескінченної періодичної решітки. Інші плоскі хвилі є згасаючими. Значення коефіцієнта відбиття $r_p = \frac{\pi - w_p}{\pi} |2\pi R(w_p, \zeta_0)|^2$ та кутів поширення наведено в табл.1.1.

Таблиця 1.1 Коефіцієнт відбиття і кут поширення плоских хвиль

l	w_l	r_l
-1	26.16°	0.197
0	90°	0.186
1	153.8°	0.034

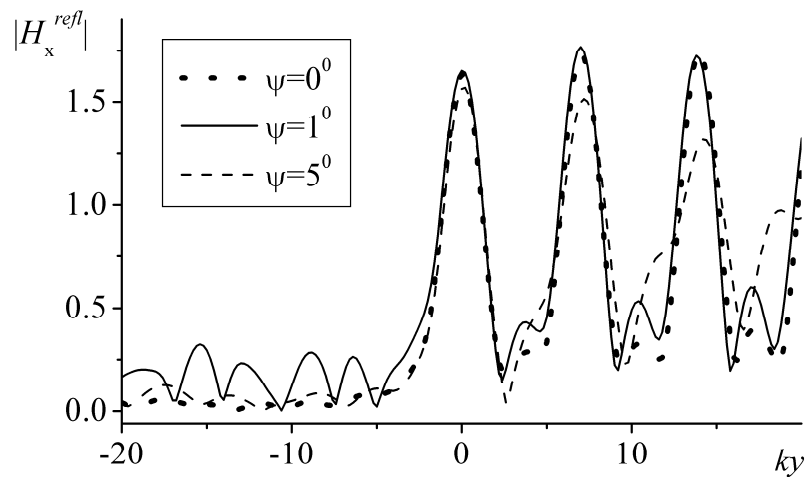


Рис.1.20 Амплітуда компоненти H_x^{refl} відбитого поля при $kl = 7$, $kd = 1.57$

$$(2d = \lambda/2), \varphi_0 = 90^\circ, z = 0.1\lambda$$

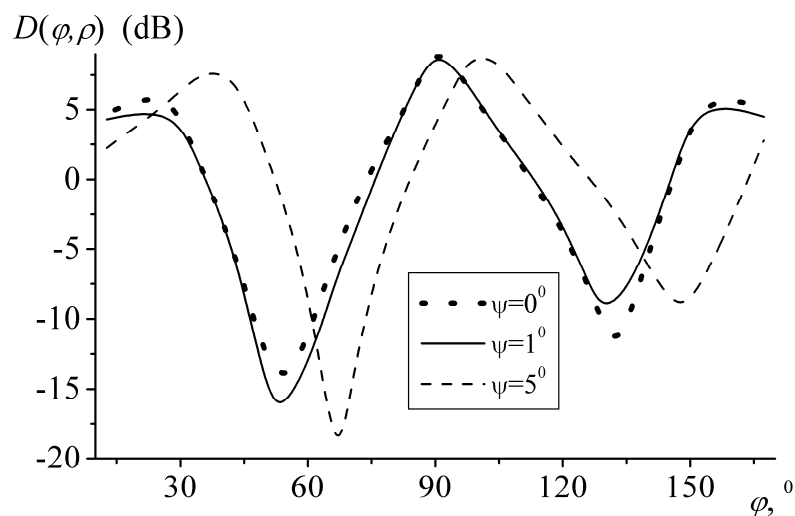


Рис.1.21. Залежності функції $D(\varphi, \rho)$ від полярного кута φ при $kl = 7$,

$$kd = 1.57 \quad (2d = \lambda/2), \varphi_0 = 90^\circ, k\rho = 30$$

Як видно з рисунків, досліджувані криві для напівнескінченної решітки типу жалюзі наближаються до кривих для плоскої напівнескінченної решітки при $\psi \rightarrow 0$. Дотична компонента магнітного поля має максимуми над стрічками. При цьому, амплітуди поля в точці максимуму практично співпадають для стрічки з номером $n = 1$ для випадку плоскої решітки та

решітки типу жалюзі. Для наступних стрічок, $n = 2, 3, \dots$, амплітуди поля в точці максимуму для решітки типу жалюзі стають менше за відповідні значення для випадку $\psi = 0^\circ$. Це пов'язано зі зсувом стрічок у напівнескінченній решітці типу жалюзі в напрямку негативних значень осі Oz . Графіки залежності функції $D(\varphi, \rho)$ від φ практично співпадають для випадків $\psi = 0^\circ$ і $\psi = 1^\circ$. При цьому спостерігається зсув максимумів вздовж осі φ приблизно на 0.2° для основного пелюстка та не більше ніж на 0.5° для бічних пелюстків. Це пов'язане з тим, що плоскі хвилі з однаковим номером, що відповідають нескінченній частини структури, поширюються під різними кутами при різних значеннях кута ψ . Максимуми розташовані поблизу кутів поширення плоских хвиль, що відповідають нескінченній частини решітки (мод Флоке). У випадку $\psi = 5^\circ$ спостерігаються значні відмінності.

Використовувалось 123 вузла в складеній квадратурній формулі, $a = 5$, $j_{\max} = 4$, $\tau = 2$. При цьому, за рахунок необхідності врахування плоских хвиль (які як поширюються, так і згасають) розмірність досягала значення $N = 1200$ у випадку плоскої решітки, $\psi = 0^\circ$, та $N = 284$ у випадку решітки типу жалюзі. Таке розходження в розмірності N для двох решіток пов'язане з нулями функції $f(\xi, \zeta)$. У випадку решітки типу жалюзі ($h > 0$) дійсні нулі лежать на відрізку $[-1, 1]$, у той же час для плоскої решітки ($h = 0$) нулі лежать на всій дійсній осі $(-\infty, \infty)$. При $h \rightarrow 0$ результати для решітки типу жалюзі наближаються до результатів отриманих, якщо покласти $h = 0$.

На рис.1.22 наведено розподіл відбитого поля (дійсна частина компоненти H_y^{refl}) в області над решіткою. При кутах $26.16^\circ < \varphi < 90^\circ$ видно, що від решітки поширюється плоска хвиля з номером -1 . Слід зазначити, що границя області відбиття моди з номером 1 не помітна на рис.1.22. У той саме час, границі області відбиття мод з номерами -1 і 0 при $\varphi = 26.16^\circ$ і $\varphi = 90^\circ$ чітко видні.

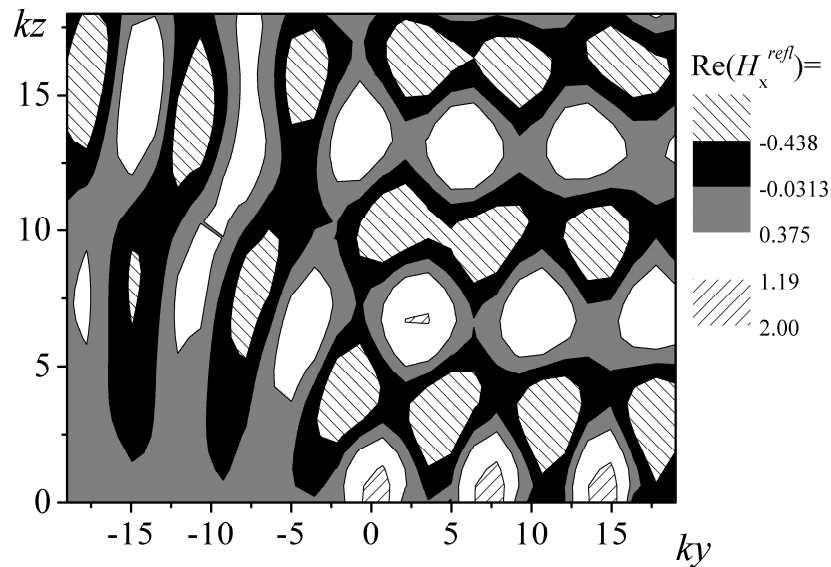


Рис.1.22 Дійсна частина компоненти H_x^{refl} відбитого поля при $kl = 7$,
 $kd = 1.57$ ($2d = \lambda/2$), $\varphi_0 = 90^\circ$, $\psi = 0^\circ$

Розглянемо двоелементну плоску напівнескінченну решітку з періодом $kl = 7$ ($\psi = 0^\circ$). На періоді розташовується дві стрічки рівної ширини. Половина ширини кожної стрічки дорівнює $kd_1 = 0.785$ ($2d_1 = \lambda/4$), $2d_1 = d$. У рівнянні (1.20) у якості оператора Γ вибирався оператор відбиття двох стрічок. Відстань між стрічками на періоді, або зазор, позначимо як δ . На рис.1.23 наведено залежності коефіцієнта відбиття плоских хвиль (мод Флоке) від зазору δ . Маркерами у вигляді зірочок при $\delta = 0$ позначені значення коефіцієнта відбиття у випадку одноелементної плоскої напівнескінченної решітки з половиною шириною стрічки $kd_1 = 1.57$ ($2d_1 = \lambda/2$). Створення невеликого зазору між стрічками призводить до істотної зміни значення коефіцієнта відбиття як основної хвилі, так і інших хвиль. Це пояснюється тим, що струми течуть поперек стрічки і лінії поверхневих струмів перетинаються щілиною. Навіть у малому зазорі дотична компонента відбитого магнітного поля H_x^{refl} обертається в нуль, а на середині стрічок одноелементної решітки її амплітуда близька до

максимальної. При наближенні відстані між серединами стрічок до половини періоду ($2d_1 + \delta = l/2$), коефіцієнт відбиття основної хвилі наближається до коефіцієнта відбиття решітки з періодом $l/2$, а гармонік з номерами ± 1 - наближається до нуля. Графіки симетричні відносно прямої $\delta = l/2 - 2d_1$. При $\delta = l/2 - 2d_1$ відстань між всіма стрічками в напівнескінченній решітці однакова. Такі ж ефекти спостерігалися і у випадку двоелементної нескінченної ідеально періодичної решітки [33].

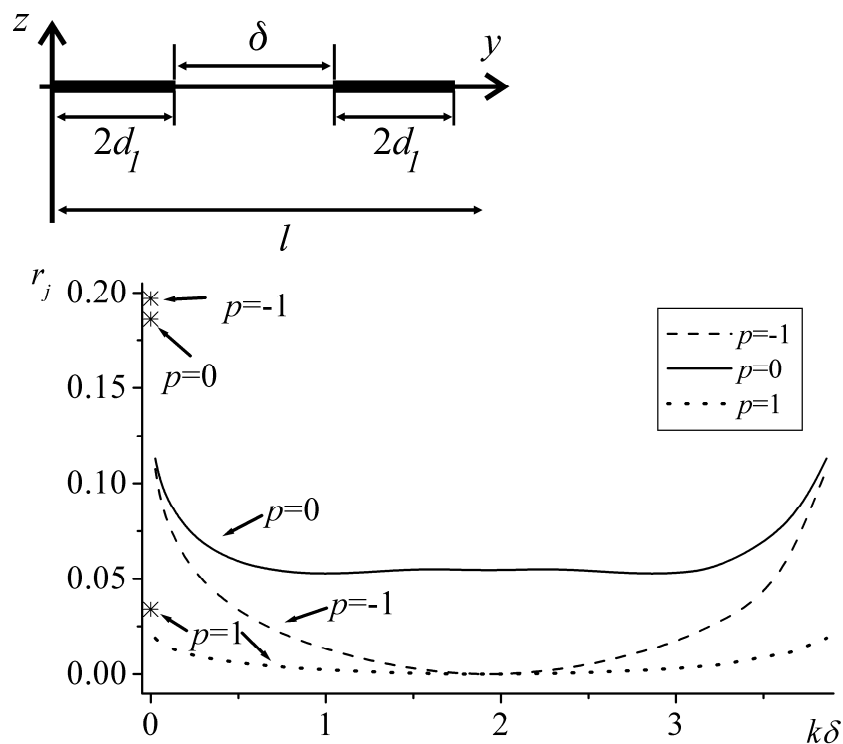


Рис.1.23 Залежності коефіцієнта відбиття r_p від зазору δ при $kl = 7$,

$$kd_1 = 0.785 \quad (2d_1 = \lambda/4), \quad kd = 1.57 \quad (2d = \lambda/2), \quad \varphi_0 = 90^\circ$$

На рис.1.24 наведено залежності функції $D(\varphi, \rho)$ від кута φ при трьох значеннях зазору δ , $k\rho = 30$. У випадку зазору $\delta \ll l/2 - 2d_1$ в залежностях спостерігається наявність трьох максимумів, кути яких співпадають з кутами поширення плоских хвиль. При наближенні зазору δ до величини $l/2 - 2d_1$, значення максимумів спадають, а при $\delta = l/2 - 2d_1$ коефіцієнт відбиття хвиль

з номерами ± 1 дорівнює нулю, $r_{\pm 1} = 0$. На рис.1.25 наведено залежності модуля компоненти відбитого поля H_y^{refl} від координати y при $z = 0.1\lambda$. При більших значеннях зазору δ в залежностях з'являється другий мінімум, положення якого вздовж осі Oy відповідає зазору між стрічками на періоді.

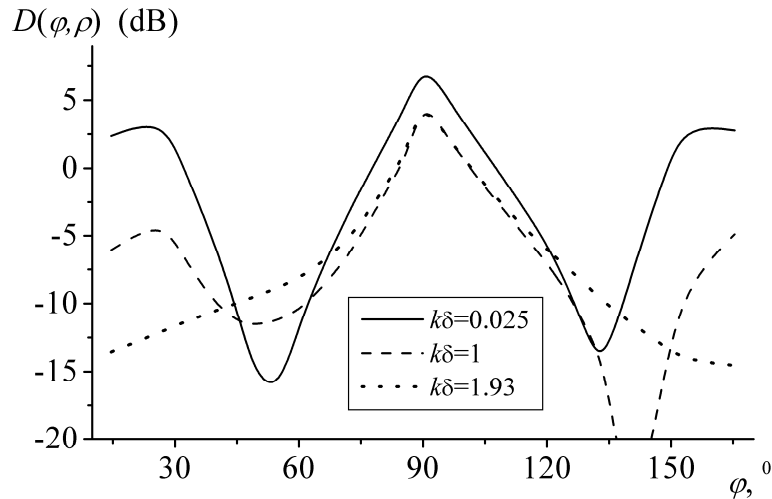


Рис.1.24 Залежності функції $D(\varphi, \rho)$ від полярного кута φ при $kl = 7$,
 $kd_1 = 0.785$ ($2d_1 = \lambda/4$), $kd = 1.57$ ($2d = \lambda/2$), $\varphi_0 = 90^\circ$, $k\rho = 30$

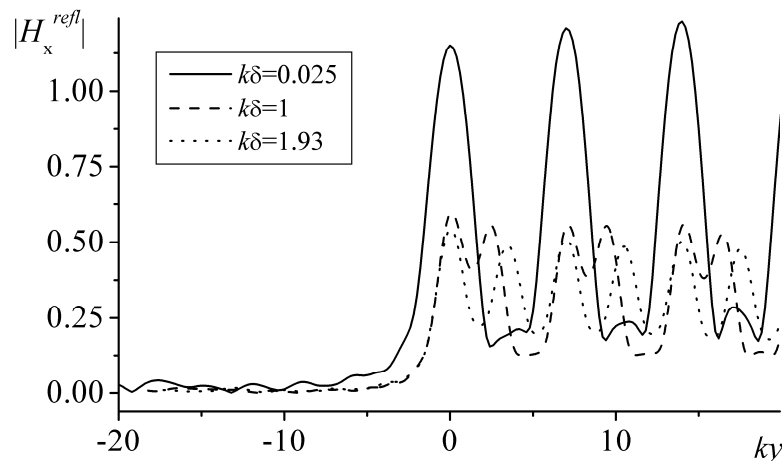


Рис.1.25 Модуль компоненти H_x^{refl} відбитого поля при $kl = 7$, $kd_1 = 0.785$
 $(2d_1 = \lambda/4)$, $kd = 1.57$ ($2d = \lambda/2$), $\varphi_0 = 90^\circ$, $z = 0.1\lambda$

На рис.1.26 наведено розподіл відбитого поля (дійсна частина компоненти H_y^{refl}) в області над решіткою. При $\delta \ll l/2 - 2d_1$ розподіл поля

має подібний вигляд до випадку розподілу поля одноелементної решітки, який наведено на рис.1.22. При цьому амплітуда поля є меншою. Рис.1.26 б) відповідає $\delta = l/2 - 2d_1$. Поле в області $y < 0$ при $z \gg 0$ створюється лише циліндричною хвилею, розсіяною краєм структури, тому що $r_{-1} = 0$. Поблизу решітки в області $y < 0$ на розподіл поля впливають ще й згасаючі плоскі хвилі з парними номерами ($2p$).

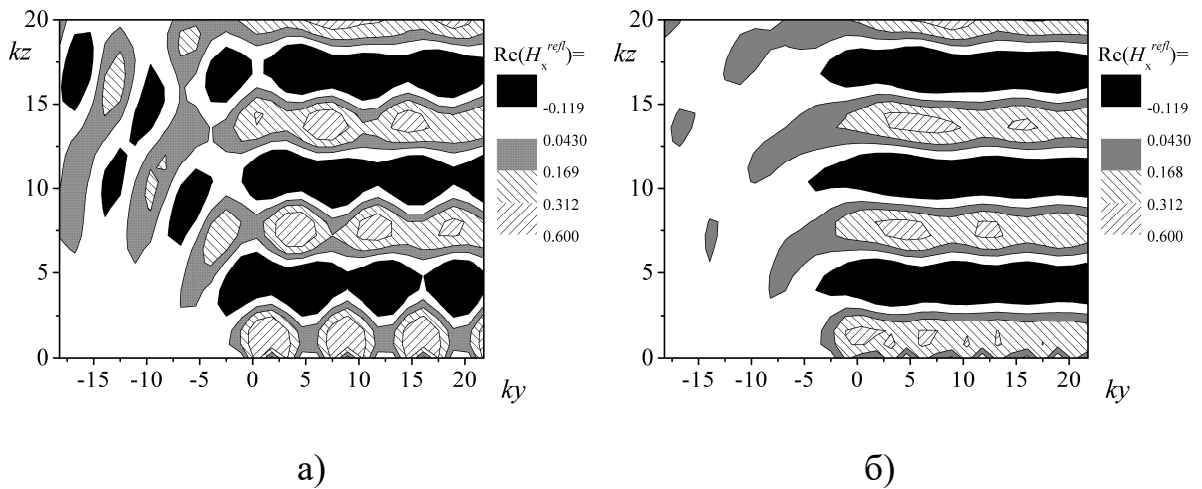


Рис.1.26 Дійсна частина компоненти H_x^{refl} відбитого поля при $kl = 7$,

$$kd_1 = 0.785 \quad (2d_1 = \lambda/4), \quad kd = 1.57 \quad (2d = \lambda/2), \quad \varphi_0 = 90^\circ.$$

а) $k\delta = 1$, б) $k\delta = 1.93$

На рис.1.27 наведено залежності коефіцієнта відбиття плоских хвиль (мод Флоке) трьох- і чотирьохелементної плоскої напівнескінченної решітки від ширини стрічки з номерами 2 і 4, kd_2 , при постійній ширині стрічок з номерами 1 і 3, $2kd_1 = 1.57$ ($2d_1 = \lambda/2$). Стрічка з номером 2 розташована симетрично відносно стрічок 1 і 3. Відстань між стрічками 1 і 3 дорівнює $k\delta = k(l - 2 \cdot 2 \cdot d_1)/2 \approx 1.93$. У чотирьохелементної структури відстань між сусідніми стрічками і ширина стрічок з номерами 2 і 4 однакова. У випадку присутності на періоді лише стрічок з номерами 1 і 3 (двоелементна решітка), найменший період дорівнює $l/2$. При розміщенні додаткової

стрічки малої ширини на періоді (з номером 2), значення коефіцієнта відбиття змінюються несуттєвим образом. При цьому коефіцієнт відбиття плоских хвиль з номерами ± 1 збільшується з ростом ширини стрічки. Це пов'язане з тим, що найменший період такої структури стає рівним l . Розміщення четвертої стрічки робить структуру знову періодичною з періодом $l/2$ і коефіцієнт відбиття плоских хвиль із номерами ± 1 обертається в нуль. Це ж вірно і для плоских нескінченних періодичних решіток, властивості яких досить повно описані в [33].

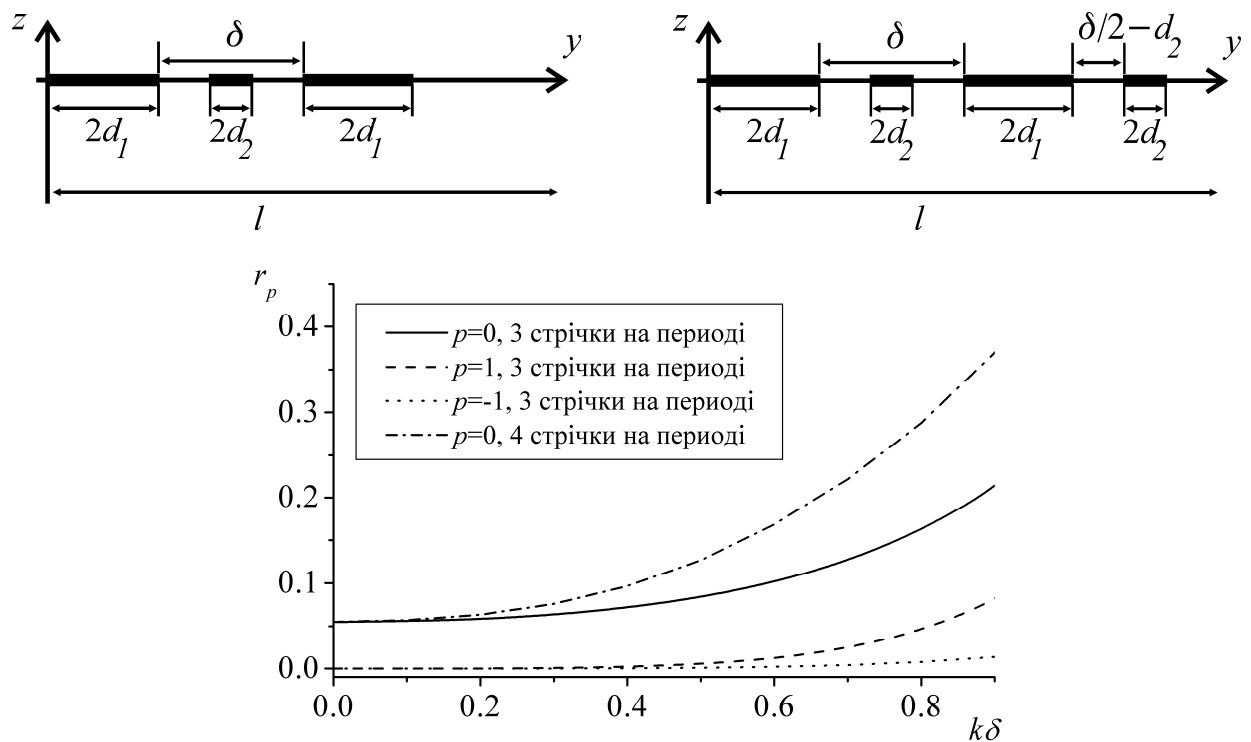


Рис.1.27 Залежності коефіцієнта відбиття r_p від зазору δ при $kl = 7$, $kd_1 = 0.785$ ($2d_1 = \lambda/4$), $k\delta = 1.93$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $z = 0.1\lambda$. На вставці до рисунку наведено поодинокий період багатоеlementної решітки

1.3. Плоска напівнескінченна решітка. Метод сингулярних інтегральних рівнянь

Застосуємо метод сингулярних інтегральних рівнянь до розв'язання задачі про дифракцію на плоскій напівнескінченній періодичній решітці. Метод сингулярних інтегральних рівнянь успішно використовувався для аналізу скінченних або нескінченних періодичних решіток [47], [48], [49], [50]. У даній роботі цей метод вперше застосовано до напівнескінченної структури [51]-[54].

Розсіяне напівнескінченною структурою поле у спектральній області (у просторі перетворень Фур'є) подамо як суму поля нескінченної ідеально періодичної решітки і невідомого поля корекції, збудженого через наявність краю. Таким чином, тут будуть розглянуті дві задачі. Перша – задача про дифракцію плоскої хвилі на нескінченній ідеально періодичній решітці. Друга – задача пошуку поля корекції. Обидві ці задачі зведено до сингулярних інтегральних рівнянь схожого вигляду. Завдяки цьому для їх дискретизації можливо буде застосувати єдиний метод, метод дискретних особливостей [47], [48]. Цей метод є однією з реалізацій алгоритмів типу Найстрема або інтерполяційного методу. Під час його застосування підінтегральна функція замінюється інтерполяційним поліномом. Далі застосовується квадратурна формула Гауса-Чебишева для сингулярних інтегралів з вузлами у нулях полінома Чебишева першого роду, яка враховує поведінку поля на ребрі. У якості точок колокації вибираються нулі поліномів Чебишева другого роду. Метод дискретних особливостей має теоретично гарантовану збіжність. На відміну від інших алгоритмів типу Найстрема [55], де спеціальна квадратурна формула, яка враховує поведінку на ребрі, застосовується лише для крайніх відрізків, метод дискретних особливостей застосовує єдину квадратурну формулу для всієї стрічки [56]. Метод дискретних особливостей не покладається на “вірний” вибір базисних

функцій, як метод моментів, аналітично враховує умову на ребрі, на відміну від методу сіток (скінченних різниць).

Як і у попередніх параграфах, розташуємо напівнескінченну решітку в площині $z=0$ (див. рис.1.19). Ширина стрічок дорівнює $2d$, період – l . Стрічки є нескінченно тонкими. Падаюче з області $z > 0$ поле має вигляд плоскої хвилі

$$\begin{aligned} H_x^i(y, z) &= \exp(ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)), \text{ у випадку } H \text{-поляризації,} \\ E_x^i(y, z) &= \exp(ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)), \text{ у випадку } E \text{-поляризації.} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Розсіяне поле надамо як суперпозицію поля струмів, які течуть стрічками нескінченної ідеально періодичної решітки ($H_x^{s,inf}(y, z)$ або $E_x^{s,inf}(y, z)$), і поля, індукованого струмами корекції, які збуджуються через наявність краю у напівнескінченної решітки ($H_x^{s,c}(y, z)$ або $E_x^{s,c}(y, z)$)

$$\begin{aligned} H_x^s(y, z) &= H_x^{s,inf}(y, z) + H_x^{s,c}(y, z), \\ E_x^s(y, z) &= E_x^{s,inf}(y, z) + E_x^{s,c}(y, z). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Поле $H_x^{s,inf}(y, z)$ і $E_x^{s,inf}(y, z)$ можна представити як суму полів струмів кожної стрічки окремо. Поле m -ї стрічки нескінченної ідеально періодичної решітки представимо у вигляді потенціалу подвійного шару у випадку H -поляризації, у вигляді потенціалу простого шару у випадку E -поляризації

$$\begin{aligned} H_{x,m}^{s,inf}(y, z) &= \frac{i}{4} \int_{-d}^d \mu_m^\infty(y'+lm) \frac{\partial}{\partial z'} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + (z-z')^2}\right) dy', \quad z'=0, \\ E_{x,m}^{s,inf}(y, z) &= \frac{i\omega\mu_0}{4} \int_{-d}^d \mu_m^\infty(y'+lm) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + (z-z')^2}\right) dy'. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} H_x^{s,inf}(y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_{x,m}^{s,inf}(y, z) = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-d}^d \mu_m^\infty(y'+lm) \frac{\partial}{\partial z'} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + (z-z')^2}\right) dy', \quad z'=0, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$E_x^{s,inf}(y,z) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{x,m}^{s,inf}(y,z) = \\ = \frac{i\omega\mu_0}{4} \sum_{m=0-d}^{\infty} \int_{-d}^d \mu_m^{\infty}(y'+lm) E_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2+z^2}\right) dy',$$

де $\mu_m^{\infty}(y'+lm)$ – густина струмів, які течуть стрічками нескінченної ідеально періодичної решітки. Сумування у (1.39) проводиться по всіх стрічках напівнескінченної структури, $m = 0, 1, \dots$.

Надамо розв'язання задачі про дифракцію на нескінченній періодичній решітці методом сингулярних інтегральних рівнянь.

1.3.1. Нескінченна періодична стрічкова решітка. Ідеально провідні стрічки

Розглянемо нескінченну періодичну решітку (рис.1.28), на яку падає плоска H -поляризована хвиля (1.37). Відбите поле і поле, яке пройшло, в області $z > 0$, $z < 0$ надамо як ряди Фур'є з невідомими амплітудами [33]

$$H_x^{r,\infty}(y,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n z)), \quad z > 0,$$

$$H_x^{t,\infty}(y,z) = H_x^i(y,z) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y - \gamma_n z)), \quad z < 0,$$

де $\zeta_n = \frac{2\pi n}{kl} + \sin \alpha = \frac{2\pi n}{kl} + \cos \varphi_0$, $\gamma_n = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi n}{kl} + \sin \alpha\right)^2}$, $\text{Re } \gamma_n \geq 0$, $\text{Im } \gamma_n \geq 0$,

$\alpha = \pi/2 - \varphi_0$ – кут падіння, який відраховується від осі Oz .

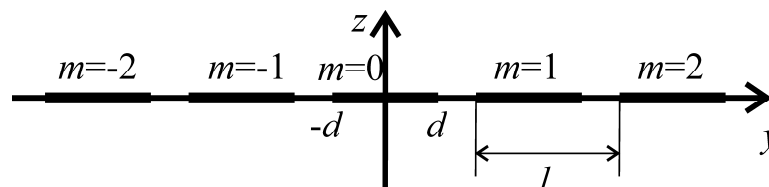


Рис.1.28 Нескінченна періодична решітка

Амплітуди a_n можуть бути знайдені з парних рядів Фур'є, записаних для одного періоду, $|y| < l/2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) = 0, \quad |y| \geq d \quad (\text{на щілинах}), \quad (1.40)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) = \gamma_0, \quad |y| < d \quad (\text{на стрічках}). \quad (1.41)$$

У роботі [50] парні інтегральні рівняння вигляду (1.40), (1.41) зведено до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами у випадку ортогонального падіння плоскої хвилі на ідеально провідні стрічки. У нашому випадку хвиля падає під довільним кутом. Для повноти картини вкажемо на ключові моменти. Введемо безрозмірні величини $\psi = 2\pi y/l$, $\kappa = kl/(2\pi)$, $\delta = 2\pi d/l$ і функції

$$U(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\psi),$$

$$F(\psi) = U'(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ina_n \exp(in\psi).$$

З рівняння (1.40) випливає, що $U(\psi) = 0$, $|\psi| \geq \delta$, і

$$F(\psi) = 0, \quad |\psi| \geq \delta. \quad (1.42)$$

Амплітуди a_n виражаються через функцію $F(\psi)$ за допомогою оберненого перетворення Фур'є, з урахуванням (1.42), наступним чином:

$$a_n = \frac{1}{2\pi in} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) \exp(-in\xi) d\xi, \quad n \neq 0, \quad (1.43)$$

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\xi}{2} F(\xi) d\xi. \quad (1.44)$$

Введемо 2π періодичний оператор Гільберта, що діє на довільну функцію $G(\xi)$ по формулі [57]

$$(\mathcal{P}_{2\pi} G)(\psi) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ctg} \frac{\xi - \psi}{2} G(\xi) d\xi, \quad (1.45)$$

причому

$$P_{2\pi} : \exp(in\psi) \mapsto i \operatorname{sgn}(n) \exp(in\psi).$$

Представимо рівняння (1.41) у наступному вигляді:

$$a_0 \gamma_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} i \frac{|n|}{\kappa} a_n \exp(in\psi) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(i \frac{|n|}{\kappa} - \gamma_n \right) a_n \exp(in\psi) = \gamma_0, \quad |\psi| < \delta. \quad (1.46)$$

Застосовуючи до другого доданка в (1.46) оператор Гільберта (1.45) і вирази (1.43), (1.44), а до першого й третього доданка – вирази (1.43), (1.44), з урахуванням (1.42) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_{2\pi}(\psi, \xi) F(\xi) d\xi = i \kappa \gamma_0, \quad |\psi| < \delta. \quad (1.46)$$

Ядро $K_{2\pi}(\psi, \xi)$ має вигляд

$$K_{2\pi}(\psi, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \gamma_n \right) \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} + \\ + i \gamma_0 \kappa \frac{\psi - \xi}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\psi - \xi}{2} \right) \right). \quad (1.47)$$

Швидкість збіжності ряду у виразі для ядра $K(\psi, \xi)$ можна збільшити за методом Крилова, використовуючи асимптотичний вираз для γ_n при $n \rightarrow \infty$ [58].

З рівняння (1.40) випливають додаткові умови, які необхідні для єдиності розв'язку,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) d\xi = 0, \quad |\psi| < \delta. \quad (1.48)$$

Сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою (1.46), (1.48) має єдиний розв'язок, який отримано методом дискретних особливостей [47], [48], [49].

Функція густини струмів $\mu_m^\infty(y)$ виражається через амплітуди розсіяного поля за допомогою ряду Фур'є

$$\mu_m^\infty(y) = \begin{cases} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\zeta_n y), & |y_m| \leq d, \\ 0, & |y_m| > d, \end{cases}$$

де $y_m = y + lm$ – координата, пов’язана з m -ю стрічкою.

Зауважимо, що розв’язок задачі для випадку E -поляризації можна отримати з принципу дуальності.

1.3.2. Нескінченна періодична стрічкова решітка. Імпедансні стрічки нульової товщини

Розглянемо нескінченну періодичну решітку з імпедансних стрічок, розташовану у площині $z=0$ у випадку H -поляризації. Період решітки дорівнює l , ширина стрічок – $2d$. Стрічки є нескінченно тонкими. Дослідимо випадок H -поляризації. Позначимо множину y -координати стрічки як $L = \{y : |y| < d\}$. Доповнення до множини L на періоді позначимо як $CL = \{y : (-l/2; -d] \cup [d; l/2)\}$.

Електромагнітне поле повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца поза стрічками,

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \varepsilon_a \mu_a \omega^2 H_x = 0,$$

умовам неперервності у площині $z=0$

$$E_y^+ = E_y^-, z=0, \quad (1.49)$$

$$H_x^+ = H_x^-, y \in CL, z=0, \quad (1.50)$$

граничній умові на стрічках

$$\frac{1}{2}(\vec{E}_\tau^+ + \vec{E}_\tau^-) = \frac{1}{\sigma} [\vec{x}; (\vec{H}_\tau^+ - \vec{H}_\tau^-)], y \in L, z=0, \quad (1.51)$$

умові Майкснера на ребрі і умові випромінювання Зомерфельда [59], де σ – поверхнева провідність матеріалу стрічок, знак “+” або “-” означають граничне значення при наближенні до межі розділу зверху або знизу, $z \rightarrow \pm 0$. Розв’язок сформульованої граничної задачі єдиний.

Маючи на увазі зв'язок між дотичними компонентами електромагнітного поля,

$$E_y = -\frac{1}{i\omega\epsilon_a} \frac{\partial H_x}{\partial z},$$

умову (1.51) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{ik}{\sigma Z} (H_x^+ - H_x^-), \quad y \in L, \quad z = 0, \quad (1.52)$$

де $Z = 120\pi$ Ом.

Повне поле H_x будемо шукати як суму падаючого і розсіяного полів,

$$H_x(y, z) = H_x^i(y, z) + H_x^s(y, z), \quad (1.53)$$

а розсіяне – у вигляді ряду Фур'є з невідомими амплітудами a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$H_x^s(y, z) = \operatorname{sgn}(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n |z|)), \quad z \neq 0, \quad (1.54)$$

де падаюче поле має вигляд плоскої хвилі (1.37).

Повне поле (1.53), з урахуванням (1.54), задовольняє рівнянню Гельмгольца, умові неперервності (1.49) і умові випромінювання.

Після застосування умов (1.50), (1.52) отримаємо парні ряди Фур'є (суматорні рівняння), які запишемо для одного періоду, $|y| < l/2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) = 0, \quad y \in CL \text{ (у щілинах)}, \quad (1.55)$$

$$\frac{2ik}{\sigma Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) = \gamma_0, \quad y \in L \text{ (на стрічці)}. \quad (1.56)$$

Розв'язання парних рядів Фур'є шукається в класі послідовностей, що задовольняють умові на ребрі. Такий розв'язок – єдиний.

Перепишемо парні ряди Фур'є (1.55), (1.56) в безрозмірних величинах

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\psi) = 0, \quad |\psi| \geq \delta \text{ (в щілинах)}, \quad (1.57)$$

$$\frac{2ik}{\sigma Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\psi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n \exp(in\psi) = \gamma_0, \quad |\psi| < \delta \quad (\text{на стрічці}). \quad (1.58)$$

Зведемо парні ряди Фур'є (1.57), (1.58) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами. Введемо функцію

$$F(\psi) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n \exp(in\psi). \quad (1.59)$$

Як похідна константи,

$$F(\psi) = 0, \quad |\psi| > \delta. \quad (1.60)$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до (1.59), з урахуванням (1.60), можемо виразити амплітуди a_n через $F(\psi)$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{-\delta}^{\delta} F(\psi) \exp(-in\psi) d\psi, \quad n \neq 0. \quad (1.61)$$

$$a_0 = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n (-1)^n, \quad (1.62)$$

або

$$a_0 = - \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\xi}{2} F(\xi) d\xi. \quad (1.63)$$

Для того, щоб звести парні суматорні рівняння до сингулярного інтегрального рівняння надамо коефіцієнти γ_n як суму спадаючого і не спадаючого доданка при $n \rightarrow \infty$. Далі, до не спадаючого доданка застосуємо періодичний оператор Гільберта (1.45), який приведе до появи сингулярного інтеграла. Решту доданків згрупуємо в ядро рівняння.

Асимптотичний вираз для γ_n , при $n \rightarrow \infty$, має наступний вигляд:

$$\gamma_n \sim i \frac{|n|}{\kappa} + O(1/|n|), \quad n \rightarrow \infty. \quad \text{Надамо } \gamma_n \text{ у формі } \gamma_n = \left(\gamma_n - i \frac{|n|}{\kappa} \right) + i \frac{|n|}{\kappa}.$$

Перепишемо (1.58) як

$$a_0 \gamma_0 + \frac{2ik}{\sigma Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\psi) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{\kappa} a_n \exp(in\psi) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n \left(\gamma_n - i \frac{|n|}{\kappa} \right) \exp(in\psi) = \gamma_0,$$

$$|\psi| < \delta. \quad (1.64)$$

До третього доданка в (1.64), який містить неспадаючий член розкладання γ_n , застосуємо оператор Гільберта (1.45) і вираз (1.59), а до всіх інших доданків застосуємо вираз (1.61), (1.63) і згрупуємо їх під одним знаком інтеграла. В результаті отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) \text{ctg} \left(\frac{\xi - \psi}{2} \right) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_1(\psi, \xi) F(\xi) d\xi = i\kappa\gamma_0, \quad |\psi| < \delta, \quad (1.65)$$

де в ядро $K_1(\psi, \xi)$ згруповані спадаючі доданки при $n \rightarrow \infty$,

$$K_1(\psi, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \gamma_n \right) \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} + i\gamma_0 \kappa \frac{\psi - \xi}{2} + q(\psi, \xi), \quad (1.66)$$

$$q(\psi, \xi) = \begin{cases} \frac{2i\kappa\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq \psi, \\ 0, & \xi > \psi. \end{cases}$$

Використовуючи асимптотичний вираз для функції $\text{ctg}x \sim 1/x$, при $x \rightarrow 0$, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння вигляду (1.46)

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_{2\pi}(\psi, \xi) F(\xi) d\xi = i\kappa\gamma_0, \quad |\psi| < \delta, \quad (1.67)$$

з ядром

$$K_{2\pi}(\psi, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \gamma_n \right) \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} + \\ + i\gamma_0 \kappa \frac{\psi - \xi}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \text{ctg} \left(\frac{\psi - \xi}{2} \right) \right) + q(\psi, \xi), \quad (1.68)$$

$$q(\psi, \xi) = \begin{cases} \frac{2i\kappa\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq \psi, \\ 0, & \xi > \psi. \end{cases}$$

З виразу (1.57) впливає додаткова умова

$$\int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) d\xi = 0. \quad (1.69)$$

Ряд у виразі для ядра (1.68) спадає як $1/n^2$, $n \rightarrow \infty$. Використовуючи асимптотичний вираз для γ_n , при $n \rightarrow \infty$, швидкість збіжності ядра може бути збільшена.

Сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою (1.67), (1.69) має єдиний розв'язок, який можна отримати методом дискретних особливостей [47], [48], [49].

Так як ряд в виразі для ядра (1.68) збігається, вираз $\left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\psi - \xi}{2} \right) \right)$ має скінченну границю при $\psi \rightarrow \xi$. Отже, ядро $K_{2\pi}(\psi, \xi)$ є регулярною функцією для всіх $\psi, \xi \in (-\pi; \pi)$. Вірний вибір схеми дискретизації забезпечує $\frac{\psi - \xi}{2} \neq \pm\pi$. Числові дослідження (див. рис.1.29) показують, що не виникає нестійкості при наближенні значення ширини стрічки до періоду, $2d \rightarrow l$, або ж при $\frac{\psi - \xi}{2} \rightarrow \pm\pi$.

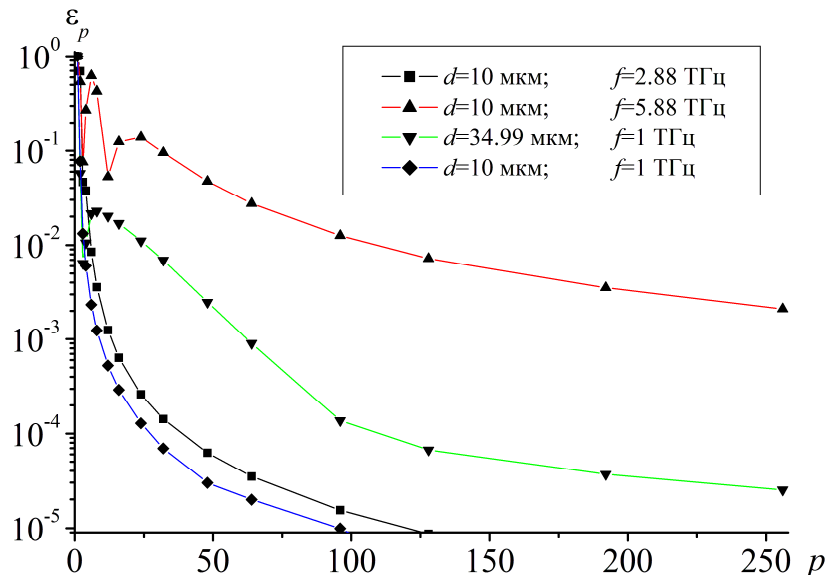


Рис.1.29 Залежність похибки ε_p від числа вузлів на кожній стрічці p для нескінченної періодичної графенової решітки при $l = 70$ мкм, $\mu_c = 0.5$ еВ,

$$\varphi_0 = 90^\circ, \tau = 1 \text{ пс}, T = 300 \text{ К}.$$

Наостанок зауважимо, що ядро у вигляді (1.68) для імпедансної стрічки наближається до ядра у вигляді (1.47) для ідеально провідної стрічки, якщо покласти $\sigma \rightarrow \infty$.

1.3.3. Нескінченна періодична стрічкова решітка, розташована над ідеально провідною площиною. Імпедансні стрічки нульової товщини

Розглянемо дифракцію плоскої H -поляризованої монохроматичної хвилі на нескінченній решітці з імпедансних стрічок, розташованій над ідеально провідною площиною. Нехай решітка з імпедансних стрічок нульової товщини знаходиться в площини $z = 0$, відстань між решіткою й ідеально провідною площиною дорівнює h . Ширина кожної стрічки дорівнює $2d$, період решітки – l . Геометрія решітки й система координат наведені на рис.1.30.

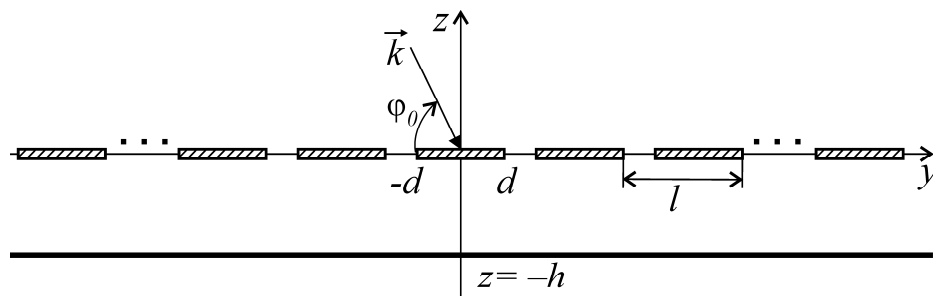


Рис.1.30 Нескінченна періодична решітка з імпедансних стрічок, розташована над ідеально провідною площиною

Падаюче з області $z > 0$ поле подамо як

$$H_x^i(y, z) = \exp(ik(\zeta_0 y - \gamma_0(z + h))).$$

Повне поле будемо шукати у вигляді суперпозиції трьох полів: падаючого поля, поля, відбитого від ідеально провідної площини (при відсутності решітки) і невідомого поля $H_x^s(y, z)$, розсіяного решіткою

$$H_x(y, z) = \exp(ik(\zeta_0 y - \gamma_0(z + h))) + \exp(ik(\zeta_0 y + \gamma_0(z + h))) + H^s(y, z). \quad (1.70)$$

Повне поле (1.70) повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца при $z > -h$ поза стрічками, граничній умові на ідеально провідній площині

$$E_y(y, -h) = 0$$

і на стрічках (1.52), умовам неперервності (1.49), (1.50), умові випромінювання й умові на ребрі. Розв'язок граничної задачі – єдиний.

Розсіяне решіткою поле шукаємо у вигляді ряду Фур'є в області $z > 0$ і $0 > z > -h$:

$$H_x^s(y, z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n z)), & z > 0, \\ -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\cos(k\gamma_n(z+h))}{\sin(\gamma_n kh)} \exp(ik\zeta_n y), & 0 > z > -h, \end{cases} \quad (1.71)$$

де c_n – невідомі амплітуди. Тоді повне поле з урахуванням (1.71) задовольняє рівнянню Гельмгольца, умові неперервності (1.49), граничній умові на ідеально провідній площині і умові випромінювання. З умов (1.50), (1.52) можемо отримати парні ряди Фур'є, записані для одного періоду, $|y| < l/2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (1 + ictg(\gamma_n kh)) \exp(ik\zeta_n y) = 0, \quad |y| \geq d \quad (\text{у щілинах}), \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{ik}{\sigma Z_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (1 + ictg(\gamma_n kh)) \exp(ik\zeta_n y) + ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n C_n \exp(ik\zeta_n y) = \\ = 2k\gamma_0 \sin(\gamma_0 kh) \exp(ik\zeta_0 y), \quad |y| < d \quad (\text{на стрічці}). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Введемо нові коефіцієнти $D_n = c_n (1 + ictg(\gamma_n kh))$. Тоді рівняння (1.72), (1.73) можна переписати у безрозмірних змінних у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \exp(in\psi) = 0, \quad |\psi| \geq \delta, \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sigma Z_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \exp(in\psi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\gamma_n}{1 + ictg(\gamma_n kh)} D_n \exp(in\psi) = \\ = -4i\gamma_0 \sin(\gamma_0 kh), \quad |\psi| < \delta. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Парні ряди Фур'є (1.74), (1.75) можна звести до сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою відносно функції

$F(\xi) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n D_n \exp(in\xi)$, використовуючи такий самий підхід, як і у випадку решітки без ідеально провідної площини:

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K(\psi, \xi) F(\xi) d\xi = 4\kappa\gamma_0 \sin(\gamma_0 kh), \quad |\psi| < \delta, \quad (1.76)$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) d\xi = 0. \quad (1.77)$$

Ядро має вигляд

$$K_{2\pi}(\psi, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \frac{2\gamma_n}{1 + i \text{ctg}(\gamma_n kh)} \right) \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} + \\ + \frac{i\kappa\gamma_0}{1 + i \text{ctg}(\gamma_0 kh)} \frac{\psi - \xi}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \text{ctg}\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) \right) + q(\psi, \xi).$$

Сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою (1.76), (1.77) має єдиний розв'язок, який можна отримати методом дискретних особливостей [47], [48], [49].

1.3.4. Електродинамічні властивості плоскої нескінченної періодичної графенової решітки

1.3.4.1. Застосування графенових решіток і методи їх аналізу

Графенові решітки зі стрічок мають перспективи використання у різних пристроях, таких як поглиначі, антени, сенсори, плазмонні хвилеводи та інші [60]-[71]. Графен – це матеріал, який можна розглядати як двовимірну площину атомів вуглецю, які формують шестикутну решітку. Складається з одного атомарного шару графіту. Має ряд унікальних і корисних властивостей. Графен є надзвичайно міцним, що створює передумови для його використання в покриттях. Відносно мала кількість графенових стрічок (близько 10) здатна створювати аномалії Релея-Вуда. Представляється

можливим досить просто змінювати фізичні характеристики графенової стрічки, а саме, хімічний потенціал, за рахунок застосування електростатичного поля, тим самим змінюючи властивості всієї решітки [60], [72], [73]. Зазначена риса дозволяє використовувати графен при створенні нових настроюваних антен та поглиначів [70], [74]-[79].

Графен підтримує поширення поверхневих плазмон-поляритонних хвиль в терагерцевому діапазоні [80]-[82]. Метали підтримують поширення даних хвиль, але на набагато більш високих частотах, в ближньому інфрачервоному або оптичному діапазоні. Більш того, навіть у благородних металів спостерігаються значні втрати. Крім того, антени на основі графену демонструють набагато менший ефект взаємного зв'язку, ніж металеві антенні решітки з однаковою відстанню між елементами, через відносно малу довжину хвилі поверхневого плазмон поляритону, що є результатом низької швидкості поширення хвилі поверхневого плазмон поляритону [83]. Цей ефект можливо використовувати у антенах для зменшення їх розміру.

Для дослідження графенових стрічок можна застосовувати підхід, при якому використовується модель нескінченно тонкої імпедансної поверхні за умови, що ширина стрічки більше 100 нм. В даному випадку мається на увазі, що вплив країв на провідність дуже малий. Тоді можна застосовувати формулу Кубо, отриману для нескінченної графенової поверхні [84]-[87]. Відмітимо, проте, що є інший підхід, а саме, розглядати графен як діелектрик скінченної товщини з деякою еквівалентною діелектричною проникністю. Точність при застосуванні такого підходу спадає зі зростанням співвідношення Δ/λ [88], де Δ – товщина графенового шару, λ – довжина хвилі.

Одним з найбільш часто використовуваних методів до графенових решіток є метод сіток (скінченних різниць) в часовій області (FDTD) [68], [70], [71], [78], [89]. Класичний метод сіток вимагає дуже багато комп'ютерного часу, оскільки розмір кроку по змінній часу визначається

товщиною графенового шару, який складається лише з одного атома. Для подолання цієї труднощі запропоновано модифікації методу [71], [78], [89]. Проте у цих роботах враховано лише внутрішньозонну провідність графену у вигляді моделі Друде. Стаття [70] розвиває метод сіток і враховує як міжзонну, так і внутрішньозонну провідність. У кількох публікаціях про графен для числових розрахунків використовувалися комерційні пакети [79], [90], [91]. Метод скінченних різниць і комерційні пакети, засновані на методі скінченних елементів, використовують наближені умови випромінювання, які обмежують точність.

У [92] запропоновано поглинач на основі графенового шару, закріпленого на діелектричній підкладці з металевою площиною. Аналітичні вирази отримано з використанням моделі еквівалентної схеми та провідності у вигляді Друде. Проведено порівняння з результатами, отриманими методом Фур'є. У [93] метод еквівалентних схем використовується для аналізу графенового атенюатора у мікросмужковій лінії. В [94] подібний підхід використано для розгляду компланарних хвилеводних і щілинних атенюаторів. У [95] використовується метод Гальоркіна у часовій області, графен моделюється як нескінченна тонка поверхня.

У [96], метод розкладання Фур'є застосовується до нескінченної періодичної стрічкової графенової решітки, розташованої у вакуумі. Хоча, як самі автори визнають, цей метод не дає збіжного розв'язку, він дозволяє візуалізувати фізичні ефекти. У [97] використовується позбавлений вказаного недоліку метод аналітичної регуляризації. У [98] дифракцію на вбудованій в діелектричну пластину нескінченній періодичній графеновій решітці розглядають за допомогою методу аналітичної регуляризації.

У [99]-[121] методи сингулярних інтегральних рівнянь використано для аналізу скінченних та нескінченних графенових стрічкових решіток. Застосування методів приводить до сингулярних [100]-[121] або

гіперсингулярних інтегральних рівняння [99]. Дискретизація виконується за допомогою алгоритму типу Найстрема.

Для аналізу графену також використовувались чисто аналітичні методи [122], [123], [124], які дозволяють отримати результати за набагато менший час, ніж чисельно-аналітичні або чисто числові методи. Проте мають дуже велику похибку, даючи можливість дослідити лише базові фізичні ефекти.

При дослідженні скінченного числа шарів, при збільшенні їх кількості, зростає розмірність матриці результуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Має сенс розділити складну структуру, складний об'єкт, на більш прості, і розглянути кожний з них окремо. Після чого, об'єднати складові частини в єдине ціле. На відміну від методів, в яких складний об'єкт розглядається цілком, цей підхід дозволяє скоротити розмірність матриці і, тим самим, скоротити час обчислень. Одним з таких методів є метод S-матриць. Застосування цього методу до графенових структур наведено, наприклад, в [77], [125]. В багатьох роботах метод S-матриць використовується для дослідження нескінченних періодичних решіток. В цьому випадку отримувані рівняння є матричними. Операторний метод, при використанні якого складний об'єкт розглядається як об'єднання більш простих, застосовувався у роботах [126]-[130], у яких отримано як матричні, так і інтегральні рівняння.

Варто зазначити, що в останні роки була розроблена модель графену, яка враховує просторову дисперсію та анізотропію, представляє провідність графену в тензорній формі і навіть як диференціальний оператор [86], [87], [131], [132], [133]. Проте з певними обмеженнями можна використовувати просту модель графену, коли його провідність описується скалярною функцією. Як показано в [132], за відсутності електричного накачування для власних хвиль хвилеводу, який складається з нескінченної графенової пластини, розміщеної на заземленій діелектричній пластині з відносною

діелектричною проникністю $\varepsilon=3.9$, похибка фазової сталої може досягати 4% для $f < 1$ ТГц, а похибка постійної ослаблення незначна.

Для ГГц діапазону просторовою дисперсією можна знехтувати. Як зазначається в [86], просторова дисперсія може впливати на характеристики графену для помірно високих частот ТГц діапазону. За відсутності електростатичного поля та з урахуванням просторової дисперсії провідність графену стає оператором, а у випадку магнітостатичного поля провідність графену є тензором [131].

У даній роботі розглядаються задачі дифракції. Графеновий хвилевод відсутній, а значить і власні хвилі графенового хвилеводу не збуджуються. Окрім плазмонних резонансів, у нашому випадку можуть виникати інші типи резонансів, які мало залежать від параметрів графенових стрічок. Також припускається, що застосовано лише електростатичне поле (без магнітостатичного). Розглядається діапазон частот до 8 ТГц. Тому просторовою дисперсією можна знехтувати. У випадку лише електростатичного поля, без просторової дисперсії та за відсутності магнітостатичного поля провідність графену описується скалярною функцією. Іншими словами, в терагерцевому діапазоні частот графен можна розглядати як нескінченно тонку поверхню зі скінченною комплексно значною провідністю. Провідність графену будемо визначати за формулою Кубо [84], [85], [86], [87]

$$\begin{aligned} \sigma(\omega, \mu_c, \tau, T) = & \frac{iq_e^2(\omega + i/\tau)}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{f_d(-\varepsilon) - f_d(\varepsilon)}{(\omega + i/\tau)^2 - 4(\varepsilon/\hbar)^2} d\varepsilon + \\ & + \frac{iq_e^2 k_b T}{\pi\hbar^2(\omega + i/\tau)} \left(\frac{\mu_c}{k_b \tau} + 2 \ln \left(\exp \left(-\frac{\mu_c}{k_b \tau} \right) + 1 \right) \right), \end{aligned} \quad (1.78)$$

де μ_c – хімічний потенціал, τ – час релаксації електронів, T – температура, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона, $k_b = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постійна Больцмана, $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постійна Планка, $f_d(\varepsilon)$ – розподіл Фермі-Дірака.

1.3.4.2. Нескінченна періодична графенова решітка

Збіжність наближеного розв'язку сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою (1.67), (1.69), (1.76), (1.77) до точного базується на відповідних теоремах [47], [48], [49]. Метод дискретних особливостей розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь забезпечує алгебраїчну швидкість збіжності наближеного розв'язку до точного при збільшенні розмірності матриці. Введемо відносну похибку коефіцієнта проходження за формулою $\varepsilon_p = |T(p) - T(2p)| / |T(2p)|$, де p – число вузлів або розмірність матриці після дискретизації сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою, T – коефіцієнт проходження за амплітудою. Залежності ε_p від p наведено на рис.1.29. Значення параметрів для кривих на рис.1.29 вибрано наступним чином: дві криві побудовано поблизу першого ($f = 2.88$ ТГц) і другого ($f = 5.88$ ТГц) плазмонних резонансів; для перевірки стійкості алгоритму при $\frac{\psi - \xi}{2} \rightarrow \pm\pi$ в ядрі рівняння, для третьої кривої вибрана ширина щілини практично рівною періоду, $d = 34.99$ мкм. Для порівняння, четверта крива побудована для довільної частоти $f = 1$ ТГц. Як видно з рис.1.29, кількість вузлів, які необхідно вибрати для отримання результатів з однаковою точністю, в основному визначається нормованою шириною стрічки, параметром kd : при збільшенні параметра kd необхідно збільшувати число вузлів. Нестійкості алгоритму при $\frac{\psi - \xi}{2} \rightarrow \pm\pi$ не спостерігається.

Досліджувана структура здатна підтримувати два типи резонансів. Резонанси на поверхневих плазмон-поляритонних хвилях або плазмонні резонанси, положення яких на частотній переважно пов'язано з характеристиками поодинокі графенової стрічки, такими як ширина або

провідність. Їх положенням на осі частот можна керувати за допомогою зміни хімічного потенціалу. Також в періодичних решітках можливе виникнення резонансів поблизу зон аномалій Релея-Вуда. Положення цих резонансів залежить від періоду решітки.

На рис.1.31 наведено залежності коефіцієнтів відбиття, проходження та поглинання (за потужністю) від частоти.

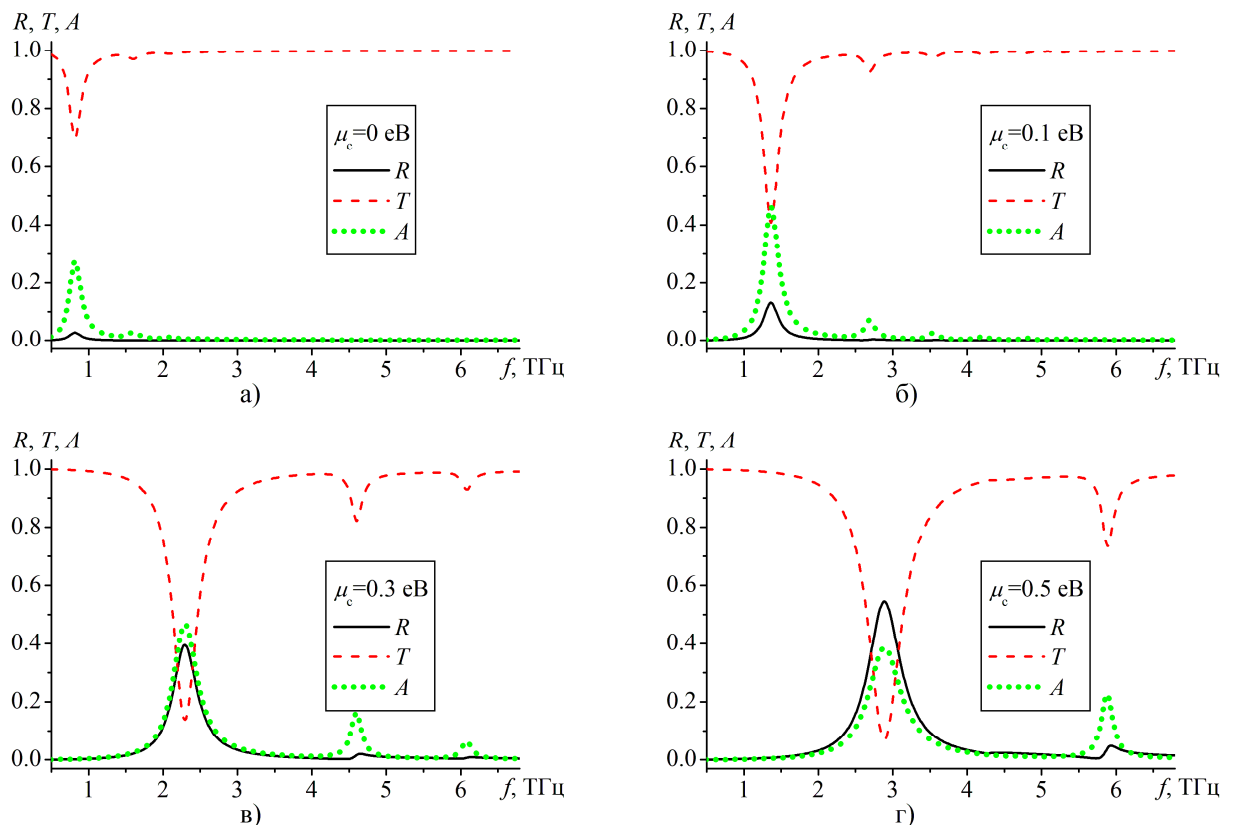


Рис.1.31 Залежність коефіцієнта відбиття (суцільні криві), проходження (штрихові криві) і поглинання (пунктирні криві) від частоти, $d = 10 \text{ мкм}$,

$l = 70 \text{ мкм}$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $T = 300 \text{ К}$, $\varphi_0 = 90^\circ$; а) $\mu_c = 0 \text{ eV}$, б) $\mu_c = 0.1 \text{ eV}$,

в) $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, г) $\mu_c = 0.5 \text{ eV}$.

Плазмонні резонанси виявляються набагато більше вираженими, ніж резонанси, пов'язані з аномаліями Релея-Вуда. Найбільше відбиття та поглинання спостерігається поблизу першого плазмонного резонансу, і з кожним наступної плазмонним резонансом, зі збільшенням частоти,

коефіцієнти відбиття та поглинання стають меншими. У діапазоні $\mu_c = 0.1 \div 0.5$ поблизу першого плазмонного резонансу поглинається приблизно 40% енергії падаючої хвилі. При збільшенні значень хімічного потенціалу спостерігається зсув положення плазмонних резонансів в бік більших значень частоти.

Для демонстрації особливостей поведінки поля на рис.1.32 наведено розподіл магнітного поля H_x поблизу частоти першого плазмонного резонансу $f = 2.88$ ТГц і аномалії Релея-Вуда $f = 4.285$ ТГц, $H_x(y, z) = H_x^s(y, z)$, при $z > 0$, $H_x(y, z) = H_x^i(y, z) + H_x^s(y, z)$, при $z < 0$. Поблизу частоти першого плазмонного резонансу пучності поля концентруються по одному на кожну стрічку, на відміну від частоти поблизу аномалії Релея-Вуда.

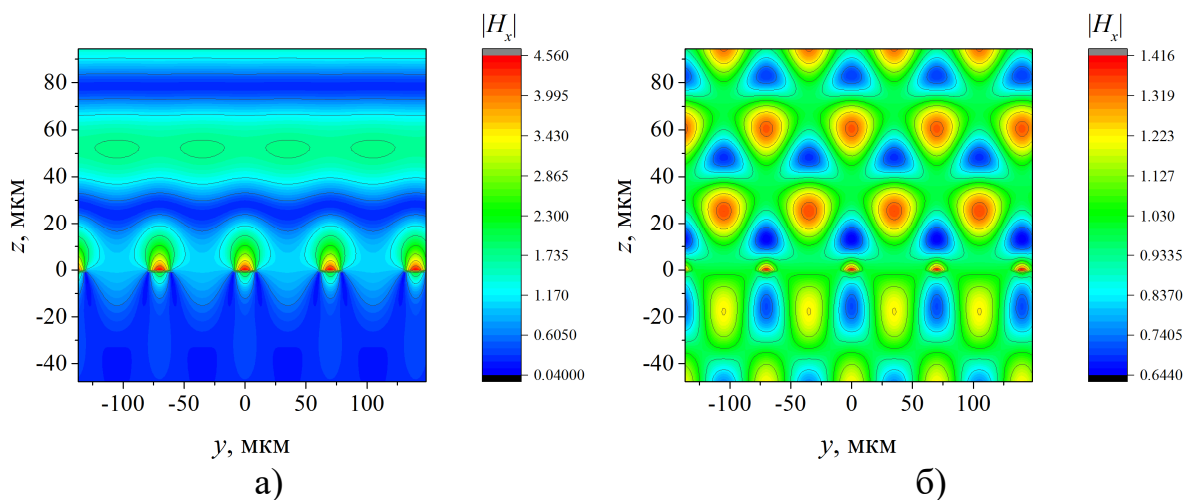


Рис.1.32 Розподіл поля $|H_x|$, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\mu_c = 0.5$ еВ, $\tau = 1$ пс,

$T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^0$; а) $f = 2.88$ ТГц, б) $f = 4.285$ ТГц.

1.3.4.3. Нескінченна періодична графенова решітка, розташована над ідеально провідною площиною

Отримане сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою (1.76), (1.77) для решітки над ідеально провідною площиною і його

дискретизація за допомогою методу дискретних особливостей дозволяють знайти розв'язок задачі з будь-яким наперед заданим ступенем точності. Точність обмежується лише машинною точністю. Водночас решітку над ідеально провідною площиною можна розглядати як два об'єкти, які взаємодіють один з одним: поодинокую нескінченну періодичну решітку і ідеально провідну площину. Тоді, використовуючи розв'язок сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою (1.67), (1.69) лише для поодинокій нескінченній періодичній решітці (без площини), можна записати операторні рівняння для решітки, розташованої над ідеально провідною площиною. Цей розв'язок представляє як самостійний інтерес, так і може використовуватися для верифікації результатів.

Запишемо операторні рівняння для визначення амплітуд Фур'є відбитого поля і поля між площиною і решіткою. Розв'язувати рівняння будемо в припущенні, що поширюється лише одна плоска хвиля, $kl \ll 2\pi$, і $\varphi_0 = 90^\circ$. У випадку нескінченної решітки операторні рівняння еквівалентні матричними. При введених же припущеннях, операторні рівняння стають скалярними.

Введемо оператори відбиття та проходження нескінченної періодичної решітки r , t . З огляду на те, що $t = 1 - r$, можуть бути записані рівняння, що зв'язують амплітуду Фур'є відбитого поля C і поля між площиною і решіткою D і E (див. рис.1.33):

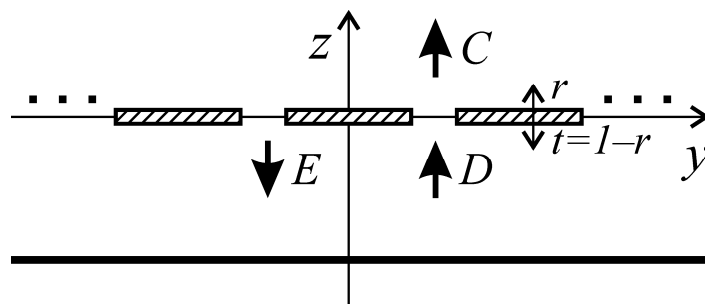


Рис.1.33 Нескінченна періодична решітка над ідеально провідною площиною. Напрямки поширення хвиль

$$C = r + teD = r + eD - reD, \quad (1.79)$$

$$E = t + reD = I - r + reD, \quad (1.80)$$

$$D = eE, \quad (1.81)$$

де оператор e має діагональну матрицю та визначає зміну амплітуди поля при зсуві системи координат на відстань h у напрямку поширення хвиль.

На рис.1.34 наведено залежності коефіцієнта відбиття (за потужністю) від частоти, отримані в результаті розв'язання сингулярного інтегрального рівняння (CIP) з додатковою умовою (1.76), (1.77) і рівнянь (1.79)-(1.81).

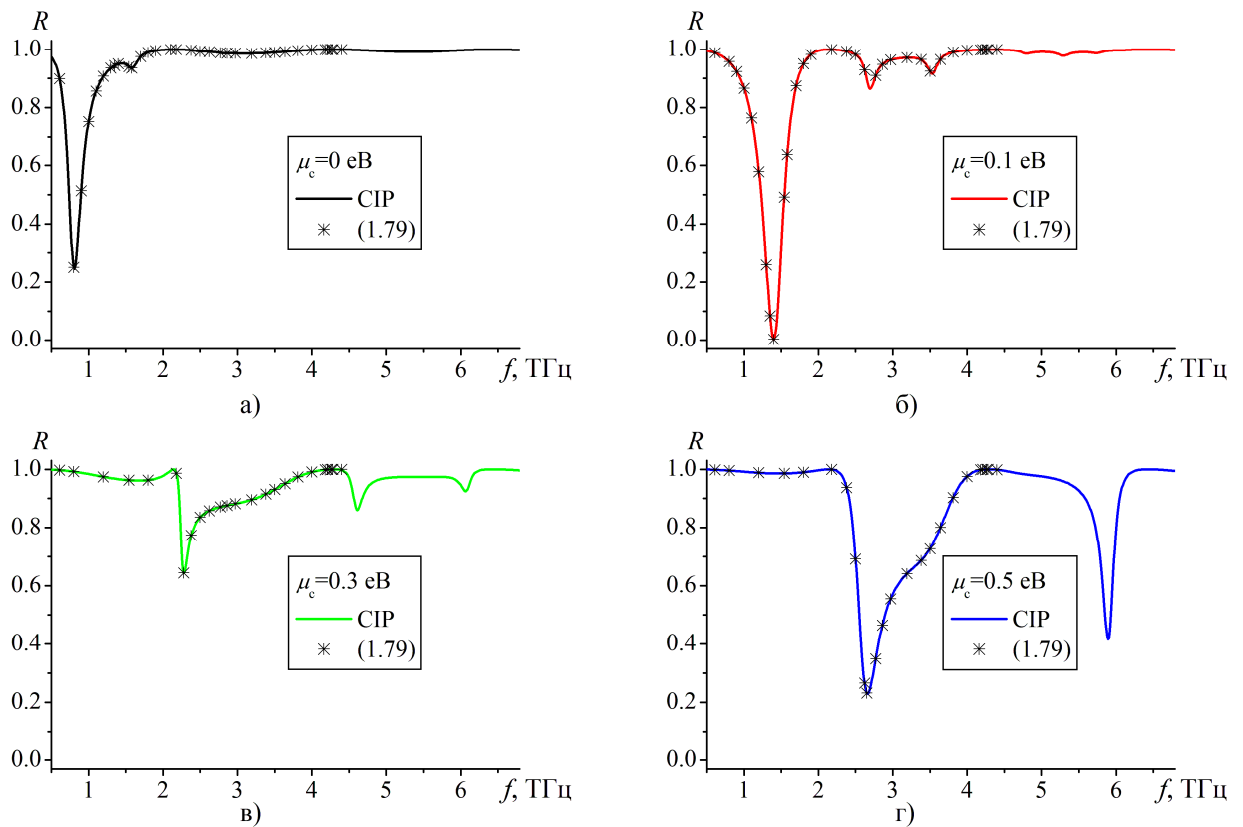


Рис.1.34 Залежність коефіцієнта відбиття від частоти, $d = 10$ мкм, $h = l = 70$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$; а) $\mu_c = 0$ eВ, б) $\mu_c = 0.1$ eВ, в) $\mu_c = 0.3$ eВ, г) $\mu_c = 0.5$ eВ. Метод сингулярних інтегральних рівнянь (суцільні криві) і операторний метод (зірочки)

Спостерігається співпадіння результатів з графічною точністю до значення частоти $kh \approx 2\pi$, починаючи з якого відбувається збудження ± 1 плоскої хвилі і скалярне наближення стає невірним.

На рис.1.35 наведено результати розрахунків коефіцієнта відбиття R (за потужністю) для нескінченної періодичної графенової решітки, розташованої над ідеально провідною площиною, для різних значень хімічного потенціалу μ_c і відстані між решіткою і площиною h .

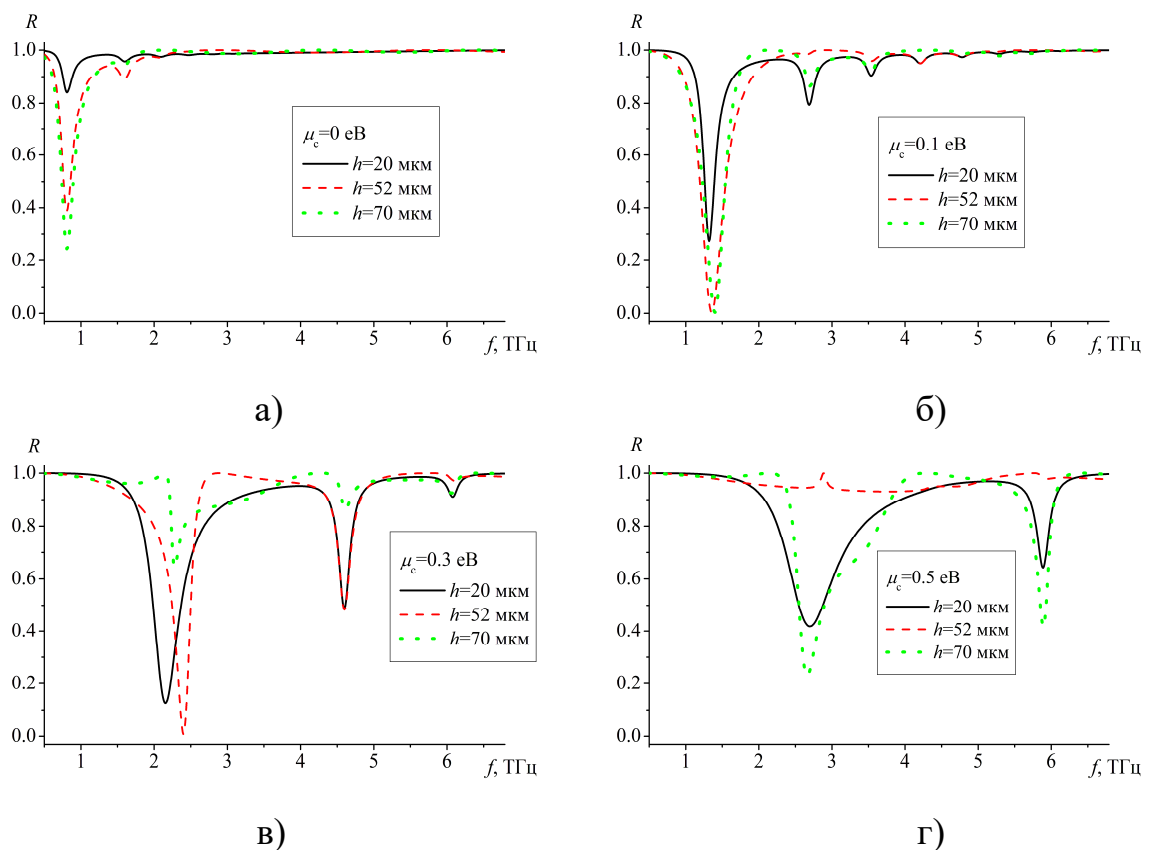


Рис.1.35 Залежність коефіцієнта відбиття від частоти при $h = 20$ мкм (суцільна крива), $h = 52$ мкм (штрихова крива), $h = 70$ мкм (пунктирна крива), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$; а) $\mu_c = 0$ eВ, б) $\mu_c = 0.1$ eВ, в) $\mu_c = 0.3$ eВ, г) $\mu_c = 0.5$ eВ.

Очевидно, що коефіцієнт поглинання пов'язано з коефіцієнтом відбиття як $A = 1 - R$. Тому на рис.1.35 наведена лише відбита енергія. У

випадку поодинокій решітці без ідеально провідної площини спостерігається істотне зростання поглинання лише поблизу плазмонних резонансів. У випадку ж решітки над ідеально провідною площиною при певних значеннях відстані h поглинання практично відсутнє у всій розглянутій смузі частот, включаючи зони поблизу плазмонних резонансів, де відбувається повне відбиття, $R \approx 1$ (дивись рис.1.35 г), $h = 52$ мкм). Водночас є значення відстані h , при яких спостерігається практично повне поглинання поблизу плазмонних резонансів $A = 1 - R \approx 1$ (дивись рис.1.35 б) і в). При зміні h спостерігається невелике зміщення плазмонних резонансів по частоті. На рис.1.36 наведено розподіл магнітного поля H_x в ближній зоні,

$$H_x(y, z) = \begin{cases} \exp(ik(\zeta_0 y + \gamma_0(z + h))) + H^s(y, z), & z > 0, \\ \exp(ik(\zeta_0 y - \gamma_0(z + h))) + \exp(ik(\zeta_0 y + \gamma_0(z + h))) + H^s(y, z), & 0 > z > -h, \\ 0 & z < -h, \end{cases}$$

на частоті поблизу плазмонного резонансу $f = 2.88$ ТГц. Між решіткою та площиною можливе збудження стоячих хвиль. При певному співвідношенні відстані між ними і довжиною хвилі виникає резонанс. Значення $h = 52$ мкм і відповідає цьому резонансу, при якому $R \approx 1$.

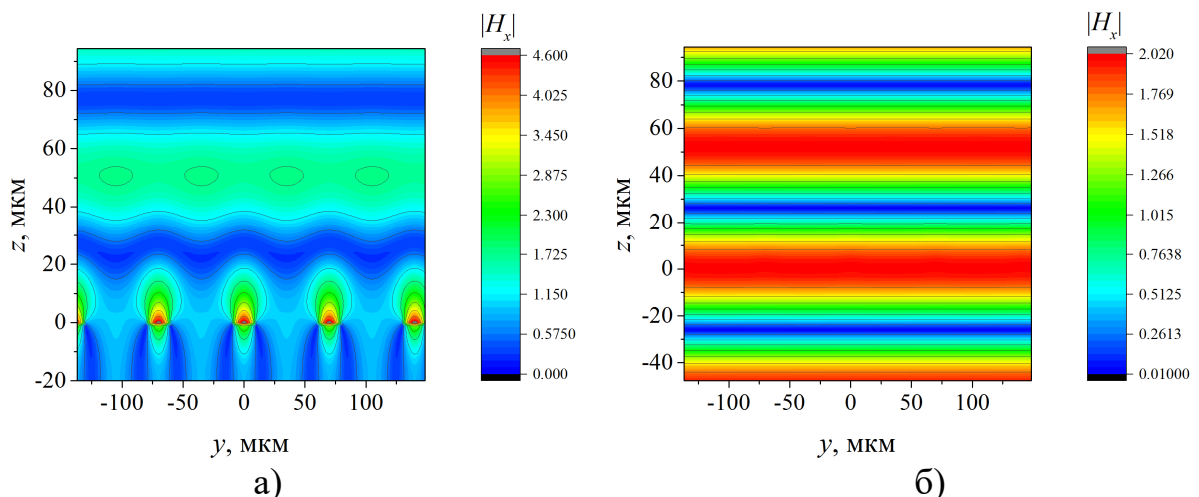


Рис.1.36 Розподіл поля (компонента $|H_x|$), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм,

$\mu_c = 0.5$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, $f = 2.88$ ТГц; а) $h = 20$ мкм,

б) $h = 52$ мкм.

Становить певний інтерес розглянути результати числового моделювання в гігагерцовому діапазоні. На рис.1.37, рис.1.38, рис.1.39 наведено залежності коефіцієнта відбиття від частоти для різних значень хімічного потенціалу, відстані між решіткою і площиною і ширини стрічок. Вигляд кривих подібний до кривих, побудованих для ТГц діапазону. Спостерігається наявність яскраво виражених максимумів. Проте, зміна хімічного потенціалу не призводить до помітного зсув максимумів вздовж осі частот, а призводить лише до зміни амплітуди. Зміна довжини стрічок і відстані між решіткою і площиною так само майже не призводить до зсуву максимумів вздовж частотної осі, а істотно впливає на амплітуду і вигляд залежностей. Це пояснюється зростанням другого доданку в правій частині провідності графену (1.78) при зменшенні частоти.

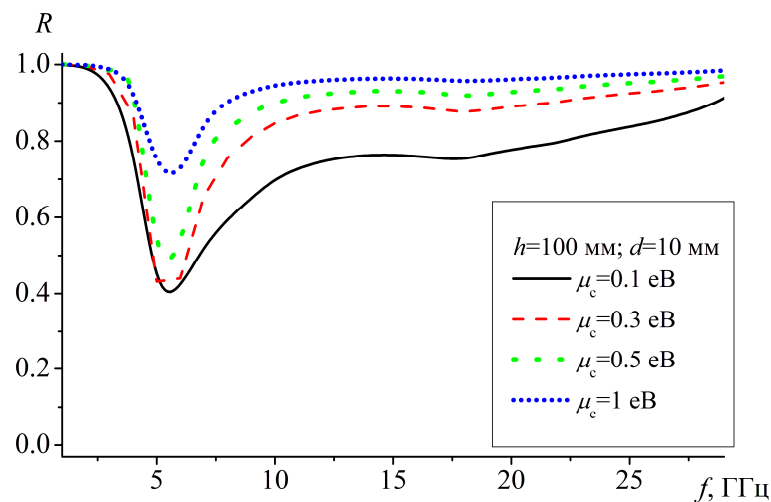


Рис.1.37 Залежність коефіцієнта відбиття від частоти при $\mu_c = 0.1\text{eV}$ (суцільна крива), $\mu_c = 0.3\text{eV}$ (штрихова крива), $\mu_c = 0.5\text{eV}$ (пунктирна крива), $\mu_c = 1\text{eV}$ (короткі точки), $h = 100\text{мм}$, $d = 10\text{мм}$, $l = 70\text{мм}$, $\tau = 1\text{пс}$, $T = 300\text{К}$, $\varphi_0 = 90^\circ$.

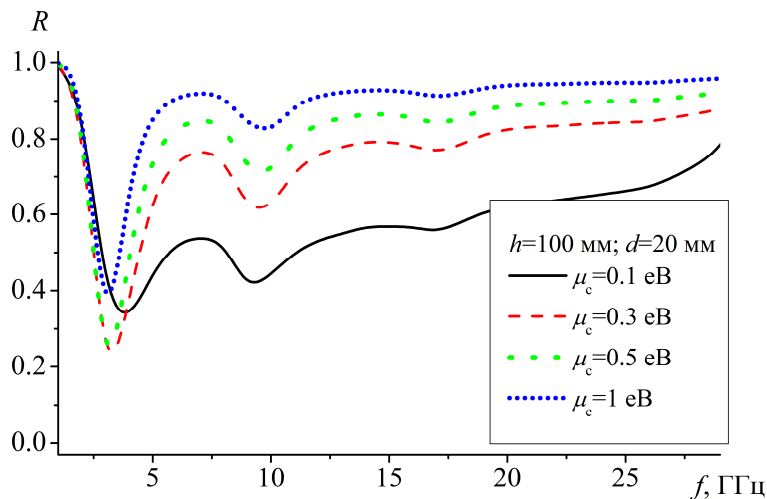


Рис.1.38 Залежність коефіцієнта відбиття від частоти при $\mu_c = 0.1\text{eV}$ (суцільна крива), $\mu_c = 0.3\text{eV}$ (штрихова крива), $\mu_c = 0.5\text{eV}$ (пунктирна крива), $\mu_c = 1\text{eV}$ (короткі точки), $h = 100\text{мм}$, $d = 20\text{мм}$, $l = 70\text{мм}$, $\tau = 1\text{пс}$, $T = 300\text{К}$, $\varphi_0 = 90^\circ$.

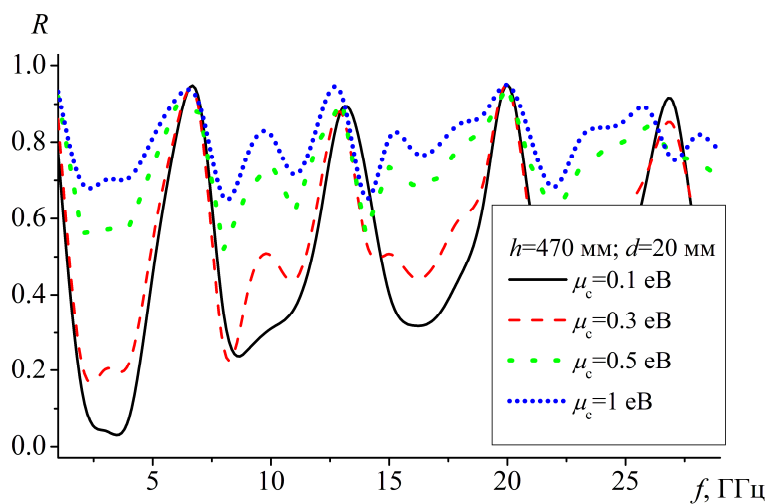


Рис.1.39 Залежність коефіцієнта відбиття від частоти при $\mu_c = 0.1\text{eV}$ (суцільна крива), $\mu_c = 0.3\text{eV}$ (штрихова крива), $\mu_c = 0.5\text{eV}$ (пунктирна крива), $\mu_c = 1\text{eV}$ (короткі точки), $h = 470\text{мм}$, $d = 20\text{мм}$, $l = 70\text{мм}$, $\tau = 1\text{пс}$, $T = 300\text{К}$, $\varphi_0 = 90^\circ$.

1.3.5. Поле корекції у випадку H -поляризації

Надамо алгоритм знаходження поля корекції у задачі про дифракцію на напівнескінченній плоскій стрічковій решітці. Спочатку припустимо, що стрічки є ідеально провідними.

1.3.5.1. Ідеально провідні стрічки

Поле корекції $H_x^{s,c}(y,z)$ будемо шукати як інтеграли Фур'є, які, з урахуванням умови неперервності електричного поля і граничної умови на ідеально провідних стрічках, мають вигляд:

$$\begin{aligned} H_x^{s,c}(y,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik(\xi y + \gamma(\xi)z)) d\xi, \quad z > 0, \\ H_x^{s,c}(y,z) &= - \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik(\xi y - \gamma(\xi)z)) d\xi, \quad z < 0, \end{aligned} \quad (1.82)$$

де $c(\xi)$ невідома амплітуда Фур'є поля корекції.

Позначимо y -координати множини стрічок напівнескінченної періодичної решітки як $L = \bigcup_{m=0}^{\infty} (-d + lm; d + lm)$. Після застосування граничних умов на стрічках і умов неперервності магнітного поля поза стрічками можна отримати наступні парні інтегральні рівняння:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (1.83)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \gamma(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y,0) + \frac{\partial}{\partial z} H_x^{s,inf}(y,0) \right) \equiv g(y), \quad y \in L, \quad (1.84)$$

де позначення правої частини через $g(y)$ введено для стислості.

Відмітимо, що згідно (1.39) $g(y)$ виражається через інтеграли, які мають не інтегровану особливість на інтервалі інтегрування при $y \in L$.

Перетворимо вираз для $g(y)$ так, щоб інтеграли не мали особливостей при $y \in L$. Для цього поле, розсіяне нескінченною ідеально періодичною решіткою, надамо як суму полів струмів, які течуть стрічками з номерами $m = 0, 1, 2, \dots$, тобто $H_x^{s,inf}(y, z)$, і стрічками з номерами $m = -1, -2, -3, \dots$,

$$H_x^{s,\infty}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} H_{x,m}^{s,inf}(y, z) + \sum_{m=-1}^{-\infty} H_{x,m}^{s,inf}(y, z).$$

З рівняння (1.41) випливає, що

$$\frac{\partial H_x^{s,\infty}(y, z)}{\partial z} = -\frac{\partial H_x^i(y, z)}{\partial z}, \quad y \in L.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, 0) + \frac{\partial}{\partial z} H_x^{s,inf}(y, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, 0) + \frac{\partial}{\partial z} H_x^{s,\infty}(y, 0) - \sum_{m=-1}^{-\infty} H_{x,m}^{s,inf}(y, z) = \\ &= -\sum_{m=-1}^{-\infty} H_{x,m}^{s,inf}(y, z), \quad y \in L. \end{aligned}$$

Тому остаточно, зважаючи на те, що густина струмів дорівнює стрибку магнітного поля,

$$\mu_m^\infty(y) = \begin{cases} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\zeta_n y), & |y_m| \leq d, \\ 0, & |y_m| > d, \end{cases}$$

отримаємо

$$g(y) = \frac{1}{2} \sum_{m=-1-d}^{-\infty} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\zeta_n(y'+lm)) \frac{H_1^{(1)}(k|y-y'-lm|)}{|y-y'-lm|} dy', \quad y \in L. \quad (1.85)$$

Інтеграл у $g(y)$ у вигляді (1.85) не мають особливостей при $y \in L$.

Зауважимо, що парні інтегральні рівняння (1.83), (1.84) мають той самий вигляд, як і у випадку скінченної стрічкової решітки [49]. Для того, щоб звести парні інтегральні рівняння (1.83), (1.84) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами введемо функцію [49]

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ik\xi c(\xi) \exp(iky\xi) d\xi, \quad (1.86)$$

яка з точністю до постійного множника дорівнює похідній густині струмів корекції на стрічках. З (1.83) випливає, що функція $F(y) = 0$, $y \in L$.

Використовуючи асимптотичний вираз $\gamma(\xi) \sim i\xi$, $\xi \rightarrow \infty$, представимо підінтегральну функцію у рівнянні (1.84) зліва у вигляді суми спадаючого і не спадаючого доданка. До не спадаючого доданка застосуємо оператор Гільберта на всій осі,

$$(P_{\infty}G)(y) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\xi)}{\xi - y} d\xi, \quad (1.87)$$

$$P_{\infty} : \exp(ik\xi\zeta) \mapsto i \operatorname{sgn}(nk) \exp(ik\zeta y).$$

Всі спадаючі доданки згрупуємо у ядро рівняння. В результаті отримаємо сингулярне інтегральне рівняння з додатковими умовами

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = ikg(y), \quad y \in L, \quad (1.88)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d}^d F(\xi + lm) d\xi = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.89)$$

Ядро рівняння має той самий вигляд, як і у випадку скінченної стрічкової решітки [49]

$$K(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta.$$

Спектральна функція поля корекції виражається через розв'язок сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (1.88), (1.89) за допомогою оберненого перетворення Фур'є, застосованого до (1.86)

$$c(\xi) = \frac{1}{2\pi i \xi} \int_L F(y) (\exp(-iky\xi) - 1) dy. \quad (1.90)$$

У підсумку, в результаті розв'язання сингулярного інтегрального рівняння (1.46), (1.48) з (1.43), (1.44) можна отримати розсіяне поле нескінченною ідеально періодичною стрічковою решіткою. Після чого, з (1.39) можна знайти вираз для $H_x^{s,inf}(y, z)$, а з (1.85) – вираз для правої частини сингулярного інтегрального рівняння для поля корекції (1.85).

Отримавши розв'язок сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (1.88), (1.89), з (1.90) – знайти амплітуду Фур'є поля корекції, а з (1.82) й саме поле корекції. З (1.38) можна знайти повне розсіяне поле напівнескінченною решіткою. Таким чином, задача про дифракцію H -поляризованої хвилі на напівнескінченній періодичній решітці з ідеально провідних стрічок є повністю розв'язаною.

1.3.5.2. Імпедансні стрічки

Отримаємо сингулярні інтегральні рівняння з додатковими умовами для поля корекції у випадку імпедансних стрічок нульової товщини. Поле корекції $H_x^{s,c}(y,z)$ шукаємо у вигляді інтегралів Фур'є (1.82). З умови неперервності дотичних компонент магнітного поля поза стрічками і граничної умови на стрічках (1.50), (1.52) впливають наступні парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \gamma(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi + \frac{2}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \\ & = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y,0) + \frac{\partial}{\partial z} H_x^{s,inf}(y,0) + \frac{i\omega\epsilon_0}{\sigma} (H_x^{s,inf}(y,z \rightarrow +0) - H_x^{s,inf}(y,z \rightarrow -0)) \right) \equiv \\ & \equiv g(y), \quad y \in L. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Як і у випадку ідеально провідних стрічок, інтеграли у $g(y)$ мають не інтегровану особливість при $y \in L$. Після проведення таких самих дій, як і у випадку ідеально провідних стрічок, $g(y)$ може бути зведено до вигляду (1.85) і не мати особливостей на шляху інтегрування при $y \in L$.

Парні інтегральні рівняння для поля корекції мають той самий вигляд, як і для скінченної решітки з імпедансних стрічок. Тому більш докладно

схему зведення парних інтегральних рівнянь до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами наведено у відповідному пункті. Тут лише вкажемо основні моменти.

Введемо функцію (1.86)

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ik\xi c(\xi) \exp(iky\xi) d\xi,$$

причому $F(y) = 0$, $y \in L$.

Помітимо, що виконується (1.90),

$$c(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi} \int_L F(y) (\exp(iky\xi) - 1) dy.$$

Використовуючи асимптотичний вираз для функції $\gamma(\xi)$: $\gamma(\xi) \sim i\xi$, при $\xi \rightarrow \infty$, і застосувавши оператор Гільберта (1.87) до не спадаючих доданків у правій частині (1.92), можемо отримати сингулярне інтегральне рівняння з додатковими умовами (1.88), (1.89) і ядром

$$K(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta + q(y, \xi),$$

$$q(y, \xi) = \begin{cases} \frac{2ik\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq y, \\ 0, & \xi > y. \end{cases}$$

Важливо підкреслити, що сингулярне інтегральне рівняння з додатковими умовами у випадку ідеально провідних стрічок і у випадку імпедансних стрічок, а також у випадку нескінченної періодичної решітки має однаковий вигляд. Тому можна застосовувати єдину процедуру його дискретизації.

1.3.6. Поле корекції у випадку E -поляризації

У випадку E -поляризації поле, розсіяне нескінченною ідеально періодичною решіткою з ідеально провідних стрічок, можна отримати,

використовуючи принцип дуальності, якщо розв'язок для випадку H -поляризації є відомим. Проте, для знаходження поля корекції принцип дуальності є незастосовним. Тому розглянемо алгоритм знаходження поля корекції у випадку E -поляризації. Припустимо, що стрічки є ідеально провідними.

Поле корекції шукаємо у вигляді інтегралу Фур'є

$$E_x^{s,c}(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik(\xi y + \gamma(\xi)|z|)) d\xi, \quad (1.93)$$

де $c(\xi)$ – невідома амплітуда Фур'є поля корекції. Поле у вигляді (1.93) задовольняє умові неперервності електричного поля і умові випромінювання.

Після виконання граничних умов на ідеально провідних стрічках і умов неперервності магнітного поля можна отримати наступні парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \gamma(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (1.94)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = -(E_x^i(y,0) + E_x^{s,inf}(y,0)) = g(y), \quad y \in L, \quad (1.95)$$

де $L = \bigcup_{m=0}^{\infty} (-d + lm; d + lm)$ – множина y -координат стрічок. Права частина (1.95) може бути перетворена до вигляду, у якому підінтегральні функції не мають особливостей на шляху інтегрування при $y \in L$

$$g(y) = \frac{\omega\mu_0}{2} \sum_{m=-\infty}^{-1} \exp(ik\zeta_0 lm) \int_{-d}^d H_y^{s,inf}(y',0) H_0^{(1)}(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + z^2}) dy', \quad y \in L. \quad (1.96)$$

У (1.96) була використана теорема Флоке та вираз для густини струмів $\mu_0^\infty(y)$ нескінченної ідеально періодичної решітки у випадку E -поляризації,

$$\mu_0^\infty(y) = \begin{cases} \frac{2}{i} H_y^{s,inf}(y,0), & |y| \leq d, \\ 0, & |y| > d. \end{cases}$$

З рівнянь Максвелла випливає, що тангенціальна компонента магнітного поля дорівнює

$$H_y^{s,inf} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x^{s,inf}}{\partial z}.$$

Діючи за тим самим алгоритмом, який застосовувався при отриманні сингулярного інтегрального рівняння для нескінченної ідеально періодичної решітки, можна отримати наступний вираз:

$$H_y^{s,inf}(y,0) = \frac{\exp(iky \sin \alpha)}{i\kappa Z} \left(\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K(\psi, \xi) F(\xi) d\xi - i\kappa\gamma_0 \right).$$

З умов на ребрі та з (1.94) випливає, що $c(\xi)$ може мати особливості при $\xi \rightarrow \pm 1$. Введемо функцію $c_1(\xi) = \gamma(\xi)c(\xi)$, яка не має особливостей при $\xi \rightarrow \pm 1$. Тоді парні інтегральні рівняння (1.94), (1.95) перепишуться у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_1(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (1.96)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1(\xi)}{\gamma(\xi)} \exp(ik\xi y) d\xi = g(y), \quad y \in L. \quad (1.97)$$

Продиференціюємо (1.97) по y . Отримаємо

$$ik \int_{-\infty}^{\infty} c_1(\xi) \frac{\xi}{\gamma(\xi)} \exp(ik\xi y) d\xi = g'(y). \quad (1.98)$$

Введемо нову невідому функцію

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} c_1(\xi) \exp(iky\xi) d\xi. \quad (1.99)$$

З (1.96) випливає, що $F(y) = 0$ при $y \notin L$. Після застосування оберненого перетворення Фур'є до (1.99) можемо виразити функцію $c_1(\xi)$ через $F(y)$:

$$c_1(\xi) = \frac{k}{2\pi} \int_L F(y) \exp(-iky\xi) dy. \quad (1.100)$$

Використовуючи асимптотичний вираз $\frac{\xi}{\gamma(\xi)} \sim -I \operatorname{sgn}(\xi)$, при $\xi \rightarrow +\infty$,

представимо підінтегральну функцію у (1.98) у вигляді спадаючого і не

спадаючого доданків. До не спадаючого доданка застосуємо оператор Гільберта (1.87). Спадаючі доданки згрупуємо у ядро. В результаті отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = \frac{i}{k} g'(y), \quad y \in L, \quad (1.101)$$

з ядром

$$K(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \sin(k\zeta(y - \xi)) \left(i - \frac{i\zeta}{\gamma(\zeta)} \right) d\zeta.$$

Сингулярне інтегральне рівняння (1.101) може мати не єдиний розв'язок [134]. Для єдності розв'язку необхідно сформулювати додаткові умови. На кожній стрічці виберемо довільну точку $y_m \in (-d + lm, d + lm)$ і підставимо у рівняння (1.97) замість y . З (1.100) підставимо $c_1(\xi)$ у (1.97). Після перетворень отримаємо додаткові умови у загальному вигляді

$$\frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) Q(y_m, \xi) d\xi = g(y_m), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (1.102)$$

де

$$Q(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\cos(k\zeta(y - \xi))}{\gamma(\zeta)} d\zeta.$$

1.3.7. Числові результати

1.3.7.1. Випадок H -поляризації

Дослідимо електродинамічні властивості напівнескінченної плоскої періодичної решітки з ідеально провідних стрічок у випадку падіння на неї плоскої H -поляризованої хвилі.

Для того, щоб отримати числові результати при застосуванні методу сингулярних інтегральних рівнянь, нескінченна множина стрічок L

замінювалась скінченною, $L_N = \bigcup_{m=0}^N (-d + lm; d + lm)$. Це означає, що припускалось, що струми корекції впливають лише на скінченну кількість стрічок, розташованих поблизу краю решітки.

Перш за все необхідно провести валідацію алгоритму. Для демонстрації швидкості збіжності обчислювалась відносна похибка струмів корекції

$$\varepsilon_M = \left| \frac{J_M^c - J_{2M}^c}{J_{2M}^c} \right|,$$

$$J_M^c = \int_L |U(y)|^2 dy,$$

де M – кількість вузлів на кожній стрічці. Залежність похибки ε_M від M наведена на рис.1.40.

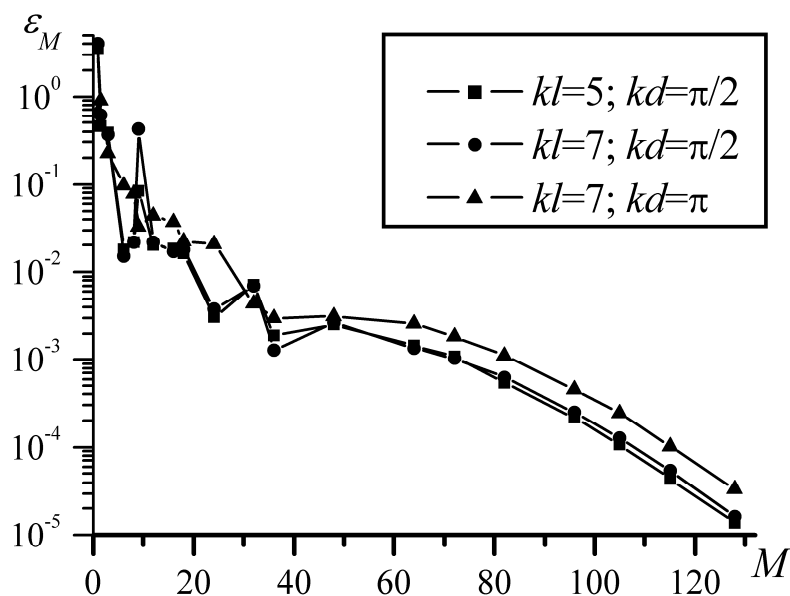


Рис.1.40 Залежність похибки від числа вузлів на кожній стрічці

Похибка спадає при збільшенні M , починаючи з певного значення. Результати, отримані методом сингулярних інтегральних рівнянь, порівнювалися з результатами, отриманими операторним методом (дивись параграф 1.2). На рис.1.41 наведено розподіл поля на відстані $z = 0.1\lambda$. Спостерігається співпадіння результатів з графічною точністю.

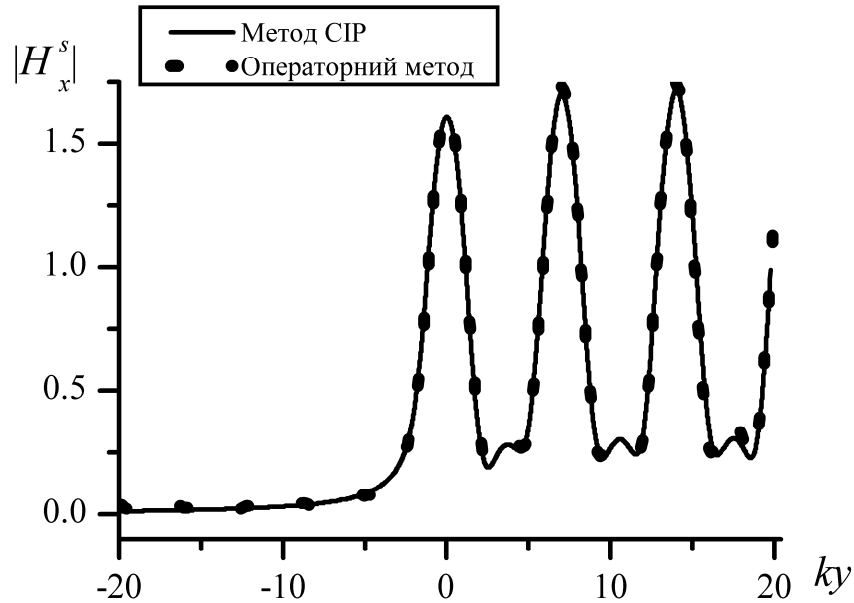


Рис.1.41 Розподіл поля при $z = 0.1\lambda$, $kd = \pi/2$, $kl = 7$. Метод сингулярних інтегральних рівнянь СІР (суцільна крива) і операторний метод (пунктирна крива)

Необхідно відмітити, що і розв'язок, отриманий методом сингулярних інтегральних рівнянь, і операторним методом є строгими. Тому за рахунок збільшення кількості вузлів можливо досягти співпадіння результатів з будь-яким наперед заданим ступенем точності, який обмежується лише комп'ютерною точністю.

Розглянемо поле у далекій зоні, а також поле у ближній зоні і густину струмів корекції. Поле, розсіяне нескінченною частиною напівнескінченної періодичної решітки можна подати як

$$\begin{aligned}
 H_x^{s,inf}(y,z) &= \frac{k \operatorname{sgn} z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\xi y + ik|z|\gamma(\xi))}{1 - \exp(ikl(\cos\varphi_0 - \xi))} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n - \xi)y') dy' d\xi = \\
 &= \frac{k \operatorname{sgn} z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^{inf}(\xi) \exp(ik\xi y + ik|z|\gamma(\xi))}{f(\xi)} d\xi,
 \end{aligned}$$

де введено позначення

$$c^{inf}(\xi) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\sin(kd(\zeta_n - \xi))}{kl(\zeta_n - \xi)},$$

$$f(\xi) = 1 - \exp(ikl(\cos\varphi_0 - \xi)).$$

Як зазначалось у параграфі 1.1, поле у далекій зоні, $k\rho \gg 1$, можна подати як суму трьох доданків (1.23). Їх явний вигляд наведено у додатку Б.

На рис.1.42 і рис.1.43 наведено діаграми спрямованості $D(\varphi, \rho) = |H_x^{erfc}(\varphi, \rho) + H_x^{s,c}(\varphi, \rho)|$ і $H_x^{s,c}(\varphi, \rho)$ на відстані $k\rho = 30$ для різних значень періоду і ширини стрічок. Для порівняння розв'язок Кірхгофа ($H_x^{s,c}(\varphi, \rho) \equiv 0$) також наведено на рис.1.42.

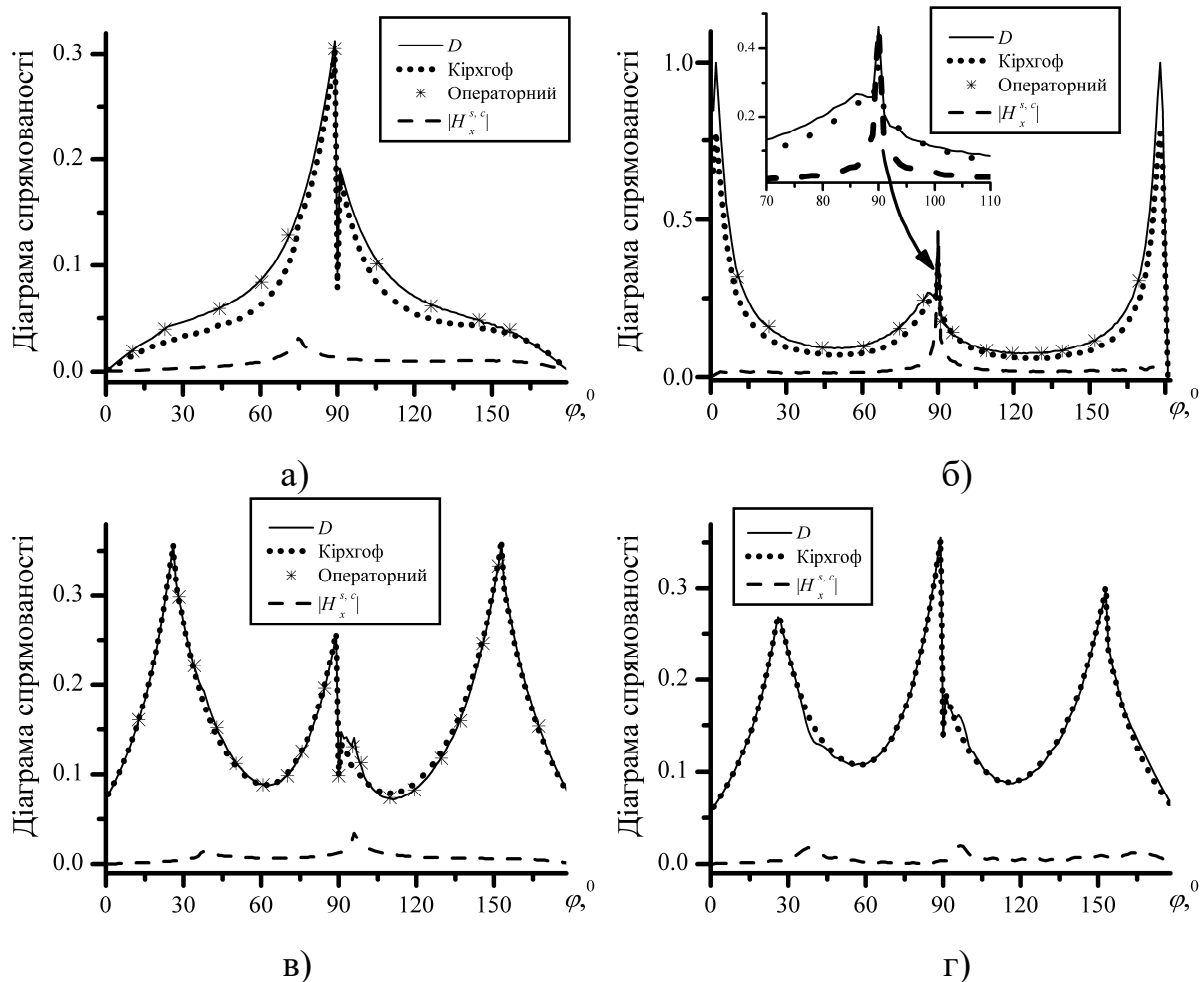


Рис.1.42 Діаграми спрямованості при $k\rho = 30$. $D(\rho, \varphi)$ (суцільні криві), розв'язок Кірхгофа (пунктирні криві), $|H_x^{s,c}|$ (штрихові криві). Результати, отримані операторним методом, наведено у вигляді зірочок. а) $kd = \pi/2$, $kl = 5$, б) $kd = \pi/2$, $kl = 2\pi$, в) $kd = \pi/2$, $kl = 7$, г) $kd = \pi$, $kl = 7$

На кожній стрічці вибиралась кількість вузлів $M = 15$, $N = 50$. Для обчислення $g(y)$ вибиралось 9 вузлів і 1000 доданків. Таким чином, розмір матриці становить 750×750 . Загальний час розрахунку методом сингулярних інтегральних рівнянь склав приблизно 45 хвилин для рис.1.42 а). При використанні операторного методу у пам'яті комп'ютера зберігалось сім матриць розміром 1457×1457 кожна. Загальна кількість ітерацій становила 3, а загальний час розрахунку операторним методом становив приблизно 55 хвилин для рис.1.42 а). У особливому випадку, коли $kl = 2\pi$ ($l = \lambda$), вибиралось $N = 150$. Ядра сингулярних інтегральних рівнянь обчислюються з похибкою менше 10^{-5} . Графіки нормовані на максимальне значення для $kd = \pi/2$, $kl = 2\pi$. Ширина стрічки $kd = \pi/2$ ($2d = \lambda/2$) і $kd = \pi$ ($2d = \lambda$) відноситься до резонансної області.

При $kl < 2\pi$ спостерігається наявність одного головного пелюстка у діаграмах спрямованості. Випадок $kl = 2\pi$ ($l = \lambda$) відповідає режиму аномалій Релея-Вуда. При цих значення періоду збуджуються моди Флоке. Для скінченної структури цей режим призводить до збудження витікаючих хвиль. З'являється додатковий пелюсток поблизу площини решітки, $\varphi = 0^\circ$. У цьому випадку спостерігається значне зростання амплітуди поля $H_x^{s,c}(\varphi, \rho)$, особливо поблизу напрямків поширення мод Флоке $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 90^\circ$ і $\varphi = 180^\circ$. Важливо підкреслити, що у діаграмах спрямованості присутні розриви у кутах, які співпадають з напрямками поширення мод Флоке. Проте повне відбите поле не містить розривів, оскільки тут ще додається поле мод Флоке $H_x^F(\varphi, \rho)$. Для підтвердження отриманих результатів на рис.1.42 також наведено у вигляді зірочок результати, отримані операторним методом. Спостерігається співпадіння з графічною точністю.

На рис.1.44 і рис.1.45 наведено розподіл поля $|H_x^{s,c}(y, z)|$ і $|H_x^s(y, z)|$ в площині напівнескінченної решітки, $z = 0$.

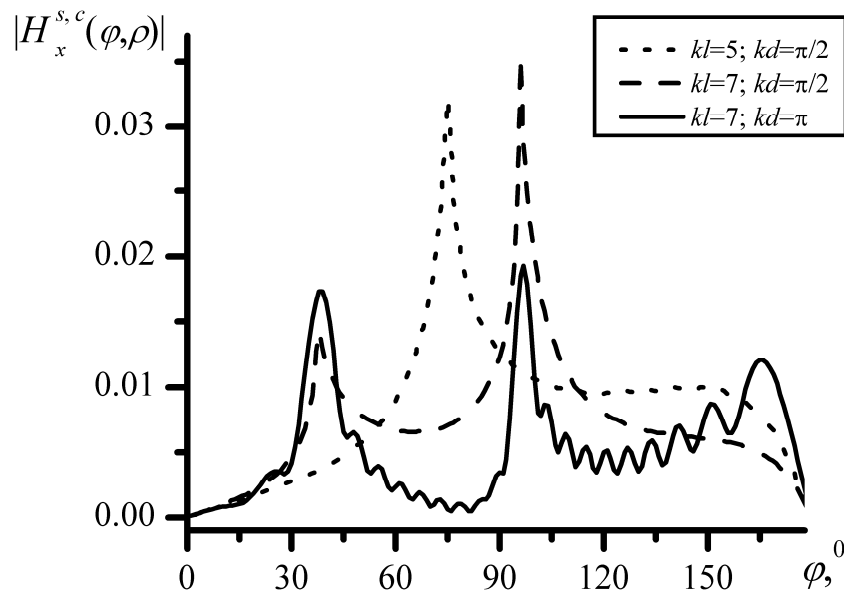


Рис.1.43 Діаграми спрямованості поля корекції при $k\rho = 30$, $kl = 5$, $kd = \pi/2$ (пунктирна крива), $kl = 7$, $kd = \pi/2$ (штрихова крива), $kl = 7$, $kd = \pi$ (суцільна крива)

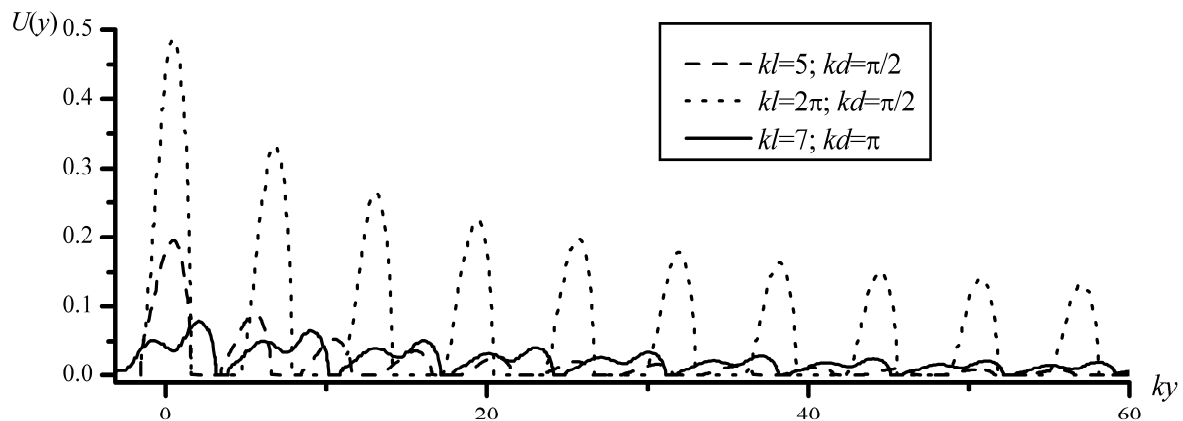
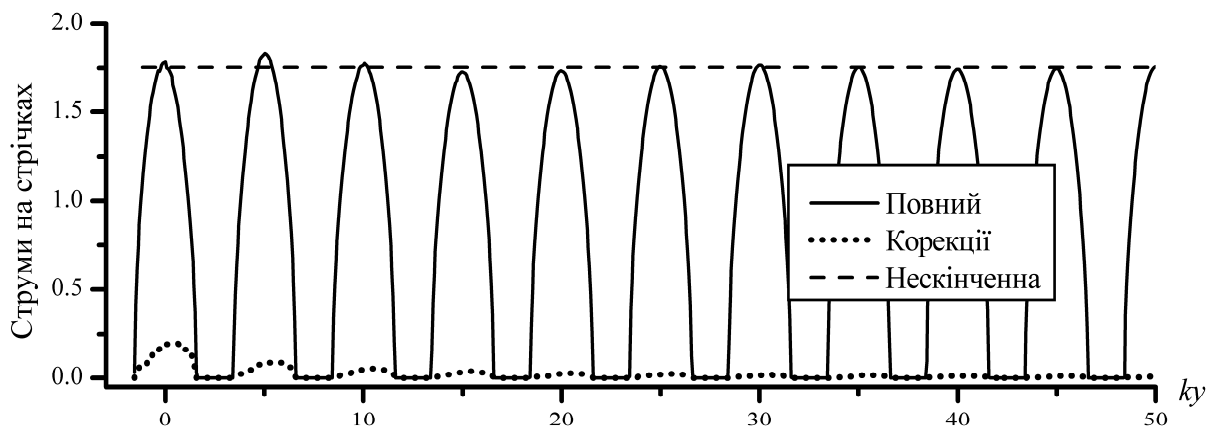


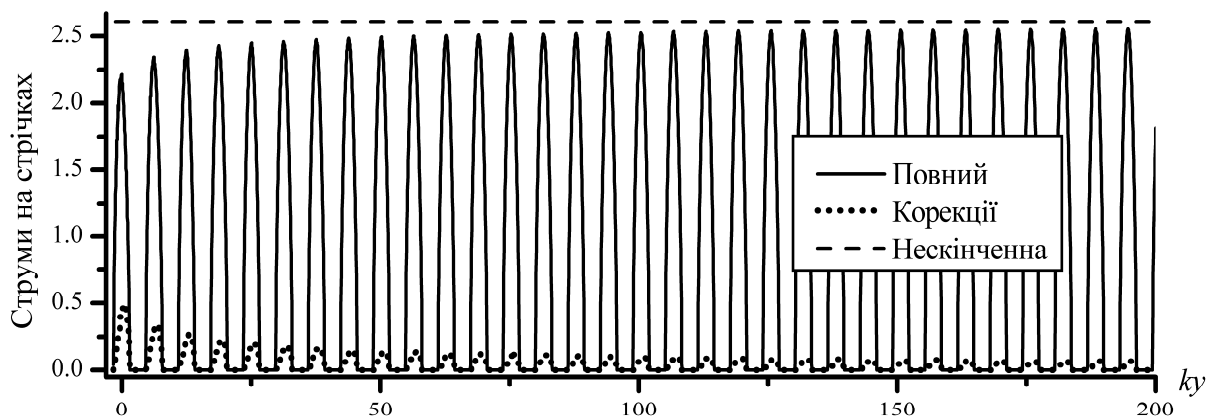
Рис.1.44 Розподіл поля $|H_x^{s,c}(y, z)|$ в площині решітки, $z = 0$, при $kl = 5$, $kd = \pi/2$ (штрихова крива), $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$ (пунктирна крива), $kl = 7$, $kd = \pi$ (суцільна крива)

З точністю до постійного множника поле $H_x^{s,c}(y, 0) = U(y)$, $U(y) = \int_{-\infty}^y F(\xi) d\xi$, дорівнює густині струмів корекції, а $H_x^s(y, z)$ – дорівнює з точністю до постійного множника повній густині струмів. Для отримання плавних кривих вибиралось $M = 50$. Максимум спостерігається поблизу

середини стрічок при $kd = \pi/2$. При $kd = \pi$ на кожній стрічці спостерігається два максимуми функції $|H_x^{s,c}(y,z)|$. Струм корекції є відносно великим поблизу краю напівнескінченної решітки. Зі збільшенням значення координати y амплітуда струму корекції зменшується. У випадку, коли $kl = 2\pi$, струм корекції поширюється на більшу частину решітки. Поле нескінченної ідеально періодичної решітки $H_x^{s,inf}(y,0)$ в центрі стрічок, $y = lm$, наведено штриховою прямою.



а)



б)

Рис.1.45 Розподіл поля $|H_x^{s,c}(y,z)|$ (пунктирна крива), $|H_x^s(y,z)|$ (суцільна крива), $H_x^{s,inf}(lm,z)$ (штрихова горизонтальна лінія) в площині решітки, $z = 0$,

$kd = \pi/2$. а) $kl = 5$; б) $kl = 2\pi$

Для кількісного визначення впливу струмів корекції введемо величину $J^c = \int_L |U(y)|^2 dy$, яка дозволяє оцінити внесок ефекту краю [11], [135]. На рис.1.46 наведено залежність J^c від періоду l . Взаємодія стрічок у плоскій стрічковій решітці є слабкою, а зі збільшенням періоду l стає незначною за винятком значень, що відповідають збудженню мод Флоке. Значне збільшення густини струмів корекції відбувається поблизу області аномалій Релея-Вуда, при $l = m\lambda$ для $\varphi_0 = 90^\circ$ (див. також рис.1.42 б).

Розподіл ближнього поля, компонента $\text{Re}(H_x^s(y,z))$, наведено на рис.1.47. Добре видно, що від решітки поширюються два типи хвиль. Однією з них є плоска хвиля, яка існує лише в області $y > 0$ ($\varphi > 90^\circ$). Інша – циліндрична хвиля, яка збуджується через наявність краю. Пряма $y = 0$ являє собою границю тіні.

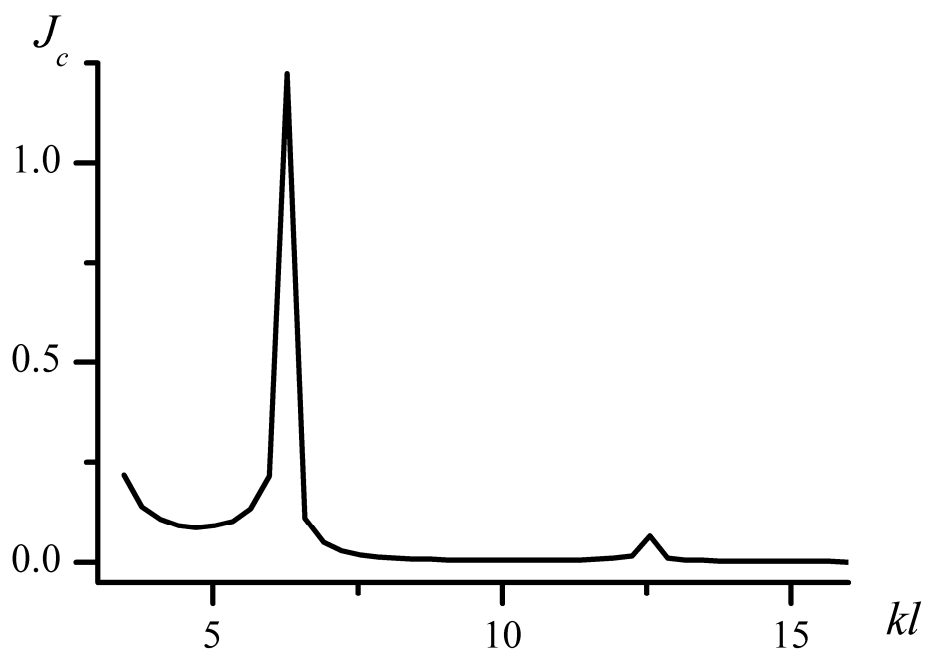


Рис.1.46 Вплив струму корекції, залежність J^c від періоду l при $kd = \pi/2$

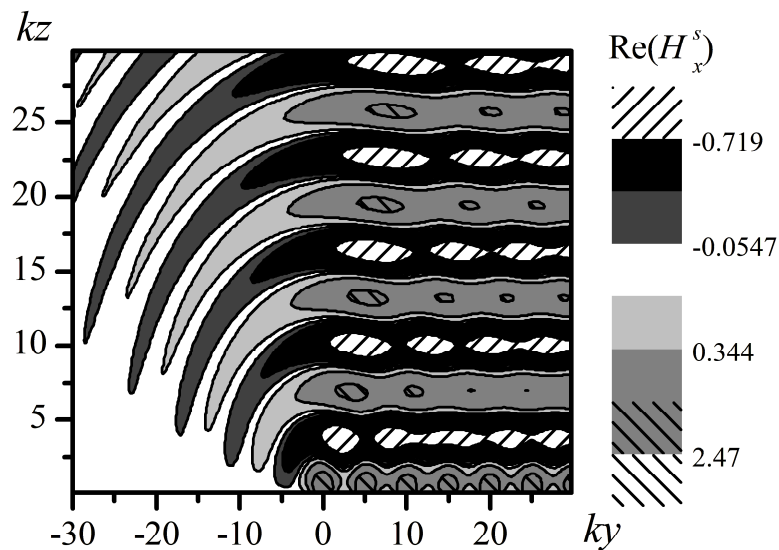


Рис.1.47 Розподіл поля $\text{Re}(H_x^s(y,z))$ при $kd = \pi/2$, $kl = 5$

1.3.7.2. Випадок E -поляризації

Запишемо вирази для поля в далекій зоні і струму корекції у випадку E -поляризації. Як і у випадку H -поляризації (1.23), поле в далекій зоні можна представити у вигляді суми трьох доданків

$$E_x^s(\varphi, \rho) \cong E_x^F(\varphi, \rho) + E_x^{s,c}(\varphi, \rho) + E_x^{erfc}(\varphi, \rho), \quad k\rho \rightarrow \infty.$$

Їх явний вигляд наведено у додатку Б.

Розв'язок сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (1.101), (1.102), функція $F(y)$, є з точністю до постійного множника $(2/Z)$ густиною струму корекції на стрічках. Таким чином, для оцінки густини струму корекції можемо використовувати функцію $F(y)$. Згідно з умовами на ребрі, густина струму має особливість кореневого типу поблизу краю стрічок. Для опису поведінки струму корекції введемо функцію

$$J_c(y) = \sqrt{(y - (-d + lm))(d + lm - y)} F(y),$$

$$y \in (-d + lm; d + lm), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Для перевірки отриманих результатів порівняємо їх з результатами, отриманими методом моментів у припущенні одномодового розподілу струму на стрічках [11]. Для кращого візуального порівняння з результатами, отриманими в [11], введемо коефіцієнт J_n^c , який є точністю до постійного множника є густиною струмів корекції в центрі n -ї стрічки, $y = y_n = l \cdot n$,

$$J_n^c = \frac{d}{Z\pi} J_c(y_n).$$

Поле в далекій зоні без врахування гармонік Флоке позначимо як

$$D(\varphi, \rho) = E_x^{efc}(\varphi, \rho) + E_x^{s,c}(\varphi, \rho).$$

Результати розрахунків розподілу J_n^c наведено на рис.1.48, а діаграми спрямованості – на рис.1.49. Як видно, результати співпадають з графічною точністю що дозволяє зробити висновок о вірності алгоритму.

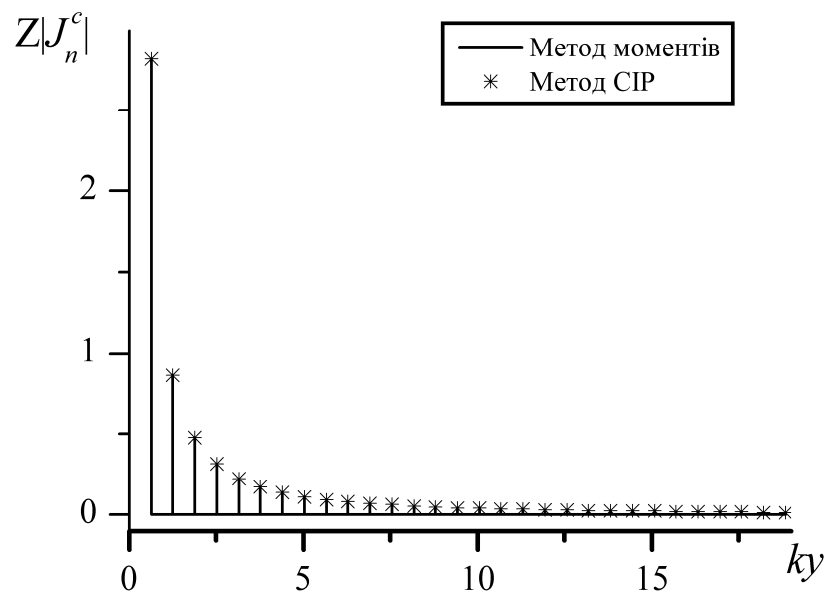


Рис.1.48 Залежність $|J_n^c|$ від y при $kl = \pi/5$ ($l = \lambda/10$), $kd = \pi/20$ ($2d = \lambda/20$), $\varphi_0 = 90^\circ$. Метод сингулярних інтегральних рівнянь (зірочки) та метод моментів [11] (суцільна крива)

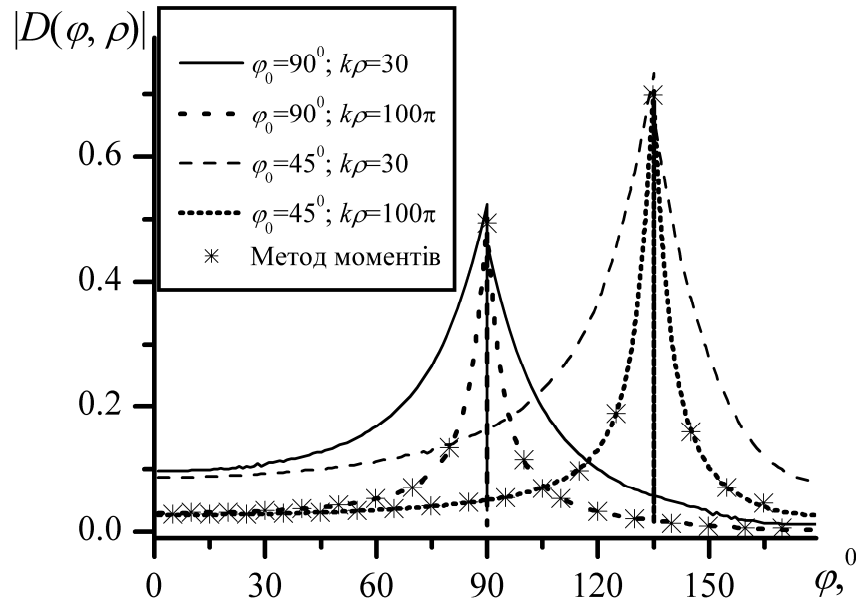


Рис.1.49 Діаграми спрямованості при $kl = \pi/5$ ($l = \lambda/10$), $kd = \pi/20$ ($2d = \lambda/20$) для двох різних кутів падіння, $\varphi_0 = 90^\circ$ і $\varphi_0 = 45^\circ$, двох різних відстаней від решітки до точки спостереження, $k\rho = 30$ і $k\rho = 100\pi$. Для порівняння у вигляді зірочок наведені результати, отримані методом з [11]

Позначимо кількість вузлів у методі дискретних особливостей на кожній стрічці як M . Припускаємо, що край напівнескінченної структури впливає на скінченне число стрічок N . Замінімо нескінченну множину стрічок L скінченною $L_N = \bigcup_{m=0}^N (-d + lm; d + lm)$. Введемо функцію, яка визначає вплив струмів корекції

$$J^c = \int_L |J_c(y)|^2 dy.$$

На рис.1.50 а) наведено залежності відносної похибки струму корекції, $\varepsilon_M = \left| \frac{J^c(M) - J^c(2M)}{J^c(2M)} \right|$, від M , а на рис.1.50 б) наведено залежності відносної похибки струму корекції, $\varepsilon_N = \left| \frac{J^c(N) - J^c(2N)}{J^c(2N)} \right|$, від N .

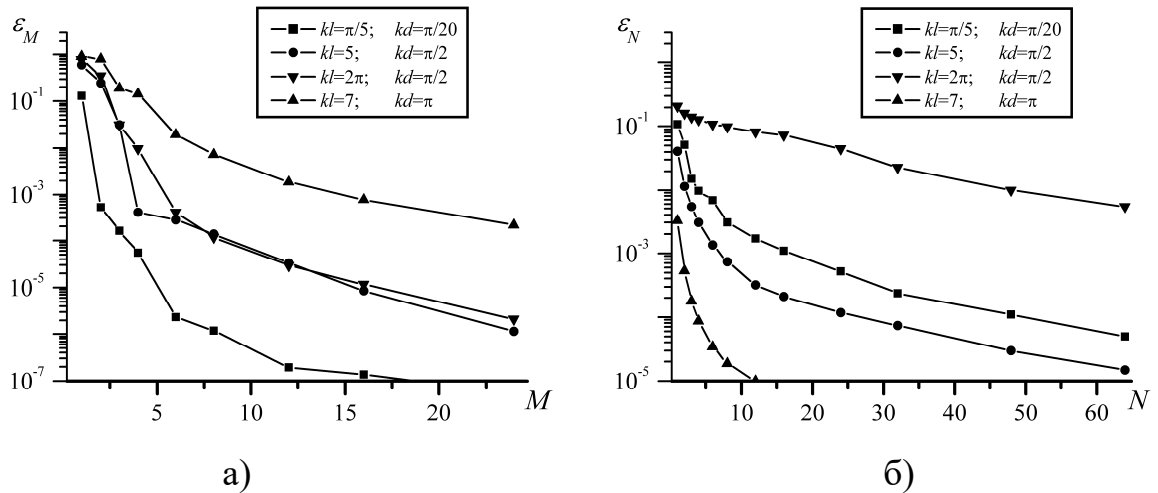


Рис.1.50 Відносна похибка. а) ε_M як функція кількості вузлів на кожній стрічці, б) ε_N як функція кількості стрічок, які враховувались

Збіжність процесу забезпечується теоремами [48]. Значення параметра $kd = \pi/2$ відповідає резонансній області, ширина стрічки дорівнює половині довжини хвилі, $2d = \lambda/2$. Значення параметру $kl = 2\pi$ ($l = \lambda$) відповідає частоті збудження ± 1 гармонік Флоке. Очевидно, що чим більшою є ширина стрічки, тим більше необхідно вибрати вузлів інтерполяції. Найбільша похибка ε_N , як і очікувалось, спостерігається поблизу частоти збудження вищих гармонік Флоке.

На рис.1.51 наведено діаграми спрямованості, характеристики полів у далекій зоні, індукованих струмами корекції та повним струмом на відстані $k\rho = 100\pi$ ($\rho = 50\lambda$) для різних значень періоду та ширини стрічок. Для порівняння, розв'язок Кірхгофа ($E_x^{s,c}(\varphi, \rho) \equiv 0$) також показано на рис.1.51. Діаграми нормуються на максимальне значення для $kd = \pi/2$, $kl = 2\pi$. Максимуми в діаграмах спостерігаються поблизу кутів поширення гармонік Флоке. Криві для $D(\varphi, \rho)$ можуть мати розриви. При цьому повне розсіяне поле є неперервним, оскільки до нього додається доданок $E_x^F(\varphi, \rho)$.

У випадку скінченних решіток, у випадку E - поляризації, витікаючі хвилі, які поширюються поблизу кутів $\varphi = 0^\circ$ і $\varphi = 90^\circ$, виникають не тільки

при $l = n \cdot \lambda$, $n = 1, 2, \dots$, а при довільних співвідношеннях періоду і частоти. Випадок $l = n \cdot \lambda$, $n = 1, 2, \dots$, відповідає аномалії Релея-Вуда. Тут спостерігається збудження вищих гармонік Флоке. На рис.1.51 б) наведено випадок поблизу першої аномалії Релея-Вуда, $l = \lambda$. Крім того, обрана резонансна ширина стрічок $2d = \lambda/2$. Тут спостерігається значне зростання інтенсивності поля корекції поблизу площини решітки. Наявність витікаючих хвиль призводить до появи додаткових максимумів поблизу площини напівнескінченної решітки.

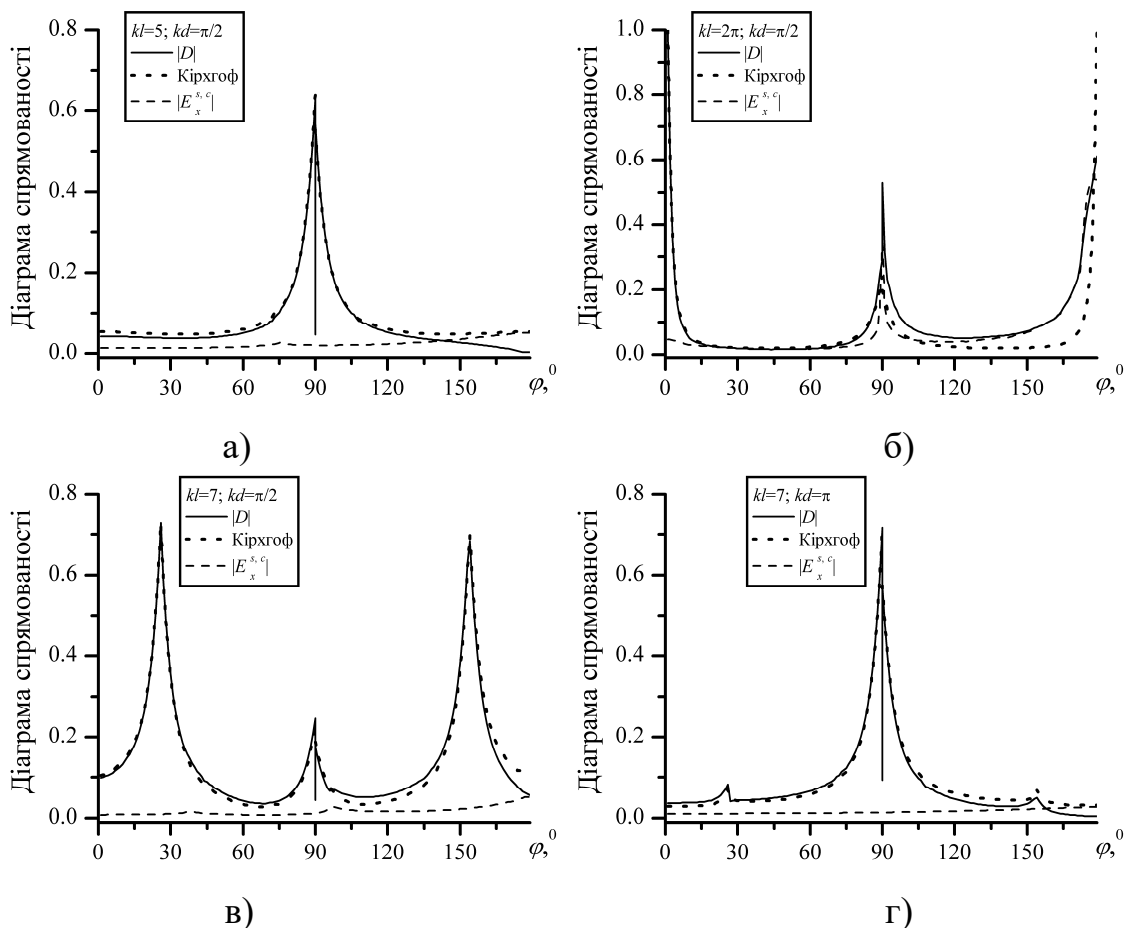


Рис.1.51 Діаграми спрямованості при $k\rho = 100\pi$ ($\rho = 50\lambda$). Функція $|D(\rho, \varphi)|$ (суцільні криві), розв'язок Кірхгофа (пунктирні криві) та поле корекції (штрихові криві). а) $kl = 5$, $kd = \pi/2$ ($2d = \lambda/2$), б) зона поблизу аномалії Релея-Вуда $kl = 2\pi$ ($l = \lambda$), $kd = \pi/2$ ($2d = \lambda/2$), в) $kl = 7$, $kd = \pi/2$ ($2d = \lambda/2$), г) $kl = 7$, $kd = \pi$ ($2d = \lambda$)

Відомо [33], що у випадку E -поляризації, на відміну від випадку H -поляризації, коли параметри решітки виявляються близькі до аномалії Релея-Вуда, взаємодія стрічок у регулярній нескінченній періодичній решітці слабка. Коефіцієнт відбиття нескінченної періодичної решітки набагато менший, ніж у випадку H -поляризації. Така ситуація була описана в [136], [137], коли з нескінченної решітки була видалена одна зі стрічок. Інша картина спостерігається у випадку напівнескінченної решітки. Діаграми спрямованості, наведені на рис.1.51 показують, що в розсіяному полі поблизу області аномалій Релея-Вуда спостерігається нерегулярність.

Результати, надані на рис.1.52 і рис.1.53 дозволяють зробити висновок про вплив краю напівнескінченної решітки. На цих рисунках наведено розподіл струму корекції на стрічках та залежність J^c від періоду l . Як і очікувалось, струм корекції наближається до нуля вдалині від краю напівнескінченної решітки. Максимуми J^c з'являються поблизу зон аномалій Релея-Вуда. Така ж ситуація спостерігається і у випадку H -поляризації.

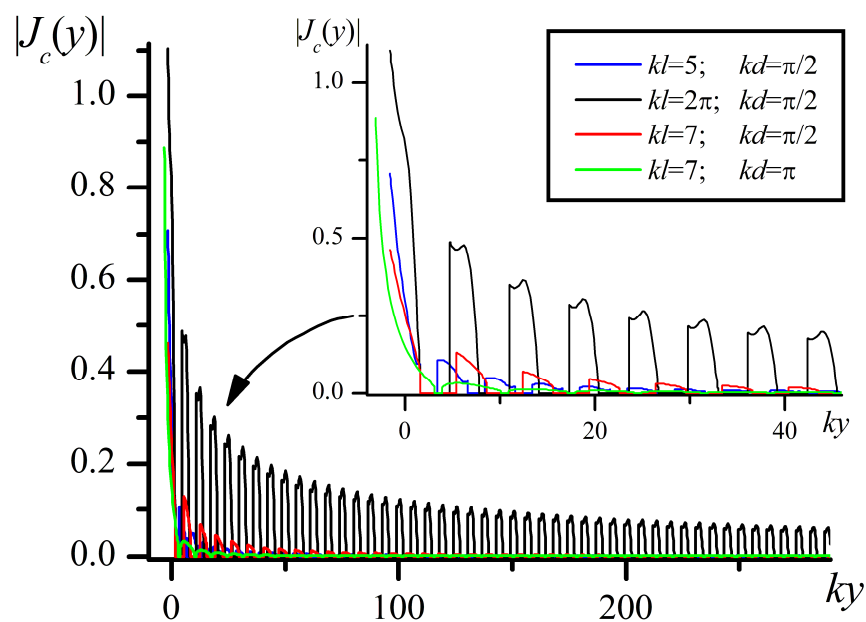


Рис.1.52 Залежність розподілу струму $|J_c(y)|$ від y , $kl = 5$, $kd = \pi/2$ (синя крива), зона поблизу аномалії Релея-Вуда, $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$ (чорна крива), $kl = 7$, $kd = \pi/2$ (красна крива), $kl = 7$, $kd = \pi$ (зелена крива)

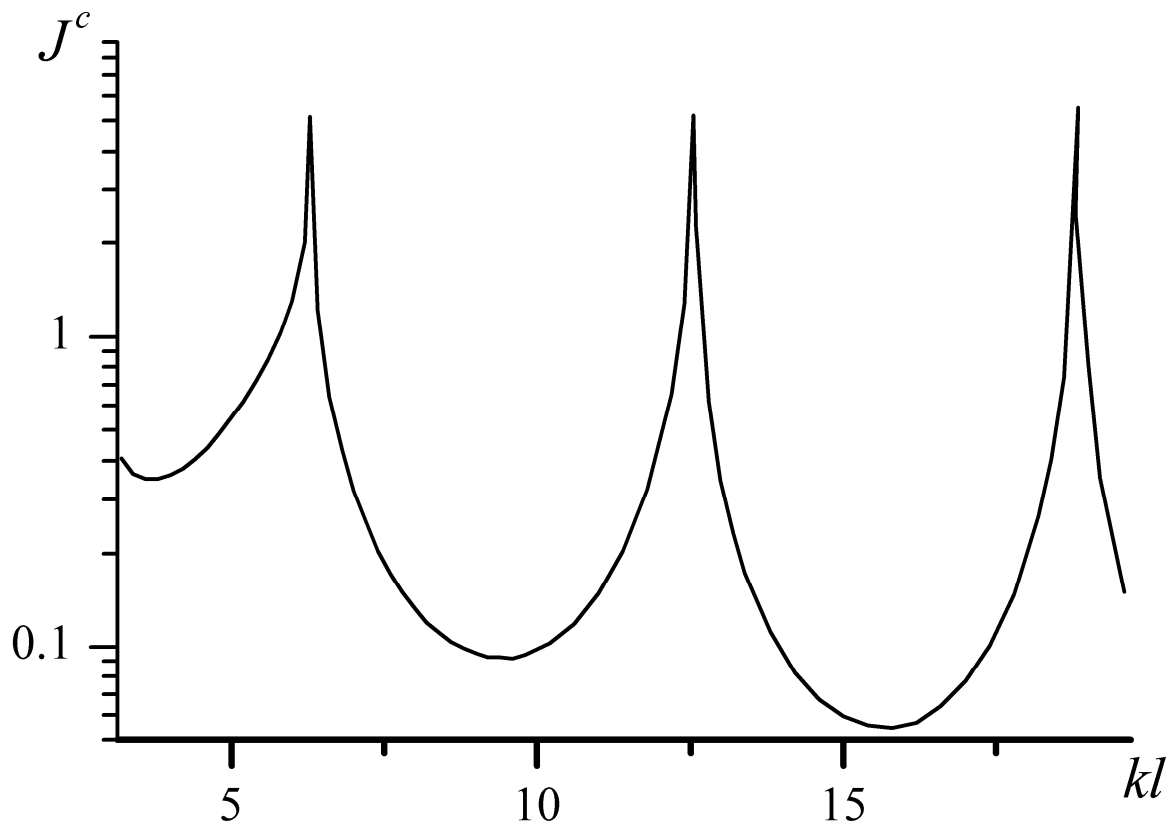


Рис.1.53 Вплив струму корекції при $kd = \pi/2$, залежність J^c від періоду l

1.4. Розв'язання ключової задачі

Отримані операторні рівняння (1.9), (1.10), (1.13), (1.14), (1.15), (1.20), (1.24), (1.26), (1.27), (1.29), (1.30), (1.33), (1.34) містять оператор відбиття поодинокого елемента, який утворює структуру. Для їх розв'язання необхідно розв'язати ключову задачу – задачу про дифракцію на поодинокому ключовому елементі. Від того, наскільки ефективним є метод розв'язання ключової задачі залежить ефективність і розв'язання задачі про дифракцію для всієї структури. У якості ключової неоднорідності вибирається поодинокі стрічка та, як узагальнення, плоска скінченна стрічкова решітка.

1.4.1. Методи розв'язання задачі про дифракцію на скінченній решітці з ідеально провідних стрічок

На сьогоднішній день існує велика кількість методів розв'язання задачі про дифракцію на плоскій решітці, яка складається зі скінченної кількості стрічок.

У [138] досліджено одну вузьку у порівнянні з довжиною хвилі стрічку та щілину у випадку E - та H -поляризації. Невідома густина струмів на стрічці надається як сума поліномів Чебишева з кореневою вагою. Такий вибір апроксимації невідомих функцій в інтегральних рівняннях враховує поведінку поля на ребрі. У [139] метод задачі Рімана-Гільберта застосовано до скінченної стрічкової решітки. У [140] проведено дослідження у декількох спеціальних випадках, при величині періоду набагато більшою, ніж довжина хвилі, при нехтуванні відбиттям від краю.

Відмітимо, що у випадку H -поляризації поле можна представити за допомогою потенціалу подвійного шару. Граничні інтегральні рівняння у такому випадку мають не інтегровану особливість другого порядку на дійсній осі. Водночас у випадку E - поляризації граничні інтегральні рівняння мають інтегровану логарифмічну особливість.

У роботах [141]-[143] з використанням методу моментів розв'язуються сингулярні інтегральні рівняння задач про дифракцію на нескінченній та скінченній стрічкової решітці. Після регуляризації вони зводяться до рівнянь Фредгольма другого роду з гладким ядром. Розглядається як випадок E -, так і H -поляризації. У випадку H -поляризації розсіяне поле надається як потенціал подвійного шару. Після застосування граничних умов отримано гіперсингулярні інтегральні рівняння. Струм на стрічках надається як сума поліномів Чебишева другого роду з ваговою функцією та невідомими коефіцієнтами. У [144] розглядається стрічкова решітка на заземленій діелектричній пластині в припущенні, що період є значно меншим за

довжину хвилі у вільному просторі. У [145], [146] подібна геометрія аналізується з використанням методу моментів. У [147], [148] гіперсингулярні інтегральні рівняння відносно густини струмів розв'язується за допомогою застосування квадратурних формул інтерполяційного типу.

У роботах [36], [149] парні інтегральні рівняння для поодинокі стрічки зводяться до двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням методу моментів. Спектральна функція розсіяного поля $C(\xi)$ представляється у вигляді розкладення в ряд за функціями Беселя, який у випадку H -поляризації має вигляд

$$C(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} \varphi_{2n-1}(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \varphi_{2n}(\xi),$$

де перший ряд відповідає непарній частині спектральної функції (амплітуді Фур'є), а другий – парній частині, $\varphi_n = \sqrt{2n} J_n(kd\xi) / \xi$, d – половина ширини стрічки, $J_n(x)$ – функція Беселя n -го порядку. Для визначення невідомих коефіцієнтів c_n отримано дві незалежні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c_{2m-1} = b_{2m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2m-1, 2n-1} c_{2n-1},$$

$$c_{2m} = b_{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2m, 2n} c_{2n},$$

де

$$A_{m,n} = \int_0^{\infty} \varphi_m(\xi) \varphi_n(\xi) \xi \varepsilon(\xi) d\xi,$$

$$b_{2m} = -i \int_0^{\infty} q_0(\xi) \gamma(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi,$$

$$b_{2m-1} = -i \int_0^{\infty} q_1(\xi) \gamma(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

$$\gamma(\xi) = i\xi(1 - \varepsilon(\xi)),$$

$q_0(\xi)$ і $q_1(\xi)$ – парна і непарна частини амплітуди Фур'є падаючого поля.

У роботі [150] даний метод розвинено на скінченну систему стрічок.

У [47]-[49] парні інтегральні рівняння задачі дифракції плоскої хвилі на скінченній стрічковій решітці зводяться до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами по системі відрізків, які у випадку H -поляризації мають вигляд

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, 0), \quad y \in L, \quad (1.106)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_n} F(\xi) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.107)$$

де $L = \bigcup_{n=1}^N L_n$ – множина стрічок, N – їх кількість, амплітуда Фур'є $C(\xi)$ розсіяного поля, яка пов'язана з невідомою функцією $F(y)$ за допомогою перетворення Фур'є

$$C(\xi) = \frac{1}{2\pi i \xi} \int_L F(y) (\exp(-iky\xi) - 1) dy.$$

Ядро має вигляд

$$K(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta.$$

Проведений комплекс числових експериментів показав, що у випадку поодинокі стрічки є ефективним використовувати метод моментів, як у [36], [149]. У випадку ж скінченної системи стрічок виправданим є використання методу сингулярних інтегральних рівнянь.

1.4.2. Метод сингулярних інтегральних рівнянь в задачі про дифракцію на скінченній решітці з імпедансних стрічок нульової товщини

Розглянемо решітку, яка складається з N імпедансних стрічок нульової товщини, розміщених у площині $z = 0$. Структура є нескінченною вздовж осі

Ox . Множину y -координат стрічок позначимо як $L = \bigcup_{n=1}^N L_n$, де L_n – множина y -координат стрічки з номером n .

Припустимо, що плоска H -поляризована хвиля (1.37) падає на решітку з області $z > 0$ під кутом φ_0 , який відраховується від негативного напрямку осі Oy :

$$H_x^i(y, z) = \exp(ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)).$$

Геометрія структури і позначення надані на рис.1.54.

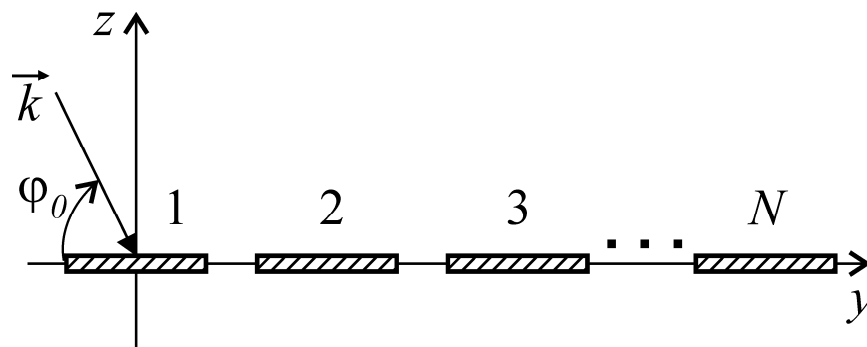


Рис.1.54 Геометрія досліджуваної решітки з імпедансних стрічок

Дотичні компоненти електромагнітного поля задовольняють наступним граничним умовам на імпедансних стрічках (1.51),

$$\frac{1}{2}(\vec{E}_\tau^+ + \vec{E}_\tau^-) = \frac{1}{\sigma} [\vec{x}; (\vec{H}_\tau^+ - \vec{H}_\tau^-)], \quad y \in L, \quad z = 0,$$

або з врахуванням зв'язку між дотичними компонентами електричного і магнітного поля, (1.52)

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{ik}{\sigma Z} (H_x^+ - H_x^-),$$

де знак “+” відповідає граничному значенню поля над решіткою ($z \rightarrow +0$), а знак “-” відповідає граничному значенню поля під решіткою ($z \rightarrow -0$).

Повне поле шукаємо у вигляді суми падаючого і розсіяного полів.

$$H_x(y, z) = H_x^i(y, z) + H_x^s(y, z).$$

Поле повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца, умовам неперервності (1.49), (1.50) поза стрічками, граничним умовам на стрічках (1.52), умові випромінювання і умові на ребрі. При виконанні цих умов розв'язок задачі – єдиний.

В спектральній області (у просторі перетворень Фур'є) розсіяне поле шукається у вигляді перетворення Фур'є

$$H_x^s(y, z) = \operatorname{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|) d\xi, \quad (1.108)$$

де $C(\xi)$ – амплітуда Фур'є.

З граничних умов і умов неперервності (1.50), (1.52) випливають парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L \quad (1.109)$$

$$\frac{2ik}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi + ik \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\xi) C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, 0), \quad (1.110)$$

$$y \in L.$$

Розв'язок парних інтегральних рівнянь (1.109), (1.110) шукається на множині функції, які задовольняють умові на ребрі.

Для того, щоб звести парні інтегральні рівняння (1.109), (1.110) до сингулярного інтегрального рівняння, слідуючи ідеям робіт [47]-[50], введемо функцію

$$F(y) = U'(y) = ik \int_{-\infty}^{\infty} \xi C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi, \quad (1.111)$$

причому $F(y) = 0$, при $y \in L$. Застосувавши обернене перетворення Фур'є, отримаємо

$$C(\xi) = \frac{1}{2\pi i \xi} \int_L F(y) (\exp(iky\xi) - 1) dy. \quad (1.112)$$

Використовуючи асимптотичний вираз $\gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} = i|\xi| + O(1/\xi)$, при $\xi \rightarrow \infty$, представимо (1.110) у наступному вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma(\xi) - i|\xi|) C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi - \\ & - i \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, 0), \quad y \in L. \end{aligned} \quad (1.113)$$

До третього інтеграла у (1.113) застосуємо оператор Гільберта (1.87), а перший і другий інтеграли згрупуємо у ядро. З використанням (1.111), (1.112) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння вигляду (1.106)

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, 0), \quad y \in L,$$

з ядром

$$\begin{aligned} K(y, \xi) &= k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta + q(y, \xi), \\ q(y, \xi) &= \begin{cases} \frac{2ik\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq y, \\ 0, & \xi > y. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.114)$$

Розв'язок сингулярного інтегрального рівняння не є єдиним. Для того, щоб отримати єдиний розв'язок, необхідні додаткові умови. У рівняння (1.109) підставимо (1.112). Після перетворень отримаємо додаткові умови у вигляді (1.107)

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_n} F(\xi) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Підінтегральна функція у виразі для ядра (1.114) спадає як $1/\zeta^2$, $\zeta \rightarrow \infty$. Використовуючи асимптотичний вираз для $\gamma(\xi)$, при $\zeta \rightarrow \infty$, і вираз для інтегрального синуса, можна збільшити швидкість збіжності інтегралів.

1.4.3. Випадок імпедансної решітки, розташованої над ідеально провідною площиною

Розташуємо решітку з імпедансних стрічок в площині $z = 0$. Ідеально провідна площина описується рівнянням $z = -h$. Як і раніше, y -координати

стрічок визначаються множиною L . Геометрію структури наведено на рис.1.55.

Припустимо, що на досліджувану структуру з області $z > 0$ падає плоска H -поляризована монохроматична хвиля

$$H_x^i(y, z) = \exp(ik(y \cos \varphi_0 - (z + h) \sin \varphi_0)).$$

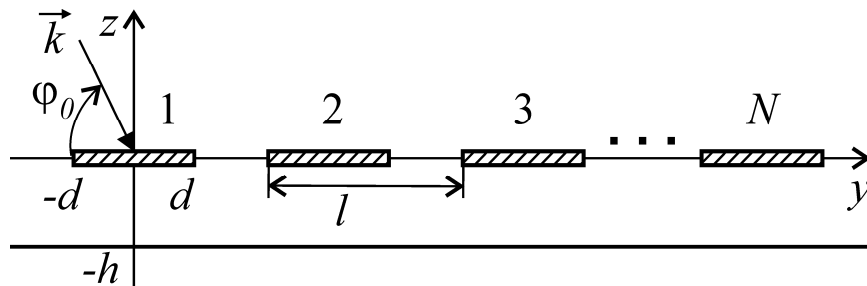


Рис.1.55 Геометрія досліджуваної решітки з імпедансних стрічок, розташованої над ідеально провідною площиною

Повне поле шукаємо у вигляді суперпозиції трьох полів: падаючого поля, поля, відбитого від ідеально провідної площини (під час відсутності решітки) і поля, розсіяного решіткою $H_x^{sc}(y, z)$:

$$H_x(y, z) = \exp(ik(y \cos \varphi_0 - (z + h) \sin \varphi_0)) + \exp(ik(y \cos \varphi_0 + (z + h) \sin \varphi_0)) + H_x^{sc}(y, z). \quad (1.115)$$

Поле повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца, умовам неперервності (1.49), (1.50) поза стрічками, граничним умовам на стрічках (1.52), граничній умові на ідеально провідній площині

$$E_y \sim \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0, \quad z = -h, \quad (1.116)$$

умові випромінювання і умові на ребрі. При виконанні цих умов розв'язок задачі – єдиний. Розсіяне решіткою поле шукаємо у вигляді

$$H_x^{sc}(y, z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi, & z > 0, \\ - \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \frac{\cos(k\gamma(\xi)(z + h))}{\sin(\gamma(\xi)kh)} \exp(ik\xi y) d\xi, & 0 > z > -h, \end{cases} \quad (1.117)$$

де $C(\xi)$ – невідома спектральна функція. Помітимо, що повне поле (1.115) за умови (1.117) задовольняє рівнянню Гельмгольца, умові випромінювання й граничній умові на ідеально провідній площині (1.116). З граничних умов на імпедансних стрічках і умови неперервності (1.50), (1.52) можемо отримати парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)(1 + ictg(\gamma(\xi)kh))\exp(ik\xi y)d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (1.118)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)(1 + ictg(\gamma(\xi)kh))\exp(ik\xi y)d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)\gamma(\xi)\exp(ik\xi y)d\xi = \\ = 2k \sin \varphi_0 \sin(kh \sin \varphi_0)\exp(iky \cos \varphi_0), \quad y \in L. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Розв'язок парних інтегральних рівнянь (1.118), (1.119) шукається на множині функцій, які задовольняють умові на ребрі.

Зведемо парні інтегральні рівняння (1.118), (1.119) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами, як це зроблено в роботах [47]-[50]. Введемо функцію

$$D(\xi) = C(\xi)(1 + ictg(\gamma(\xi)kh)).$$

Тоді парні інтегральні рівняння (1.118), (1.119) перепишуться у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(\xi)\exp(ik\xi y)d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (1.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\sigma Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi)\exp(ik\xi y)d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\xi)\gamma(\xi)\exp(ik\xi y)}{1 + ictg(\gamma(\xi)kh)}d\xi = \\ = 2k \sin \varphi_0 \sin(kh \sin \varphi_0)\exp(iky \cos \varphi_0), \quad y \in L. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Введемо функцію

$$F(y) = U'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ik\xi D(\xi)\exp(iky\xi)d\xi. \quad (1.122)$$

Причому $F(y) = 0$, при $y \notin L$. Тоді

$$D(\xi) = \frac{1}{2\pi i \xi} \int_L F(y)(\exp(-iky\xi) - 1)dy. \quad (1.123)$$

Використовуючи асимптотичний вираз для функції $\gamma(\xi)/(1 + i\text{ctg}(\gamma(\xi)kh)) = i|\xi|/2 + O(1/\xi)$, при $\xi \rightarrow \infty$, представимо підінтегральну функцію у другому інтегралі у (1.121) у вигляді суми спадаючої і не спадаючої функції. Застосувавши оператор Гільберта (1.87) до не спадаючої частини, а також використовуючи (1.122), (1.123), після перетворень отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = \\ = 4k \sin \varphi_0 \sin(kh \sin \varphi_0) \exp(iky \cos \varphi_0), \quad y \in L \end{aligned}$$

з ядром

$$\begin{aligned} K(y, \xi) = k \int_0^\infty \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} \left(\zeta + i \frac{2\gamma(\xi)}{1 + i\text{ctg}(\gamma(\xi)kh)} \right) d\zeta + q(y, \xi), \\ q(y, \xi) = \begin{cases} \frac{2ik\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq y, \\ 0, & \xi > y. \end{cases} \end{aligned}$$

З (1.120) випливають додаткові умови у вигляді (1.107).

1.4.4. Електродинамічні властивості плоскої скінченної графенової решітки

1.4.4.1 Плоска графенова решітка

Розглянемо скінченну решітку, яка складається з N еквідистантно розташованих графенових стрічок. Ширина стрічок дорівнює $2d$, період – l . Провідність графену визначається формулою (1.78).

Зазвичай, при дослідженні скінченних графенових решіток, для опису їх характеристик, вводять повний поперечний переріз розсіяння (total scattering cross section, TSCS) і переріз поглинання (absorption cross section, ACS), а також ефективну площу розсіяння (radar cross section, RCS) [99], [151], [152]

$$\text{TSCS} = \frac{2\pi}{k} \int_0^{2\pi} |C(-\cos \varphi) \sin \varphi|^2 d\varphi,$$

$$\text{RCS} = \frac{4\pi^2}{k} |C(-\cos \varphi_0) \sin \varphi_0|^2.$$

Переріз поглинання може бути обчислений, наприклад, при інтегруванні густини струму на стрічках. Проте тут ми скористаємося виразом, який випливає з закону збереження енергії (оптичної теореми)

$$\text{ACS} = \text{TSCS} + \frac{4\pi}{k} \text{Re}(C(-\cos \varphi_0)).$$

Діаграма спрямованості розсіяного поля може бути обчислена за формулою

$$D(\varphi) = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} C(-\cos \varphi) \sin \varphi.$$

Дослідимо числову збіжність наближеного розв'язку сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (1.106), (1.107) з ядром (1.114), отриманого методом дискретних особливостей. Для цього введемо коефіцієнт $\varepsilon = |\text{TSCS}(3000) - \text{TSCS}(M)| / |\text{TSCS}(3000)|$, який дорівнює відносній похибці поперечного перерізу розсіяння TSCS. На рис.1.56 наведено залежності TSCS від кількості вузлів в квадратурній формулі на кожній стрічці M . Очевидно, що зі зростанням відносної ширини стрічки, параметра kd , вимагається вибирати більше вузлів M . Досліджується випадок нормального падіння плоскої хвилі, $\varphi_0 = 90^\circ$, число стрічок дорівнює $N = 10$, період $l = 70$ мкм. Час релаксації, хімічний потенціал і температура дорівнює $\tau = 1$ пс, $\mu_c = 0.13$ еВ, $T = 300$ К. Значення частоти вибрані поблизу плазмонних резонансів: $f = 1.54$ ТГц – перший плазмонний резонанс, $f = 4.82$ ТГц – четвертий плазмонний резонанс (для $d = 10$ мкм). Похибка обчислення ядра $K(y, \xi)$ інтегрального рівняння (1.114) складала менше ніж 10^{-5} . Як видно з рис.1.56, при збільшенні значення параметра kd , вимагається вибирати більше число вузлів для отримання результатів з такою ж точністю. Для верифікації результатів проведено їх порівняння з

результатами, отриманими методом гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГСІР) [99] для двох різних кутів падіння, $\varphi_0 = 90^\circ$ і $\varphi_0 = 45^\circ$. Результати наведено на рис.1.57. За рахунок збільшення числа вузлів вдається добитися співпадіння результатів з будь-якою наперед заданою точністю.

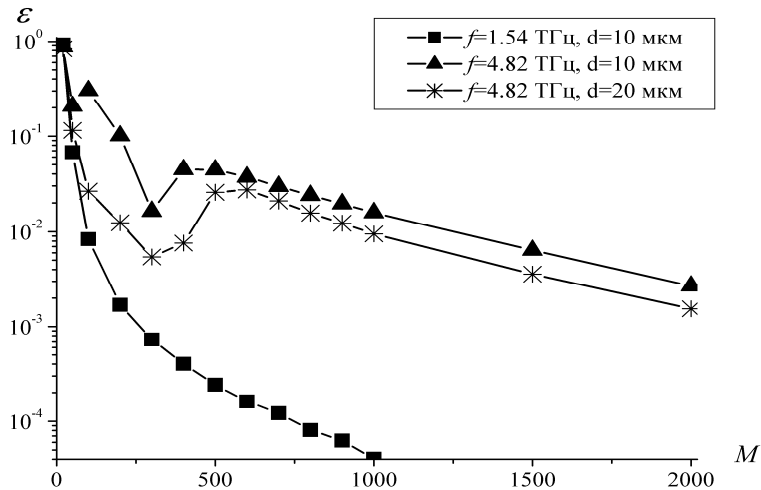


Рис.1.56 Залежності похибки ε від числа вузлів на кожній стрічці для $N = 10$ стрічок, $d = 10 \text{ мкм}$, $l = 70 \text{ мкм}$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $\mu_c = 0.13 \text{ еВ}$, $T = 300 \text{ К}$.

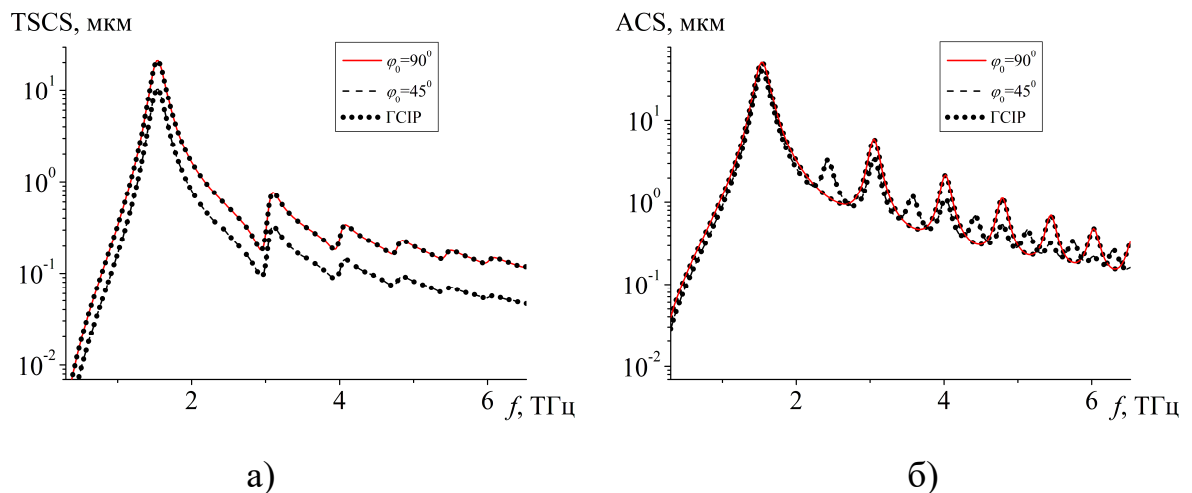


Рис.1.57 Залежності а) TSCS і б) ACS від частоти для поодинокі стрічки, $N = 1$, $\varphi_0 = 90^\circ$ (суцільні криві), $\varphi_0 = 45^\circ$ (штрихові криві), $d = 10 \text{ мкм}$, $l = 70 \text{ мкм}$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $\mu_c = 0.13 \text{ еВ}$, $T = 300 \text{ К}$. У вигляді точок також наведено результати, отримані методом гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГСІР)

У випадку ортогонального падіння спостерігається наявність резонансів з непарними індексами з причини їх симетричності відносно вертикальної осі. У випадку ж похилого падіння, відбувається збудження резонансів як з непарними, так і з парними індексами. В результаті цього спостерігається збільшення в два рази числа максимумів в залежностях ACS від частоти.

Розглянемо залежності TSCS (рис.1.58 а), ACS (рис.1.58 б) і RCS (рис.1.58 в) від частоти.

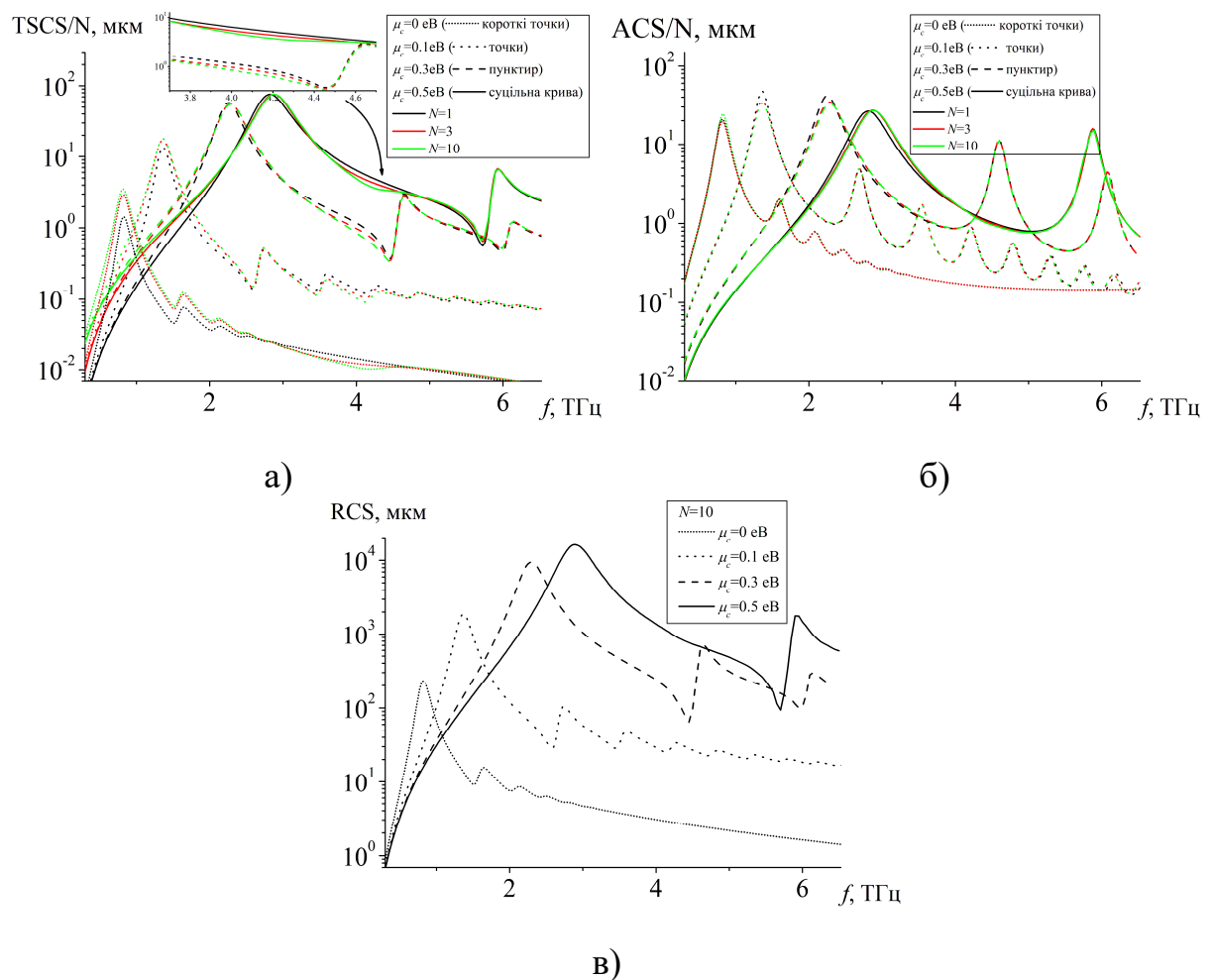


Рис.1.58 Залежності а) TSCS/ N , б) ACS/ N і в) RCS від частоти для $N=1$, $N=5$ і $N=10$ стрічок і різних значеннях хімічного потенціалу $\mu_c = 0$ eV (короткі пунктирні криві), $\mu_c = 0.1$ eV (пунктирні криві), $\mu_c = 0.3$ eV (штрихові криві), $\mu_c = 0.5$ eV (суцільні криві), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К.

У випадку H - поляризації спостерігається збудження плазмонних резонансів в терагерцовому діапазоні довжин хвиль. Ці резонанси є набагато більш вираженими, ніж резонанси поблизу аномалій Релея-Вуда, які виникають при $kl = \pi m$, $m = 1, 2, \dots$. Для ілюстрації область поблизу аномалії Релея-Вуда, $f = 4.28$ ТГц, збільшено на рис.1.58 а). Збільшення числа стрічок не призводить до суттєвого зростання TSCS на кожному стрічку. Різниця між графіками для $N = 3$ і $N = 10$ практично відсутня, за винятком області поблизу аномалії Релея-Вуда. Тут виникає досить сильна взаємодія стрічок одна з одною. Добротність резонансів поблизу аномалій Релея-Вуда істотно залежить від числа стрічок. Зі збільшенням хімічного потенціалу μ_c плазмонні резонанси зміщуються в бік великих значень частоти, на відміну від аномалій Релея-Вуда, положення яких суттєво залежить від періоду решітки l .

Залежності TSCS і ACS від частоти для різних значень ширини стрічок і періоду наведено на рис.1.59 і рис.1.60. Зі збільшенням ширини стрічок і зменшенням періоду спостерігається зміщення першого плазмонного резонансу в бік менших значень частоти і зростання числа резонансів. Очевидно, що чим більшим є значення періоду, тим менше взаємодія між стрічками. Таким чином, починаючи з деякого значення періоду, властивості решіток з N стрічок є близькими до властивостей окремо розташованих N стрічок. При наближенні відстані між стрічками до 0, $l \rightarrow 2d$, положення плазмонних резонансів наближається до положення резонансів графенової стрічки ширини $2d \cdot N$. Такий самий ефект спостерігався і в [99].

На рис.1.61 наведено діаграми спрямованості (у логарифмічній шкалі) розсіяного поля для значень параметрів структури поблизу аномалії Релея-Вуда, а також поблизу першого і третього плазмонних резонансів. Криві нормуються на амплітуду поля, що падає. Відомо, що поблизу аномалій Релея-Вуда у відповідних нескінченних періодичних решітках відбувається збудження плоских хвиль, а у скінченних решітках – збудження витікаючих

хвиль [33]. Це пояснює число пелюстків в діаграмах спрямованості, а саме, з'являється додаткові пелюстки, максимум яких розташований поблизу кута, який відповідає постійним поширення цих хвиль. У випадку витікаючі хвиль максимум розташовано поблизу площини решітки.

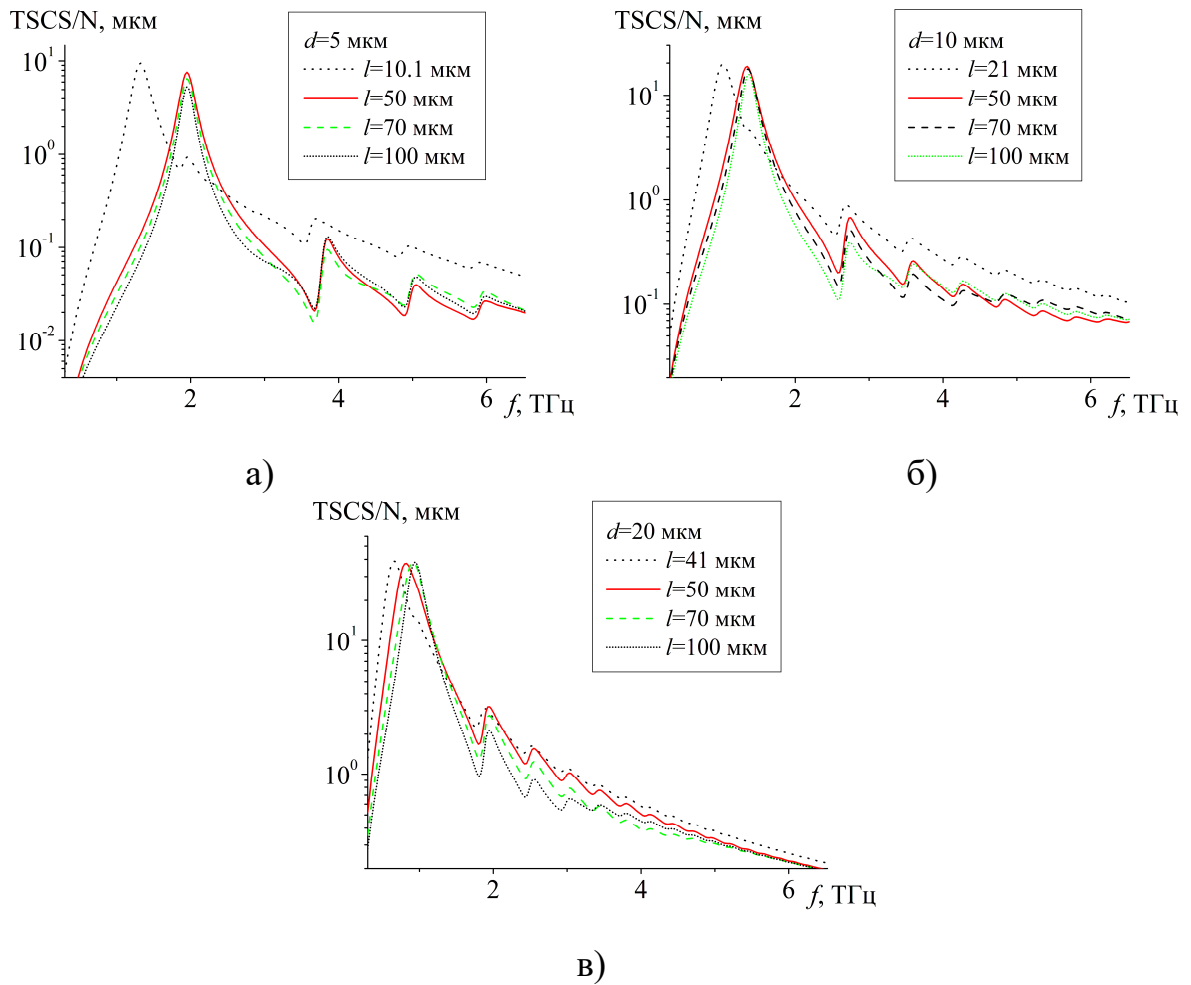


Рис.1.59 Залежності $TSCS/N$ від частоти для $N = 5$ стрічок, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.1$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К і різних значень періоду і ширини стрічок.

а) $d = 5$ мкм; б) $d = 10$ мкм; в) $d = 20$ мкм

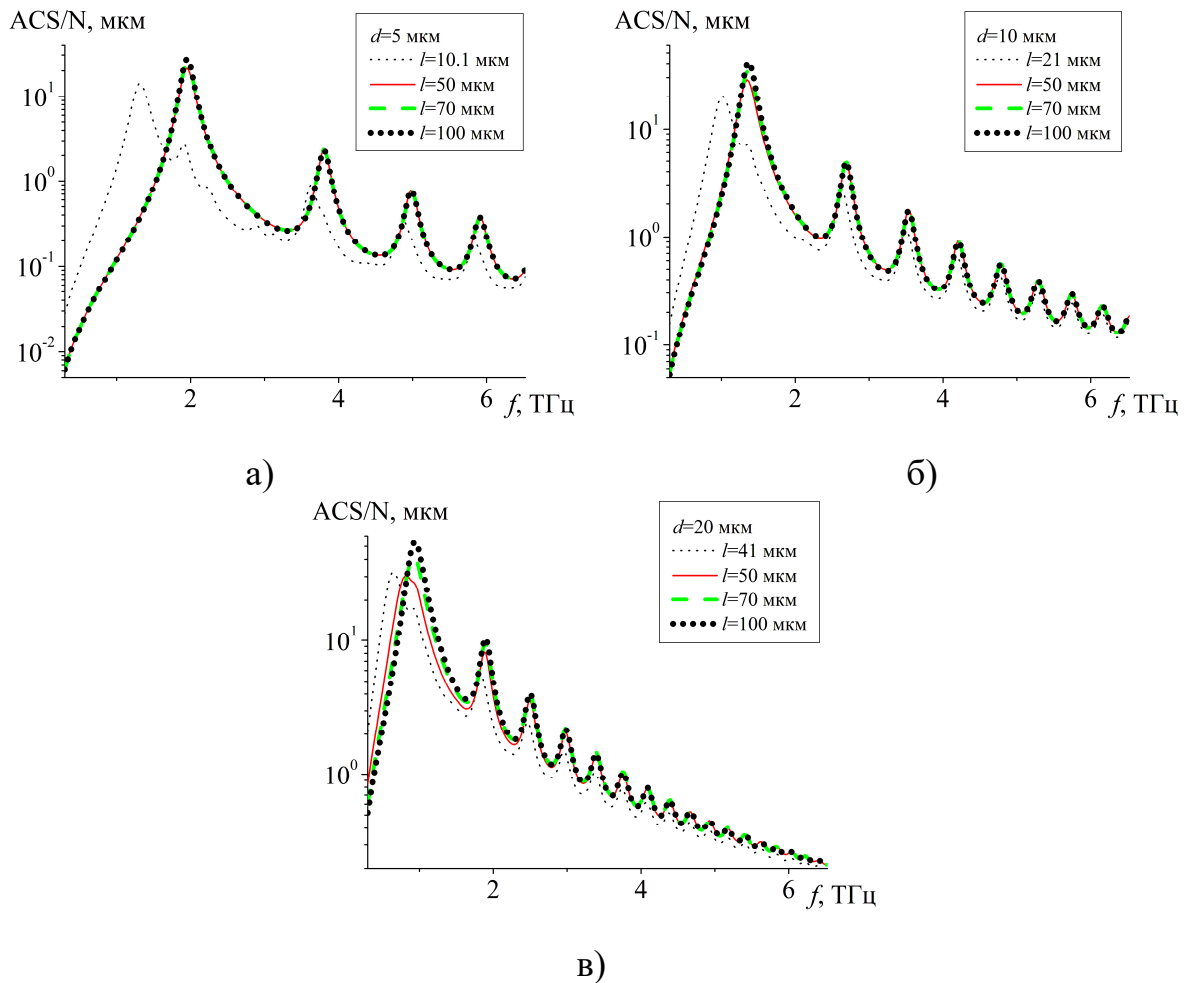


Рис.1.60 Залежності ACS/N від частоти для $N = 5$ стрічок, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.1$ eВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К і різних значень періоду і ширини стрічок. а) $d = 5$ мкм; б) $d = 10$ мкм; в) $d = 20$ мкм

Зважаючи на те, що в роботі розвинено методи аналізу як скінченних, так і нескінченних періодичних решіток, цікавим є провести порівняння їх властивостей. Скористаємося методологією, описаною в [99]. Помітимо, що енергія, розсіяна у верхній (нижній) напівпростір $z > 0$ ($z < 0$) визначається інтегралом $\int_0^\pi (C(-\cos(\varphi)) \sin \varphi)^2 d\varphi$.

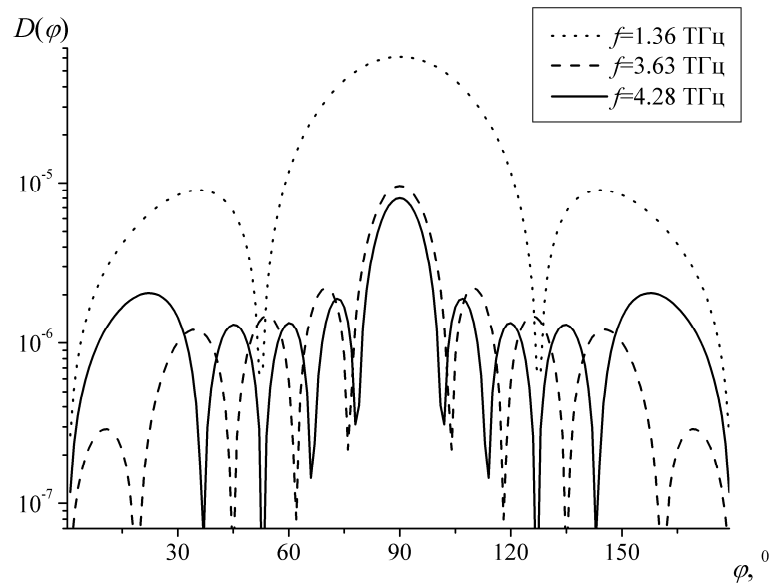


Рис.1.61 Діаграми спрямованості розсіяного поля для $f = 1.36$ ТГц (пунктирна крива), $f = 3.63$ ТГц (штрихова крива), $f = 4.28$ ТГц (суцільна крива), $N = 5$ стрічок, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.13$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

Коефіцієнт відбиття визначає енергію хвилі, відбитої в верхній напівпростір $z > 0$. Коефіцієнт проходження визначає енергію хвилі, що пройшла крізь решітку в нижній напівпростір $z < 0$, але з урахуванням оптичної теореми. Коефіцієнти також слід нормувати на число стрічок і на $\zeta = 2d/l$. Коефіцієнт поглинання може бути знайдений із закону збереження енергії. Тоді коефіцієнти проходження, відбиття і поглинання решітки, що складається з N стрічок, можуть бути записані так:

$$T_N = 1 + \frac{\pi\zeta}{kdN \sin \varphi_0} \int_0^\pi (C(-\cos(\varphi)) \sin \varphi)^2 d\varphi - \operatorname{Re}(C(\cos \varphi_0)),$$

$$R_N = \frac{\pi\zeta}{kdN \sin \varphi_0} \int_0^\pi (C(-\cos(\varphi)) \sin \varphi)^2 d\varphi,$$

$$A_N = 1 - T_N - R_N,$$

Визначимо відносне відхилення коефіцієнта проходження скінченної решітки від нескінченної, яке виразимо за формулою

$$\delta_T = |T_N - T|/|T|.$$

Для порівняння характеристик скінченної та нескінченної решітки вибрано лише коефіцієнт проходження. Очевидно, що аналогічні формули можна записати й для коефіцієнтів відбиття та поглинання. Результати порівняння наведено на рис.1.62.

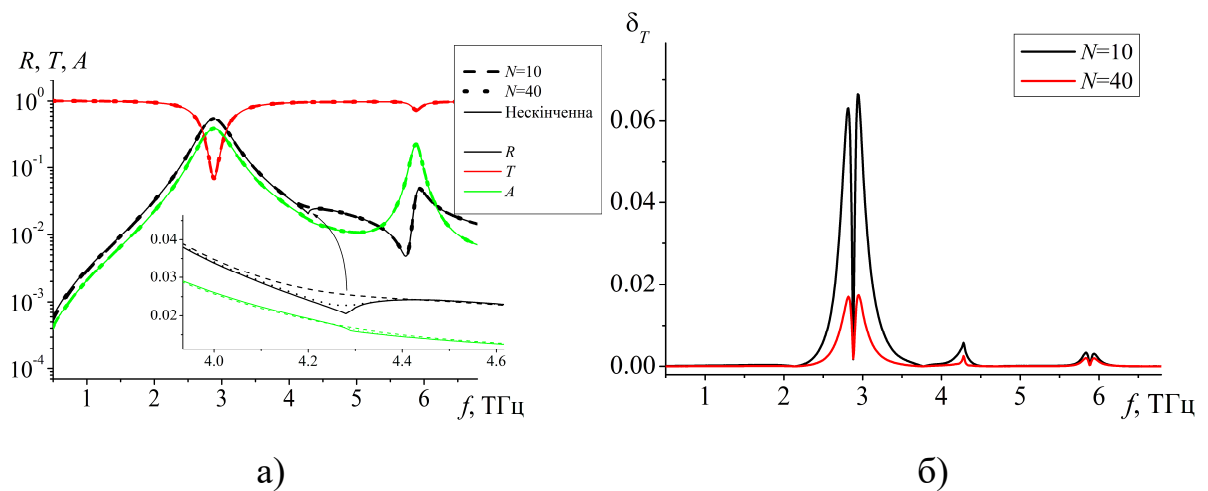


Рис.1.62 Порівняння скінченної і нескінченної періодичної графенової решітки при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.5$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К.
 а) Залежності коефіцієнта відбиття R , проходження T і поглинання A від частоти, $N = 10$ (штрихові криві), $N = 40$ (пунктирні криві), нескінченна періодична решітка (суцільні криві). б) Залежності коефіцієнта відхилення δ_T від частоти, $N = 10$ (суцільна крива), $N = 40$ (штрихова крива)

Спостерігається досить якісне співпадіння у всій частотній області за винятком регіонів поблизу плазмонних резонансів і поблизу аномалії Релея-Вуда (збільшено на рис.1.62 а). Тут властивості скінченної решітки істотно залежать від числа стрічок. Максимальне відхилення $\max \delta_T$ для $N = 10$ стрічок складає менше 7%. При збільшенні числа стрічок відхилення δ_T спадає. При $N = 40$ стрічок максимальне відхилення не перевищує 2%.

1.4.4.2 Графенова решітка, розташована над ідеально провідною площиною

Введемо повний поперечний переріз розсіяння (TSCS) і поглинання (ACS) графенової решітки, розташованої над ідеальною провідною площиною, за формулами

$$TSCS = \frac{2\pi}{k} \int_0^\pi |C(-\cos\varphi) \sin\varphi|^2 d\varphi,$$

$$ACS = \operatorname{Re} \frac{1}{\sigma Z_0} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{-d+lm}^{d+lm} |U(y)|^2 dy.$$

На рис.1.63 наведено залежності TSCS і ACS від h для різних значень хімічного потенціалу при ортогональному падінні плоскої хвилі, $\varphi_0 = 90^\circ$.

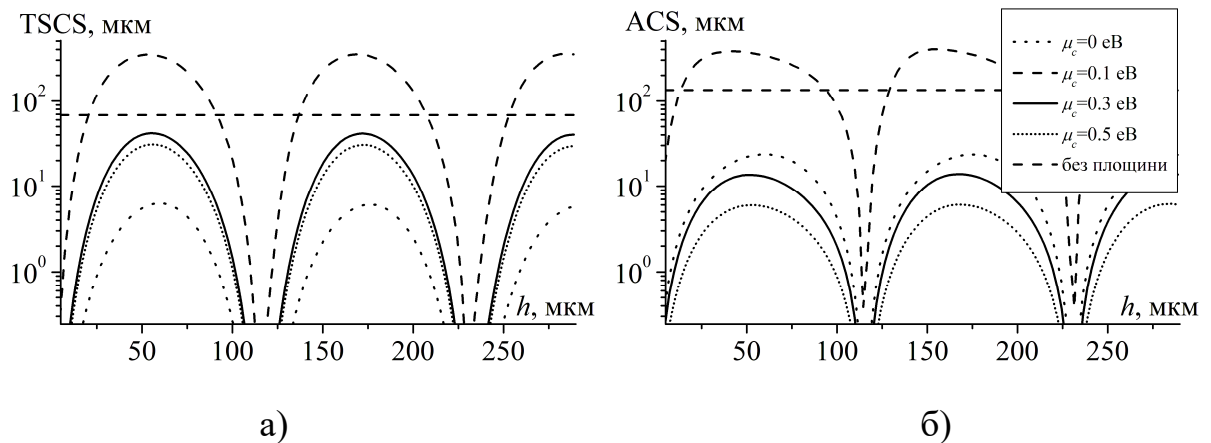


Рис.1.63 Залежності а) TSCS і б) ACS від h при $f = 1.3$ ТГц, $N = 5$, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\mu_c = 0$ еВ (пунктирні криві), $\mu_c = 0.1$ еВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.3$ еВ (суцільні криві), $\mu_c = 0.5$ еВ (короткі пунктирні криві), поодинокі решітка при $\mu_c = 0.1$ еВ (горизонтальна штрихова лінія)

Криві побудовано для значення $f = 1.3$ ТГц поблизу частоти першого плазмонного резонансу при $\mu_c = 0.1$ еВ. Для порівняння горизонтальною лінією вказані значення TSCS і ACS для поодинокі решітки без ідеально провідної площини. Залежності носять практично періодичний характер з періодом $kh \approx \pi$. На графіках присутні яскраво виражені зони, в яких

спостерігається значне зростання поглинання падаючої хвилі. На певних інтервалах значень параметра h , величина TSCS і ACS досліджуваної структури в декілька разів перевищує відповідні значення для решітки без ідеально провідної площини, що вказує на перспективи використання такої структури для поглинання електромагнітного поля.

Дослідимо вплив хімічного потенціалу графенових стрічок на положення максимумів поглинання вздовж частотної осі.

На рис.1.64, рис.1.65 наведено залежності ACS від частоти. Рис.1.64 побудовано для значення h , яке відповідає першому максимуму на рис.1.63.

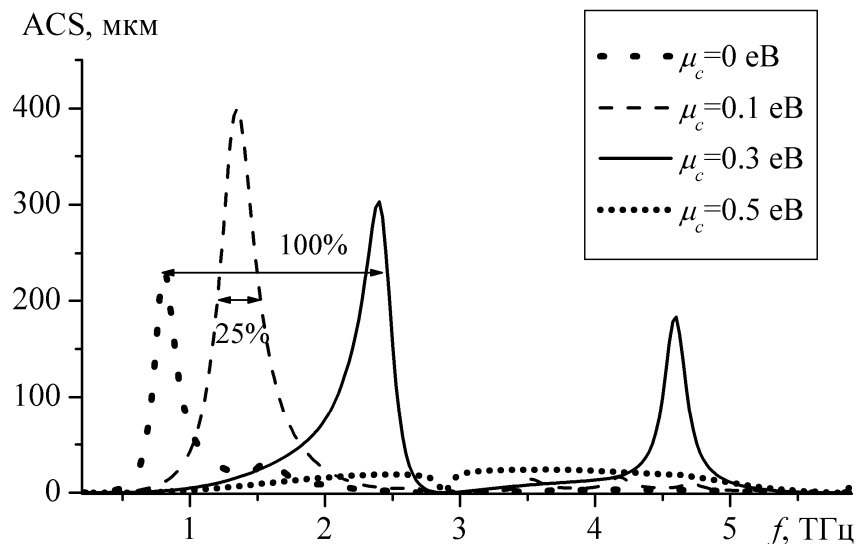


Рис.1.64 Залежності ACS від частоти для $\mu_c = 0$ еВ (пунктирна крива), $\mu_c = 0.1$ еВ (штрихова крива), $\mu_c = 0.3$ еВ (суцільна крива), $\mu_c = 0.5$ еВ (короткі пунктири), $h = 52$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

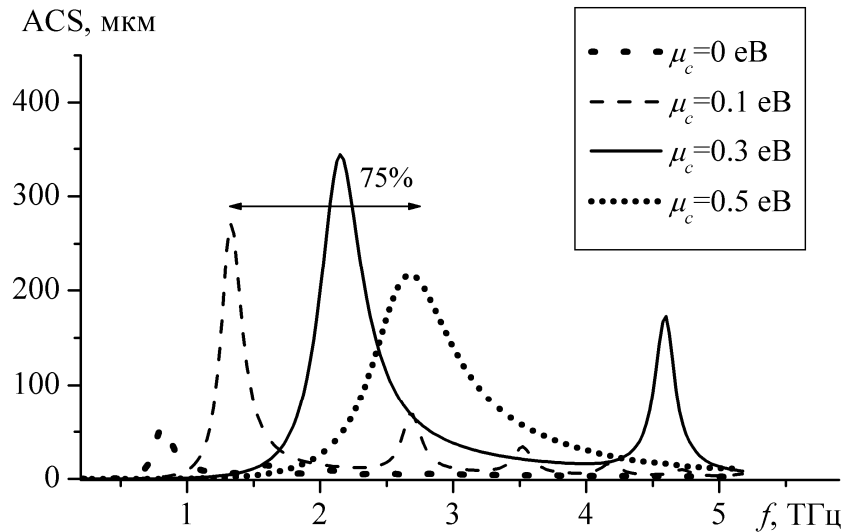


Рис.1.65 Залежність ACS від частоти для $\mu_c = 0$ еВ (пунктирна крива), $\mu_c = 0.1$ еВ (штрихова крива), $\mu_c = 0.3$ еВ (суцільна крива), $\mu_c = 0.5$ еВ (короткі пунктири), $h = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

На рис.1.64, рис.1.65 спостерігаються максимуми, положення яких змінюється зі зміною хімічного потенціалу. Ці максимуми відповідають плазмонним резонансам на графенових стрічках. В величиною поглинання вдається керувати за рахунок зміни хімічного потенціалу. Ширина смуги за рівнем 0.5 становить приблизно 25% при $\mu_c = 0.1$ еВ. При значеннях хімічного потенціалу в межах $\mu_c = 0.1 \div 0.5$ ширина перебудованої смуги частот за рівнем поглинання 0.5 становить понад 100%. На рис.1.65 ширина перебудованої смуги, в якій спостерігається поглинання, за рівнем 0.5 становить приблизно 75%. Отримані результати вказують на можливе застосування решітки при створенні перебудованих поглиначів в широкій смузі частот.

Позначимо відбите структурою поле як

$$H_x^{refl}(y, z) = \exp(ik(y \cos \varphi_0 + (z + h) \sin \varphi_0)) + \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi,$$

$$z > 0.$$

На рис.1.66 наведено розподіл амплітуди відбитого поля для значень $f = 1.35$ ТГц, $\mu_c = 0.1$ еВ і $h = 52$ мкм, які відповідають максимуму поглинання на рис.1.64. Дані параметри також відповідають першому плазмонному резонансу $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм. На рис.1.66 б) наведено збільшену область поблизу решітки. Як видно з рис.1.66, напруженість магнітного поля в просторі над решіткою є набагато меншою, ніж безпосередньо поблизу стрічок. Поблизу решітки картина поля є типовою для першого плазмонного резонансу, а саме, спостерігається один максимум амплітуди поля над серединою стрічок.

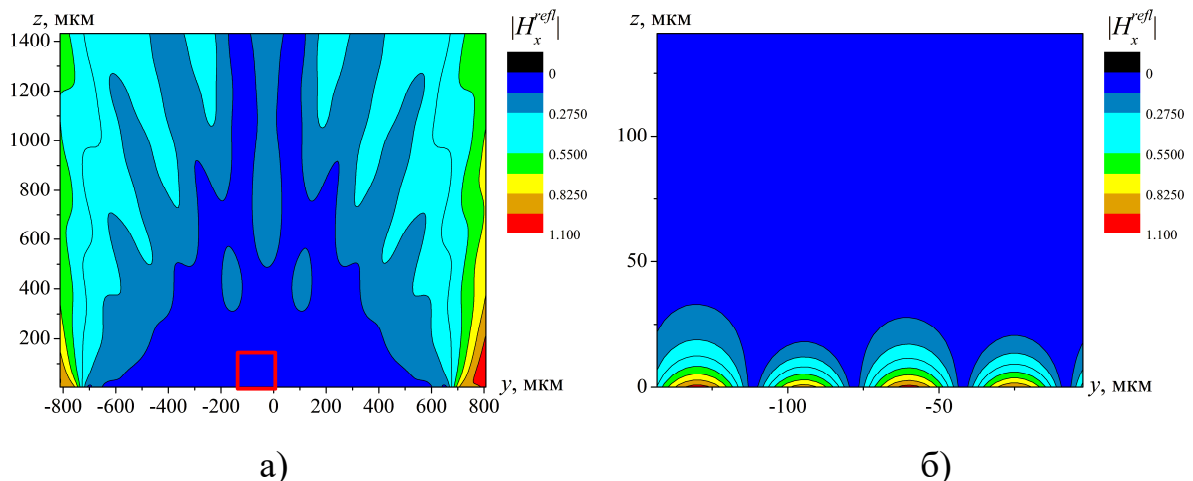


Рис.1.66 Розподіл відбитого поля $|H_x^{refl}|$ в області над решіткою $N = 20$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.1$ еВ, $f = 1.35$ ТГц.

а) вся область, б) збільшена область поблизу решітки

1.4.5. Електродинамічні властивості напівнескінченної графенової решітки

Розглянемо напівнескінченну періодичну решітку графенових стрічок. Як і у випадку ідеально провідних стрічок будемо припускати, що струми корекції поширюються лише на скінченну кількість стрічок N . Як і в пункті 1.3.7, дослідимо відносну похибку струмів корекції

$$\varepsilon_N = \left| \left(J_N^c - J_{2N}^c \right) / J_{2N}^c \right|,$$

де

$$J_N^c = \int_L |U(y)|^2 dy,$$

$$U(y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi.$$

Результати наведено на рис.1.67.

Графенові напівнескінченні періодичні решітки, як і графенові нескінченні ідеально періодичні решітки або скінченні періодичні решітки, здатні підтримувати плазмонні резонанси та резонанси поблизу зон аномалій Релея-Вуда.

На рис.1.67 значення $f \approx 2.61$ ТГц відповідає першому плазмонному резонансу для $\mu_c = 0.4$ еВ, значення $f \approx 4.2857$ ТГц відповідає аномалії Релея-Вуда.

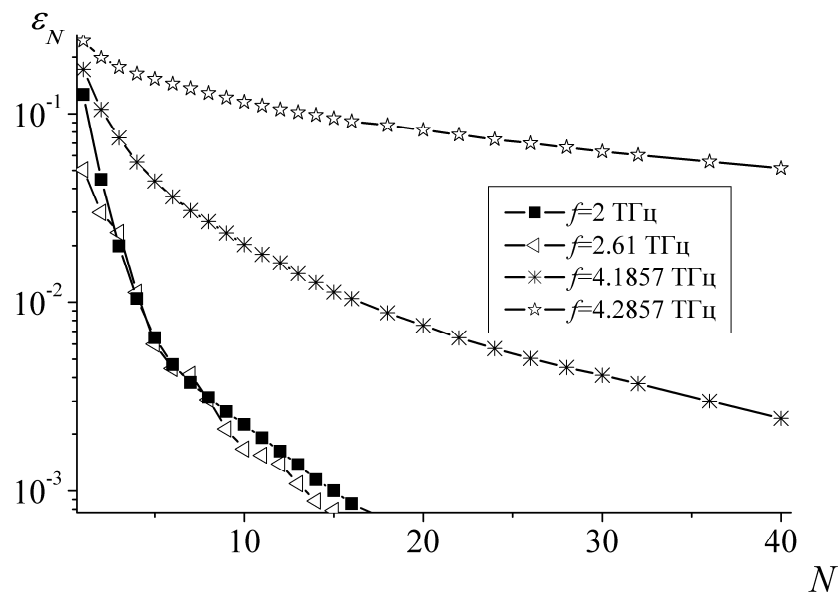


Рис.1.67 Залежність ε_N від N для різних значенні частоти при $d = 10$ мкм,

$$l = 70 \text{ мкм}, \mu_c = 0.4 \text{ еВ}, \tau = 1 \text{ пс}, T = 300 \text{ К}, \varphi_0 = 90^\circ$$

Як і у випадку ідеально провідних стрічок, поблизу аномалії Релея-Вуда струми корекції поширюються на помітно більшу кількість стрічок.

Вдалині від цієї області достатньо вибирати $M = 15$ для отримання показових графічних результатів. Після дискретизації сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами розмірність матриці становить 225×225 . Проте для $f = 4.2857 \pm 0.1$ ТГц розмірність матриці досягала 3000×3000 .

Для опису поля, розсіяного краєм напівнескінченної графенової решітки, а також поля, яке було поглинено за рахунок наявності краю, використовувалися такі ж самі фізичні величини, що і для скінченної решітки, а саме повний поперечний переріз розсіяння (TSCS) і поглинання (ACS).

На рис.1.68 наведено залежності TSCS і ACS від частоти для різних значень хімічного потенціалу. Графіки мають максимуми поблизу частот плазмонних резонансів (позначені як P_i) і аномалії Релея-Вуда (позначено як RA). На відміну від решіток з ідеально провідних стрічок, у яких спостерігалася сильна взаємодія стрічок лише поблизу аномалій Релея-Вуда, у досліджуваній тут графеновій решітці взаємодія стрічок є сильною як поблизу аномалії Релея-Вуда, так і поблизу плазмонних резонансів. Більше того, максимум поблизу першого плазмонного резонансу є набагато більш вираженим, ніж поблизу аномалії Релея-Вуда. На відміну від випадку нескінченної або скінченної ідеально періодичної графенової решітки, також з'являється максимуми і поблизу плазмонних резонансів з парними індексами у випадку ортогонального падіння плоскої хвилі. Водночас, частота збудження плазмонних резонансів з непарними індексами є трохи зсуненою у порівнянні з випадком нескінченної ідеально періодичної решітки у зв'язку зі збудженням струмів корекції. Зміна хімічного потенціалу графенових стрічок призводить до зміщення положення плазмонних резонансів вздовж осі частот.

На рис.1.69 наведено розподіл повного струму і струму корекції на стрічках. Для того, щоб вивчити ефект, пов'язаний з виникненням

максимумів TSCS і ACS поблизу частоти збудження другого плазмонного резонансу, вибрано частоту $f = 4.15$ ТГц.

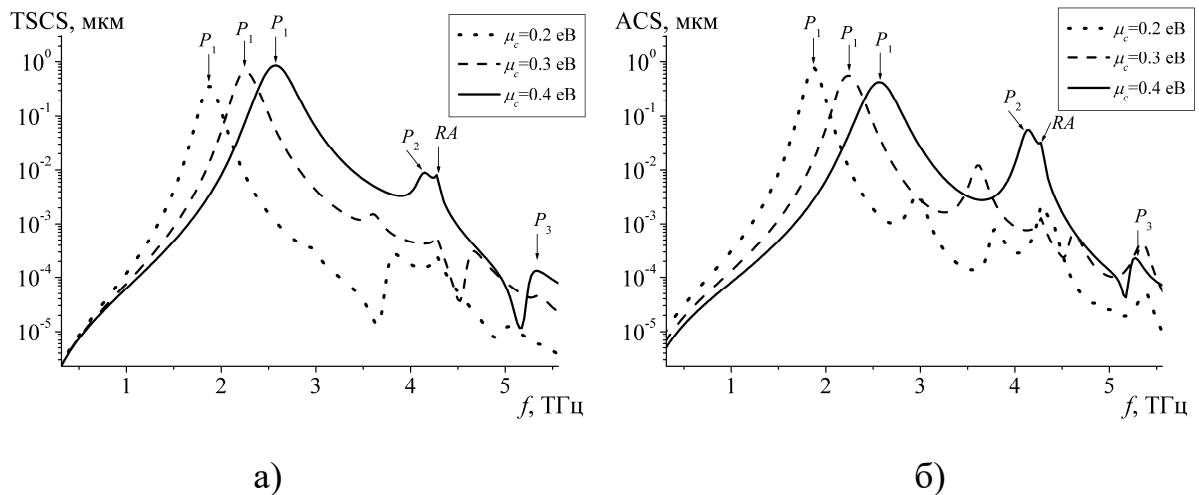


Рис.1.68 Залежність а) TSCS і б) ACS від частоти для $\mu_c = 0.2$ еВ (пунктирні криві), $\mu_c = 0.3$ еВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.4$ еВ (суцільні криві), $d = 10$ мкм,

$$l = 70 \text{ мкм}, \mu_c = 0.4 \text{ еВ}, \tau = 1 \text{ пс}, T = 300 \text{ К}, \varphi_0 = 90^\circ$$

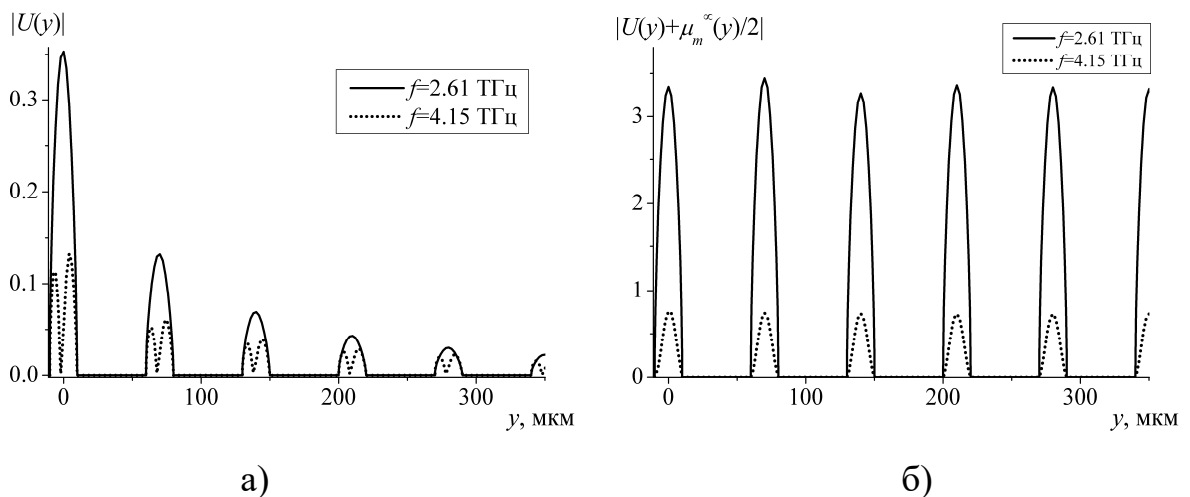


Рис.1.69 Залежність а) $U(y)$, б) $|U(y) + \mu_m^\infty(y)/2|$ від координати y для $f = 2.61$ ТГц (суцільні криві), $f = 4.15$ ТГц (пунктирні криві), $d = 10$ мкм,

$$l = 70 \text{ мкм}, \mu_c = 0.4 \text{ еВ}, \tau = 1 \text{ пс}, T = 300 \text{ К}, \varphi_0 = 90^\circ$$

Для порівняння також наведено результати поблизу частоти першого плазмонного резонансу. Як видно з рис.1.69, поблизу частоти другого

плазмонного резонансу струми корекції мають два максимуми на кожній стрічці. Проте повний струм має лише по одному максимуму.

На рис.1.70 наведено розподіл поля в ближній зоні. Принципово картина поля не відрізняється від випадку напівнескінченної решітки з ідеально провідних стрічок. Чітко видна область існування плоскої хвилі, $y > 0$, область, у якій плоска хвиля не існує, $y < 0$, а існує лише циліндрична хвиля, а також область тіні поблизу прямої $y = 0$.

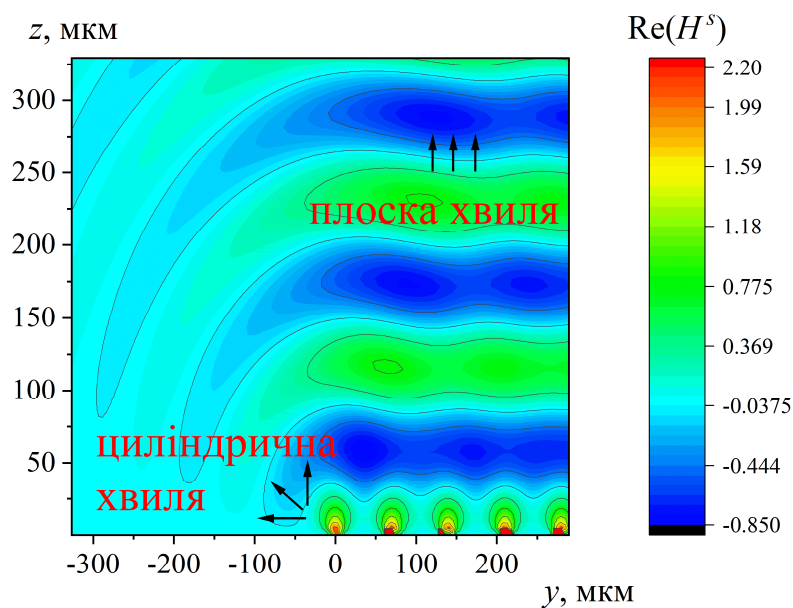


Рис.1.70 Розподіл поля $\text{Re}(H_x^s(y,z))$ при $f = 2.61 \text{ ТГц}$, $d = 10 \text{ мкм}$, $l = 70 \text{ мкм}$,
 $\mu_c = 0.4 \text{ еВ}$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $T = 300 \text{ К}$, $\varphi_0 = 90^\circ$

Висновки до розділу 1

Вперше отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію H -поляризованої плоскої хвилі на періодичній напівнескінченній решітці типу жалюзі. Задачу зведено до нелінійного операторного рівняння. Після проведення процедури регуляризації, яка пов'язана з виключення полюсів, для дискретизації використовується складена квадратурна формула. У результаті операторне рівняння замінюється матричним. Для його

розв'язання запропоновано комплексний підхід, який полягає у використанні методу ітерації з параметром релаксації та методу Зейделя. Результати підтверджуються числовою перевіркою граничних умов.

З використанням отриманого алгоритму досліджено дифракцію плоскої H -поляризованої хвилі на плоскій напівнескінченній періодичній решітці.

Розвинено метод сингулярних інтегральних рівнянь на плоску напівнескінченну періодичну решітку у випадку E - і H - поляризації. Розсіяне поле шукається як сума поля струмів, що течуть стрічками нескінченної ідеально періодичної решітки і поля струмів корекції. Задачі по визначенню цих полів зведено до сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами схожого вигляду. Це дозволяє використовувати єдиний метод числового розв'язання.

Метод сингулярних інтегральних рівнянь вперше розвинено на скінченну, нескінченну періодичну, напівнескінченну періодичну решітки з імпедансних стрічок нульової товщини. При отриманні числових результатів у якості імпедансних стрічок вибрано графенові стрічки.

Проведено порівняння результатів, отриманих операторним методом та методом сингулярних інтегральних рівнянь, а також з методом гіперсингулярних інтегральних рівнянь, методом моментів, з розв'язком Кірхгофа. Це дозволяє зробити висновок про вірність побудованих алгоритмів. Проведено порівняння результатів для скінченної і нескінченної періодичної графенової решітки.

Проведено аналіз полів, розсіяних структурою, у ближній та далекій зонах для різних значень кута падіння, ширини стрічок та періоду їх розміщення. Для далекої зони використовується рівномірне асимптотичне представлення, отримане методом перевалу.

Числові результати показують, що поле, розсіяне краєм напівнескінченної періодичної решітки, впливає на характеристики структури навіть якщо коефіцієнт відбиття відповідної нескінченної

періодичної решітки наближається до нуля. Показано, що суттєве зростання струмів корекції спостерігається поблизу регіону аномалії Релея-Вуда, струм корекції поширюється на більшу кількість стрічок.

У випадку графенової напівнескінченної періодичної решітки, на відміну від решіток з ідеально провідних стрічок, у яких спостерігалася сильна взаємодія стрічок лише поблизу аномалій Релея-Вуда, у досліджуваній тут графеновій решітці взаємодія стрічок є помітно сильнішою як поблизу аномалії Релея-Вуда, так і поблизу плазмонних резонансів.

Періодичні графенові стрічкові решітки у вакуумі підтримують два типи резонансів: плазмонні резонанси і резонанси поблизу аномалій Релея-Вуда. Виявлено положення плазмонних резонансів на частотній осі, вплив зміни хімічного потенціалу графену, ширини стрічок, періоду решітки. У випадку графенової решітки, розташованої над ідеально провідною площиною, показано, що на відміну від плоскої графенової решітки, при визначеному співвідношенні параметрів структури, поглинання практично відсутнє навіть поблизу плазмонних резонансів. З іншого боку, змінюючи відстань від площини до решітки вдається досягти практичного повного поглинання.

Розділ 2. Плоска нескінченна стрічкова решітка без однієї стрічки

Періодичні решітки є компонентами метаматеріалів, стелс-покриттів, частотно-селективних поверхонь, оптичних систем [33], [153]-[159]. У результаті дефекту при виробництві або в процесі роботи пристроїв відбуваються відхилення у реальної решітки від періодичної ідеальної моделі, один або кілька елементів можуть бути загублені [160], [161]. У цій ситуації необхідно мати розуміння того, наскільки істотним є відмінність властивостей такої структури від ідеальної, чи можливо використовувати таку неідеальну структуру без істотних втрат у продуктивності. Виявлення положення дефекту по розподілу розсіяного поля може бути використане в неруйнуючому контролі матеріалу.

Існує багато методів аналізу нескінченних ідеально-періодичних або скінченних решіток, це і метод задачі Рімана-Гільберта, метод моментів, методи інтегральних рівнянь, та інші. Тим не менше, аналіз дифракції на решітках з порушенням періодичності або флуктуацією параметрів набагато складніший. Імовірно, найбільш близькими структурами з дефектами періодичності, які розглядаються у цей час, є напівнескінченні решітки. Як і у разі напівнескінченних решіток, методи аналізу як нескінченних ідеально періодичних решіток, так і скінчених, неможна застосовувати напяму.

В даній роботі розвинено ефективний підхід і розглянуто дифракцію на нескінченній стрічковій решітці у відсутності однієї стрічки, який базується на методі сингулярних інтегральних рівнянь з їх дискретизацією за допомогою однієї з реалізацій алгоритму типу Найстрема, методом дискретних особливостей.

Більш детальний огляд літератури стосовно стрічкових решіток наведено у розділі 1.

2.1. Постановка задачі

Розглянемо нескінченну періодичну решітку, розміщену у площині $z = 0$, з відсутньою однією стрічкою з номером 0 [136], [137], [162]-[166]. Ширина кожної стрічки дорівнює $2d$, період решітки – l . Геометрію структури наведено на рис.2.1 а). Відповідну нескінченна решітка без порушення періодичності наведено на рис.2.1 б). Стрічка з номером 0, для визначеності, розташована так, що її середина співпадає з віссю Ox . Структура однорідна вздовж осі Ox . Стрічки є нескінченно тонкими і ідеально провідними.

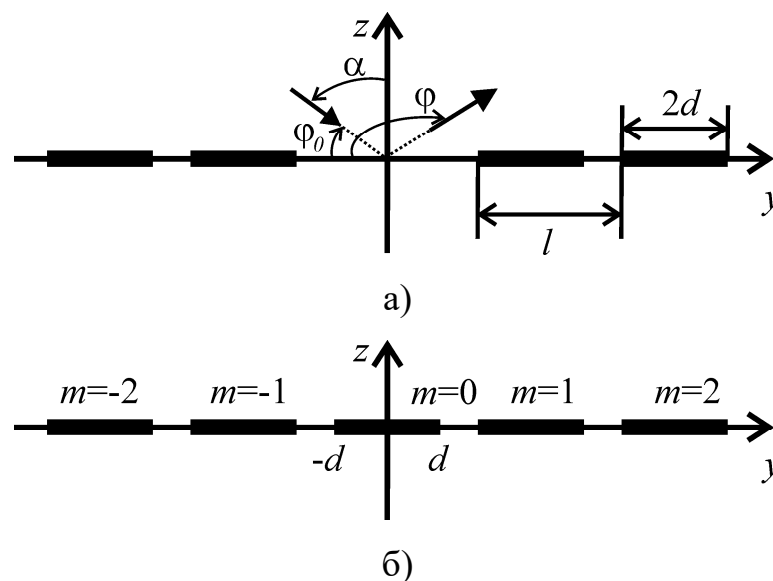


Рис.2.1 Геометрія досліджуваної структури. а) Нескінченна решітка без однієї стрічки і б) відповідна періодична решітка

При розв'язанні представимо густину струмів на кожній стрічці у вигляді суперпозиції двох функцій. Перша функція – густина струмів, які течуть стрічками відповідної нескінченної періодичної решітки. Друга – струм, що виникає за рахунок відсутності однієї стрічки. Повне розсіяне поле запишемо як суму полів струмів кожної стрічки за допомогою функцій Ханкеля. З використанням інтегрального подання функції Ханкеля поле, що

виникає за рахунок відсутності однієї стрічки, виразимо через невідому спектральну функцію. Із граничних умов для рівняння Гельмгольца отримаємо парні інтегральні рівняння відносно невідомої спектральної функції. У правій частині рівнянь знаходиться доданок, що залежить від поля, розсіяного нескінченною ідеально періодичною решіткою. Це поле знайдене з парних рядів Фур'є у розділі 1.

Розв'язок для такого роду геометрії отримано **вперше**.

Будемо припускати, що на структуру падає плоска хвиля під кутом φ_0 (1.37),

$$\begin{aligned} H_x^i(y, z) &= \exp(ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)), \text{ у випадку } H \text{-поляризації,} \\ E_x^i(y, z) &= \exp(ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)), \text{ у випадку } E \text{-поляризації.} \end{aligned}$$

2.2. Випадок H -поляризації

2.2.1. Сингулярне інтегральне рівняння

Надамо відбите у області $z > 0$ решіткою поле як суму полів струмів, які течуть кожною стрічкою. Поле кожної стрічки окремо представимо у вигляді поля стрічок нескінченної періодичної решітки і поля корекції, яке виникає за рахунок відсутньої однієї стрічки,

$$H_x^r(y, z) = H_x^{r, \infty, 0}(y, z) + H_x^{r, c}(y, z), \quad (2.1)$$

де $H_x^{r, \infty, 0}(y, z)$ і $H_x^{r, c}(y, z)$ шукаємо як потенціал подвійного шару [167], [168]

$$H_x^{r, \infty, 0}(y, z) = \frac{i}{4} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \int_{-d}^d \mu_m^\infty(y'+lm) \frac{\partial}{\partial z'} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + (z-z')^2}\right) dy', \quad z'=0, \quad (2.2)$$

$$H_x^{r, c}(y, z) = \frac{i}{4} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \int_{-d}^d \mu_m(y'+lm) \frac{\partial}{\partial z'} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + (z-z')^2}\right) dy', \quad z'=0, \quad (2.3)$$

$\mu_m^\infty(y'+lm)$, $\mu_m(y'+lm)$ є з точністю до константи густина поверхневого струму для нескінченної періодичної решітки і струму, який виникає за рахунок відсутності однієї стрічки. Вони течуть стрічкою з номером m . $H_0^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля першого роду. Сумування проводиться по всіх стрічках, $m = -\infty, \dots, \infty$, за винятком відсутньої стрічки з номером 0, $m \neq 0$. Функція $\mu_m^\infty(y)$ виражається через амплітуди розсіяного нескінченною періодичною решіткою поля за допомогою ряду Фур'є

$$\mu_m^\infty(y) = \begin{cases} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\zeta_n y), & |y_m| \leq d, \\ 0, & |y_m| > d, \end{cases}$$

де a_n – амплітуди Фур'є. Розв'язок задачі про дифракцію на плоскій нескінченній періодичній решітці наведено у пункті 1.3.1. Задача зводиться до сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою у безрозмірних координатах (1.46), (1.48) з ядром (1.47).

Подамо густину поверхневого струму на стрічках $\mu_m(y)$ за допомогою інтеграла Фур'є

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} c_m(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \begin{cases} \mu_m(y), & |y_m| \leq d, \\ 0, & |y_m| > d. \end{cases}$$

Функції $c_m(\xi)$, $m \neq 0$, невідомі. Введемо амплітуду Фур'є поля корекції за формулою

$$c(\xi) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} c_m(\xi).$$

Тоді, використовуючи інтегральне подання функції Ханкеля, поле (2.3) можна записати у вигляді

$$H_x^{r,c}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik(\xi y + \gamma(\xi)z)) d\xi, \quad z > 0.$$

Позначимо y -координати стрічок через $L = \bigcup_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} (-d + lm; d + lm)$. Для визначення функції $c(\xi)$ з граничних умов можуть бути отримані наступні парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \gamma(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial}{\partial z} H^i(y, 0) + \frac{\partial}{\partial z} H^{r, \infty, 0}(y, 0) \right) = g(y), \quad y \in L. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.4) випливає з умови, що поза стрічками густина поверхневих струмів дорівнює нулю. Рівняння (2.5) є умовою того, що дотична компонента електричного поля на металі є нульовою.

Беручи до уваги (2.2) помітимо, що права частина (2.5) може мати особливості на шляху інтегрування. Перетворимо праву частину рівняння (2.5). Надамо поле $H^{r, \infty, 0}(y, 0)$ як різницю полів струмів, які течуть стрічками нескінченної періодичної решітки і стрічкою з номером 0

$$H_x^{r, \infty, 0}(y, z) = H_x^{r, \infty}(y, z) - H_x^{r, 0}(y, z), \quad (2.6)$$

$$H_x^{r, 0}(y, z) = \frac{i}{4} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\zeta_n y') \frac{\partial}{\partial z'} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(y - y' - lm)^2 + (z - z')^2} \right) dy', \quad z' = 0.$$

Помножимо рівність (1.41) зліва і справа на $\exp(-iky \sin \alpha)$. Тоді зліва буде стояти $\frac{\partial}{\partial z} H^{r, \infty}(y, 0)$, а справа — $-\frac{\partial}{\partial z} H^i(y, 0)$. У зв'язку з тим, що рівність

$$(1.41) \text{ виконується для всіх } y \in L, \text{ то } \frac{\partial}{\partial z} H^{r, \infty}(y, 0) = -\frac{\partial}{\partial z} H^i(y, 0), \quad y \in L.$$

Беручи до уваги (2.6), після диференціювання по z і z' , остаточно отримаємо

$$g(y) = \frac{1}{2} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\zeta_n y') \frac{H_1^{(1)}(k|y - y'|)}{|y - y'|} dy'. \quad (2.7)$$

У зв'язку з тим, що в (2.5) $|y| > d$, підінтегральна функція не містить особливостей на відрізку інтегрування.

Парні інтегральні рівняння (2.4), (2.5) для поля корекції нескінченної періодичної решітки без однієї стрічки і рівняння (1.83), (1.84) для поля корекції напівнескінченної решітки мають схожий вигляд. Вони відрізняються лише правою частиною $g(y)$ і множиною стрічок L . Асимптотичний вираз для підінтегральної функції у лівій частині (2.5) залишається таким самим, $\gamma(\xi) \sim i\xi$, $\xi \rightarrow \infty$. Тому для зведення парних інтегральних рівнянь (2.4), (2.5) можна застосувати таку ж схему, як і для (1.83), (1.84). В результаті отримаємо сингулярне інтегральне рівняння з додатковими умовами (1.88), (1.89),

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = ikg(y), \quad y \in L,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d}^d F(\xi + lm) d\xi = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$K(y, \xi) = k \int_0^\infty \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta,$$

де функція

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ik\xi c(\xi) \exp(iky\xi) d\xi$$

має сенс похідної густини струмів корекції на стрічках,

$$c(\xi) = \frac{1}{2\pi i \xi} \int_L F(y) (\exp(-iky\xi) - 1) dy.$$

При віддалені від відсутньої стрічки струми на провідниках повинні наближатися до струмів для нескінченної періодичної решітки. При досить великих значеннях y , $ky \gg 1$, функція $g(y)$ асимптотично описує циліндричну хвилю, амплітуда якої спадає при $|y| \rightarrow \infty$. Поле струмів, наведених на стрічках решітки полем $g(y)$, так само буде асимптотично представляти циліндричні хвилі, амплітуда яких буде спадати при $|y| \rightarrow \infty$. Таким чином, $H_x^{r,c}(y, 0) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Тоді, при розв'язанні сингулярних

інтегральних рівнянь є обґрунтованим замінити необмежену множину L обмеженою $L_N = \bigcup_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N (-d + lm; d + lm)$, де $2N$ – кількість стрічок.

2.2.2. Аналіз фізичних результатів

Отримаємо вираз для поля в далекій зоні. Надамо вираз (2.1) з врахуванням (2.6) як

$$H_x^r(y, z) = H_x^{r,\infty}(y, z) + H_x^{r,c}(y, z) - H_x^{r,0}(y, z). \quad (2.8)$$

Перший доданок в (2.8) є множина плоских хвиль і він не спадає при $k\rho \rightarrow \infty$, $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$. Доданки $H_x^{r,c}(y, z)$, $H_x^{r,0}(y, z)$, використовуючи подання для типового дифракційного інтеграла [38], при $k\rho \rightarrow \infty$, можна записати у вигляді

$$H_x^{r,c}(y, z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} d(\varphi) \exp(i(k\rho - \pi/4)),$$

$$H_x^{r,0}(y, z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} d_0(\varphi) \exp(i(k\rho - \pi/4)),$$

$$d(\varphi) = c(\cos(\varphi)) \sin \varphi,$$

$$d_0(\varphi) = \frac{k}{2\pi} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n - \cos \varphi)y') dy', \quad \varphi \in (0; \pi),$$

φ і ρ – координати полярної системи координат (див. рис.2.1).

Замінімо множину L обмеженою множиною $L_N = \bigcup_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N (-d + lm; d + lm)$,

де $2N$ – число стрічок. Дослідимо збіжність процесу при збільшенні числа N . На рис.2.2 наведено діаграми спрямованості $d(\varphi)$ при різному числі стрічок N , $kl = \pi$, $kd = \pi/4$. Графіки нормуються на максимум, що досягається при $N = 1$, $\varphi = 90^\circ$. Для кожної стрічки вибиралося $M = 5$ вузлів у квадратурній формулі, при обчисленні функції $g(y)$ використовувалося 9

вузлів і 800 членів ряду. Криві демонструють осцилюючий характер, зі збільшенням N наближаються до гладкої кривої. Відмінності між кривими спостерігаються в максимумах пелюстків. Криві для $N = 30$ і $N = 40$ співпадають з графічною точністю.

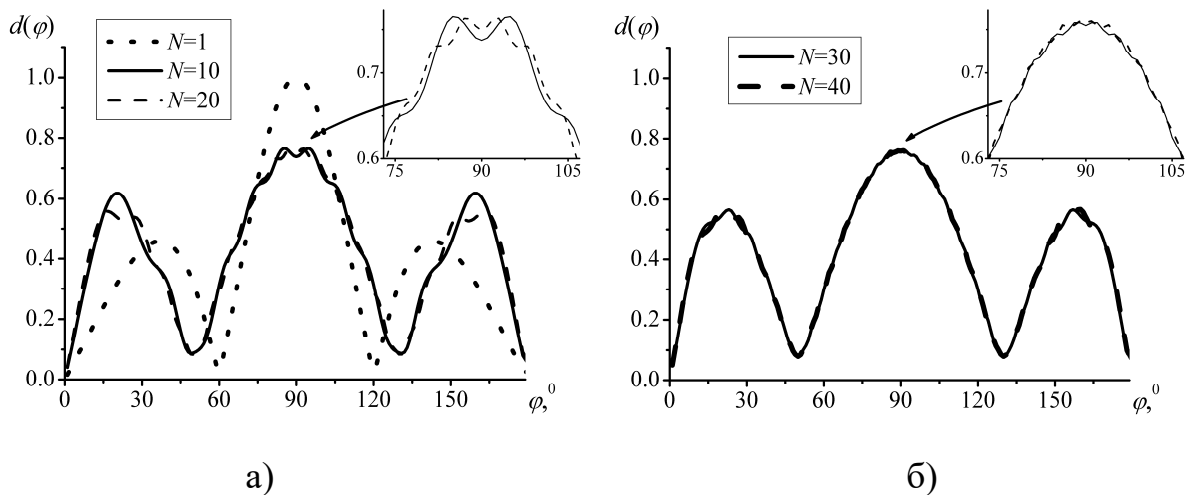


Рис.2.2 Залежності нормованої функції $d(\varphi)$ від кута φ при різній кількості стрічок N , $kd = \pi/4$, $kl = \pi$, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $N = 1$ (пунктирна крива), $N = 10$ (суцільна крива), $N = 20$ (штрихова крива); б) $N = 30$ (суцільна крива); $N = 40$ (штрихова крива)

Зауважимо, що вираз (2.5) описує збудження струмів на всіх стрічках решітки полем струмів, які течуть одиночною відкинутою стрічкою з номером 0, а також електромагнітний взаємозв'язок стрічок решітки між собою, що виникає за рахунок відсутності однієї стрічки. Таким чином, функція $H_x^{r,c}(y, z)$ описує взаємодію між собою двох решіток, розташованих в областях $y < 0$ і $y > 0$, що виникає під дією поля відкинутої нульової стрічки.

На рис.2.3 наведено нормовані діаграми спрямованості $d(\varphi)$, $d_0(\varphi)$ для різних значень періоду і ширини стрічки при ортогональному падінні. Параметри $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$ відносяться до резонансної області. Для всіх

трьох кривих на рис.2.3 абсолютні значення функції $H_x^{r,0}(y,z)$ перевищують значення функції $H_x^{r,c}(y,z)$. Так, для випадку $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$, виконується співвідношення $\max|H_x^{r,0}|/\max|H_x^{r,c}| \approx 2.6$. Для випадку $kl = \pi$, $kd = \pi/4$: $\max|H_x^{r,0}|/\max|H_x^{r,c}| \approx 7.44$. Для випадку $kl = \pi$, $kd = \pi/8$: $\max|H_x^{r,0}|/\max|H_x^{r,c}| \approx 34.4$. При ширині стрічки $kd = \pi/8$ внесок у розсіяне поле в далекій зоні доданка $H_x^{r,c}(y,z)$ виявляється зневажливо малим у порівнянні з доданком $H_x^{r,0}(y,z)$. У цьому випадку взаємним впливом двох решіток, розташованих в областях $y < 0$ і $y > 0$, можна знехтувати ($\max|H_x^{r,0}|/\max|H_x^{r,c}| \approx 34.4$), враховуючи лише поле стрічок нескінченної періодичної решітки і поле відкинутої стрічки (з протилежним знаком).

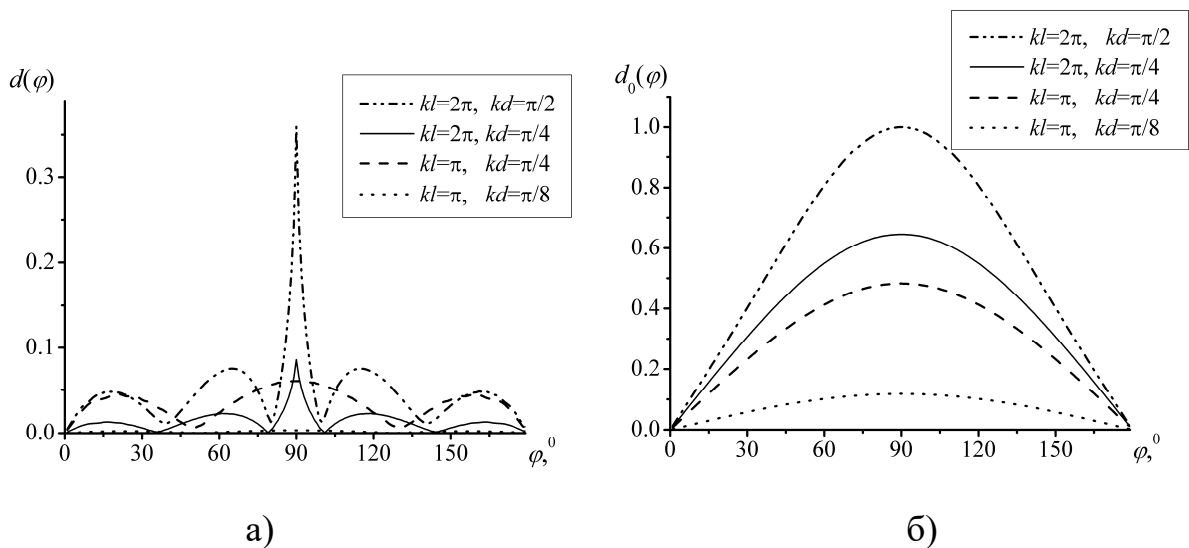


Рис.2.3 Залежності нормованих функції $d(\varphi)$, $d_0(\varphi)$ від кута φ при $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$ (штрих-пунктирні криві), $kl = 2\pi$, $kd = \pi/4$ (суцільні криві), $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ (штрихові криві), $kl = \pi$, $kd = \pi/8$ (пунктирні криві), $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $d(\varphi)$, б) $d_0(\varphi)$

Взаємний вплив стрічок у нескінченній періодичній решітці є малим, за винятком випадку аномалій Релея-Вуда. У цьому випадку спостерігається

збудження вищих гармонік Флоке в періодичній частині структури або витікаючих хвиль у скінченній решітці. Як і у разі скінченних періодичних решіток, збільшення періоду призводить до появи додаткових пелюстків у діаграмі спрямованості. Це пов'язано зі збудженням вищих гармонік у періодичній частині структури.

На рис.2.4 наведено розподіл поля $|H_x^{r,c}(y,0)|$ в площині $z=0$ для різних значень періоду, ширини стрічок і кутів падіння $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$. На рис.2.5 наведено розподіл поля $|H_x^{r,c}(y,0)|$ і $|H_x^r(y,0)|$ для $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ і $kl = 7$, $kd = \pi/2$. Функція $H_x^{r,c}(y,0)$ дорівнює з точністю до константи густині струмів, які виникають за рахунок відсутності однієї стрічки. Спостерігається наявність максимумів в центрі стрічок, а між стрічками $H_x^{r,c}(y,0)$ наближається до нуля.

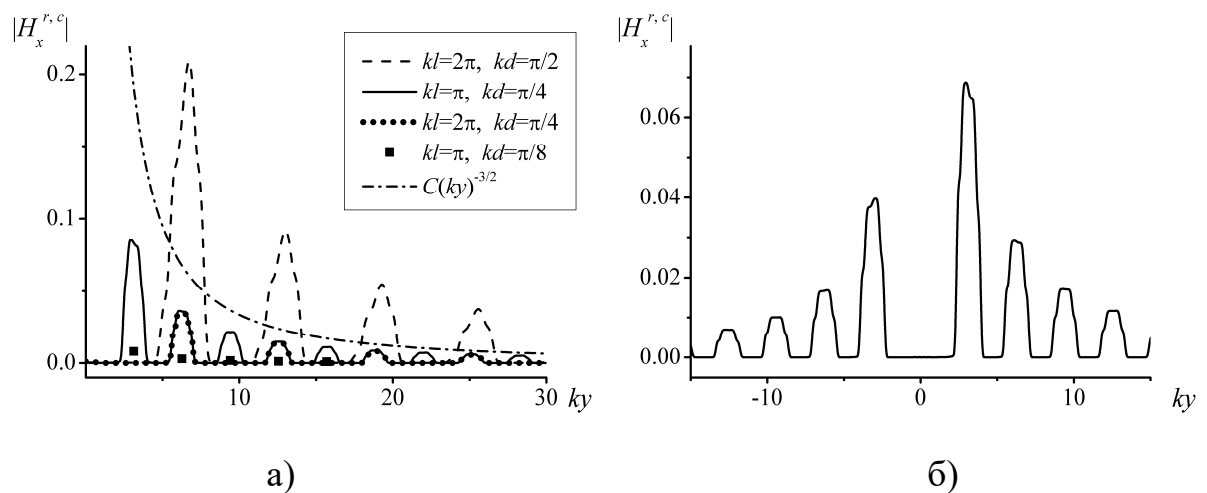


Рис.2.4 Розподіл поля $|H_x^{r,c}(y,0)|$ в площині $z=0$ при $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$ (штрихова крива), $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ (суцільні криві), $kl = 2\pi$, $kd = \pi/4$ (пунктирна крива), $kl = \pi$, $kd = \pi/8$ (маркери в локальних максимумах), а також функції $C \cdot (ky)^{-3/2}$ (штрих-пунктирна крива). а) $\varphi_0 = 90^\circ$, б) $\varphi_0 = 45^\circ$

Для порівняння також наведено результати для скінченної решітки. Скінченна решітка складається з 80 стрічок. Проекція множини стрічок на осі

$Oy - \bigcup_{\substack{m=-40 \\ m \neq 0}}^{40} (-\pi/k + 2\pi m/k; \pi/k + 2\pi m/k)$. Для кожної стрічки вибиралося 20

вузлів. Розв'язок отримано методом дискретних особливостей. Спостерігається співпадіння результатів з графічною точністю, вдалині від відсутньої стрічки струм наближається до струму на стрічках нескінченної періодичної решітки. Це дозволяє судити про вірність отриманих результатів. Як і передбачалося, функція $H_x^{r,c}(y,0)$ наближається до нуля при віддаленні від відсутньої стрічки, причому $H_x^{r,c}(y,0) \sim O((ky)^{-3/2})$, при $ky \rightarrow \infty$. Для порівняння у якості штрих-пунктиру на рис.2.4 наведена крива $C \cdot (ky)^{-3/2}$.

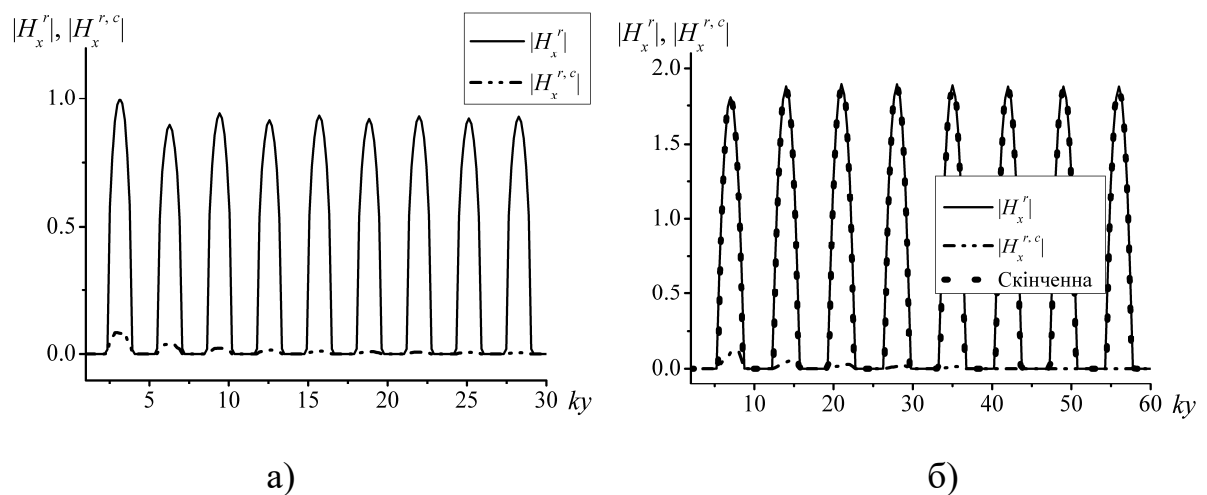


Рис.2.5 Розподіл поля $|H_x^r(y,0)|$ (суцільні криві) і $|H_x^{r,c}(y,0)|$ (штрих-пунктирні криві) в площині $z = 0$. а) $kl = \pi$, $kd = \pi/4$, б) $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$.

Крива з точок – скінченна решітка

При нормальному падінні, $\varphi_0 = 90^\circ$, графік функції $|H_x^{r,c}(y,0)|$ є симетричним відносно вертикальної осі. При падінні під кутом $\varphi_0 = 45^\circ$ амплітуда струмів на стрічках в області $y > 0$ перевершує амплітуду струмів на стрічках в області $y < 0$. При зменшенні ширини стрічок у два рази максимуми функції $|H_x^{r,c}(y,0)|$ для $kd = \pi/4$ більш ніж у 7 разів

перевершують максимуми для $kd = \pi/8$. Розподіл поля корекції в області над решіткою для випадку $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ і нормального падіння, $\varphi_0 = 90^\circ$, наведено на рис.2.6. Чітко видно максимум амплітуди поля корекції поблизу області дефекту.

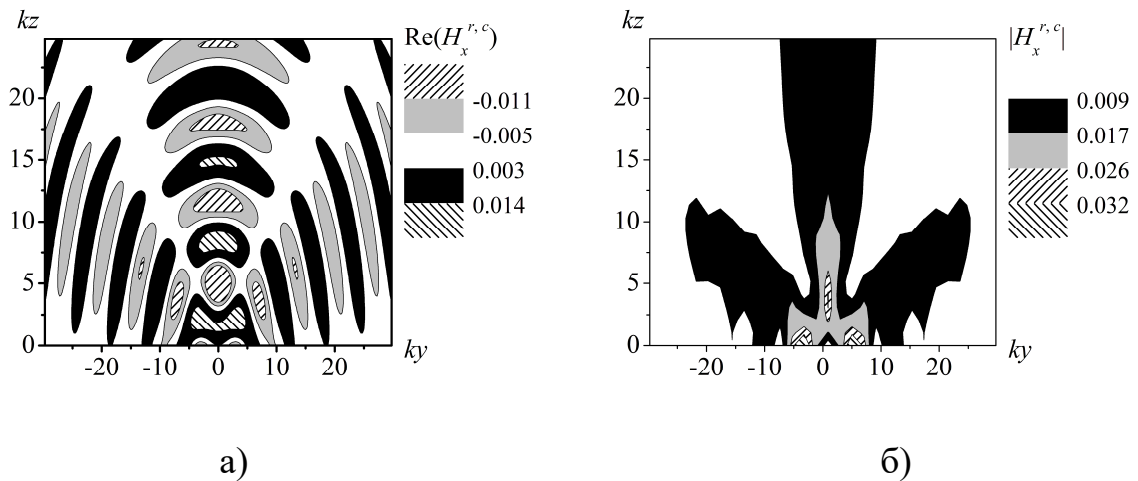


Рис.2.6 Розподіл відбитого поля корекції при $kd = \pi/4$, $kl = \pi$, $\varphi_0 = 90^\circ$.

а) $\text{Re}(H_x^{r,c}(y,z))$, б) $|H_x^{r,c}(y,z)|$

2.3. Випадок E -поляризації

2.3.1. Сингулярне інтегральне рівняння

Нехай на структуру падає плоска E -поляризована хвиля (1.37). Як і у разі H -поляризації, відбите в область $z > 0$ поле будемо шукати у вигляді суми двох полів. Перше – це поле струмів, які течуть стрічками нескінченної періодичної решітки (за виключенням видаленої стрічки з номером 0) $E_x^{r,\infty,0}(y,z)$. Друге – це поле струмів корекції, які виникають за рахунок відсутності стрічки $E_x^{r,c}(y,z)$,

$$E_x^r(y,z) = E_x^{r,\infty,0}(y,z) + E_x^{r,c}(y,z). \quad (2.9)$$

Поля $E_x^{r,\infty,0}(y,z)$ і $E_x^{r,c}(y,z)$ надамо як суму полів струмів, які течуть кожною стрічкою окремо і виразимо їх за допомогою потенціалів простого шару с деякою густиною

$$E_x^{r,\infty,0}(y,z) = \frac{i\omega\mu_0}{4} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \int_{-d}^d \mu_m^\infty(y'+lm) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2+z^2}\right) dy',$$

$$E_x^{r,c}(y,z) = \frac{i\omega\mu_0}{4} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \int_{-d}^d \mu_m(y'+lm) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2+z^2}\right) dy', \quad (2.10)$$

де $\mu_m^\infty(y'+lm)$, $\mu_m(y'+lm)$ є (с точністю до константи) густина поверхневих струмів на стрічках нескінченної періодичної решітки і струмів, які виникають за рахунок відсутньої стрічки, що течуть стрічкою з номером m . Сумування, як і раніше, проводиться по всіх стрічкам, $m = -\infty, \dots, \infty$, за виключенням відсутньої стрічки, $m \neq 0$. Функція $\mu_m^\infty(y)$ виражається через поле $H_y^{r,\infty}(y,0)$ за формулою

$$\mu_m^\infty(y) = \begin{cases} \frac{2}{i} H_y^{r,\infty}(y,0), & |\hat{y}_m| \leq d, \\ 0, & |\hat{y}_m| > d, \end{cases}$$

де $\hat{y}_m = y - ml$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ – локальна координата, пов'язана з центром m -ї стрічки.

Надамо густину поверхневих струмів $\mu_m(y)$ як інтеграл Фур'є,

$$\frac{2k}{i\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} c_m(\xi) \gamma(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \begin{cases} \mu_m(y), & |\hat{y}_m| \leq d, \\ 0, & |\hat{y}_m| > d. \end{cases}$$

Функції $c_m(\xi)$ – невідомі амплітуди. Введемо амплітуду Фур'є поля корекції за формулою

$$c(\xi) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} c_m(\xi).$$

Тоді, використовуючи інтегральне подання функції Ханкеля, поле (2.10) можна записати у вигляді інтеграла Фур'є

$$E_x^{r,c}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik(\xi y + \gamma(\xi)z)) d\xi, \quad z > 0.$$

Для визначення функції $c(\xi)$ з граничних умов можуть бути отримані наступні парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \gamma(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (2.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = -(E_x^i(y, 0) + E_x^{r,\infty,0}(y, 0)) = g(y), \quad y \in L. \quad (2.12)$$

Права частина рівняння (2.12) містить інтегровану особливість на шляху інтегрування. Проте, з (2.10) випливає, що вона представляється у вигляді ряду. Перетворимо праву частину рівняння (2.12) таким чином, щоб позбавитися від ряду, а також, від особливості на шляху інтегрування. Надамо поле $E_x^{r,\infty,0}(y, 0)$ як різницю полів струмів, які течуть стрічками нескінченної періодичної решітки і стрічкою з номером “0”:

$$E_x^{r,\infty,0}(y, z) = E_x^{r,\infty}(y, z) - E_x^{r,0}(y, z), \quad (2.13)$$

$$E_x^{r,0}(y, z) = \frac{i\omega\mu_0}{4} \int_{-d}^d \frac{2}{i} H_y^{r,\infty}(y', 0) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y - y' - lm)^2 + z^2}\right) dy'.$$

У разі E -поляризації розв’язок задачі про дифракцію плоскої хвилі на нескінченній періодичній решітці було отримано з використанням відповідного розв’язку для випадку H -поляризації з застосуванням принципу дуальності. Для перетворень $g(y)$ нам знадобляться парні інтегральні рівняння. Парні інтегральні рівняння у разі E -поляризації мають вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{l} y'\right) &= 0, \quad |y'| \geq l/2 - d \quad (\text{на стрічці}), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \gamma_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{l} y'\right) &= \gamma_0, \quad |y'| < l/2 - d \quad (\text{на щілині}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

де $b_n = a_n \exp(i\pi n)$, при $n \neq 0$, $b_0 = a_0 + 1$, a_n – амплітуди Фур’є.

Помножимо рівняння (2.14) зліва і справа на $\exp(-iky \sin \alpha)$. Тоді зліва буде стояти $E_x^{r,\infty}(y,0)$, а справа – $-E_x^i(y,0)$. У зв'язку з тим, що рівність (2.14) виконується для всіх $y \in L$, то $E_x^{r,\infty}(y,0) = -E_x^i(y,0)$, $y \in L$. Враховуючи (2.13), остаточно отримуємо

$$g(y) = \frac{\omega\mu_0}{2} \int_{-d}^d H_y^{r,\infty}(y',0) H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy'. \quad (2.15)$$

Помітимо, що в (2.12) $|y| > d$. Тому підінтегральна функція в $g(y)$ у вигляді (2.15) не містить особливостей на відрізку інтегрування.

У разі решітки без однієї стрічки для амплітуди Фур'є поля корекції отримано парні інтегральні рівняння (2.11), (2.12) схожого вигляду з випадком напівнескінченної решітки (1.94), (1.95). Вони відрізняються правою частиною $g(y)$ і множиною стрічок L . Асимптотичний вираз для підінтегральної функції у лівій частині (2.12) співпадає з асимптотичним виразом для відповідної функції у (1.95), при $\xi \rightarrow \infty$. Тому для зведення парних інтегральних рівнянь (2.11), (2.12) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами можна застосувати ту саму схему, як і для (1.94), (1.95). В результаті отримаємо рівняння вигляду (1.101), (1.102), де функція $g(y)$ задається формулою (2.15).

При віддалені від відсутньої стрічки струми на провідниках наближаються до струмів для нескінченної періодичної решітки. При досить великих значеннях y (у порівнянні з довжиною хвилі) функція $g(y)$, як і у разі H -поляризації, асимптотично є циліндричною хвилею, амплітуда якої спадає при $y \rightarrow \infty$. Поле струмів, наведених на стрічках решітки полем $g(y)$, так само може бути надано асимптотично як циліндричні хвилі, амплітуда яких буде спадати при $y \rightarrow \infty$. Таким чином, $E_x^{r,c}(y,0) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Тоді, при розв'язанні сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами

можливо буде замінити множину L обмеженою множиною

$$L_N = \bigcup_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N (-d + lm; d + lm), \text{ де } 2N - \text{число стрічок.}$$

2.3.2. Аналіз фізичних результатів

Запишемо вираз для поля у далекій зоні. Надамо вираз (2.9), з врахуванням (2.13), як

$$E_x^r(y, z) = E_x^{r,\infty}(y, z) + E_x^{r,c}(y, z) - E_x^{r,0}(y, z). \quad (2.16)$$

Перший доданок в (2.16) є множина плоских хвиль і не спадає при $k\rho \rightarrow \infty$. Доданки $E_x^{r,c}(y, z)$ і $E_x^{r,0}(y, z)$, використовуючи підання для типового дифракційного інтеграла [38], при $k\rho \rightarrow \infty$, можна записати у вигляді

$$E_x^{r,c}(y, z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} d(\varphi) \exp(i(k\rho - \pi/4)),$$

$$E_x^{r,0}(y, z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} d_0(\varphi) \exp(i(k\rho - \pi/4)),$$

$$d(\varphi) = u(\cos(\varphi)),$$

$$d_0(\varphi) = \frac{Z}{2\pi} \int_{-d}^d H_y^{r,\infty}(y', 0) \exp(ik \cos(\varphi)y') dy', \quad \varphi \in (0; \pi).$$

Функція $d(\varphi)$ є діаграма спрямованості поля, що виникло за рахунок відсутності однієї стрічки.

Замінімо множину L обмеженою множиною $L_N = \bigcup_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N (-d + lm; d + lm)$,

де $2N$ – число стрічок. Дослідимо збіжність процесу при збільшенні числа N . На рис.2.7 наведено діаграми спрямованості $d(\varphi)$ при різному числі стрічок N , $kl = \pi$, $kd = \pi/4$. Графіки нормуються на максимум, що досягається при $N = 40$. Для кожної стрічки вибиралося $M = 3$ вузла у

квадратурній формулі, при обчисленні функції $g(y)$ використовувалося 150 вузлів. Як і у разі H -поляризації, криві мають ламаний характер. Зі збільшенням N наближаються до граничного випадку. Відмінності між кривими спостерігаються в максимумах пелюстків. Криві для $N = 30$ і $N = 40$ співпадають з графічною точністю.

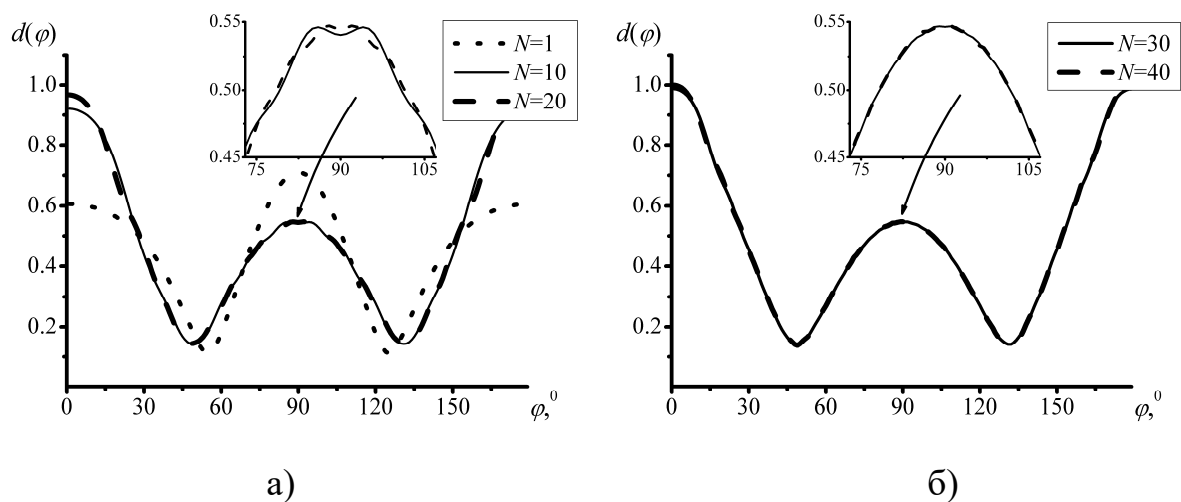


Рис.2.7 Залежності нормованої функції $d(\varphi)$ від кута φ при різній кількості стрічок N , $kd = \pi/4$, $kl = \pi$, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $N = 1$ (пунктирна крива), $N = 10$ (суцільна крива), $N = 20$ (штрихова крива); б) $N = 30$ (суцільна крива); $N = 40$ (штрихова крива)

На рис.2.8 наведено нормовані діаграми спрямованості $d(\varphi)$ для двох різних значень ширини стрічки і періоду при ортогональному падінні, $\varphi_0 = 90^\circ$. Нормування здійснюється на максимум, який досягається при $kl = \pi$, $kd = \pi/4$. При однаковому значенні періоду збільшення ширини стрічок призводить до збільшення максимумів пелюстків діаграми спрямованості. Для всіх кривих на рис.2.8 абсолютні значення функції $E_x^{r,0}(y,z)$ перевершують значення функції $E_x^{r,c}(y,z)$. Для випадку $kl = \pi$, $kd = \pi/4$, виконується співвідношення $\max|E_x^{r,0}|/\max|E_x^{r,c}| \approx 1.5$. Рис.2.8 б) побудовано для співвідношення періоду і довжини хвилі, близького до

резонансного, $l = \lambda$. Електромагнітний взаємозв'язок решіток, розташованих в областях $y < 0$ і $y > 0$, значно нижче, ніж для випадку, наведеного на рис.2.8.а), $\max|E_x^{r,0}| / \max|E_x^{r,c}| \approx 10$. Коефіцієнт відбиття нескінченної періодичної решітки при такому значенні періоду так само є малим [33]. Періодична стрічкова решітка у разі E -поляризації поблизу аномалій Релея-Вуда стає практично прозорою. Як і у разі скінченних періодичних решіток, збільшення періоду призводить до появи додаткових пелюстків. Це пов'язане зі збудженням вищих гармонік у періодичній частині структури.

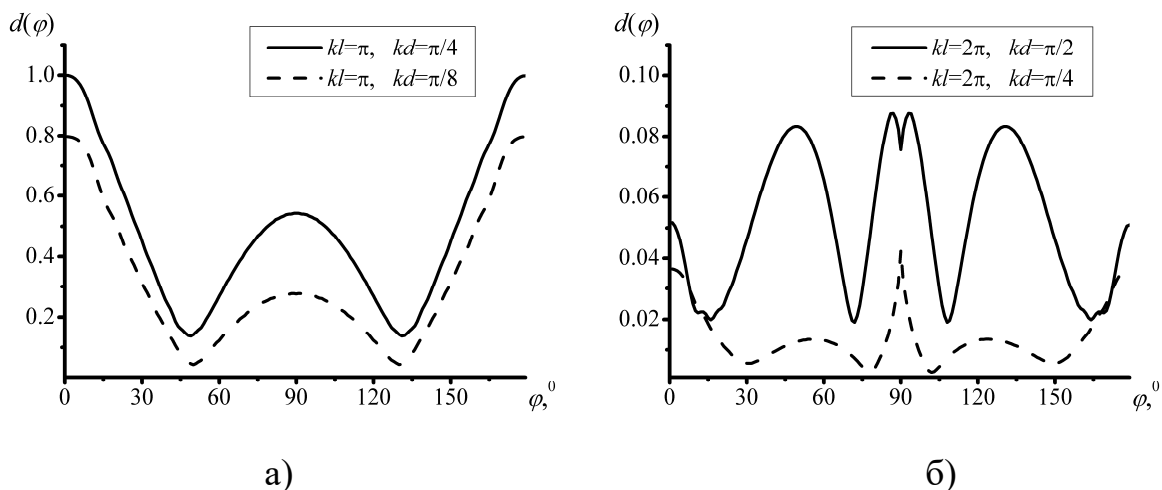


Рис.2.8 Залежності нормованої функції $d(\varphi)$ від кута φ при $\varphi_0 = 90^\circ$.

- а) $kl = \pi, kd = \pi/4$ (суцільна крива), $kl = \pi, kd = \pi/8$ (штрихова крива);
 б) $kl = 2\pi, kd = \pi/2$ (суцільна крива), $kl = 2\pi, kd = \pi/4$ (штрихова крива)

При наближенні до країв стрічок густина струму, на відміну від випадку H -поляризації, має кореневу особливість. Введемо функції $J_c(y)$, $J_p(y)$ і $J(y)$, які мають сенс густини струмів (за виключенням кореневих особливостей) на кожній стрічці за формулами

$$J_c(y) = Z \sqrt{(y - (-d + lm))((d + lm) - y)} H_y^{r,c}(y, 0),$$

$$J_p(y) = Z \sqrt{(y - (-d + lm))((d + lm) - y)} H_y^{r,\infty}(y, 0),$$

$$J(y) = Z \sqrt{(y - (-d + lm))((d + lm) - y)} H_y^r(y, 0),$$

$$y \in (-d + lm; d + lm), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поза стрічками функції дорівнюють нулю.

На рис.2.9 наведено залежності функції $|J_c(y)|$ від координати y для різних значень періоду, ширини стрічок і кутів падіння. На рис.2.10 наведено розподіл густини струму на стрічках для $kl = \pi$, $kd = \pi / 4$ в середині стрічок при $y = ml$.

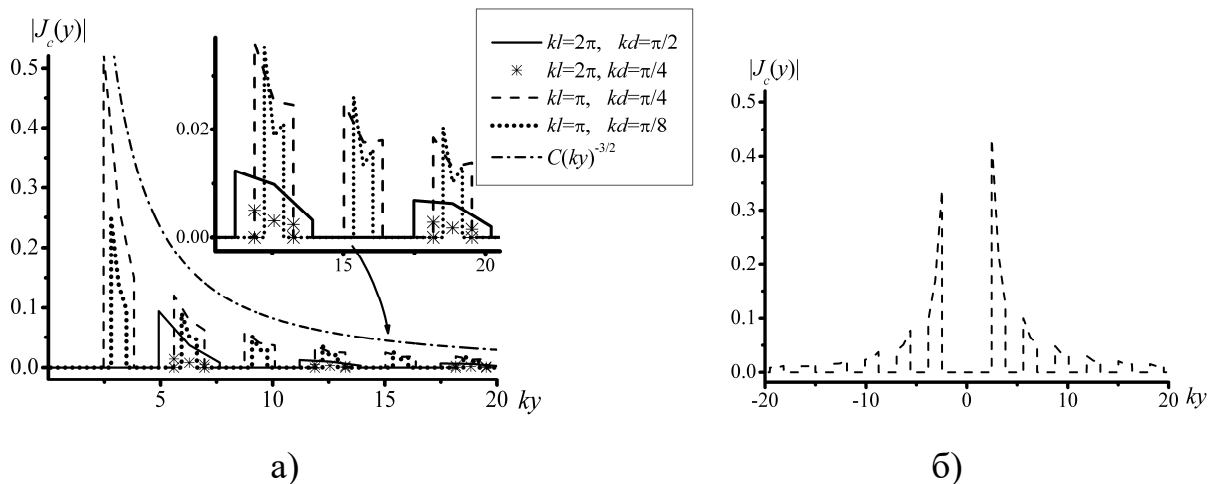


Рис.2.9 Залежності функції $|J_c(y)|$ від координати y при $kl = 2\pi$, $kd = \pi / 2$ (суцільна крива), $kl = 2\pi$, $kd = \pi / 4$ (маркери), $kl = \pi$, $kd = \pi / 4$ (штрихові криві), $kl = \pi$, $kd = \pi / 8$ (пунктирна крива), а також функції $C \cdot (ky)^{-3/2}$ (штрих-пунктирна крива). а) $\varphi_0 = 90^\circ$, б) $\varphi_0 = 45^\circ$.

Функція $H_y^{r,c}(y, 0)$ пропорційна густині струмів, які виникли за рахунок відсутності однієї стрічки, функція $H_y^{r,\infty}(y, 0)$ пропорційна густині струмів на стрічках нескінченної періодичної решітки, а функція $H_y^r(y, 0)$ пропорційна повній густині струмів на стрічках решітки. Відзначимо, що на відміну від функції $d(\varphi)$, різниця між значеннями $|J_c(y)|$, обчисленими при різних $N \geq 10$, не перевершує 0.1%. Як і передбачалося, функція $H_y^{r,c}(y, 0)$

наближається до нуля при віддалені від відсутньої стрічки, причому $H_y^{r,c}(y,0) \sim O((ky)^{-3/2})$ при $ky \rightarrow \infty$. Густина струмів наближається до густини струмів на відповідних стрічках нескінченної періодичної решітки. Для порівняння, на рис.2.9 наведена крива $C \cdot (ky)^{-3/2}$. При нормальному падінні, $\varphi_0 = 90^\circ$, графіки функцій $|J_c(y)|$, $|J_p(y)|$ і $|J(y)|$, очевидно, симетричні відносно вертикальної осі. При падінні під кутом $\varphi_0 = 45^\circ$ амплітуда струмів $|J_c(y)|$ на стрічках в області $y > 0$ перевершує амплітуду струмів на відповідних стрічках в області $y < 0$.

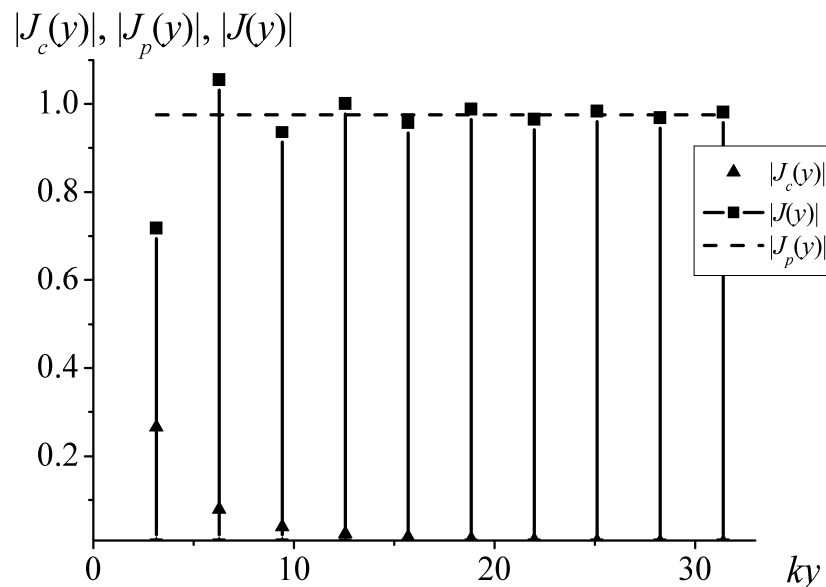


Рис.2.10 Значення функцій $|J_c(y)|$, $|J_p(y)|$, $|J(y)|$ в центрі стрічок при $y = ml$,

$$kl = \pi, kd = \pi / 4, \varphi_0 = 90^\circ.$$

Висновки до розділу 2

В роботі вперше отримано строгий розв'язок задач про дифракцію H - і E - поляризованої хвилі на нескінченній періодичній решітці без однієї стрічки. Струми на стрічках надано як суму струмів, що течуть стрічками

нескінченної періодичної решітки і струму корекції, викликаного відсутністю однієї стрічки. Амплітуда Фур'є поля корекції, як і амплітуди Фур'є розсіяного поля нескінченною періодичною решіткою, визначені з сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами. Числовий розв'язок отримано методом дискретних особливостей.

Вірність результатів підтверджена порівнянням з результатами, отриманими для скінченної решітки. Проведено числове дослідження збіжності.

Визначено розсіяне поле, яке індукується струмами корекції. Проведено числове дослідження поля, викликаного відсутністю однієї стрічки. Досліджено розподіл поля в ближній і далекій зоні. Отримані результати розкривають закономірності поведінки поля корекції. У випадку H -поляризації максимальне збудження струмів корекції спостерігається поблизу аномалій Релея-Вуда.

У полі корекції в далекій і середній зоні чітко видно головний пелюсток у разі H -поляризації, а у разі E -поляризації – головний пелюсток і бічні пелюстки поблизу площини решітки. У разі H -поляризації поблизу резонансної області (найцікавіший випадок з погляду практичного застосування) головний пелюсток перевищує бічні приблизно в 10 разів, у картині поля корекції у ближній зоні максимум амплітуди поблизу відсутньої стрічки є чітко помітним, що дозволяє застосовувати побудовану модель при виявленні дефектів.

Розділ 3. Дифракція Н-поляризованої хвилі на двох напівнескінченних стрічкових решітках, що лежать в одній площині, з довільним зазором між ними

3.1. Постановка задачі

Розглянемо дві напівнескінченні однакові стрічкові решітки, які лежать у площині $y = 0$. Ширина стрічок дорівнює $2d$, період дорівнює l , відстань між серединами крайніх стрічок напівнескінченних решіток позначимо як $\Delta > 2d$. Перша решітка розташована в області $y > -d$, середина крайньої стрічки співпадає з початком координат. Друга решітка розташована в області $y < -\Delta + d$. Стрічки нескінченні вздовж осі Ox і мають нульову товщину. Геометрію структури наведено на рис.3.1.

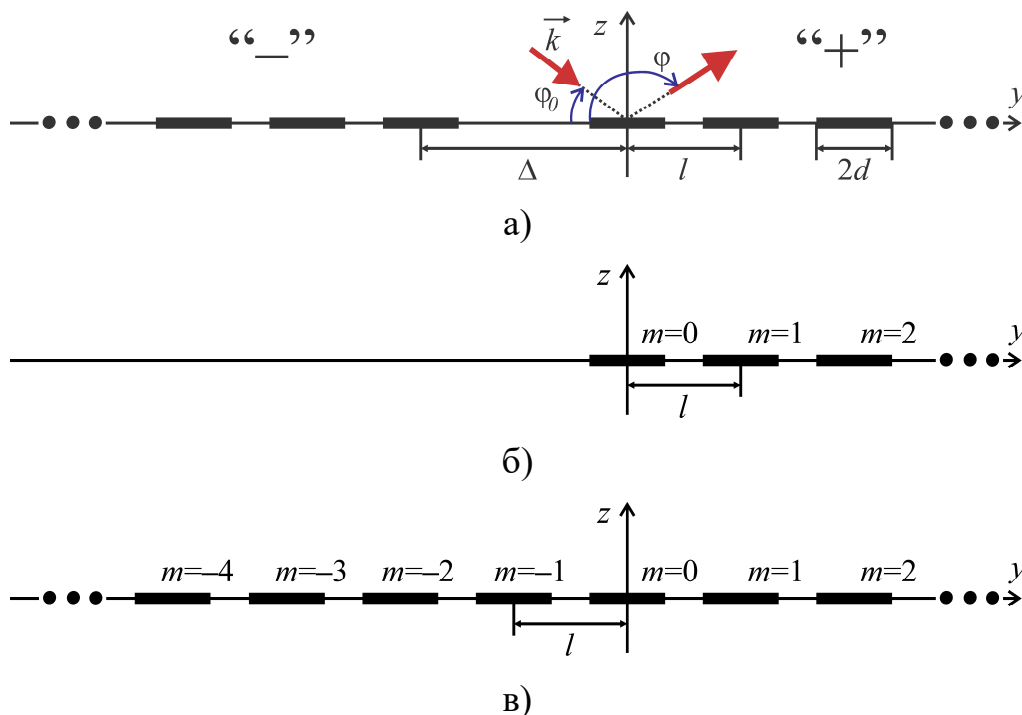


Рис.3.1 Геометрія досліджуваної структури. а) Дві однакові напівнескінченні періодичні решітки з довільним зазором між ними, б) поодинокі напівнескінченна періодична решітка, в) нескінченна періодична решітка

Припустимо, що на структуру з області $z > 0$ під кутом φ_0 до осі Oy падає плоска H -поляризована хвиля (1.37),

$$H^i(y, z) = \exp(ik(y \sin \varphi_0 - z \cos \varphi_0)).$$

Повне поле будемо шукати у вигляді суми падаючого і розсіяного полів,

$$H^{total} = H^i + H^{sc}.$$

Розв'язок задачі отримаємо двома методами: методом сингулярних інтегральних рівнянь [113], [114], [169], [170] і операторним методом [171]. Принципово буде використано розв'язок задачі про дифракцію на напівнескінченній періодичній решітці, отриманий у розділі 1. Розсіяне поле будемо шукати у вигляді суми полів, розсіяних на ізольованих напівнескінченних решітках і поля, викликаного взаємодією напівнескінченних решіток.

3.2. Метод сингулярних інтегральних рівнянь

Розсіяне поле надамо у наступному вигляді:

$$H^{sc} = H^{+, \infty} + H^{-, \infty} + H^c \quad (3.1)$$

де $H^{\pm, \infty}$ – це поле, розсіяне на ізольованих напівнескінченних решітках, розміщених у напівплощині $y > 0$ (знак “+”) і $y < 0$ (знак “-”), H^c – це поле корекції, викликане збудженням струмів корекції. Струми корекції виникають за рахунок взаємодії між двома напівнескінченними решітками. Необхідно прояснити, що у розглянутій задачі є два різні типи струмів корекції. У випадку ізольованої періодичної напівнескінченної структури струми корекції збуджуються за рахунок наявності краю. Поле, збуджене першим типом струмів корекції ізольованої періодичної напівнескінченної решітки, враховано у доданках $H^{\pm, \infty}$. Доданок H^c у (3.1) з'являється саме за рахунок появи електромагнітного взаємозв'язку двох напівнескінченних решіток, викликаного появою другого типу струмів корекції.

У спектральній області у просторі поза стрічками виразимо поле H^c через невідому амплітуду Фур'є $C(\xi)$,

$$H^c(y, z) = \operatorname{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|} d\xi.$$

Позначимо множину y -координат стрічок через $L = L^+ \cup L^-$, де L^\pm – множина y -координат стрічок ізольованих напівнескінченних решіток.

3.2.1. Випадок ідеально провідних стрічок

Припустимо, що стрічки є ідеально провідними.

Поза стрічками густина струмів дорівнює нулю, а на стрічках дотична компонента електричного поля дорівнює нулю, що є еквівалентним наступним парним інтегральним рівнянням:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{ik\xi y} d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\xi) C(\xi) e^{ik\xi y} d\xi = \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} (H^i(y, 0) + H^{+, \infty}(y, 0) + H^{-, \infty}(y, 0)) = g(y), \quad y \in L. \quad (3.3)$$

Поле, розсіяне на напівнескінченних решітках $H^{\pm, \infty}$, може бути подано за допомогою потенціалів подвійного шару (див. 1.38, 1.39). Тому права частина (3.3), яку позначено як $g(y)$, може мати не інтегровану особливість на шляху інтегрування, при $y \in L$. Зведемо її до такого вигляду, щоб на шляху інтегрування не було особливостей. З граничних умов на металі випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial z} (H^i(y, 0) + H^{+, \infty}(y, 0)) = 0, \quad y \in L^+,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (H^i(y, 0) + H^{-, \infty}(y, 0)) = 0, \quad y \in L^-.$$

Тоді отримаємо

$$g(y) = \begin{cases} \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} H^{-,\infty}(y,0), & y \in L^+, \\ \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} H^{+,\infty}(y,0), & y \in L^-. \end{cases} \quad (3.4)$$

У виразі для $H^{-,\infty}(y,0)$ інтегрування відбувається по множині стрічок L^- , а у виразі для $H^{+,\infty}(y,0)$ – по множині стрічок L^+ . Тому $g(y)$ у вигляді (3.4) не має особливостей на шляху інтегрування.

Парні інтегральні рівняння (3.2), (3.3) мають такий самий вигляд, як і рівняння (1.83), (1.84). Вони лише відрізняються правою частиною і множиною L . Для підінтегральної функції виконується таке ж асимптотичне надання, при $\xi \rightarrow \infty$. Тому, парні інтегральні рівняння (3.2), (3.3) можуть бути зведено до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами вигляду (1.88), (1.89),

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = ikg(y), \quad y \in L, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_m} F(\xi) d\xi = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.6)$$

і ядром

$$K(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta,$$

де L_m – множина y -координат m -ї стрічки, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$C(\xi) = \frac{1}{2\pi i \xi} \int_L F(y) (\exp(-iky\xi) - 1) dy. \quad (3.7)$$

3.2.2. Випадок імпедансних стрічок нульової товщини

Розглянемо нескінченно тонкі імпедансні стрічки. Електромагнітне поле задовольняє граничним умовам (1.49), (1.50), (1.51), (1.52) у площині стрічок, а також умові на ребрі і умові випромінювання.

Після виконання граничних умов можна отримати парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (3.8)$$

$$\frac{2ik}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi + ik \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\xi) c(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = g(y), \quad y \in L, \quad (3.9)$$

де права частина задається виразом (3.4), які можуть бути зведені, з використанням того самого алгоритму, як і в пункті 1.4.2, до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (3.5), (3.6) з ядром (1.114).

3.3. Операторний метод

Розглянемо розв'язання задачі про дифракцію плоскої H -поляризованої хвилі на двох напівнескінченних решітках операторним методом.

Припустимо, що на решітку з області $z > 0$ падає хвиля з відомою амплітудою Фур'є $q(\zeta)$,

$$H_x^i(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\zeta) \exp(ik\zeta y - ik\gamma(\zeta)z) d\zeta. \quad (3.10)$$

Розсіяне поле шукаємо як інтеграл Фур'є

$$H^{sc}(y, z) = \operatorname{sgn}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|) d\xi, \quad (3.11)$$

де $A(\xi)$ – шукана амплітуда Фур'є (спектральна функція).

При застосуванні операторного методу використовуються оператори відбиття поодинокі неоднорідності. У якості поодиноких неоднорідностей виберемо ізольовані напівнескінченні решітки, що лежать в областях $y > -d$ і $y < d$. Ведемо їхні оператори відбиття R^\pm наступним чином. Припустимо, що на ізольовану напівнескінченну решітку падає хвиля

$H_x^i(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\zeta) \exp(ik\zeta y - k\gamma(\zeta)z) d\zeta$ з амплітудою Фур'є $g(\zeta)$. Тоді

амплітуду Фур'є відбитого поля $a^\pm(\xi)$ можна знайти за формулою

$$a^\pm(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} R^\pm(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad (3.12)$$

де $R^\pm(\xi, \zeta)$ – ядро оператора R^\pm , знак "+" відповідає решітці при $y > -d$, знак "-" відповідає решітці при $y < -\Delta + d$. В операторній формі (3.12) прийме вигляд

$$a^\pm = R^\pm g. \quad (3.13)$$

Алгоритм визначення операторів відбиття напівнескінчених решіток операторним методом описано у розділі 1.

3.3.1. Операторні рівняння

Розсіяне структурою поле будемо шукати у вигляді суми двох полів. Перше описується амплітудою Фур'є $A^+(\xi)$ і представляє собою поле струмів, які течуть стрічками напівнескінченної решітки $y > -d$. Друге описується амплітудою Фур'є $A^-(\xi)$ і представляє собою поле струмів, які течуть стрічками напівнескінченної решітки $y < -\Delta + d$. Тоді (3.11) переписеться у вигляді

$$H^{sc}(y, z) = \operatorname{sgn}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} (A^+(\xi) + A^-(\xi)) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|) d\xi \quad (3.14)$$

і $A(\xi) = A^+(\xi) + A^-(\xi)$.

Амплітуди $A^\pm(\xi)$ зв'язані між собою наступними операторними рівняннями

$$A^+ = -R^+ A^- + R^+ q, \quad (3.15)$$

$$A^- = -s^+ R^- s^- A^+ + s^+ R^- s^- q, \quad (3.16)$$

де оператори s^\pm описують зміну амплітуди поля при зміщенні системи координат у позитивному (негативному) напрямку осі Oy на величину Δ .

Рівняння (3.15), (3.16) означають, що відбите поле можна надати як суперпозицію поля падаючої хвилі, відбитої ізольованими напівнескінченими решітками (другий доданок у правій частині) і поля, що випромінюється однією з напівнескінчених решіток і відбитого другою з них (перший доданок у правій частині). Перший доданок у правій частині описує багаторазові перевідбиття хвиль між решітками. Оператор s^\pm виникає в результаті того, що, за визначенням, оператор R^- – оператор відбиття решітки $y < -d$, а в розглянутій нами системі решітка зміщена на величину Δ вздовж осі Oy (див рис.3.1). Поява знака мінус у першого доданка в правій частині в (3.15), (3.16), на відміну від (3.12), пояснюється тим, що хвилі з амплітудою A^\pm й q поширюються в протилежних напрямках осі Oz . Докладно це описано, наприклад, в [150].

Поле, відбите напівнескінченими решітками може бути надано як суперпозиція плоских і циліндричних хвиль. Ядро операторів відбиття R^\pm має особливості типу полюс в точках, які відповідають постійним поширення плоских хвиль. Таким чином, оператори R^\pm є сингулярними. Введемо нові оператори R_1^\pm , виділивши сингулярну частину з R^\pm , за формулою

$$R_1^\pm = R^\pm - e^\mp R^\pm e^\pm \quad (3.17)$$

з регулярним ядром

$$R^\pm(\xi, \zeta) = \frac{R_1^\pm(\xi, \zeta)}{f^\pm(\xi, \zeta)}, \quad (3.18)$$

де оператори e^\pm визначають зміну амплітуди поля при зсуві системи координат у позитивному (негативному) напрямку осі Oy на величину періоду l . Функції $f^\pm(\xi, \zeta) = 1 - \exp(\pm ikl(\zeta - \xi))$ мають нулі в точках, які відповідають постійним поширення плоских хвиль. Для кожного фіксованого

значення ξ функція $f^\pm(\xi, \zeta)$ має нескінченне число нулів в точках $\zeta_p(\xi) = \xi + 2\pi p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для кожного фіксованого значення ζ маємо множину нулів $\zeta_p(\zeta)$.

У випадку, якщо падаюче поле має вигляд (3.10), то з (3.15), (3.16) випливає, що $A^\pm(\xi)$ мають особливості в точках $\zeta_p(\xi)$. Введемо нові невідомі функції $C^\pm(\xi)$, виділивши особливості за формулами

$$C^+ = A^+ - R^+ q, \quad (3.19)$$

$$C^- = A^- - s^+ R^- s^- q. \quad (3.20)$$

Поле з амплітудою Фур'є $C(\xi) = C^+(\xi) + C^-(\xi)$ представляється як лише циліндрична хвиля й описує взаємозв'язок напівнескінченних решіток.

Враховуючи (3.19), (3.20) і припускаючи, що падаюча хвиля має одиничну амплітуду, рівняння (3.15), (3.16) переписуться як:

$$C^+ = -R^+ s^+ R^- s^- - R^+ C^-, \quad (3.21)$$

$$C^- = -s^+ R^- s^- R^+ - s^+ R^- s^- C^+. \quad (3.22)$$

Використовуючи (3.12), (3.13), (3.17), (3.18), рівняння (3.21), (3.22) можна переписати як інтегральні рівняння:

$$C^+(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^+(\xi, \zeta)}{f^+(\xi, \zeta)} \frac{R_1^-(\zeta, \xi_l)}{f^-(\zeta, \xi_l)} \exp(ik\Delta(\zeta - \xi_l)) d\zeta - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^+(\xi, \zeta)}{f^+(\xi, \zeta)} C^-(\zeta) d\zeta, \quad (3.23)$$

$$C^-(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^-(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta)} \frac{R_1^+(\zeta, \xi_l)}{f^+(\zeta, \xi_l)} \exp(ik\Delta(\xi - \zeta)) d\zeta - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1^-(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta)} \exp(ik\Delta(\xi - \zeta)) C^+(\zeta) d\zeta. \quad (3.24)$$

Необхідно відзначити дві особливості отриманих рівнянь (3.23), (3.24). У зв'язку з тим, функція $f^\pm(\xi, \zeta)$ може обертатись в нуль, інтеграли в (3.23), (3.24) є сингулярними інтегралами, підінтегральні функції яких мають особливість вигляду $1/x$, при $x \rightarrow 0$. Водночас у разі, коли ξ співпадає з

одним з нулів для ξ_l , $\xi = \zeta_s(\xi_l)$, перший інтеграл у правій частині стає гіперсингулярним, він містить особливості другого порядку вигляду $1/x^2$, при $x \rightarrow 0$. Для усунення особливостей проводиться процедура регуляризації, внаслідок якої сингулярний і гіперсингулярний інтеграли зводяться до інтегралів у сенсі головного значення за Коші й скінченної частини за Адамаром.

3.3.2. Процедура регуляризації

3.3.2.1. Регуляризація сингулярного інтеграла

Опишемо регуляризацію інтеграла вигляду

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^\pm(\xi, \zeta) f^\mp(\zeta, \xi_l)} d\zeta \quad (3.25)$$

при $\xi \neq \zeta_s(\xi_l)$. В (3.25) для стислості через $f(\xi, \zeta)$ позначена одна з підінтегральних функцій в (3.23), (3.24). Відзначимо, що інтеграл (3.25) містить нескінченне число особливих точок. Тому спочатку розглянемо більш простий інтеграл, який містить лише одну особливу точку $\zeta = \zeta_0$,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \text{ Перетворимо контур інтегрування в комплексній площині}$$

так, щоб він співпадав з дійсною віссю всюди, за винятком особливої точки $\zeta = \zeta_0$, а особливу точку обходив знизу. Тоді, маючи на увазі, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\underset{\text{below}}{\zeta - \zeta_0}} d\zeta = \pi i, \quad (3.26)$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = 0, \quad (3.27)$$

де "below" означає, що особлива точка обходиться знизу, отримаємо

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} - \frac{f(\xi, \zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right) d\zeta + \pi i f(\xi, \zeta_0). \quad (3.28)$$

below

Перший інтеграл у правій частині в (3.28) є регулярним, значить його можна розглядати як інтеграл у сенсі головного значення за Коші. Використовуючи (3.27), остаточно запишемо

$$I_2 = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \pi i f(\xi, \zeta_0). \quad (3.29)$$

У разі, якщо особливу точку обходимо зверху (позначення "*above*"), то замість (3.26) необхідно використовувати вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = -\pi i. \quad (3.30)$$

above

Застосовуючи (3.27), (3.30), як і у випадку з (3.29), отримуємо

$$I_2 = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta - \pi i f(\xi, \zeta_0). \quad (3.31)$$

Перейдемо до обчислення сингулярних інтегралів (3.25). З умови випромінювання випливає, що в (3.23) полюса необхідно обходити зверху ($\zeta \rightarrow +0 \cdot i$), а в (3.24) – знизу ($\zeta \rightarrow -0 \cdot i$). Тоді, використовуючи (3.29), (3.30), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+_{\text{above}}(\xi, \zeta) f^-_{\text{above}}(\zeta, \xi_l)} d\zeta = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+(\xi, \zeta) f^-(\zeta, \xi_l)} d\zeta + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi))}{f^-(\zeta_k(\xi), \xi_l)} + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi_l))}{f^+(\xi, \zeta_k(\xi_l))}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+_{\text{above}}(\xi, \zeta)} d\zeta = \\ & = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^+(\xi, \zeta)} d\zeta + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta_k(\xi)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta) f^+(\zeta, \xi_l)} d\zeta = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta) f^+(\zeta, \xi_l)} d\zeta + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi))}{f^+(\zeta_k(\xi), \xi_l)} + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta_k(\xi_l))}{f^-(\xi, \zeta_k(\xi_l))}, \quad (3.34)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta)} d\zeta = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^-(\xi, \zeta)} d\zeta + \frac{\pi}{k\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta_k(\xi)). \quad (3.35)$$

В (3.32)-(3.35) враховано, що

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi)}{f^+(\xi, \zeta)} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi_l)}{f^-(\zeta, \xi_l)} = - \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi_l)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi_l)}{f^+(\zeta, \xi_l)} = - \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_k(\xi_l)} \frac{\zeta - \zeta_k(\xi)}{f^-(\xi, \zeta)} = \frac{i}{k\Delta}.$$

3.3.2.2. Регуляризація гіперсингулярного інтеграла

Нехай в (3.23), (3.24) $\xi = \zeta_s(\xi_l)$. Розглянемо спочатку, як і у попередньому пункті, простіший випадок,

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta, \quad (3.36)$$

де $f(\xi, \zeta)$, як і раніше, є однією з підінтегральних функцій в (3.23), (3.24).

Застосувавши (3.26), (3.27) і вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta = 0 \quad (3.37)$$

з (3.36) отримаємо

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} - \frac{f(\xi, \zeta_0)}{(\zeta - \zeta_0)^2} - \frac{f'(\xi, \zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right) d\zeta + \pi i f'(\xi, \zeta_0). \quad (3.38)$$

Похідна функції $f(\xi, \zeta)$ обчислюється по другій змінній. У зв'язку з тим, що інтеграл у правій частині (3.38) є регулярним, його можна

розглядати як інтеграл у сенсі скінченної частини за Адамаром (позначимо як *h.f.p.*). Остаточню (3.38) набирає вигляду

$$I_3 = h.f.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta + \pi i f'(\xi, \zeta_0). \quad (3.39)$$

Якщо особливу точку обійти зверху, використовуючи (3.30), (3.37), аналогічно (3.38) отримаємо

$$I_3 = h.f.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta - \pi i f'(\xi, \zeta_0). \quad (3.40)$$

Для регуляризації інтегралів в (3.23), (3.24) надамо підінтегральній функції вигляду

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{f^\pm(\xi, \zeta) f^\mp(\zeta, \xi_l)} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta) \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi)) \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi_l))}{f^\pm(\xi, \zeta) f^\mp(\zeta, \xi_l)} \left(\frac{1}{\prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi)) \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_k(\xi_l))} \right) d\zeta. \quad (3.41)$$

Потім, застосувавши умову випромінювання, перетворимо відрізок інтегрування в контур у комплексній площині, як було описано в пункті 3.3.2.1. Множник, що стоїть в дужках в (3.41), розкладемо на найпростіші дроби. Далі застосуємо до кожного найпростішого дроби формули (3.29) і (3.39) або (3.31) і (3.40).

3.4. Числові результати

3.4.1. Дискретизація рівнянь

Для дискретизації рівнянь, отриманих після регуляризації, замінимо нескінченний інтервал інтегрування симетричним скінченним довжини $2a$, $(-\infty; \infty) \mapsto (-a; a)$. Скінченний інтервал інтегрування розіб'ємо на K

підінтервалів рівної довжини $h = 2a/K$. Припустимо, що на кожному підінтервалі невідома функція є сталою та дорівнює значенню у вузлі. У якості вузлів виберемо середини інтервалів, $\xi_n = -a + 2a(n + 0.5)/K$, $n = 0, 1, \dots, K - 1$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta &\approx \int_{-a}^{+a} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta = \sum_{n=0}^{K-1} \int_{-a+2an/K}^{-a+2a(n+1)/K} \frac{f(\xi, \zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta \approx \\ &\approx \sum_{n=0}^{K-1} f(\xi, \xi_n) \int_{-a+2an/K}^{-a+2a(n+1)/K} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^m} d\zeta, \end{aligned} \quad (3.42)$$

де $m = 1, 2$. В (3.42) інтеграл розуміється в сенсі головного значення за Коші (при $m = 1$) або скінченній частини за Адамаром (при $m = 2$),

$$\begin{aligned} \int_{-a+2an/K}^{-a+2a(n+1)/K} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)} d\zeta &= \ln \left| \frac{-a + 2a(n+1)/K - \zeta_0}{-a + 2an/K - \zeta_0} \right|, \\ \int_{-a+2an/K}^{-a+2a(n+1)/K} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2} d\zeta &= \frac{1}{-a + 2an/K - \zeta_0} - \frac{1}{-a + 2a(n+1)/K - \zeta_0}. \end{aligned}$$

Для обчислення похідної, що виникає в (3.39), (3.40), використовується розділена різниця другого порядку, $f'(\xi, \xi_n) \approx \frac{f(\xi, \xi_{n+1}) - f(\xi, \xi_{n-1})}{2h}$.

Множину вузлів необхідно вибирати з умови, що значення ξ_l , що відповідає падаючій хвилі, має співпадати з одним з вузлів, наприклад, із вузлом з номером l . З практичної точки зору становить інтерес випромінювання в ортогональному напрямку, $\varphi = 90^\circ$. Тому K необхідно вибирати непарним. Тоді один з вузлів буде дорівнювати 0.

В результаті дискретизації може бути отримана система рівнянь вигляду

$$\hat{C} = \hat{R}\hat{C} + \hat{b}, \quad (3.43)$$

де \hat{C} – вектор, що має значення невідомих амплітуд $C^\pm(\xi)$ у вузлах, \hat{R} і \hat{b} – матриця й вектор, що відповідають правим частинам (3.23), (3.24). Для

розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.43) застосовувалася ітераційна процедура

$$\hat{C}^{(q)} = \hat{R}\hat{C}^{(q-1)} + \hat{b}, \quad q = 1, 2, \dots, Q, \quad (3.44)$$

$$\hat{C}^{(0)} = 0,$$

де $\hat{C}^{(q)}$ – вектор розв'язку, отриманого на q -й ітерації, Q – кількість ітерацій.

3.4.2. Числове дослідження збіжності

Введемо позначення. У параграфі 1.3. поле $H^{\pm, \infty}$, розсіяне напівнескінченною періодичною решіткою, шукалося у вигляді суми полів струмів, які течуть стрічками нескінченної періодичної решітки і поля корекції, $H^{\pm, \infty} = H^{\infty} + H^{c, \pm, \infty}$. Позначимо амплітуду Фур'є поля корекції ізольованої напівнескінченної решітки як $C^{\pm, \infty}(\xi)$ (порівняйте з (1.38), (1.82),

$$H^{c, \pm, \infty}(y, z) = \text{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} C^{\pm, \infty}(\xi) e^{ik\xi y + ik\gamma(\xi)|z|} d\xi.$$

Функція

$$U(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (C(\xi) + C^{\pm, \infty}(\xi)) \exp(ik\xi y) d\xi,$$

де знак “+” береться при $y > 0$, знак “–” – при $y < 0$, з точністю до постійного множника $(2/m)$ дорівнює густині повних струмів корекції на стрічках. Помітимо, що $U(y)$ можна виразити через розв'язок сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами (див., наприклад, (1.86)). Для того, щоб встановити вплив параметрів решітки на струми корекції введемо функцію

$$J = \int_L |U(y)|^2 dy. \quad (3.45)$$

Чисельно дослідимо збіжність розв'язку, отриманого методом сингулярних інтегральних рівнянь. Як і у випадку напівнескінченної решітки, і у випадку нескінченної решітки без однієї стрічки, будемо вважати, що

струми корекції поширюються лише на $2N$ стрічок. Введемо відносну похибку знаходження струмів корекції за формулами

$$\varepsilon_M = |J(M) - J(2M)| / |J(M)|,$$

$$\varepsilon_N = |J(N) - J(2N)| / |J(N)|.$$

де M – кількість вузлів на кожному стрічку у методі дискретних особливостей.

На рис.3.2 наведено залежності відносної похибки J від M і N . Ядра сингулярних інтегральних рівнянь обчислювалися з точністю 10^{-7} . Як видно з рис.3.2, похибка спадає, швидкість збіжності є алгебраїчною.

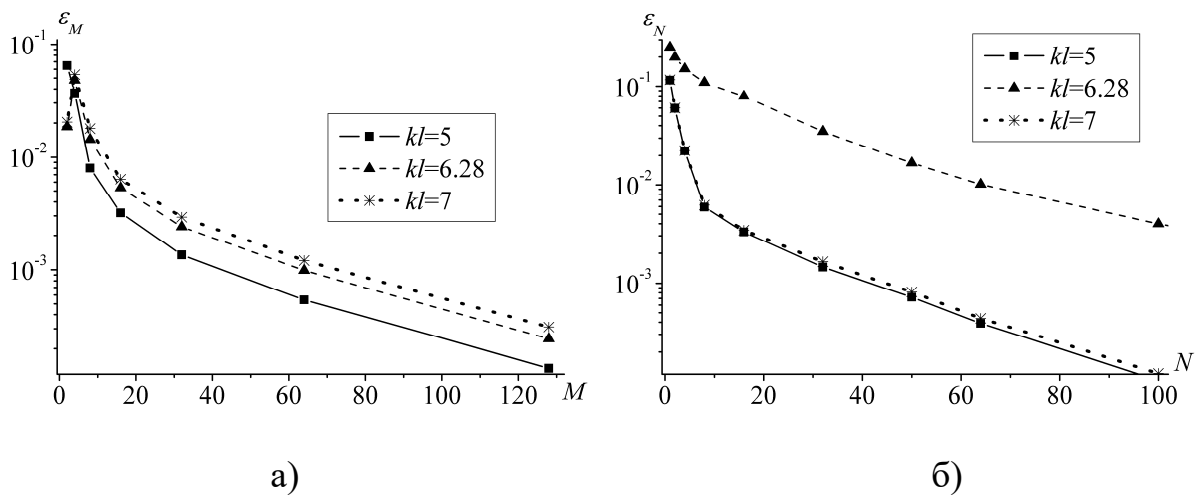


Рис.3.2 Залежності похибки ε від а) M і б) N у методі сингулярних інтегральних рівнянь при $k\Delta = 3.2$, $kd = \pi/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$

Для того, щоб дослідити збіжність розв'язку, отриманого операторним методом, введемо величину

$$T^{coup} = \frac{4\pi}{k} \int_0^\pi |C(-\cos \varphi) \sin \varphi|^2 d\varphi,$$

яка описує ступінь взаємозв'язку двох напівнескінченних решіток або відхилення властивостей нескінченної решітки при зсуві елементів від властивостей ідеально періодичної решітки. Вона чисельно дорівнює поперечному перетину розсіяння й пропорційна енергії, яка переноситься

циліндричними хвилями з амплітудою Фур'є $C(\xi)$. Введемо відносну похибку за формулами

$$Err(K) = |T^{coup}(2K-1) - T^{coup}(K)| / |T^{coup}(2K-1)|,$$

$$Err(Q) = |T^{coup}(Q+1) - T^{coup}(Q)| / |T^{coup}(Q+1)|,$$

де $T^{coup}(N)$ – значення T^{coup} , отримане при K вузлах, $T^{coup}(Q)$ – значення T^{coup} , отримане після Q ітерацій в (3.44). На рис.3.3 наведено залежності похибки від N і від Q . Починаючи з деякого значення N і Q , похибка спадає монотонно. При збільшенні відстані між напівнескінченими решітками підінтегральні функції стають швидко осцилюючими. На поведінку підінтегральних функцій впливає комплексна експонента, період якої зменшується зі збільшенням $k\Delta$. Тому для апроксимації інтеграла з заданої точністю у квадратурних формулах необхідно вибирати більше число вузлів.

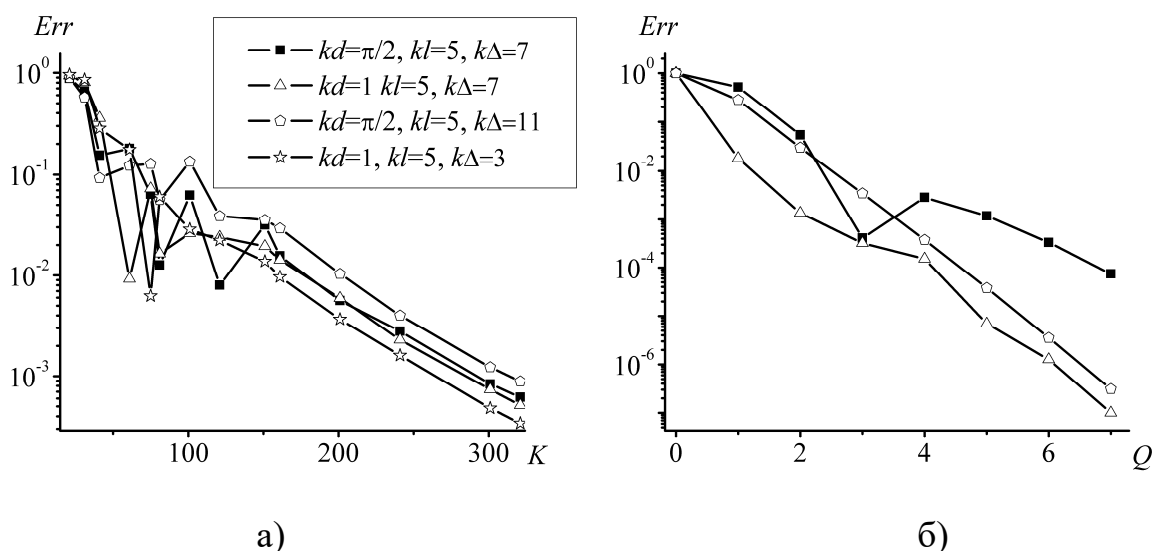


Рис.3.3 Залежності похибки Err від а) K і б) Q у операторному методі

3.4.3. Аналіз фізичних результатів

Поставимо у відповідність величини, введені в параграфах 3.2 і 3.3.

У позначеннях (3.1), (3.19), (3.20) маємо, що $C(\xi) = C^+(\xi) + C^-(\xi)$.

Згідно (3.11), (3.14), (3.19), (3.20), використовуючи формули (3.29), (3.31), можемо записати

$$C^{+, \infty}(\xi) = \frac{R^+(\xi, \xi_l)}{f^+(\xi, \xi_l)} - \frac{k}{2\pi f^+(\xi, \xi_l)} \int \sum_{-d}^d a_n \exp(iky'(\zeta_n - \xi)) dy',$$

$$C^{-, \infty}(\xi) = \frac{R^-(\xi, \xi_l) e^{ik\Delta(\xi - \xi_l)}}{f^-(\xi, \xi_l)} - \frac{k e^{ik\Delta(\xi - \xi_l)}}{2\pi f^-(\xi, \xi_l)} \int \sum_{-d}^d a_n \exp(iky'(\zeta_n - \xi)) dy',$$

де a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, – амплітуди Фур'є поля, відбитого нескінченною ідеально періодичною решіткою.

Розглянута структура дозволяє досліджувати вплив дефектів у нескінченній ідеально періодичній решітці. В ідеально періодичному масиві густина струмів на сусідніх стрічках відрізняється лише фазовим множником. У випадку зсуву стрічки виникає так зване поле корекції, індуковане струмами корекції. Струми на стрічках досліджуваної структури можна подати як суму струмів, які течуть стрічками ідеально періодичної решітки і всіх струмів корекції. Амплітуда Фур'є поля, яке індуковано всіма струмами корекції, дорівнює $C^{+, \infty}(\xi) + C^{-, \infty}(\xi) + C(\xi)$. Вплив струмів корекції можна описати формулою (3.45).

Введемо коефіцієнт корекції

$$T^c = \frac{4\pi}{k} \int_0^\pi |(C^{+, \infty}(-\cos \varphi) + C^{-, \infty}(-\cos \varphi) + C(-\cos \varphi)) \sin \varphi|^2 d\varphi, \quad (3.46)$$

який пропорційний енергії циліндричних хвиль і описує те, наскільки властивості досліджуваної структури відрізняються від властивостей ідеально періодичних решіток.

На рис.3.4 наведено залежності J від періоду l , а на рис.3.5 – від зазору Δ . Залежності нормовані на квадрат амплітуди падаючого поля. На рис.3.6 наведено залежності T^{coup} і T^c від Δ при різних значення періоду. Вибране значення ширини стрічок $kd = \pi/2$ ($2d = \lambda/2$) відповідає резонансному випадку. Значення $\Delta = 2l$ відповідає випадку нескінченної періодичної решітки без однієї стрічки (зірочки на рис.3.5). У цьому випадку,

для підтвердження вірності результатів, можна порівняти результати цього розділу з результатами з розділу 2. Як видно, результати співпадають.

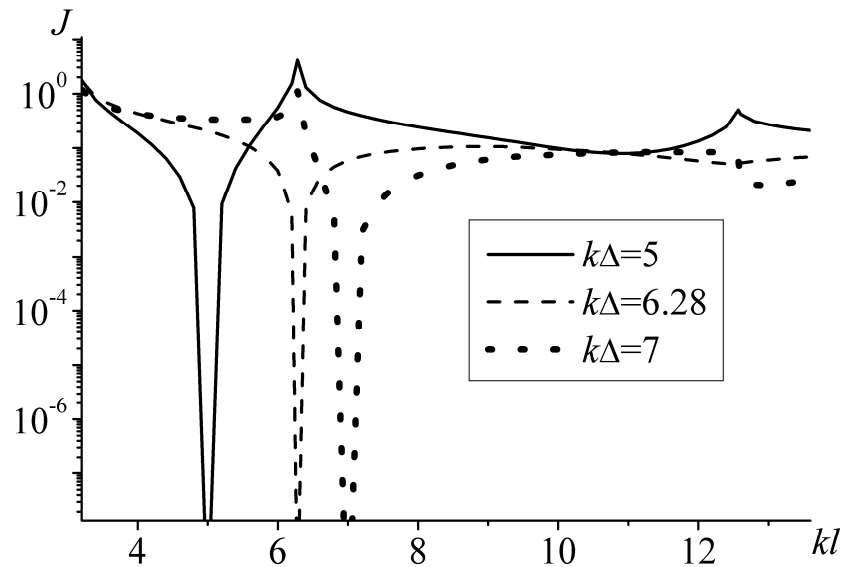


Рис.3.4 Залежності J від періоду l при $k\Delta = 5$ (суцільна крива), $k\Delta = 6.28$ (штрихова крива), $k\Delta = 7$ (пунктирна крива), $kd = \pi/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$

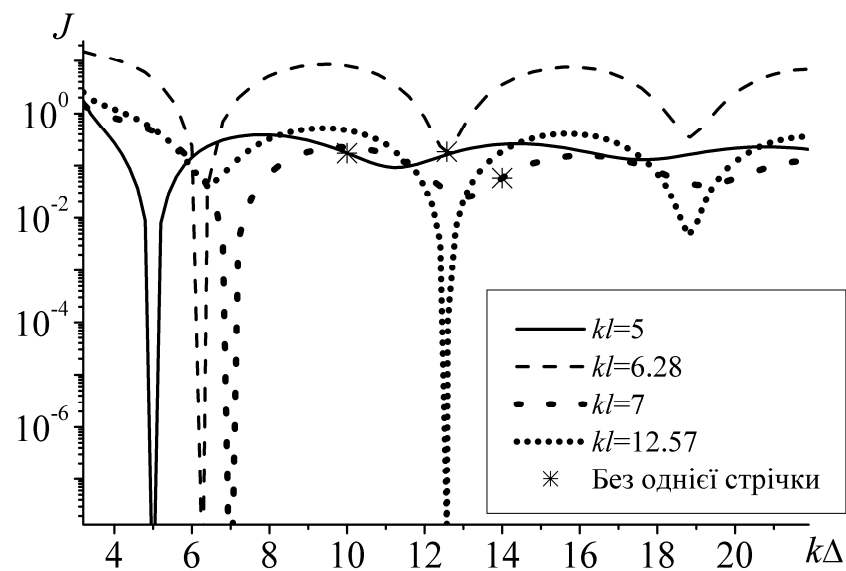


Рис.3.5 Залежності J від зазору Δ при $kl = 5$ (суцільна крива), $kl = 6.28$ або $l \approx \lambda$ (штрихова крива), $kl = 7$ (пунктирна крива), $kl = 12.57$ або $l \approx 2\lambda$ (короткий пунктир), $kd = \pi/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$. Результати для нескінченної періодичної решітки без однієї стрічки наведено у якості маркерів ($\Delta = 2l$)

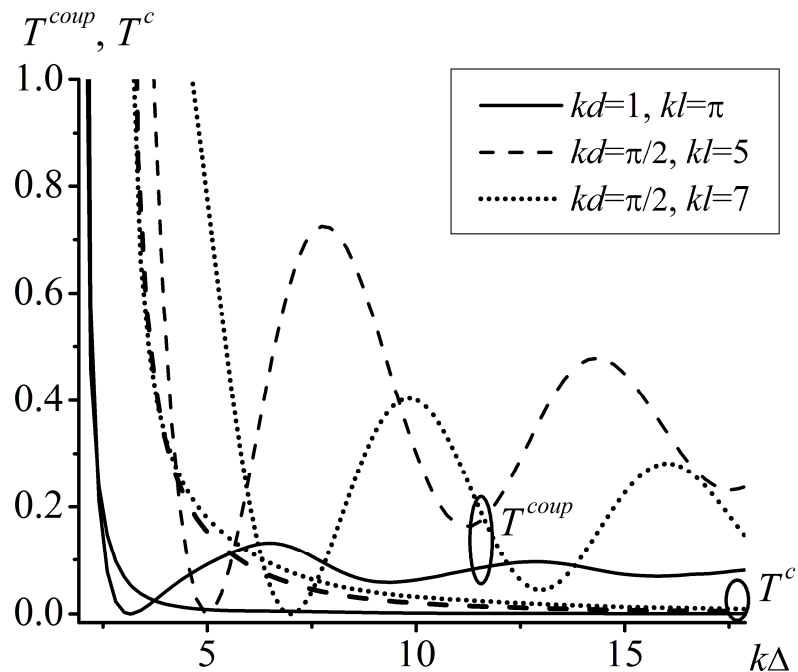


Рис.3.6 Залежності T^{coup} і T^c від зазору Δ при $kd = 1, kl = \pi$ (суцільні криві), $kd = \pi/2, kl = 5$ (штрихові криві), $kd = \pi/2, kl = 7$ (пунктирні криві)

Іншим характерним значенням є $\Delta = l$. Струм J зникає, оскільки структура стає ідеально періодичною і струми корекції не збуджують. Максимум J спостерігається при $kl = 2\pi$ ($l = \lambda$). Це значення параметра відповідає аномалії Релея-Вуда, коли збуджуються ± 1 плоскі хвилі (моди Флоке). Електромагнітний взаємозв'язок стрічок в решітках є сильним у цьому випадку. Глобальний максимум для кожної кривої на рис.3.5 спостерігається для мінімального зазору, $\Delta \rightarrow 2d$. Отримані результати дозволяють зробити висновок про вплив зсуву стрічок на поля в ідеально періодичній решітці. Наприклад, при $kl = 5$ для значень зазору $|l - \Delta|/l < 4\%$ функція струму корекції $J < 0.01$. При розрахунках обиралися $M = 10$, $N = 10$, при $kl = 5$ і $kl = 7$, але поблизу області аномалії Релея-Вуда $N = 60$. Спостерігаються осциляції в залежностях J від Δ . Їх можна пояснити, якщо розглянути резонатор, утворений кінцями напівнескінчених решіток при

$y = 0$ і $y = -\Delta$ ($z = 0$) зі збудженням власних хвиль між ними. На рис.3.7 і рис.3.8 наведено розподіл повного поля у ближній зоні $|H^{total}|$ поблизу області аномалії Релея-Вуда, $kl = 6.28$, для двох максимумів на рис.3.5 при $k\Delta = 9.4$, і $k\Delta = 15.6$. Область поблизу зазору збільшено на рис.3.7 б) і рис.3.8 б).

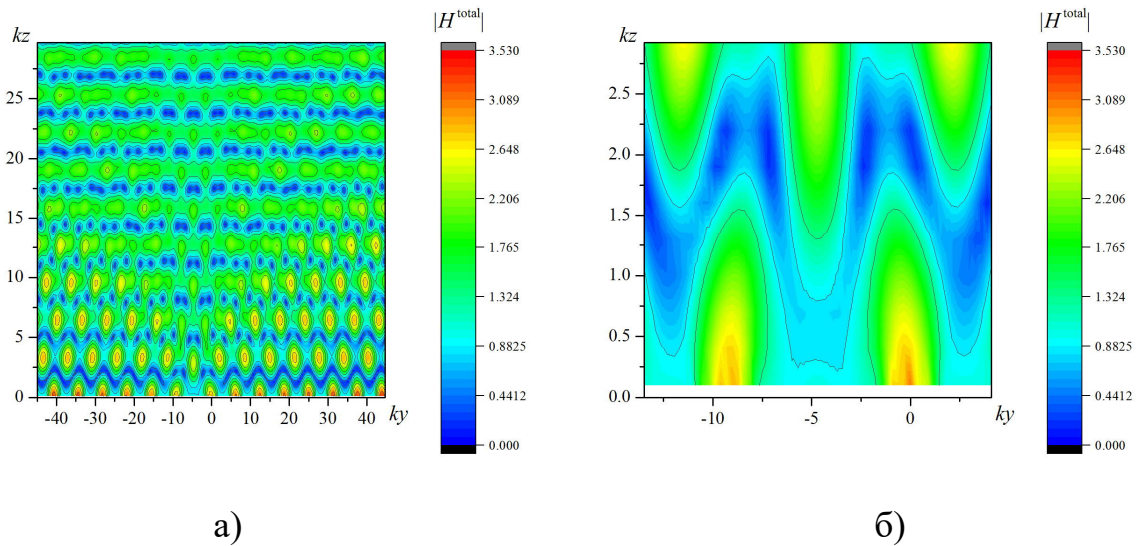


Рис.3.7 Розподіл повного поля при $kl = 6.28$, $k\Delta = 9.4$, $kd = \pi/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$.
а) Повна область, б) збільшена область поблизу зазору

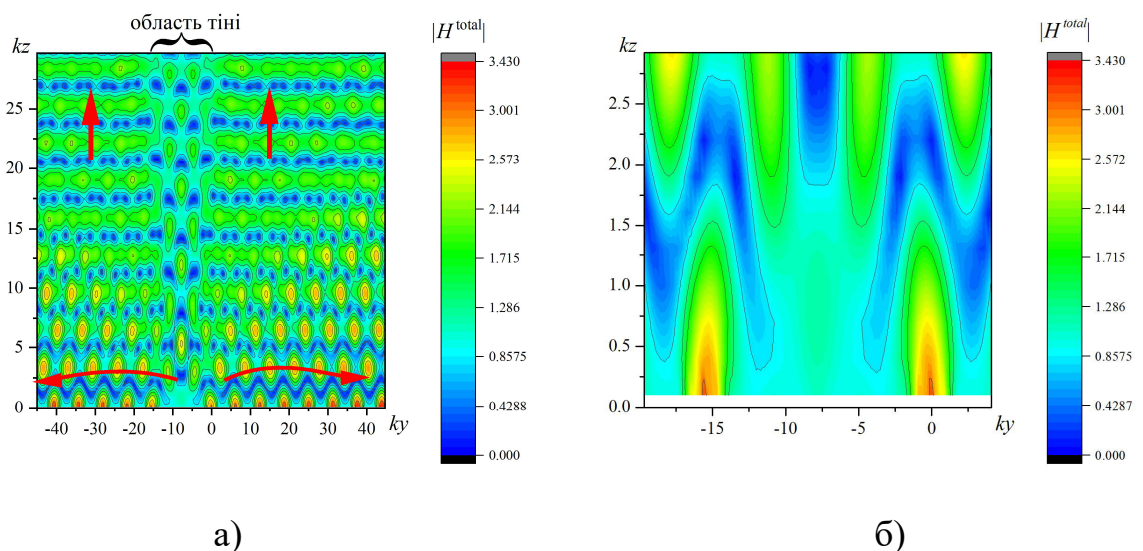


Рис.3.8 Розподіл повного поля при $kl = 6.28$, $k\Delta = 15.6$, $kd = \pi/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$.
а) Повна область, б) збільшена область поблизу зазору
Чітко помітні плоскі хвилі, розсіяні кожною ізольованою напівнескінченною решіткою, які поширюються при $\varphi = 90^\circ$ (показано

стрілками на рис.3.8 а), витікаючи хвилі, які поширюються при $\varphi = 0^\circ$ і $\varphi = 180^\circ$ (показано хвилястими стрілками), і границя тіні поблизу прямої $y = 0$ (або $y = -\Delta/2$ в позначеннях рис.3.1).

При збільшенні відстані між напівнескінченими решітками взаємодія між ними слабшає. У випадку досить великого зазору, $\Delta \gg 1$, повне поле можна представити у вигляді суми полів ізольованих напівнескінчених решіток, $A \approx R^+ + s^+ R^- s^-$. Зважаючи на те, що залежність полів від Δ описується експонентою $\exp(ik(\xi - \xi_l)\Delta)$ й те, що у випадку ортогонального падіння ядра операторів відбиття задовольняють умові $|R^\pm(\xi, \xi_l)| = |R^\pm(-\xi, \xi_l)|$, функція J буде практично періодичної з періодом $k\Delta = 2\pi$, що ми й бачимо на рис.3.5.

Введемо функцію

$$U^{total}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (C(\xi) + C^{\pm, \infty}(\xi)) \exp(ik\xi y) d\xi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\xi_n y),$$

яка з точністю до постійного множника є повним струмом на стрічках.

На рис.3.9 наведено розподіл струму корекції на стрічках. Значення параметрів беруться біля перших 3 максимумів і 1 мінімуму рисунку 3.5 для кожного значення періоду l . На рис.3.10 наведено розподіл U^{total} на стрічках. Залежності на рис.3.4, рис.3.5, рис.3.7, рис.3.8, рис.3.9, рис.3.10 нормуються на амплітуду падаючої хвилі. Струм корекції досягає максимального значення на першій стрічці, яка розташована поблизу розриву, і, як очікувалось, зникає при $ky \rightarrow \infty$. У випадку $kl = 6.28$ струми корекції поширюються на більшу кількість стрічок.

Дослідимо поле у далекій зоні. З одного боку структура, яка розглядається, є нескінченною періодичною, при $|y| \gg 1$. Тому розсіяне поле повинно містити плоскі хвилі. З іншого боку, у неї є розрив, порушення періодичності, який призводить до появи циліндричних хвиль. Беручи до

уваги вираз для поля у далекій зоні напівнескінченної решітки, отриманий у розділі 1, використовуючи метод перевалу [38], запишемо

$$H^{sc} = H^{p,+} + H^{c,+, \infty} + H^{erfc,+} + H^{p,-} + H^{c,-, \infty} + H^{erfc,-} + H^c, \text{ при } k\rho \rightarrow \infty, (3.47)$$

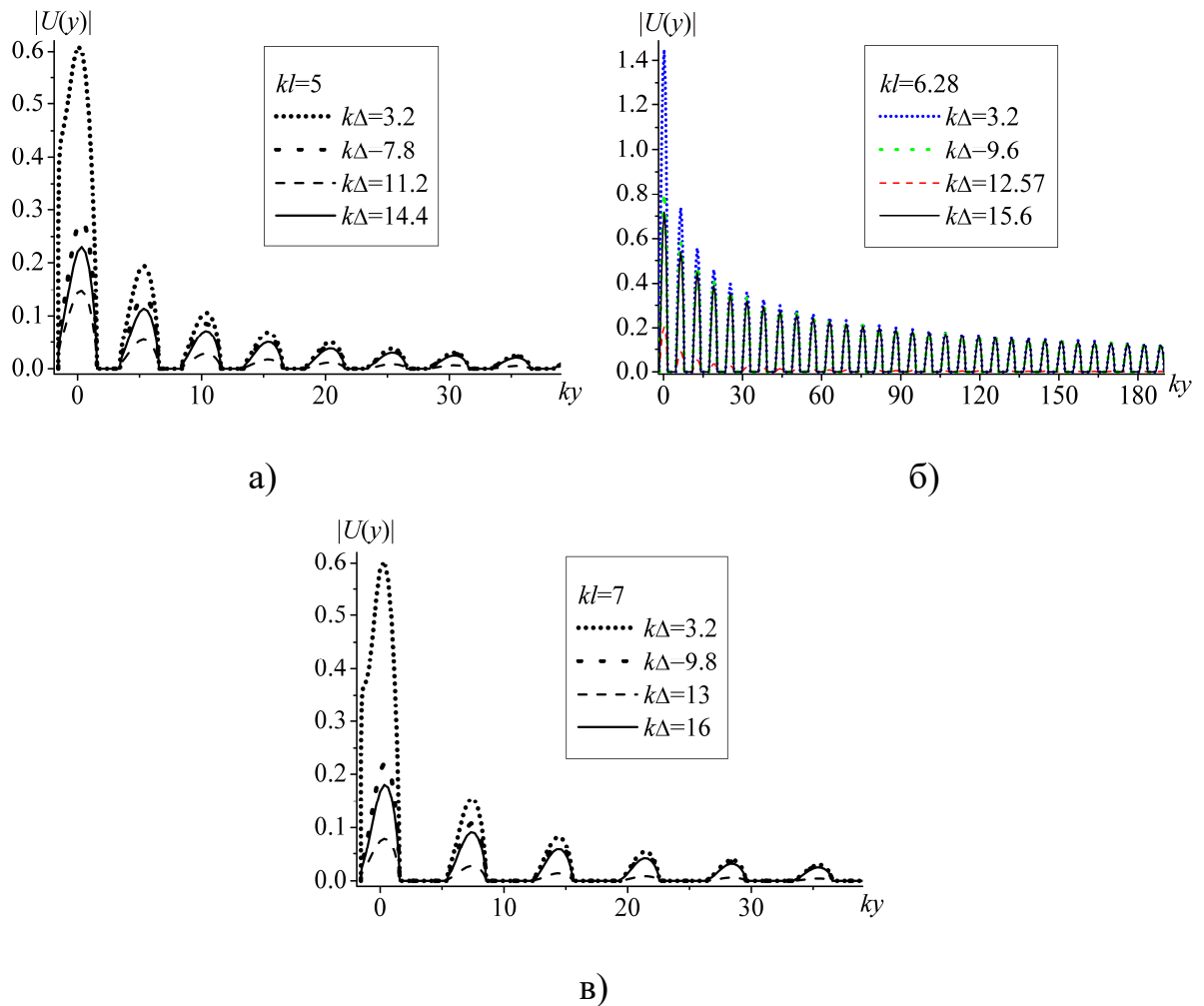


Рис.3.9 Розподіл струмів корекції $|U(y)|$ при $kd = \pi/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $kl = 5$, $k\Delta = 3.2$ (короткий пунктир), $k\Delta = 7.8$ (пунктирна крива), $k\Delta = 11.2$ (штрихова крива), $k\Delta = 14.4$ (суцільна крива), б) $kl = 6.28$, $k\Delta = 3.2$ (короткий пунктир), $k\Delta = 9.6$ (пунктирна крива), $k\Delta = 12.57$ (штрихова крива), $k\Delta = 15.6$ (суцільна крива), в) $kl = 7$, $k\Delta = 3.2$ (короткий пунктир), $k\Delta = 9.8$ (пунктирна крива), $k\Delta = 13$ (штрихова крива), $k\Delta = 16$ (суцільна крива).

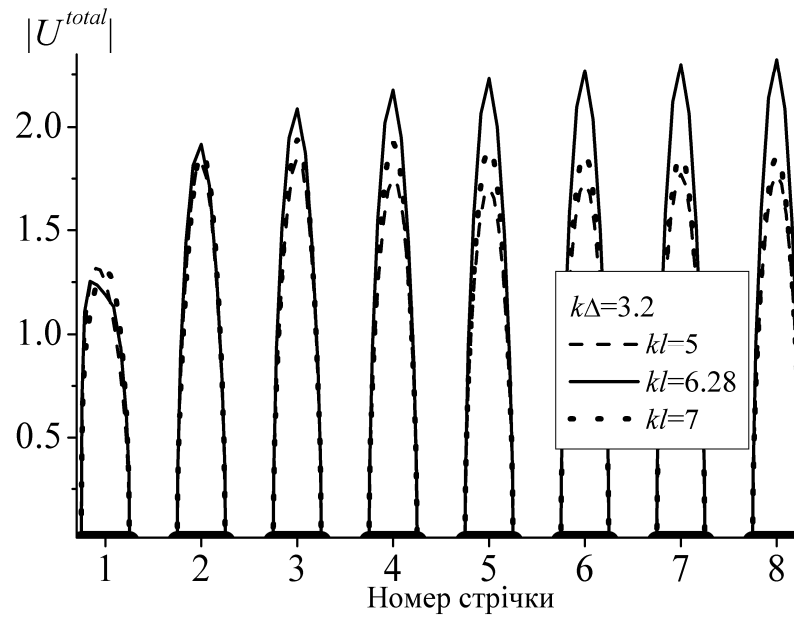


Рис.3.10 Розподіл повних струмів $|U^{total}(y)|$ на стрічках при $kl = 5$ (штрихова крива), $kl = 6.28$ (суцільна крива), $kl = 7$ (пунктирна крива), $k\Delta = 3.2$, $kd = \pi/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$

де $H^{p,\pm}$ – це поле плоских хвиль, розсіяних ізольованими напівнескінченними періодичними решітками, $H^{c,\pm,\infty}$ – поле циліндричних хвиль, розсіяних ізольованими напівнескінченними решітками, H^c – це поле циліндричних хвиль, збуджених струмом корекції, який виникає через взаємозв'язок напівнескінченних решіток, $H^{erfc,\pm}$ – це доданок, який забезпечує рівномірне асимптотичне подання поля і виражається через функцію втрат. Плоскі хвилі, розсіяні напівнескінченними решітками, існують лише у напівпросторі, у якому розміщені ці решітки. Тобто, для напівнескінченної решітки, розміщеної в області $y > 0$ ($z = 0$), плоскі хвилі існують лише у напівпросторі $y > 0$, а для напівнескінченної решітки, розміщеної в області $y < -\Delta$ ($z = 0$), плоскі хвилі існують лише у напівпросторі $z < -\Delta$.

Перепишемо (3.47) у вигляді

$$H^{sc} = H^p + H^{c,total} + H^{erfc},$$

де $H^p = H^{p,+} + H^{p,-}$ – поле плоских хвиль, $H^{c,total} = H^{c,+,∞} + H^{c,-,∞} + H^c$ – поле циліндричних хвиль, збуджених струмами корекції, $H^{erfc} = H^{erfc,+} + H^{erfc,-}$. Зауважимо, що $H^p + H^{erfc}$ – так званий розв’язок Кірхгофа ($H^{c,total} \equiv 0$). Функція $D(\varphi, \rho) = |H^{c,total}(\varphi, \rho) + H^{erfc}(\varphi, \rho)|$ – діаграма спрямованості.

На рис.3.11, рис.3.12 наведено діаграми спрямованості $D(\varphi, \rho)$. Для порівняння поле струмів корекції у далекій зоні $|H^c(\varphi, \rho)|$ також наведено на рис.3.11 б) і рис.3.12 б). Значення параметрів вибрані поблизу перших трьох максимумів і одного мінімуму рисунку 3.5. Діаграми нормуються на максимальне значення $D(\varphi, \rho) / |H^i| \approx 1.063$, яке досягається при $kl = 7$, $k\Delta = 3.2$, $\varphi \approx 26^\circ$.

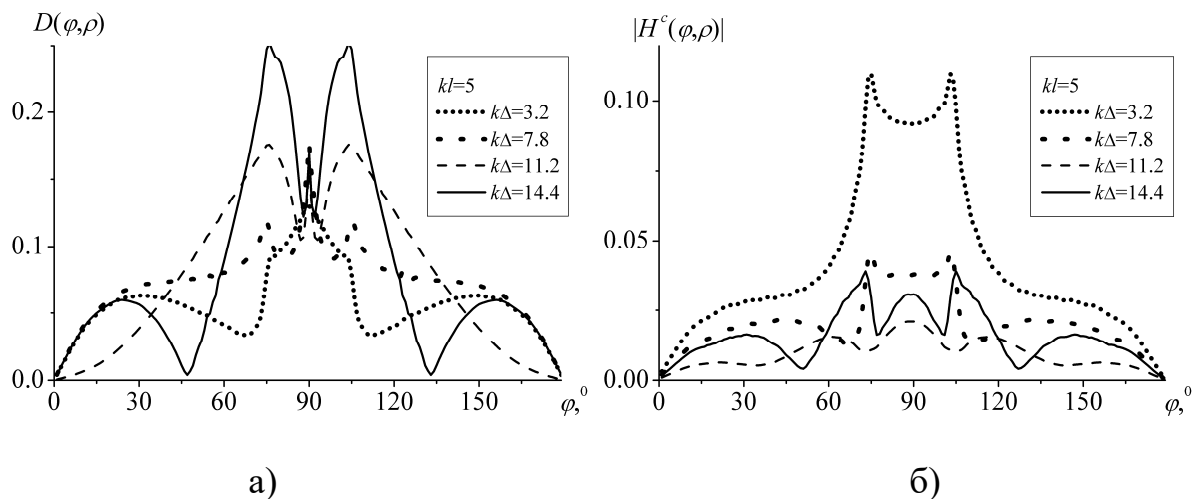


Рис.3.11 Діаграми спрямованості а) $D(\varphi, \rho)$ і б) $|H^c(\varphi, \rho)|$ при $kl = 5$, $k\Delta = 3.2$ (короткі пунктирні криві), $k\Delta = 7.8$ (пунктирні криві), $k\Delta = 11.2$ (штрихові криві), $k\Delta = 14.4$ (суцільні криві), $\varphi_0 = 90^\circ$, $k\rho = 100$

Для невеликого у порівнянні з довжиною хвилі значення періоду ($kl = 5$) внесок $H^c(\varphi, \rho)$ є порівняним з внеском поля у далекій зоні ізольованих напівнескінченних періодичних решіток, $|H^c(\varphi, \rho)| \sim D(\varphi, \rho)$. Проте, у разі $kl = 7$, струми на стрічках ізольованих напівнескінченних

решіток мають набагато більший вплив ніж струми корекції, $|H^c(\varphi, \rho)| \ll D(\varphi, \rho)$. Зі збільшенням значення періоду спостерігається зростання кількості пелюстків. Максимуми у діаграмах спрямованості $D(\varphi, \rho)$ спостерігаються поблизу кутів поширення плоских хвиль, відбитих нескінченною частиною структури.

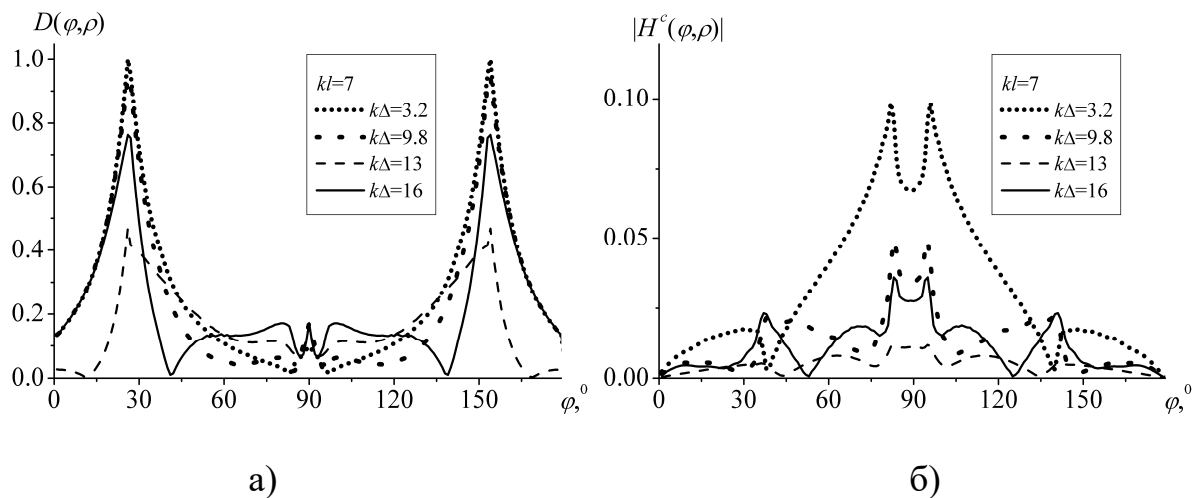


Рис.3.12 Діаграми спрямованості а) $D(\varphi, \rho)$ і б) $|H^c(\varphi, \rho)|$ при $kl = 7$, $k\Delta = 3.2$ (короткі пунктирні криві), $k\Delta = 9.8$ (пунктирні криві), $k\Delta = 13$ (штрихові криві), $k\Delta = 16$ (суцільні криві), $\varphi_0 = 90^\circ$, $k\rho = 100$

3.4.4. Графенові стрічки

У випадку графенових стрічок, окрім резонансів поблизу зон аномалій Релея-Вуда, можливо ще виникнення плазмонних резонансів. У скінченних решітках поблизу цих резонансів спостерігається значне зростання енергії розсіяного і поглиненого поля. Цікавим є дослідити вплив порушення періодичності у вигляді зсуву графенових стрічок на характеристики розсіяних полів, особливо поблизу цих резонансів.

Спочатку проведемо валідацію запропонованого алгоритму, чисельно перевіривши виконання граничних умов. Зауважимо, що умова (1.49) і умова

випромінювання виконується автоматично завдяки вибору форми надання розсіяного поля. Перевіримо виконання умов (1.50), (1.51). Перепишемо їх у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial z} H^s(z \rightarrow \pm 0) + \frac{ik}{\sigma Z} (H^s(z \rightarrow +0) - H^s(z \rightarrow -0)) = -\frac{\partial}{\partial z} H^i(z = 0),$$

на графенових стрічках, (3.46)

$$H^s(z \rightarrow +0) - H^s(z \rightarrow -0) = 0, \text{ поза стрічками.} \quad (3.47)$$

Для обчислення похідної у (3.46) використовуємо сіткове наближення. Таким чином перевіримо виконання рівностей

$$f_1(y) = f_2(y), \text{ на стрічках,}$$

$$f_3(y) = 0, \text{ поза стрічками,}$$

де

$$f_1(y) = \frac{H^s(y, 3\delta) - H^s(y, \delta)}{2\delta} + \frac{ik}{\sigma Z} (H^s(y, \delta) - H^s(y, -\delta)),$$

$$f_2 = -\frac{H^i(y, 3\delta) - H^i(y, \delta)}{2\delta},$$

$$f_3(y) = H^s(y, \delta) - H^s(y, -\delta).$$

На рис.3.13 зображено залежності $|f_1(y)|$, $|f_2(y)|$ і $|f_3(y)|$ від координати y при $\delta = 10^{-3}$. Криві $|f_1(y)|$, $|f_2(y)|$ співпадають з графічною точністю на стрічках, окрім краю, де повинні виконуватися умови Майкснера. Графік кривої $|f_3(y)| = 0$ співпадає з графічною точністю з горизонтальною віссю поза стрічками.

Для того, щоб визначити дійсну швидкість збіжності алгоритму, обчислимо відносно похибку коефіцієнта корекції (3.46), $\varepsilon = |T_M^c - T_{2M}^c| / |T_M^c|$, де M – кількість вузлів на кожну стрічку. Залежності відносної похибки ε від M наведено на рис.3.14. Для графенових стрічок вірні такі самі висновки, як і для ідеально провідних стрічок, починаючи з певного значення M криві

спадають монотонно до нуля. Чим більше значення kd , тим більше вузлів необхідно обирати.

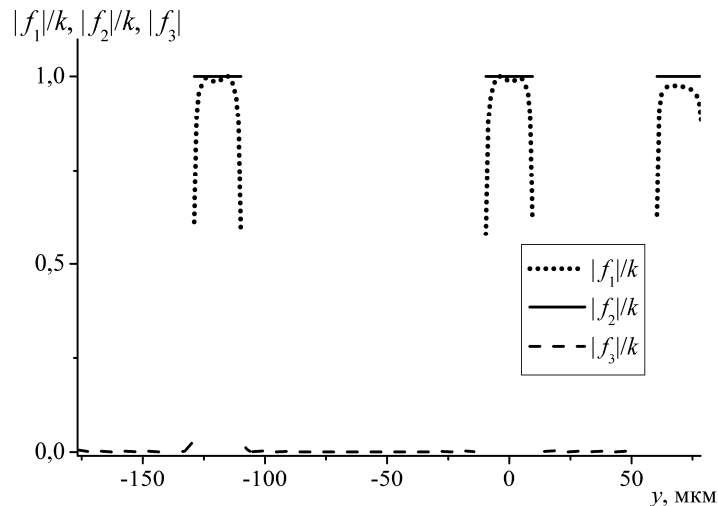


Рис.3.13 Залежності $|f_1(y)|/k$ (пунктирна крива), $|f_2(y)|/k$ (суцільна крива), $|f_3(y)|/k$ (штрихова крива) від y при $f = 2.61$ ТГц, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\Delta = 119$ мкм, $\mu_c = 0.4$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

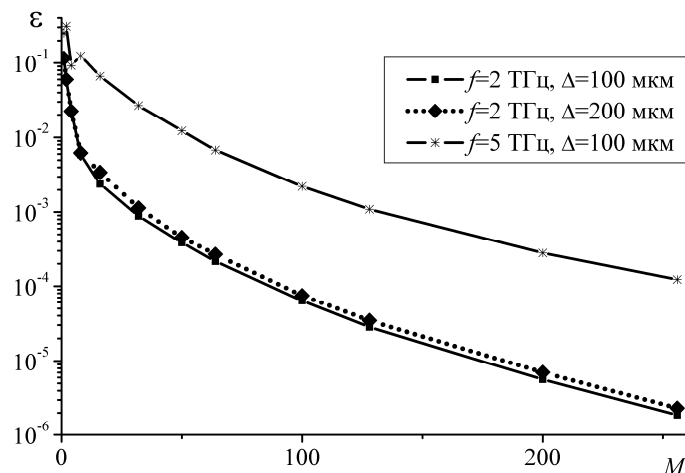


Рис.3.14 Залежності відносної похибки ε від числа вузлів M при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\mu_c = 0.4$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

На рис.3.15 зображено залежності J , обчислені за формулою (3.45), від зазору Δ для двох значень частоти у припущенні, що плоска хвиля з одиничною амплітудою падає ортогонально. Значення частоти $f = 2.61$ ТГц

відповідає першому плазмонному резонансу. Як і у випадку ідеально провідних стрічок, спостерігається майже періодичний характер залежностей. Глобальний максимум знаходиться при мінімальному значенні зазору, $\Delta \rightarrow 2d$. При $\Delta \rightarrow l$ значення J наближається до нуля, структура стає ідеально періодичною і струми корекції не збуджуються.

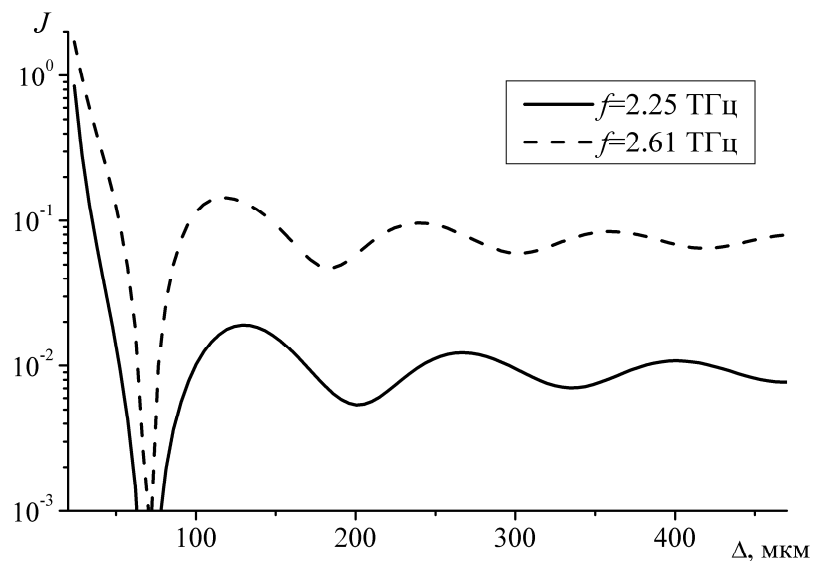


Рис.3.15 Залежності J від зазору Δ при $f = 2.25$ ТГц (суцільна крива), $f = 2.61$ (штрихова крива) при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\mu_c = 0.4$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

На рис.3.16 наведено розподіл ближнього поля в області над решіткою. Параметри структури відповідають максимумам J рисунку 3.15 для частоти поблизу першого плазмонного резонансу. Результати нормуються на амплітуду падаючої хвилі. Чітко видні варіації поля стоячої хвилі, яка перевідбивається кінцями напівнескінчених решіток. В області над решіткою при $y < -\Delta$ і $y > 0$ виникають відбиті плоскі хвилі, а область $-\Delta < y < 0$ слугує у якості перехідного регіону або регіону тіні і чітко помітна на рис.3.16.

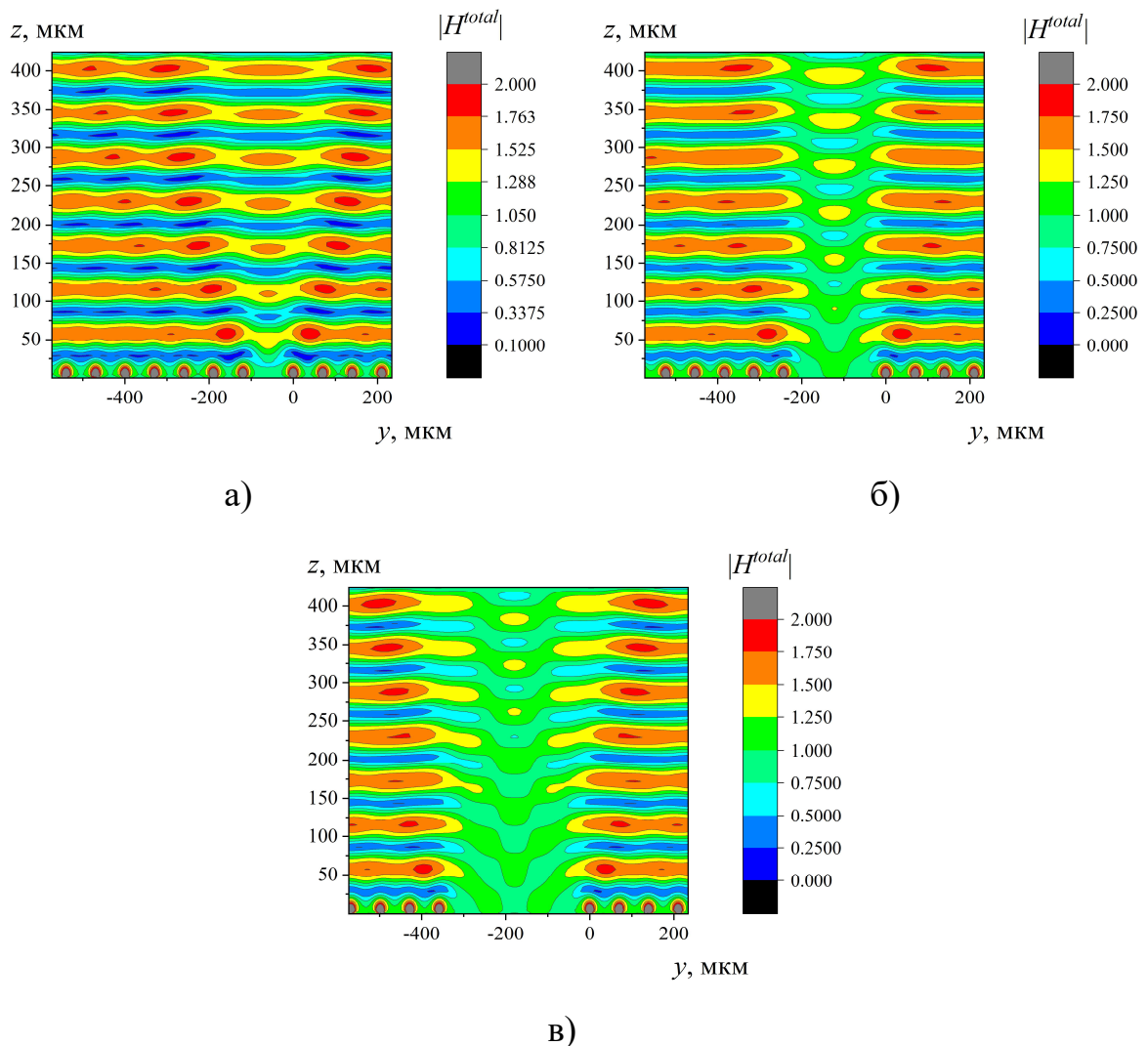


Рис.3.16 Розподіл повного поля $|H^{total}|$ поблизу частоти першого плазмонного резонансу при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\mu_c = 0.4$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. а) $\Delta = 119$ мкм, б) $\Delta = 240$ мкм, в) $\Delta = 358$ мкм

Для того, щоб кількісно описати поле циліндричних хвиль, які збуджуються струмами корекції в результаті порушення періодичності у розглядаємій нескінченній графеновій решітці, як і у разі скінченної графенової решітки введемо повний поперечний переріз розсіяння (TSCS) і поглинання (ACS).

На рис.3.17, рис.3.18 наведено залежності TSCS і ACS від частоти для різних значень хімічного потенціалу графену і величини зазору Δ . Значення

$\Delta \approx 24$ мкм і $\Delta \approx 119$ мкм відповідають максимумам J на рис.3.15, а $\Delta \approx 185$ мкм – мінімуму.

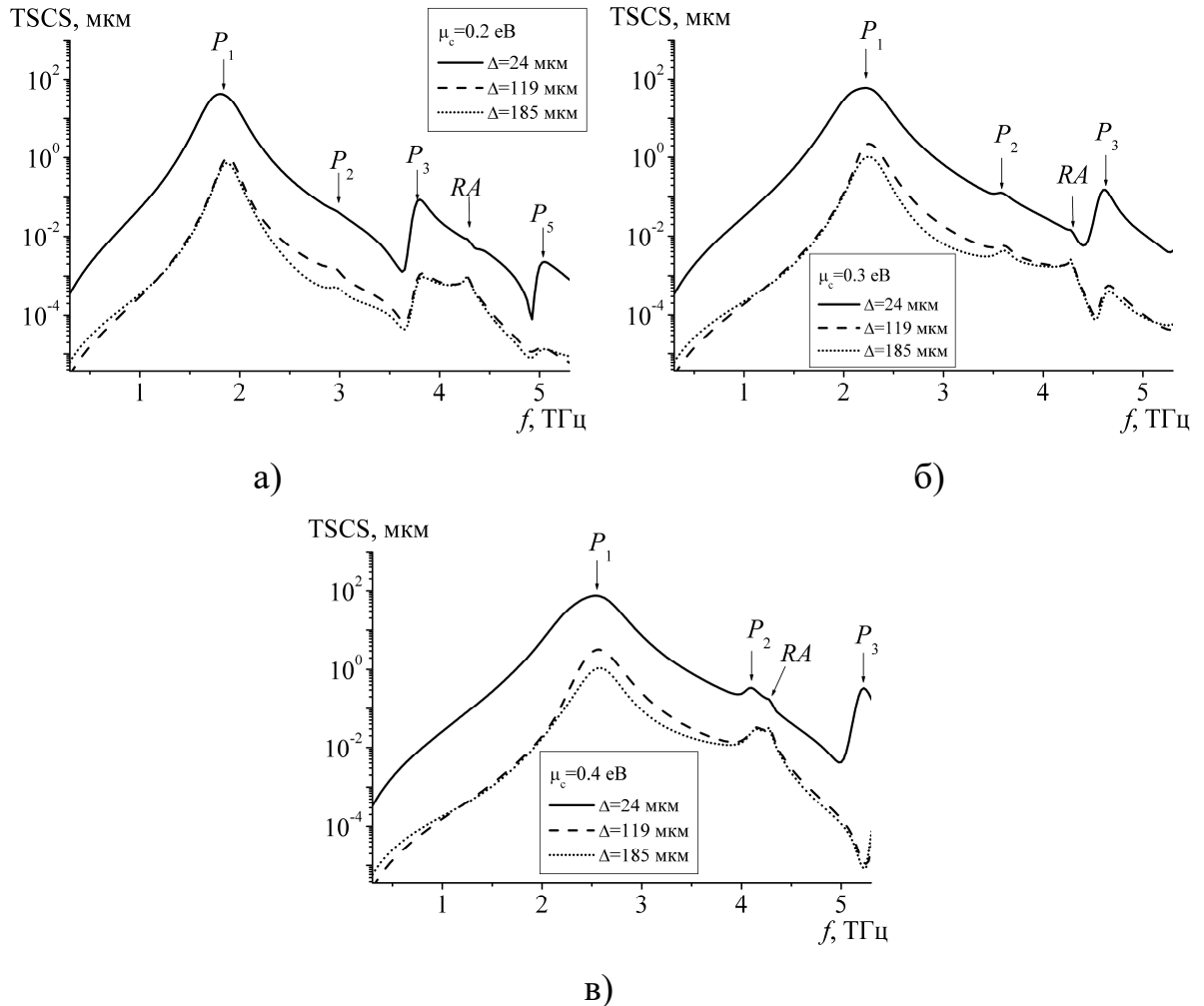


Рис.3.17 Залежності TSCS від частоти при $\Delta = 24$ мкм (суцільні криві), $\Delta = 119$ мкм (штрихові криві), $\Delta = 185$ мкм (пунктирні криві), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\mu_c = 0.4$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. а) $\mu_c = 0.2$ еВ, б) $\mu_c = 0.3$ еВ, в) $\mu_c = 0.4$ еВ

Періодична графенова решітка здатна підтримувати плазмонні резонанси (позначені як P_i) і резонанси поблизу аномалій Релея-Вуда (позначені як RA). Через збудження струмів корекції положення плазмонних резонансів дещо зсунуто вздовж частотної осі у порівнянні з випадком нескінченної ідеально періодичної решітки. На відміну від випадку ідеально

провідних стрічок, де їх взаємозв'язок є особливо сильним поблизу аномалій Релея-Вуда, взаємозв'язок графенових стрічок також є сильним і поблизу плазмонних резонансів. Результати, наведені на рис.3.17, рис.3.18, ще раз підтверджують цей висновок, який було зроблено при аналізі напівнескінченної графенової решітки. Більше того, максимуми поблизу плазмонних резонансів є набагато більш виражені.

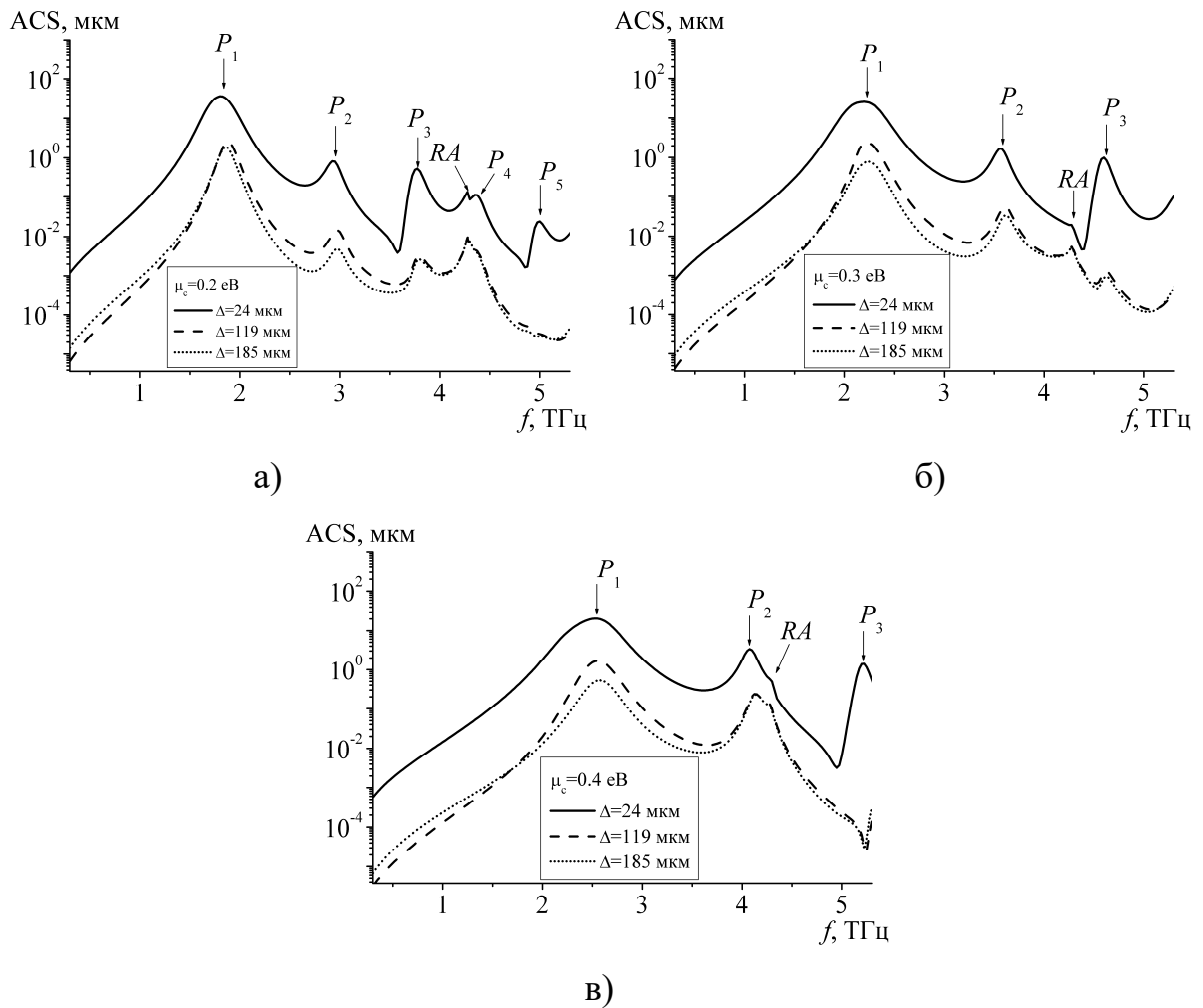


Рис.3.18 Залежності ACS від частоти при $\Delta = 24$ мкм (суцільні криві), $\Delta = 119$ мкм (штрихові криві), $\Delta = 185$ мкм (пунктирні криві), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\mu_c = 0.4$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. а) $\mu_c = 0.2$ еВ, б) $\mu_c = 0.3$ еВ, в) $\mu_c = 0.4$ еВ

Зміна хімічного потенціалу призводить до зсуву плазмонних резонансів вздовж частотної осі. Таким чином можна контролювати ступінь взаємодії стрічок у графеновій решітці.

На рис.3.19 наведена густина струмів корекції і повних струмів на графенових стрічках. Поблизу частоти першого плазмонного резонансу на кожній стрічці спостерігається по одному максимуму. При нормальному падінні на графенових стрічках у періодичних решітках можуть збуджуватись лише плазмонні резонанси з непарними індексами. Поблизу частоти другого і четвертого плазмонного резонансу P_2 і P_4 у залежностях TSCS і ACS від частоти спостерігаються ярко виражені максимуми. Крім того, у струмах корекції на кожній стрічці спостерігається по два максимуми. Така картина як раз і є характерною для плазмонних резонансів P_2 . Проте, густина повного струму має лише один максимум і поблизу частоти другого плазмонного резонансу. Струми корекції досягають свого глобального максимуму на першій стрічці поблизу зазору і далі при віддалені від нього, $y \rightarrow \infty$, спадають.

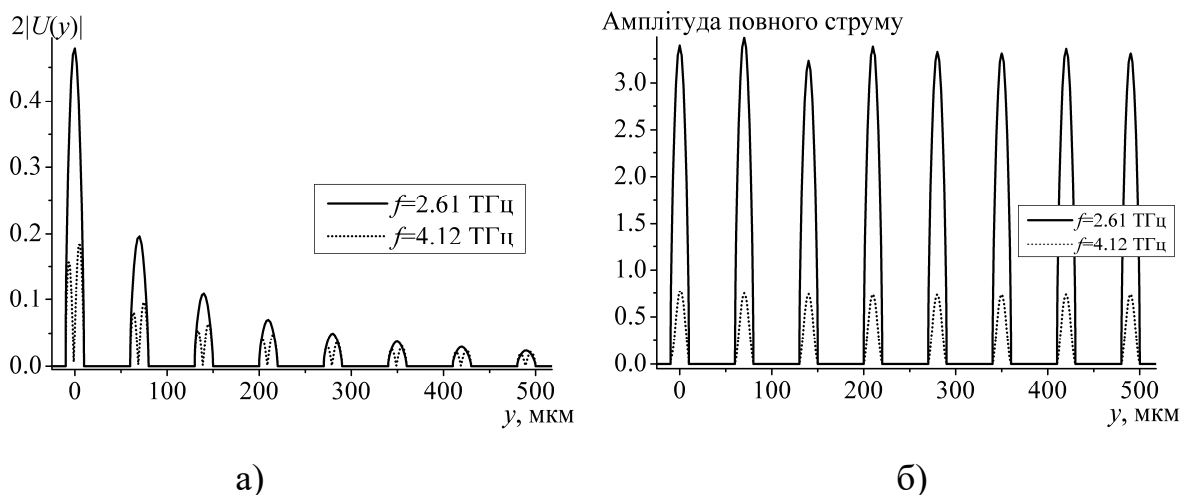


Рис.3.19 Амплітуда а) струмів корекції і б) повних струмів на стрічках при $f = 2.61$ ТГц (суцільні криві), $f = 4.12$ ТГц (пунктирні криві), $d = 10$ мкм,

$$l = 70 \text{ мкм}, \Delta = 119 \text{ мкм}, \mu_c = 0.4 \text{ еВ}, \tau = 1 \text{ пс}, T = 300 \text{ К}$$

Висновки до розділу 3

Проведено розвиток операторного методу і методу сингулярних інтегральних рівнянь і вперше розв'язано задачу про дифракцію плоскої хвилі на двох однакових напівнескінченних періодичних стрічкових решітках, розташованих в одній площині. При використанні операторного методу, після проведення процедури регуляризації, задачу зведено до гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Числове дослідження збіжності показало монотонне спадання похибки в залежності від параметрів дискретизації.

Взаємодію двох напівнескінченних решіток, а також вплив зазору між стрічками нескінченної періодичної решітки, описано за допомогою поля корекції, збудженого струмами корекції. У випадку ідеально провідних стрічок максимуми струмів корекції спостерігається при мінімальному значенні зазору, а також поблизу аномалій Релея-Вуда. У випадку графенових стрічок, крім цього, максимуми спостерігаються поблизу плазмонних резонансів.

Розділ 4. Дифракція H -поляризованої хвилі на двошаровій нескінченній решітці без скінченної кількості стрічок у кожному шарі

У одношарових нескінченних періодичних решітках повне відбиття може спостерігатися у надзвичайно вузькій смузі частот поблизу аномалії Релея-Вуда. У багатошарових і, зокрема, у двошарових решіток у випадку падіння плоскої хвилі можлива ще поява смуг запирання й пропускання, виникнення яких не пов'язане з аномаліями Релея-Вуда, а пов'язане зі збудженням власних хвиль між шарами. Для деяких співвідношень параметрів у смузі запирання може спостерігатися практично повне відбиття падаючої хвилі [33]. Проте у випадку відсутності стрічок у кожному шарі може бути сформовано хвилеводний канал. Падаюча хвиля може проходити по даному каналу в область за решіткою.

Керуючись даними міркуваннями, у даному параграфі розглядається задача про дифракцію плоскої хвилі на нескінченній двошаровій стрічковій решітці з відсутньою однією або декількома стрічками в кожному шарі [172]-[175]. Розв'язок задачі отримано двома методами: методом сингулярних інтегральних рівнянь і операторним методом. Розсіяне поле представляється у вигляді суми полів, розсіяних нескінченною ідеально періодичною двошаровою решіткою і поля корекції.

4.1. Постановка задачі

Розмістимо перший шар двошарової стрічкової решітки у площині $z = 0$. Період періодичної частини – l , ширина стрічок – $2d$. Стрічки з номерами $m = 0, m = 1, \dots, m = M - 1$ є відсутніми. Другу таку саму решітку розмістимо в площині $z = -h$. Стрічки є нескінченно тонкими, структура однорідна вздовж осі Ox . Позначимо множину y -координат стрічок шару як

$L = \bigcup_{m=-\infty}^{-1} (-d + lm, d + lm) \cup \bigcup_{m=M}^{\infty} (-d + lm, d + lm)$. Множину стрічок, видалених з нескінченної ідеально періодичної решітки, як $L^0 = \bigcup_{m=0}^{M-1} (-d + lm, d + lm)$.

Спочатку розглянемо випадок ідеально провідних стрічок. Потім узагальнимо отримані рівняння на імпедансні стрічки. Геометрію структури наведено на рис.4.1.

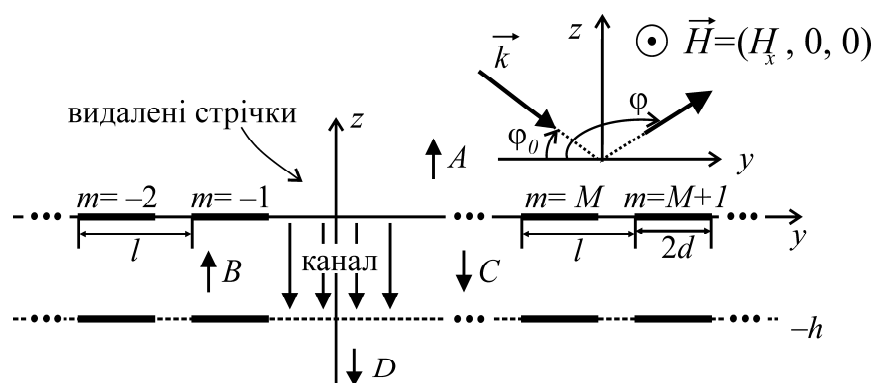


Рис.4.1 Геометрія досліджуваної двошарової нескінченної решітки з видаленими стрічками у кожному шарі і напрямки поширення хвиль

Будемо припускати, що на решітку падає H -поляризована хвиля з амплітудою q , єдина відмінна від нуля компонента магнітного поля якої має вигляд

$$H^i(y, z) = q \exp(ik(y \sin \varphi_0 - z \cos \varphi_0)). \quad (4.1)$$

Повне поле представимо у вигляді суми падаючого і розсіяного полів, $H^{total} = H^i + H^{sc}$. Поле повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца поза стрічками, умовам неперервності дотичних компонент електричного і магнітного полів у площині стрічок, граничним умовам на стрічках, умовам випромінювання і умовам на ребрі. Розв'язок граничної задачі – єдиний.

Розсіяне поле шукаємо як суму полів струмів, які течуть стрічками ідеально періодичної решітки, за виключенням відсутніх стрічок, $H^{inf,0}$, і поля корекції, викликаного відсутністю стрічок, H^c ,

$$H^s = H^{\text{inf},0} + H^c. \quad (4.2)$$

З одного боку, поле, розсіяне періодичною частиною решітки може бути надано як сума плоских хвиль. З іншого боку, біля відсутніх стрічок розсіяне поле може бути надано як циліндричні хвилі. Для подальшого аналізу з виразу для розсіяного поля виділимо доданки, пов'язані з плоскими й циліндричними хвилями.

Поле, розсіяне нескінченною ідеально періодичною решіткою, H^{inf} , можна надати як суперпозицію полів струмів, які течуть всіма стрічками решітки, за винятком стрічок з номерами $m = 0, m = 1, \dots, m = M - 1$, $H^{\text{inf},0}$, і поля струмів, які течуть стрічками з номерами $m = 0, m = 1, \dots, m = M - 1$, H^0 ,

$$H^{\text{inf}} = H^{\text{inf},0} + H^0 \quad (4.3)$$

З виразів (4.2), (4.3) випливає, що розсіяне поле може бути надано як

$$H^s = H^{\text{inf}} - H^0 + H^c. \quad (4.4)$$

У виразі (4.4) H^{inf} – це поле плоских хвиль. Воно може бути надано як ряд Фур'є, а $H^c - H^0$ – поле циліндричних хвиль. Воно може бути надано як інтеграл Фур'є.

4.2. Метод сингулярних інтегральних рівнянь

Застосуємо метод сингулярних інтегральних рівнянь до розв'язання поставленої задачі.

4.2.1. Двошарова нескінченна ідеально періодична решітка

Наведемо стислий алгоритм пошуку поля, розсіяного двошаровою нескінченною періодичною решіткою за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь.

Розглянемо двошарову нескінченну періодичну решітку з періодом l , довжиною стрічок $2d$, відстанню між шарами h . Розсіяне поле шукаємо у вигляді ряду Фур'є у кожній з областей,

$$H^{\text{inf}}(y, z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n z)), & z > 0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(ik(\zeta_n y - \gamma_n z)) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n(z+h))), & 0 > z > -h, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp(ik(\zeta_n y - \gamma_n(z+h))), & z < -h, \end{cases} \quad (4.5)$$

де a_n , b_n , c_n і d_n – невідомі амплітуди Фур'є відбитого поля, поля між шарами і поля, яке пройшло, $\zeta_n = 2\pi n / (kl) + \cos \varphi_0$, $\gamma_n = \sqrt{1 - (2\pi n / (kl) + \cos \varphi_0)^2}$, $\text{Re} \gamma_n \geq 0$, $\text{Im} \gamma_n \geq 0$.

Введемо нові функції [36] $u_n^{\pm} = b_n \pm c_n$. З граничних умов можна отримати вирази, які пов'язують невідомі амплітуди Фур'є, $a_n = -b_n + c_n \exp(ik\gamma_n h)$, $d_n = b_n \exp(ik\gamma_n h) - c_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, і два незалежні парні ряди Фур'є, записані для одного періоду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{\pm} \exp(ik\zeta_n y) = 0, \quad |y| > d, \quad (4.6)$$

$$ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{\pm} \exp(ik\zeta_n y) \gamma_n (1 \mp \exp(ik\gamma_n h)) = \frac{\partial H^i(z=0)}{\partial z} \mp \frac{\partial H^i(z=-h)}{\partial z} \equiv r^{\pm}(y), \quad |y| \leq d. \quad (4.7)$$

Функції $r^{\pm}(y)$ введено для стислості. Для зведення двох парних рядів Фур'є до сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами виконаємо наступні дії:

- 1) введемо безрозмірні величини, $\theta = 2\pi y / l$, $\kappa = kl / (2\pi)$, $\delta = 2\pi d / l$;
- 2) введемо нову функцію, яка дорівнює похідній (4.6):

$$F^{\pm}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n u_n^{\pm} \exp(in\theta);$$

- 3) введемо періодичний оператор Гільберта (1.45);
- 4) використовуючи асимптотичний вираз для $\gamma_n \sim i|n|/\kappa + O(1/n)$, $1 \mp \exp(ik\gamma_n h) \sim 1$, при $n \rightarrow \infty$, представимо функцію $\gamma_n(1 \mp \exp(ik\gamma_n h))$ у вигляді суми спадаючого і не спадаючого доданків;
- 5) до спадаючого доданка застосуємо оператор Гільберта та отримаємо сингулярний інтеграл;
- 6) не спадаючі доданки згрупуємо у ядро $K_{2\pi}^\pm(\psi, \theta)$.

В результаті отримаємо сингулярні інтегральні рівняння з додатковими умовами

$$\frac{1}{\pi} \nu.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F_{2\pi}^\pm(\theta)}{\theta - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_{2\pi}^\pm(\psi, \theta) F_{2\pi}^\pm(\theta) d\theta = r^\pm(\psi), \quad |\psi| < \delta. \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_{2\pi}^\pm(\theta) d\theta = 0. \quad (4.9)$$

Ядра мають вигляд

$$K_{2\pi}^\pm(\psi, \theta) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \gamma_n(1 \mp \exp(ik\gamma_n h)) \right) \frac{\exp(in(\psi - \theta))}{n} + \\ + ik\gamma_0(1 \mp \exp(ik\gamma_0 h)) \frac{\psi - \theta}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \theta} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\psi - \theta}{2} \right) \right). \quad (4.10)$$

4.2.2. Поле корекції

Поле корекції шукаємо як інтеграл Фур'є з невідомими амплітудами $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$ у кожній області:

$$H^c(y, z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \exp(ik(\xi y + \gamma(\xi)z)) d\xi, & z > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \exp(ik(\xi y - \gamma(\xi)z)) d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \exp(ik(\xi y + \gamma(\xi)(z + h))) d\xi, & 0 > z > -h, \\ \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi) \exp(ik(\xi y - \gamma(\xi)(z + h))) d\xi, & z < -h. \end{cases} \quad (4.11)$$

Причому поле у вигляді (4.11) задовольняє умовам випромінювання.

З граничних умов можуть бути отримані вирази, пов'язуючи невідомі амплітуди,

$$\begin{aligned} A(\xi) &= -B(\xi) + C(\xi) \exp(ik\gamma(\xi)h), \\ D(\xi) &= B(\xi) \exp(ik\gamma(\xi)h) - C(\xi), \end{aligned}$$

і два незалежних парних інтегральних рівняння,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^{\pm}(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} ik \int_{-\infty}^{\infty} U^{\pm}(\xi) \exp(ik\xi y) \gamma(\xi) (1 \mp \exp(ik\gamma(\xi)h)) d\xi \\ = \frac{\partial H^i(z=0)}{\partial z} \mp \frac{\partial H^i(z=-h)}{\partial z} - \\ - \left(\frac{\partial H^{\text{inf},0}(z=0)}{\partial z} \mp \frac{\partial H^{\text{inf},0}(z=-h)}{\partial z} \right) \equiv R^{\pm}(y), \quad y \in L, \end{aligned} \quad (4.13)$$

де $U^{\pm}(\xi) = B(\xi) \pm C(\xi)$. Для стислості праву частину (4.13) позначено як

$$R^{\pm}(y) = -\frac{\partial H^0(z=0)}{\partial z} \pm \frac{\partial H^0(z=-h)}{\partial z}, \quad y \in L \cup L^0. \quad (4.14)$$

Її явний вигляд наведено у додатку В.

Помітимо, що структура є симетричною відносно площини $z = -h/2$. Таким чином можна розглянути поодинокий перший шар двошарової решітки, додатково розмістивши ідеально провідну площину у $z = -h/2$. Отримаємо рівняння (4.6), (4.7), (4.12), (4.13) з “верхнім” знаком (“+” або

“–”). Так само, розмістивши у площину симетрії ідеально магнітну площину, отримаємо рівняння (4.6), (4.7), (4.12), (4.13) з “нижнім” знаком.

Використовуючи подання підінтегральної функції у (4.13) у вигляді $\gamma(\xi)(1 \mp \exp(ik\gamma(\xi)h)) = (\gamma(\xi)(1 \mp \exp(ik\gamma(\xi)h)) - i|\xi|) + i|\xi|$, застосовуючи такий самий алгоритм, як і у випадку поодинокі скінченноелементної стрічкової решітки, можна отримати два незалежних сингулярних інтегральних рівняння з додатковими умовами,

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F^\pm(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K^\pm(y, \xi) F^\pm(\xi) d\xi = R^\pm(y), \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d+lm}^{d+lm} F(\xi) d\xi = 0, \quad m \neq 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (4.16)$$

де

$$K^\pm(y, \xi) = k \int_0^\infty \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)(1 \mp \exp(ik\gamma(\zeta)h))) d\zeta, \quad (4.17)$$

$$F^\pm(y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^\infty U^\pm(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \int_{-\infty}^\infty ik\xi U^\pm(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi.$$

Розв’язок сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами (4.8), (4.9), (4.10), (4.15), (4.16), (4.17) єдиний і його отримано методом дискретних особливостей.

4.3.3. Випадок імпедансних стрічок нульової товщини

Розглянемо випадок імпедансних стрічок нульової товщини. На імпедансних стрічках виконуються граничні умови (1.49), (1.52), а у площині стрічок поза стрічками – (1.50), а також (1.49). Поля повинні задовольняти рівнянню Гельмгольца поза стрічками, умовам випромінювання і на ребрі. Розв’язок граничної задачі – єдиний.

Як і у випадку ідеально провідних стрічок, розсіяне поле шукаємо у вигляді (4.2), (4.4). Поле нескінченної ідеально періодичної двошарової

решітки надамо як ряд Фур'є у кожній області (4.5). З граничних умов впливають два незалежних парних ряда Фур'є, записаних для одного періоду, $|y| < l$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{\pm} \exp(ik\zeta_n y) = 0, \quad |y| > d$$

$$\frac{2ik}{\sigma Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{\pm} \exp(ik\zeta_n y) + ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n u_n^{\pm} (1 \mp \exp(ik\gamma_n h))$$

$$\times \exp(ik\zeta_n y) = \frac{\partial}{\partial z} H^i(z=0) \mp \frac{\partial}{\partial z} H^i(z=-h), \quad |y| \leq d,$$

які можуть бути зведено до двох незалежних сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами, записаних у нормованих змінних, (4.8), (4.9) з ядрами

$$K_{2\pi}^{\pm}(\psi, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \gamma_n (1 \mp \exp(ik\gamma_n h)) \right)$$

$$\times \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} + i\gamma_0 \kappa \frac{\psi - \xi}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\psi - \xi}{2} \right) \right),$$

$$+ q(\psi, \xi),$$

$$q(\psi, \xi) = \begin{cases} \frac{2i\kappa\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq \psi, \\ 0, & \xi > \psi. \end{cases}$$

Поле корекції шукаємо у вигляді інтегралів Фур'є у кожній з областей (4.11). З граничних умов може бути отримано два незалежні парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^{\pm}(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L,$$

$$\frac{2ik}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} U^{\pm}(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi + ik \int_{-\infty}^{\infty} U^{\pm}(\xi) (1 \mp \exp(ik\gamma(\xi)h))$$

$$\times \gamma(\xi) \exp(ik\xi y) d\xi = \frac{\partial}{\partial z} H^i(z=0) \mp \frac{\partial}{\partial z} H^i(z=-h)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} H^{\text{inf},0}(z=0) \mp \frac{\partial}{\partial z} H^{\text{inf},0}(z=-h), \quad y \in L,$$

які може бути зведено до двох незалежних сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами (4.15), (4.16) і з ядрами

$$K^{\pm}(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)(1 \mp \exp(ik\gamma(\zeta)h))) d\zeta + q(y, \xi).$$

4.3. Операторний метод

Наведемо розв'язок задачі операторним методом.

4.3.1. Надання полів

В кожній з областей позначимо амплітуди Фур'є поля як A при $z > 0$, B і C при $0 > z > -h$, D при $z < -h$. Напрямки поширення хвиль з відповідними амплітудами наведено на рис.4.1.

Використовуючи такі ж міркування, що й при записі (4.4), кожен з амплітуд може бути надано як суми трьох доданків,

$$A = A^{\text{inf}} - A^0 + A^c, \quad B = B^{\text{inf}} - B^0 + B^c, \quad (4.18)$$

$$C = C^{\text{inf}} - C^0 + C^c, \quad D = D^{\text{inf}} - D^0 + D^c, \quad (4.19)$$

де верхній індекс "inf" означає частину, що відповідає плоским хвилям, розсіяним нескінченною ідеально періодичною решіткою, "0" означає частину, що відповідає полю струмів, які течуть стрічками з номерами $m = 0$, $m = 1, \dots, m = M - 1$ в ідеально періодичній решітці, "c" означає частину, що відповідає полю корекції.

4.3.2. Нескінченна ідеально періодична двошарова решітка

Амплітуди Фур'є відбитого поля, поля, яке пройшло, і поля між шарами двошарової ідеально періодичної решітки A^{inf} , D^{inf} , B^{inf} , C^{inf} пов'язані наступними операторними рівняннями [176]:

$$A^{\text{inf}} = r^{\text{inf}} q + t^{\text{inf}} e C^{\text{inf}} = r^{\text{inf}} q + e C^{\text{inf}} - r^{\text{inf}} e C^{\text{inf}}, \quad (4.20)$$

$$D^{\text{inf}} = t^{\text{inf}} e B^{\text{inf}} = e B^{\text{inf}} - r^{\text{inf}} e B^{\text{inf}}, \quad (4.21)$$

$$B^{\text{inf}} = t^{\text{inf}} q + r^{\text{inf}} e C^{\text{inf}} = q - r^{\text{inf}} q + r^{\text{inf}} e C^{\text{inf}}, \quad (4.22)$$

$$C^{\text{inf}} = r^{\text{inf}} e B^{\text{inf}}, \quad (4.23)$$

де r^{inf} і t^{inf} – оператори відбиття і проходження поодинокій плоскій нескінченній періодичній стрічкової решітці, що утворює двошарову ідеально періодичну нескінченну решітку. Вони пов'язані як

$$t^{\text{inf}} = I - r^{\text{inf}}. \quad (4.24)$$

Оператор e визначає зміну амплітуди поля при зсуві системи координат на величину h в напрямку поширення хвилі вздовж осі Oz .

Далі наведемо результати, які дозволять визначити амплітуди A^0 , B^0 , C^0 і D^0 . Помітимо, що якщо амплітуди A^{inf} , D^{inf} , B^{inf} , C^{inf} є відомими, то амплітуди A^0 , B^0 , C^0 , D^0 можна знайти, надавши поле струмів, які течуть стрічками з номерами $m = 0, m = 1, \dots, m = M - 1$, за допомогою потенціалу подвійного шару й скориставшись інтегральним поданням для функції Ханкеля. Для визначення щільності струмів, що входить у вираз для потенціалу подвійного шару, довелося б обчислювати суму повільно збіжних рядів. У даній же роботі, використовуючи результати, наведені у пункті 1.3.1, пропонується трохи інший підхід. Він застосовує інтегрування по скінченних відрізках функції $F(\xi)$, що є розв'язком сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами, отриманого у задачі про дифракцію на одному шарі, який є поодинокую плоскою нескінченною ідеально періодичною решіткою.

У припущенні, що на поодинокую плоску ідеально періодичну нескінченну решітку падає хвиля у вигляді (4.1), розсіяне поле можна надати як ряд Фур'є,

$$H^{s,\text{inf}} = \text{sgn}(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^1 \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n |z|)), \quad (4.25)$$

де a_n^1 –амплітуди.

Після розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою (1.46), (1.48), з виразів (1.43), (1.44) (замість a_n необхідно писати a_n^1) для кожного кута падіння φ_0 можуть бути отримані амплітуди розсіяного поля (4.15), а значить і значення елементів матриці оператора r^{inf} ,

$$a_n = r^{\text{inf}}(\zeta_n, \cos \varphi_0)q.$$

Функція $F(\xi)$, що є розв'язком сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою (1.46), (1.48), є з точністю до постійного множника похідною густини струмів на стрічках. Тоді густина струмів на стрічці з номером $m = 0$ дорівнює

$$\mu_0^{\text{inf}}(y) = \begin{cases} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik\zeta_n y), & |y| \leq d, \\ 0, & |y| > d, \end{cases} = 2 \int_{-\delta}^{\psi} F(\Theta) d\Theta \quad (4.26)$$

Густина струмів на інших стрічках відрізняється фазовим множником. Амплітуда поля $a^0(\xi)$, індукованого струмами, які течуть стрічками з номером $m = 0$ з густиною $\mu_0^{\text{inf}}(y)$ дорівнює

$$a^0(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-d}^d \mu_0^{\text{inf}}(y) \exp(-ik\xi y). \quad (4.27)$$

Маючи на увазі (4.26), з (4.27) остаточно отримаємо

$$a^0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^d \exp(-ik\xi y) \int_{-\delta}^{\psi} F(\Theta) d\Theta dy. \quad (4.28)$$

Поле стрічки з номером $m = 0$ має вигляд

$$H(y, z) = \text{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} a^0(\xi) \exp(ik(\xi y + \gamma(\xi) |z|)) dz.$$

Для розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою (1.46), (1.48) застосовувався метод дискретних особливостей. В результаті отримано значення функції $F(\xi)$ у вузлах інтерполяції. Внутрішній інтеграл в (4.28) можна обчислити, використовуючи квадратурну

формулу з таким саме вузлами, що й у методі дискретних особливостей при дискретизації (1.46), (1.48).

Таким чином, використовуючи (4.28), враховуючи той факт, що струми на стрічках нескінченної ідеально періодичної решітки відрізняються лише фазовим множником, можна ввести інтегральний оператор відбиття від стрічок за номерами $m = 0, m = 1, \dots, m = M - 1$ нескінченної періодичної решітки r^0 з ядром $r^0(\xi, \zeta)$:

$$a(\xi) = r^0(\xi, \cos \varphi_0)q. \quad (4.29)$$

Вирази (1.43), (1.44), (4.28), (4.29) дозволяють визначити по відомому падаючому полю амплітуду поля, розсіяного стрічкою з номером $m = 0$, а значить і з номерами $m = 1, \dots, m = M - 1$. У результаті розв'язання рівнянь (4.20)-(4.23) можна знайти амплітуди $A^{\text{inf}}, D^{\text{inf}}, B^{\text{inf}}, C^{\text{inf}}$. Таким чином, використовуючи вже відомі поля з амплітудами $A^{\text{inf}}, D^{\text{inf}}, B^{\text{inf}}, C^{\text{inf}}$, з виразів (1.43), (1.44), (4.28), (4.29) можна отримати невідомі амплітуди A^0, D^0, B^0 і C^0 . Наприклад,

$$C^0(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(\xi, \zeta_n) \exp(ik\gamma_n h) B_n^{\text{inf}}, \quad (4.30)$$

де B_n^{inf} – елемент вектора амплітуд B^{inf} . Враховуючи експоненційно спадаючий множник $\exp(ik\gamma_n h)$, при $n \rightarrow \infty$, ряд в (4.30) є швидко збіжним.

Таким чином, для визначення розсіяного досліджуваною не ідеально періодичною решіткою поля, залишилося лише знайти амплітуди поля корекції.

4.3.3. Поле корекції

Розглянемо двошарову решітку без скінченної кількості стрічок у кожному шарі. Амплітуди Фур'є розсіяного поля пов'язані наступними операторними рівняннями

$$A = rq + teC, \quad (4.31)$$

$$D = teB, \quad (4.32)$$

$$B = tq + reC, \quad (4.33)$$

$$C = reB, \quad (4.34)$$

де r і t – оператори відбиття та проходження поодинокого шару. Їх можна визначити з сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами, отриманими в розділі 2. Використовуючи такі ж міркування, що й при отриманні (4.4), з врахуванням (4.24), оператори r і t можна надати як

$$r = r^{\text{inf},0} + r^c = r^{\text{inf}} - r^0 + r^c, \quad (4.35)$$

$$t = I - r, \quad (4.36)$$

де опис верхніх індексів надано після (4.19).

Після підстановки (4.18), (4.19), (4.35), (4.36) в (4.31)-(4.34), з врахуванням рівностей (4.20)-(4.23), можна отримати операторні рівняння відносно амплітуд поля корекції

$$A^c = A^0 - r^0 q + r^c q - eC^0 + eC^c + r^{\text{inf}} eC^0 - r^{\text{inf}} eC^c + (r^0 - r^c) eC^{\text{inf}} + (r^0 - r^c) e(-C^0 + C^c), \quad (4.37)$$

$$D^c = D^0 - eB^0 + eB^c + r^{\text{inf}} eB^0 - r^{\text{inf}} eB^c + (r^0 - r^c) eB^{\text{inf}} + (r^0 - r^c) e(-B^0 + B^c), \quad (4.38)$$

$$B^c = B^0 + r^0 q - r^c q - r^{\text{inf}} eC^0 + r^{\text{inf}} eC^c + (r^c - r^0) eC^{\text{inf}} + (r^c - r^0) e(-C^0 + C^c) \quad (4.39)$$

$$C^c = C^0 + (r^c - r^0) eB^{\text{inf}} + (r^c - r^0) e(-B^0 + B^c). \quad (4.40)$$

Рівняння (4.37)-(4.40) еквівалентні інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду. Спочатку з (4.39), (4.40) можна знайти амплітуди B^c і C^c . Далі, з (4.37), (4.38) можна знайти амплітуди A^c і D^c . Для дискретизації (4.37)-(4.40) нескінченний інтервал інтегрування замінюється скінченним $(-a; a)$ і використовувалася квадратурна формула Гауса найвищого алгебраїчного ступеня точності. Вузли позначимо як ξ_p^0 , $p = 1, 2, \dots, P$. Кожному вузлу відповідає певний кут (дійсний або уявний) поширення плоскої хвилі, $\xi_p^0 = \cos(\varphi_p^0)$. Для того, щоб після дискретизації (4.37)-(4.40) отримати

сумісну систему рівнянь, розв'язок рівнянь (4.20)-(4.23) необхідно отримати, як мінімум, для кожного кута падіння φ_p^0 , $p = 1, 2, \dots, P$. Водночас при розв'язанні (4.20)-(4.23) необхідно врахувати всі плоскі хвилі, що поширюються, а так само декілька згасаючих. Позначимо загальне число врахованих загасаючих хвиль і хвиль, що поширюються, як $2M + 1$. Іншими словами, нескінченна сума вигляду (4.30), $n = -\infty, \dots, \infty$, замінюється скінченною, $n = -M, \dots, M$. Таким чином, загальне число рівнянь після дискретизації (4.39) і (4.40) становить $2(2M + 1)P$.

4.4. Числові результати

4.4.1. Ідеально провідні стрічки

Нехай плоска хвиля з одиничною амплітудою падає ортогонально.

Дослідимо числову збіжність. Для розв'язання задачі методом сингулярних інтегральних рівнянь нескінченна кількість стрічок у L , на які поширюються струми корекції, замінювалася скінченною у кількості $2N$. Ядра інтегральних рівнянь обчислювались з точністю не менше 10^{-6} . Похибка розв'язку, отриманого методом сингулярних інтегральних рівнянь, залежить від кількості вузлів, вибраних на кожній стрічці у методі дискретних особливостей Q і кількості стрічок N . Введемо відносну похибку за формулами

$$\varepsilon_Q = |TSCS(Q) - TSCS(2Q)| / TSCS(Q),$$

$$\varepsilon_N = |TSCS(N) - TSCS(2N)| / TSCS(N),$$

де TSCS – повний поперечний перетин розсіювання, який обчислюється по полю корекції. На рис.4.2 наведено залежності відносної похибки від кількості вузлів і кількості стрічок. Починаючи з деякого значення параметру похибка спадає монотонно з алгебраїчною швидкістю. Рис.4.2 б) також

дозволяє зробити висновок про ступінь взаємодії стрічок у двошаровій нескінченній періодичній решітці.

На точність визначення повного поля в операторному методі впливає похибка, з якою з (4.20)-(4.23) знайдено амплітуди поля, розсіяного нескінченною ідеально періодичною двошаровою решіткою, похибка, з якої з (4.37)-(4.40) знайдено амплітуди поля корекції, а також похибка, з якою визначено оператори розсіяння поодинокого шару r^{inf} , r^0 , r^c . Багато попередніх робіт показали, що для досить точного розв'язання рівнянь (4.20)-(4.23) можна враховувати не більше двох згасаючих хвиль [19]. Оператори r^{inf} , r^0 , r^c отримано строгим збіжним методом дискретних особливостей і обчислювалися з точністю 10^{-5} . Таким чином, необхідно лише перевірити збіжність при збільшенні числа вузлів інтерполяції P і розміру усіченого інтервалу інтегрування $2a$. Введемо відносну похибку за формулами

$$\varepsilon_p = |\text{TSCS}(P) - \text{TSCS}(2P)| / \text{TSCS}(2P),$$

$$\varepsilon_a = |\text{TSCS}(a) - \text{TSCS}(2a)| / \text{TSCS}(2a),$$

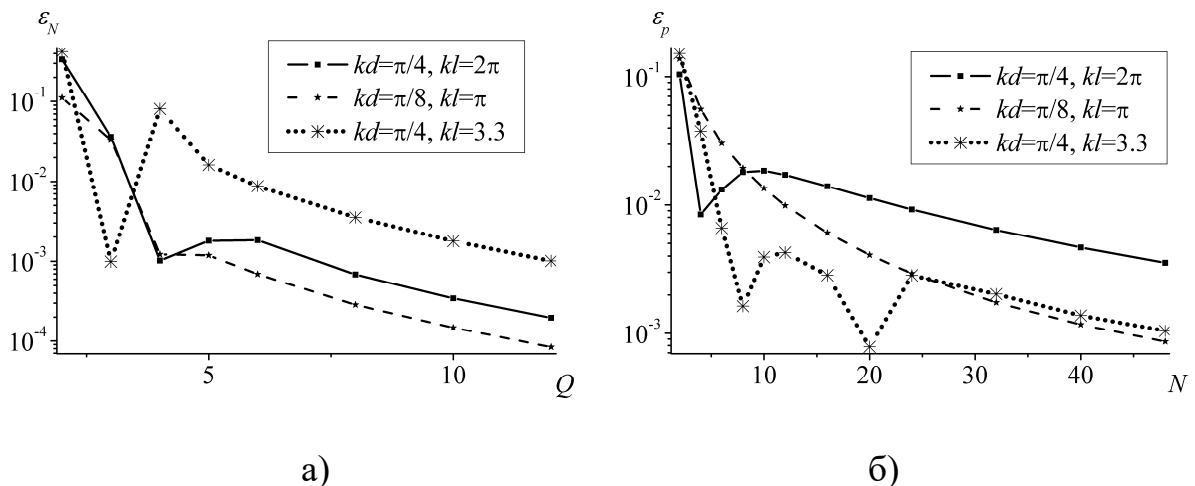


Рис.4.2 Залежності відносної похибки у методі сингулярних інтегральних рівнянь від а) числа вузлів на кожній стрічці Q , б) числа стрічок N , які

враховувалися, $d/h = \frac{\pi}{4}$, $M = 1$, $\varphi_0 = 90^\circ$.

На рис.4.3 наведено залежності відносної похибки від P і від a . При побудові рис.4.3 б) значення числа вузлів P вибиралося так, щоб співвідношення a/P було постійним. При збільшенні значень P і a спостерігається зменшення відносної похибки.

Для того, щоб провести валідацію алгоритму, проведено порівняння результатів, отриманих наведеними методами з результатами для скінченної решітки, отриманими методом сингулярних інтегральних рівнянь і у HFSS. На рис.4.4 наведено амплітуду магнітного поля в області над решіткою при $kz = 1.8$ для скінченної двошарової решітки і нескінченної решітки без однієї стрічки в кожному шарі, $M = 1$. Скінченна двошарова решітка складається з 18 стрічок у кожному шарі. Ширина всіх стрічок $2d$. Відстань між сусідніми стрічками у кожному шарі дорівнює $l - 2d$, за винятком двох середніх стрічок. Відстань між цими стрічками дорівнює $2l - 2d$. Іншими словами, решітка отримана з решітки з еквідистантним розташуванням стрічок за рахунок видалення однієї середньої стрічки у кожному шарі.

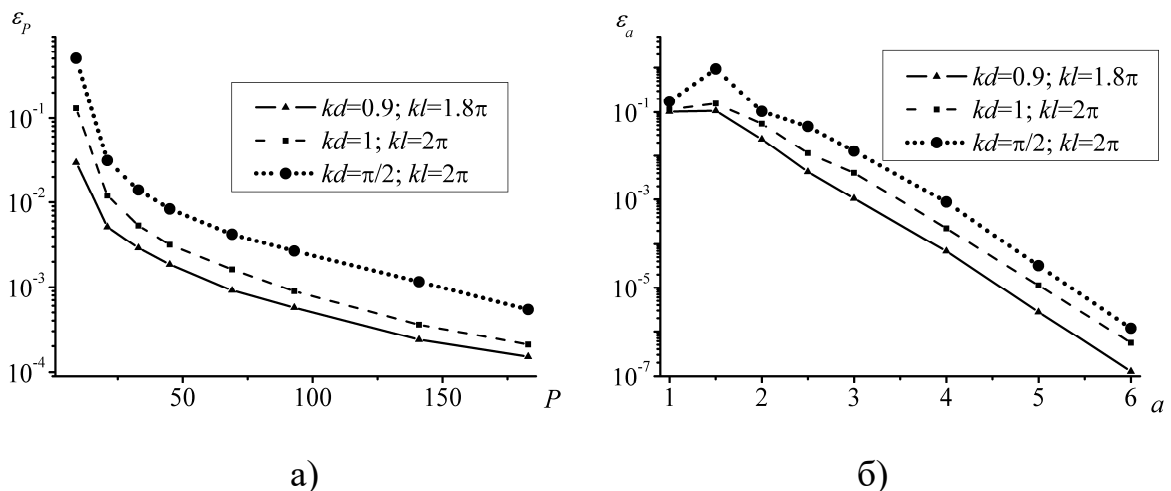


Рис.4.3 Залежності відносної похибки у операторному методі від а) числа вузлів P , б) розміру інтервалу інтегрування a при $l/h = 2\pi$, $M = 1$, $\varphi_0 = 90^\circ$

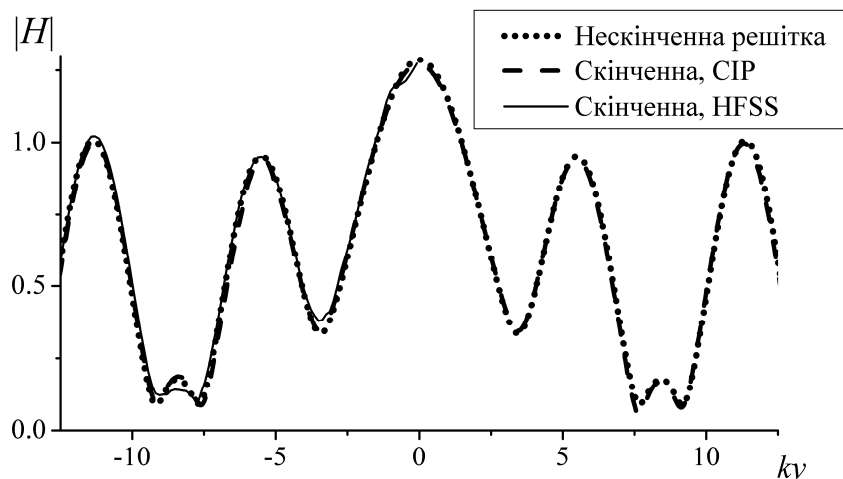


Рис.4.4 Розподіл повного поля при $kz = 1.8$, $kl = 5.7$, $kd = 1.43$, $kh = 0.9$, $M = 1$, $\varphi_0 = 90^\circ$. Порівнюються результати, отримані наведеним методом для нескінченної решітки (пунктирна крива), методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для скінченної решітки (штрихова крива), у HFSS для скінченної решітки (суцільна крива)

При використанні HFSS додатково розміщувалася ідеальна магнітна площина при $y = 0$. Як наслідок, результати наведено лише для $y < 0$. Спостерігається співпадіння результатів з графічною точністю. Слід зазначити, що обчислення наведених кривих методом сингулярних інтегральних рівнянь зайняло приблизно в 30 разів менше часу, ніж в HFSS.

Становить інтерес дослідити поле, яке пройшло, в зоні запирання, у якій коефіцієнт проходження двохарової періодичної решітки є малим, $T \rightarrow 0$. Зауважимо, що в зоні запирання поле, яке пройшло скрізь досліджувану неідеально періодичну структуру, визначається здебільшого циліндричною хвилею, випроміненою через хвилеводний канал, сформований відсутніми стрічками, так як плоска хвиля не збуджується в області $z < -h$.

Для визначення положення зон запирання й пропускання на частотній осі на рис.4.5 наведено залежності коефіцієнта відбиття R двохарової

ідеально періодичної решітки від хвильового числа, отримані методом сингулярних інтегральних рівнянь. Відмітимо, що $T = 1 - R$. Обрано резонансну ширину стрічок $2d = \lambda/2$. Завдяки вибору величини відстані між сферами h з'являється чітко виражена зона запирання. Значення $kl = 2\pi$ відповідає аномалії Релея-Вуда ($\varphi_0 = 0^\circ$), відбувається збудження вищих гармонік Флоке (плоских хвиль) з номерами ± 1 .

Як було зазначено вище, розсіяне поле можна надати як суму плоских H^{inf} і циліндричних $H^c - H^0$ хвиль. Поле H^{inf} не спадає при $\rho \rightarrow \infty$, де $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ – відстань до решітки. Поле ж $H^c - H^0$ навпаки, спадає при $\rho \rightarrow \infty$. Під діаграмою спрямованості поля циліндричних хвиль і поля корекції будемо розуміти амплітуду поля в далекій зоні $D(\varphi)$, $D^c(\varphi)$,

$$|H^c(\rho, \varphi) - H^0(\rho, \varphi)| \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} D(\varphi),$$

$$|H^c(\rho, \varphi)| \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} D^c(\varphi), \text{ при } \rho \rightarrow \infty,$$

де φ – кут полярної системи координат,

$$H^c(\rho, \varphi) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \begin{cases} (-B(-\cos\varphi) + C(-\cos\varphi) \exp(ikh \sin\varphi)) \sin\varphi, & 0 < \varphi < \pi, \\ (B(-\cos\varphi) \exp(ikh \sin\varphi) - C(-\cos\varphi)) \sin\varphi, & \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

$$H^0(\rho, \varphi) \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi\rho}} \times$$

$$\times \begin{cases} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-b_n + c_n \exp(ikh \sin\varphi)) \exp(ik(\zeta_n + \cos(\varphi))(y'+lm)) dy' \sin\varphi, \\ 0 < \varphi < \pi, \\ \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-b_n \exp(ikh \sin\varphi) + c_n) \exp(ik(\zeta_n + \cos(\varphi))(y'+lm)) dy' \sin\varphi, \\ \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

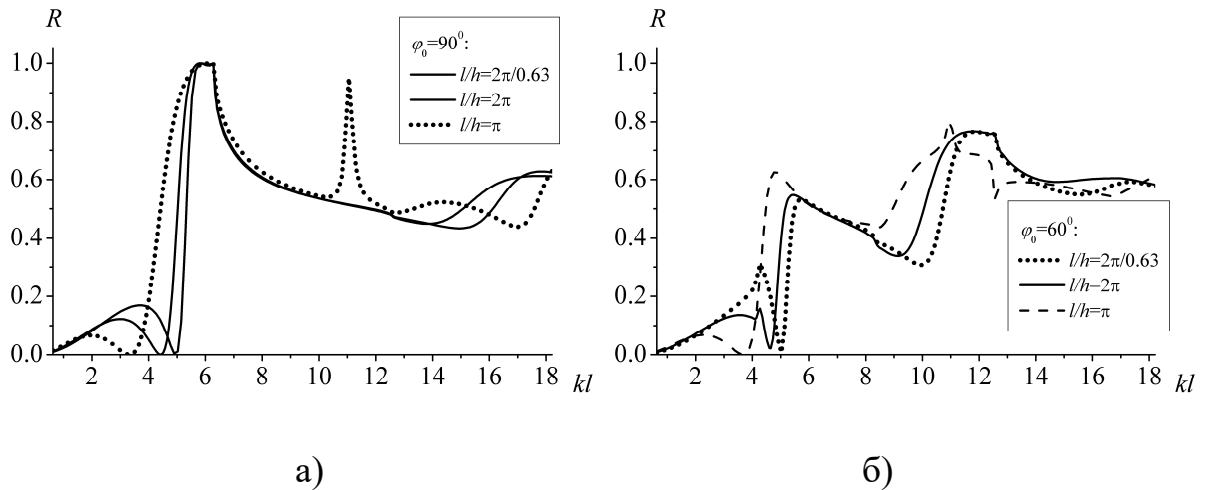


Рис.4.5 Залежності коефіцієнта відбиття двошарової нескінченної ідеально періодичної решітки від хвильового числа при $l/h = 2\pi/0.63$ (пунктирні криві), $l/h = 2\pi$ (суцільні криві), $l/h = \pi$ (штрихові криві), $l/d = 4$.

а) $\varphi_0 = 90^\circ$ (ортогональне падіння), б) $\varphi_0 = 60^\circ$

На рис.4.6 наведено діаграми спрямованості поля, яке пройшло, для різної кількості виключених стрічок M . Параметри структури відповідають смузі запирання. Діаграми нормуються на амплітуду падаючої хвилі. Ширина стрічок $2d = \pi$ ($2d = \lambda/2$) – резонансна. Значення періоду $kl = 2\pi$ відповідає зоні аномалій Релея-Вуда. Струми корекції досягають глобального максимуму. При даних значення параметрів у нескінченній періодичній решітці відбувається збудження ± 1 гармонік Флоке, які поширюються вздовж площини решітки. Для порівняння, на рисунках також наведено розв’язок Кірхгофа ($H^c \equiv 0$) при $kl = 2\pi$.

Відомо [36], що у скінчених решітках у випадку падіння плоскої хвилі зі збільшенням кількості стрічок ширина головного пелюстка діаграми спрямованості наближається до 0. У граничному випадку, у випадку нескінченної періодичної решітки, діаграму спрямованості можна розглядати як дельта-функцію. Водночас, у смузі запирання коефіцієнт проходження плоскої хвилі наближається до 0. Тому поле, яке пройшло, у далекій зоні цілком описується діаграмою спрямованості $D(\varphi)$ поля циліндричних хвиль.

Ці хвилі виникли в результаті проходження падаючої плоскої хвилі через хвилеводний канал, сформований відсутніми стрічками. Діаграма спрямованості у цьому випадку має відносно широкий головний пелюсток. При $M = 1$ ширина головного пелюстка за рівнем 0.707 становить приблизно 80° . Ця властивість може бути використана при створенні антен, ширина головного пелюстка у яких залежить від частоти. Зі збільшенням кількості виключених стрічок M ширина головного пелюстка зменшується.

На рис.4.7 наведено розподіл поля у ближній зоні в смузі запирання.

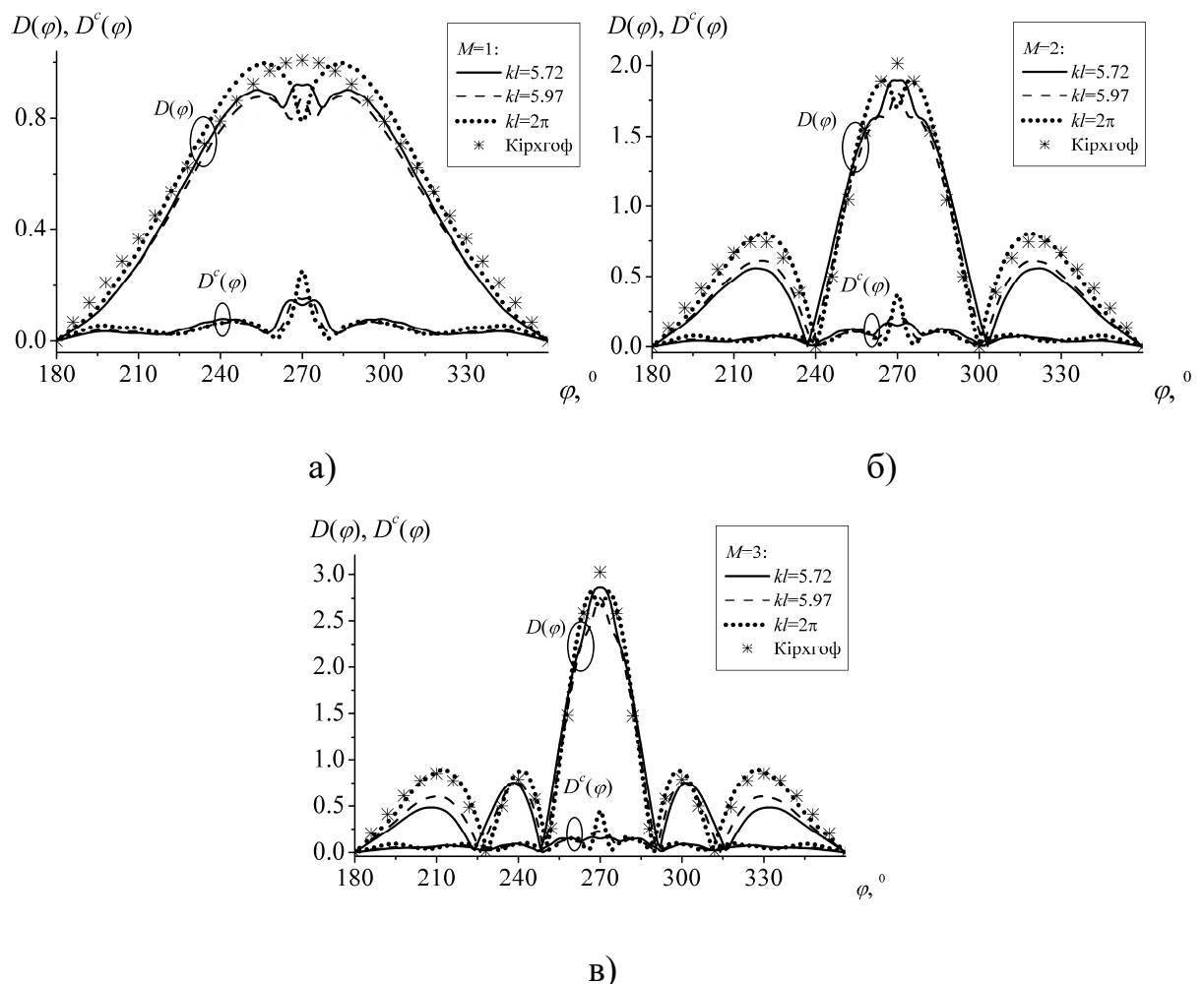


Рис.4.6 Діаграми спрямованості поля, яке пройшло при $kl = 5.72$ (суцільні криві), $kl = 5.97$ (штрихові криві), $kl = 2\pi$ (пунктирні криві), розв'язок Кірхгофа при $kl = 2\pi$ (зірочки), $l/d = 4$, $l/h = 2\pi$, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $M = 1$,

б) $M = 2$, в) $M = 3$

Параметри структури вибрані поблизу аномалії Релея-Вуда у випадку ортогонального падіння. Чітко видно поле циліндричних хвиль, які збуджені хвилею, що пройшла крізь хвилеводний канал, а також поле ± 1 гармонік Флоке, які поширюються вздовж площини решітки. На рис.4.8 наведено розподіл поля для двох різних кутів падіння плоскої хвилі. У цьому випадку параметри структури вибрані в зоні пропускання, коли коефіцієнт відбиття досягає найменшого значення.

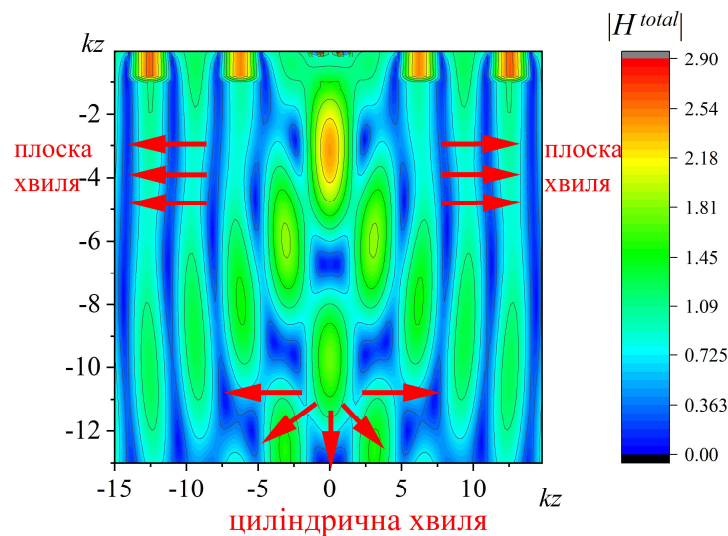


Рис.4.7 Розподіл поля, яке пройшло, компонента $|H^{total}|$ при $kl = 2\pi$,

$$l/d = 4, l/h = 2\pi, M = 1, \varphi_0 = 90^\circ (R \approx 1)$$

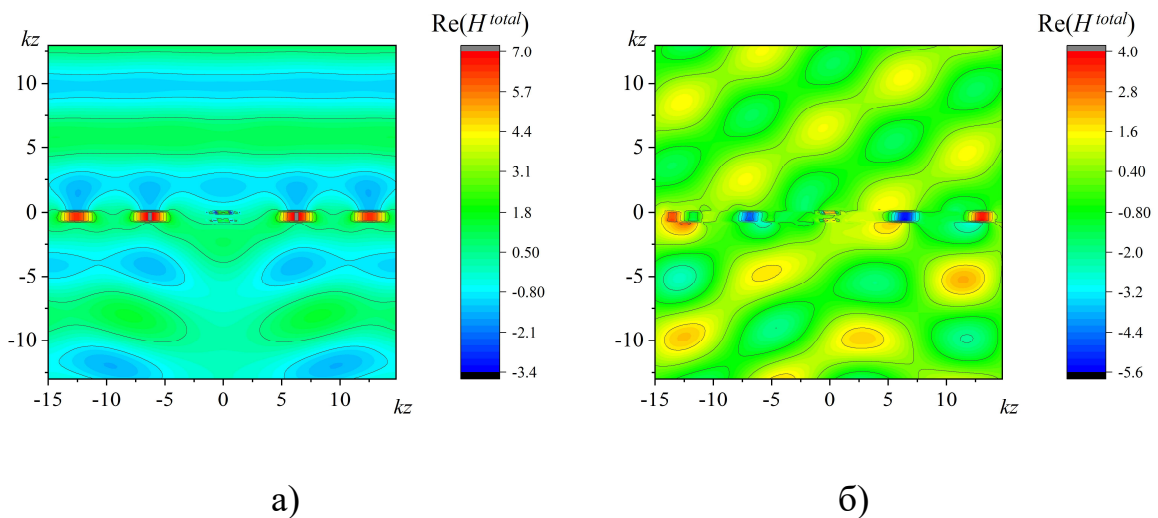


Рис.4.8 Розподіл поля, яке пройшло, компонента $\text{Re}(H^{total})$ при $kl = 5$,

$$l/d = 4, l/h = 2\pi/0.63, M = 1 (R \approx 0). \text{ а) } \varphi_0 = 90^\circ, \text{ б) } \varphi_0 = 60^\circ$$

4.4.2. Імпедансні (графенові) стрічки нульової товщини

Розглянемо двошарову графенову решітку.

Для валідації побудованого алгоритму на рис.4.9 наведено результати порівняння поля над двошаровою нескінченною графеновою решіткою без однієї стрічки в кожному шарі і відповідною скінченною решіткою, яка містить 24 стрічки у кожному шарі. Результати співпадають з графічною точністю.

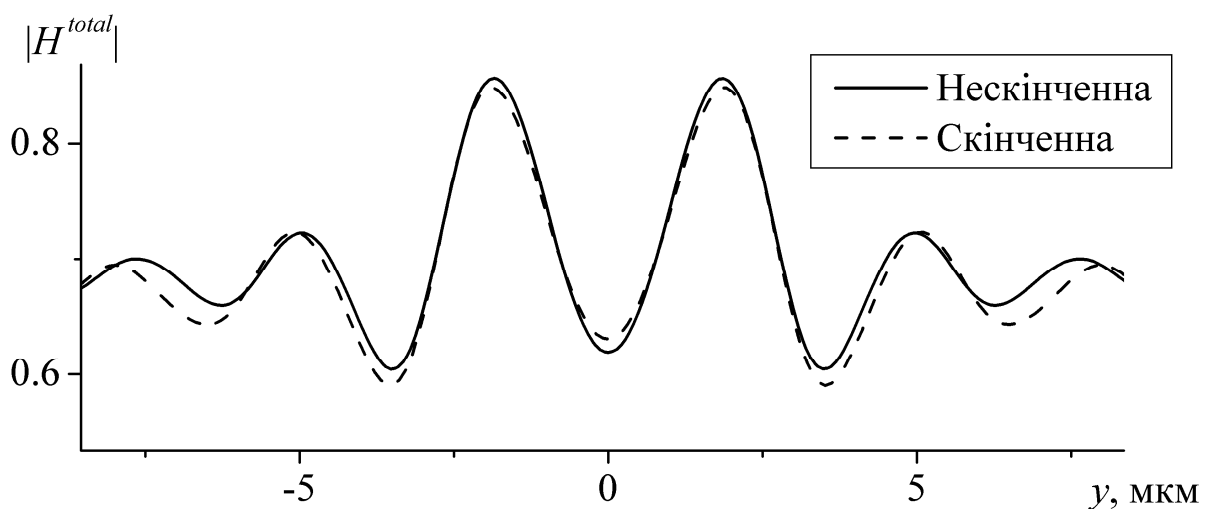


Рис.4.9 Розподіл повного поля в області над решіткою при $z = 2h$, $l = 70$ мкм, $d = 10$ мкм, $h = 46$ мкм, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3$ еВ.

Порівняння результатів для двошарової нескінченної решітки без однієї стрічки у кожному шарі (суцільна крива) і скінченної решітки (штрихова крива)

На рис.4.10 наведено залежності коефіцієнта відбиття, проходження та поглинання двошарової нескінченної ідеально періодичної решітки за потужністю від частоти для різних значень хімічного потенціалу. Перший плазмонний резонанс для $\mu_c = 0.3$ еВ спостерігається поблизу частоти $f = 2.3$ ТГц. Використовуючи результати рис.4.10 виберемо параметри таким

чином, щоб коефіцієнт проходження досягав мінімального значення, $T \rightarrow 0$, і поле, яке пройшло, визначалося циліндричною хвилею.

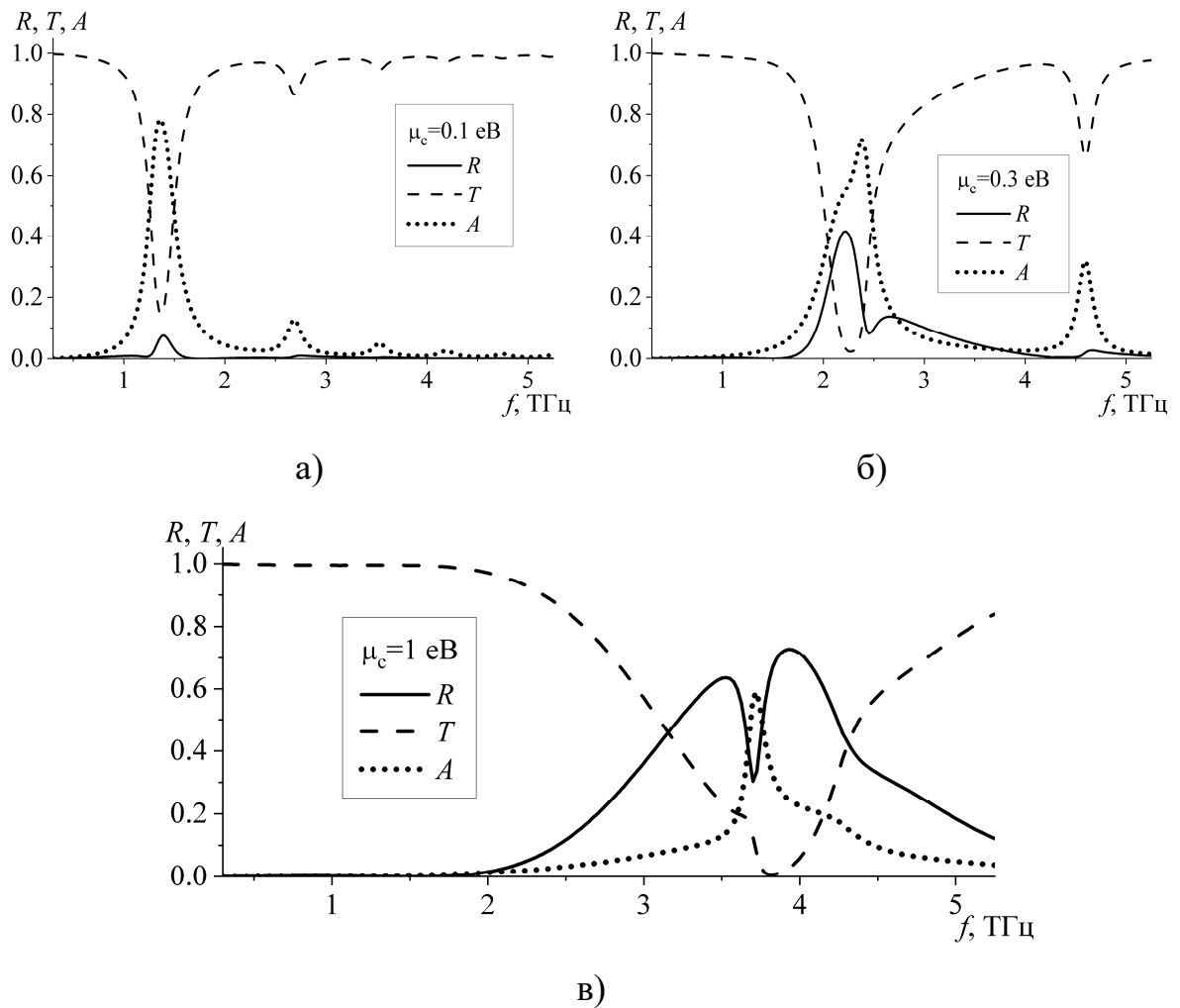


Рис.4.10 Залежності коефіцієнта відбиття (суцільні криві), проходження (штрихові криві) і поглинання (пунктирні криві) двошарової нескінченної ідеально періодичної решітки від частоти при $l = 70$ мкм, $d = 10$ мкм, $h = 46$ мкм, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $\mu_c = 0.1$ eВ, б) $\mu_c = 0.3$ eВ, в) $\mu_c = 1$ eВ

Дослідимо поле, яке пройшло, у далекій зоні двошарової графенової решітки без однієї стрічки у зоні запирання біля першого плазмонного резонансу.

Цікавим є розглянути результати при різній кількості стрічок, які враховуються, і порівняти з результатами, отриманими у припущенні, що поле корекції не збуджується (розв'язок Кірхгофа). На рис.4.11 наведено діаграми спрямованості (за потужністю). Діаграми нормуються на максимальне значення. Результати для $N = 20$ і $N = 40$ співпадають з графічною точністю. З цього можна зробити висновок про ступінь взаємодії стрічок у решітці.

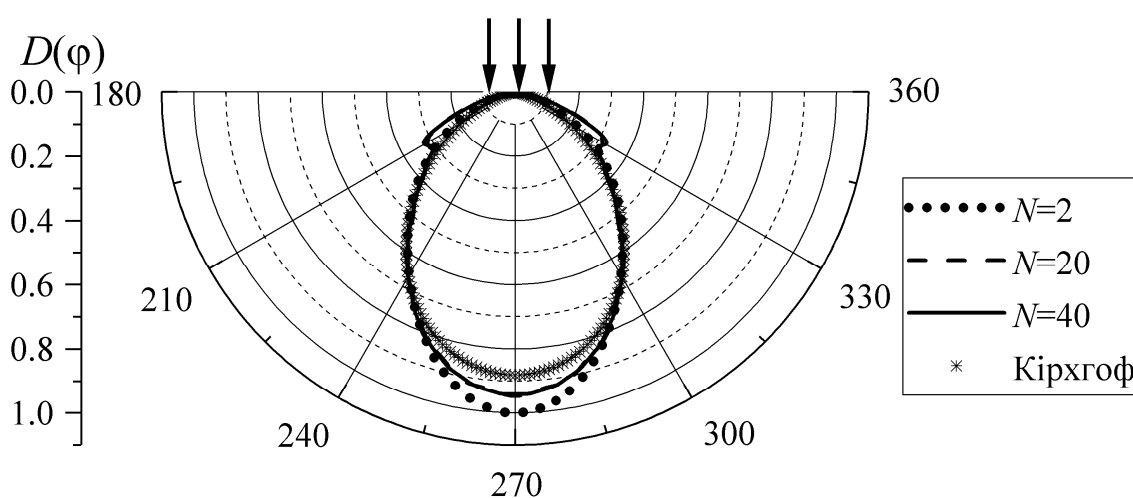


Рис.4.11 Діаграми спрямованості поля, яке пройшло, при різному числі стрічок N , які враховуються, $N = 2$ (пунктирна крива), $N = 20$ (штрихова крива), $N = 40$ (суцільна крива), розв'язок Кірхгофа (маркери), $f = 2.3$ ТГц, $l = 70$ мкм, $d = 10$ мкм, $h = 46$ мкм, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $\varphi_0 = 90^\circ$.

На рис.4.12 наведено діаграми спрямованості для різних значень хімічного потенціалу графенових стрічок. Параметри структури вибрані поблизу першого плазмонного резонансу для $\mu_c = 0.3$ еВ. При зміні хімічного потенціалу плазмонні резонанси зміщуються вздовж частотної осі. В результаті поблизу частоти плазмонного резонансу при $\mu_c = 0.3$ еВ, $f = 2.3$ ТГц, графенова решітка стає прозорою при $\mu_c \neq 0.3$ еВ, коефіцієнт проходження плоскої хвилі наближається до максимального значення, $T \rightarrow 1$.

Ця плоска хвиля не зазнає розсіяння. Потужність циліндричних хвиль наближається до нуля. Таким чином показано, що, на відміну від решітки з ідеально провідних стрічок, у якій контролювати ширину діаграми спрямованості вдавалося за рахунок перебудови частоти або періоду, у графеновій решітці цей же ефект можна досягти за рахунок зміни хімічного потенціалу.

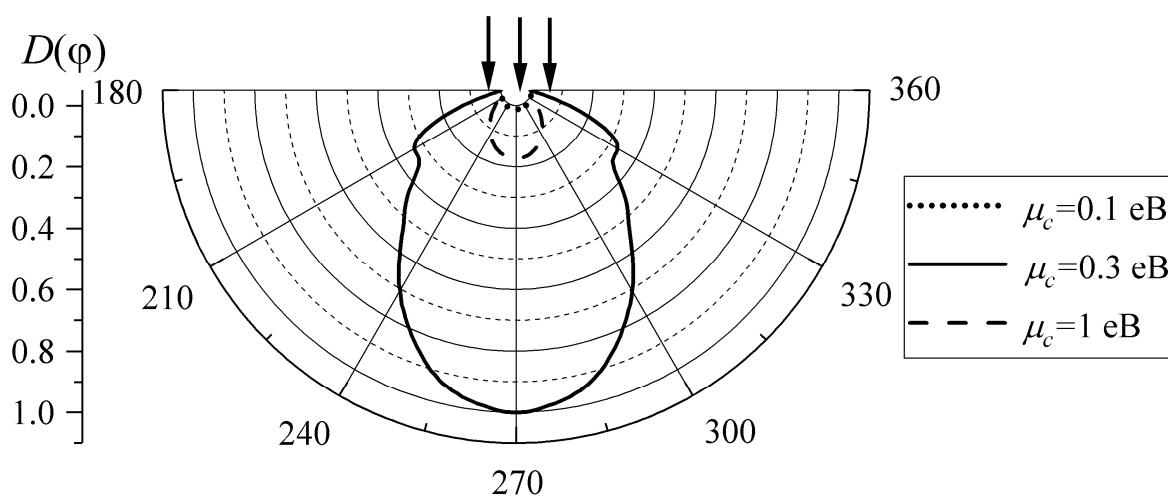


Рис.4.12 Діаграми спрямованості поля, яке пройшло, при $\mu_c = 0.1$ eВ (пунктирна крива), $\mu_c = 0.3$ eВ (суцільна крива), $\mu_c = 1$ eВ (штрихова крива), $f = 2.3$ ТГц, $l = 70$ мкм, $d = 10$ мкм, $h = 46$ мкм, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $\varphi_0 = 90^\circ$

Висновки до розділу 4

Отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію H -поляризованої хвилі на двошаровій нескінченній періодичній решітці у відсутності скінченної кількості стрічок у кожному шарі. Використано метод сингулярних інтегральних рівнянь і операторний метод. Розглянуто випадок ідеально провідних стрічок і імпедансних стрічок нульової товщини.

Проведено числове дослідження збіжності і порівняння з результатами, отриманими для скінченної двошарової решітки. Співпадіння результатів з графічною точністю дозволяє зробити висновок про їх достовірність.

Показано, що в зоні запирання ідеально періодичної решітки падаюча хвиля може проходити скрізь зазор, створений відсутніми стрічками.

У двошаровій решітці в зоні запирання, коли коефіцієнт проходження плоскої хвилі наближається до нуля, поле, яке пройшло, визначаються циліндричною хвилею. Діаграма спрямованості поля, яке пройшло, має відносно широкий головний пелюсток з шириною приблизно 80° за рівнем 0.707 за амплітудою. У смузї ж запирання поле, яке пройшло, має над вузький головний пелюсток (дельта-функція). Таким чином, шириною головного пелюстка вдається керувати за рахунок зміни частоти або періоду. У випадку графенових стрічок, шириною головного пелюстка вдається керувати ще і за рахунок зміни хімічного потенціалу, без зміни частоти і періоду.

Розділ 5. Одношарові решітки з імпедансних стрічок нульової товщини, занурені у діелектричну пластину

У попередніх розділах розглядалися імпедансні стрічкові решітки у вакуумі. З практичної точки зору введення діелектричної площини є актуальним. Решітки з підкладкою є простішими у виготовленні. Підкладка або верхній шар діелектрика може слугувати у якості захисної оболонки, яка перешкоджає механічним пошкодженням стрічок. Якщо діелектрична проникність підкладки та верхнього захисного шару співпадають, то буде тримана структура, розглянута у цьому розділі. З фізичної точки зору введення діелектричної пластини призводить до появи низки резонансів. З математичної точки зору, у виразах для полів, а також у ядрі інтегральних рівнянь, з'являються не інтегровані на дійсній осі сингулярності, що призводить до необхідності проведення регуляризації інтегралів.

У роботах [98], [108], [177]-[179] розглядається нескінченна стрічкова решітка, вбудована в діелектричну плиту. У разі наявності діелектричної плити спостерігається збудження ще кількох типів резонансів, у порівнянні з решіткою у вакуумі, що може істотно впливати на фізичні властивості пристроїв на основі стрічкових решіток. Наприклад, у надзвичайно вузькому діапазоні частот спостерігаються суттєві зміни частотних залежностей характеристик розсіювання та поглинання через збудження резонансів решіткової моди. Комерційні пакети на основі методу сіток (методу скінченних різниць) або методу скінченних елементів використовують, наприклад, наближені умови випромінювання. Таким чином, точність числових результатів завжди обмежена декількома цифрами; більш щільна сітка не гарантує підвищення точності результатів. Для решіток, які складаються навіть з декількох стрічок, необхідна надзвичайно велика сітка. З одного боку необхідно вибирати відносно великий крок по частоті, щоб

отримати результати за розумний час розрахунку. З іншого боку, маючи на увазі збудження резонансів у надзвичайно вузькій смузі частот, крок за частотою необхідно робити якомога меншим, що, в свою чергу, призводить до надзвичайно великих затрат комп'ютерного часу й комп'ютерної пам'яті, що є нереалізованим. Як наслідок, дослідження з використанням комерційних пакетів можуть легко пропустити резонанси на решіткових модах. Таким чином, розробка строгих і ефективних методів є важливою задачею.

Плоский діелектричних хвилевід зі стрічками є елементом антенних систем, фільтрів, частотно-селективних поверхонь, сенсорів та ін. [180]-[182]. Електродинамічні властивості таких об'єктів, як правило, здебільшого залежать від геометричних параметрів. Водночас використання матеріалів, властивості яких можуть бути змінені за рахунок зовнішніх впливів у реальному часі забезпечують можливість динамічного контролю розсіяних полів. Одним з таких матеріалів є графен. Його властивості можуть бути змінені динамічно за рахунок прикладення електростатичного поля.

Поодинокую графенову стрічку та її сенсорні властивості досліджено в [69], а сенсорні властивості системи графенових стрічок з діелектричною підкладкою досліджено в [183], [184]. Резонансні властивості поодинокій графеновій стрічки, розташованій на круглому діелектричному стрижні, проаналізовано в [185] за допомогою сингулярного інтегрального рівняння, а повністю покритих графеном стрижнів – у [186] за допомогою граничного інтегрального рівняння. У роботах [82], [97], [105], [187] розглянуто плазмонні резонанси скінченних та нескінченних графенових стрічкових решіток у вакуумі при нормальному та похилому падінні. При цьому найчастіше графен розміщують на або всередині діелектричного матеріалу, що забезпечує кращу механічну стійкість.

У [188] за допомогою методу Вінера-Хопфа розглядається задача про дифракцію на синусоїдально гофрованій стрічці. У [189] подібна задача

розв'язана за допомогою методу аналітичної регуляризації та інтегрального рівняння Абеля. Метод аналітичної регуляризації у формі методу моментів Гальоркіна з регуляризуючими базисними функціями (поліномами Чебишева) був розроблений у спектральній області для аналізу скінченної решітки ідеально провідних стрічок у вільному просторі в [142]. Цей метод можна застосувати і до розсіювання на скінченній кількості імпедансних стрічок у шаруватому середовищі шляхом поєднання [142] з [190].

На даний момент доступний детальний аналіз лише нескінченних графенових стрічкових решіток, розміщених всередині діелектричної плити. Як відомо, однорідна діелектрична плита у вільному просторі, або розташована на ідеально провідній площині, може підтримувати поширення власних хвиль, які не затухають вздовж плити. Ці хвилі не можуть бути збуджені лише плоскою хвилею. Проте, якщо у плиті розміщено неоднорідність, наприклад скінченну стрічкову решітку, вони збуджуються в результаті розсіювання на стрічках. Зауважимо, що модель нескінченної стрічкової решітки не дозволяє описати збудження власних хвиль діелектричної плити при розсіюванні плоскої хвилі.

В даному розділі розглянемо скінченні та нескінченні періодичні решітки з імпедансних стрічок, занурених у діелектричну площину. При отриманні числових результатів у якості імпедансних поверхонь обирається графен. Параметри структур, при яких виконуються дослідження, відповідають реальним об'єктам, а припущення ідеальності діелектрика (без втрат) є обґрунтованим, оскільки на сьогоднішній день отримано зразки конкретних діелектриків з відносно низьким рівнем втрат у терагерцовому діапазоні, доволі успішно ведуться роботи по створенню діелектриків з ще меншими втратами [191]-[196].

В розділі задачі розв'язуються методом сингулярних інтегральних рівнянь. Дискретизація сингулярного інтегрального рівняння з додатковими

умовами базується на збіжному методі дискретних особливостей типу Найстрема [47]-[50].

5.1. Нескінченна решітка у діелектричній пластині

Розташуємо нескінченну періодичну решітку з імпедансних стрічок нульової товщини в площині $z=0$. Діелектричний шар ширини $h_1 + h_2$ розташуємо так, щоб відстань від верхньої і нижньої його границь до решітки дорівнювало h_1 і h_2 відповідно. Відносна діелектрична проникність шару дорівнює ε , відносна магнітна проникність $\mu = 1$. Ширина стрічок дорівнює $2d$, період решітки дорівнює l . Геометрію структури й систему координат наведено на рис.5.1. Структура є нескінченною і однорідною вздовж осі Ox .

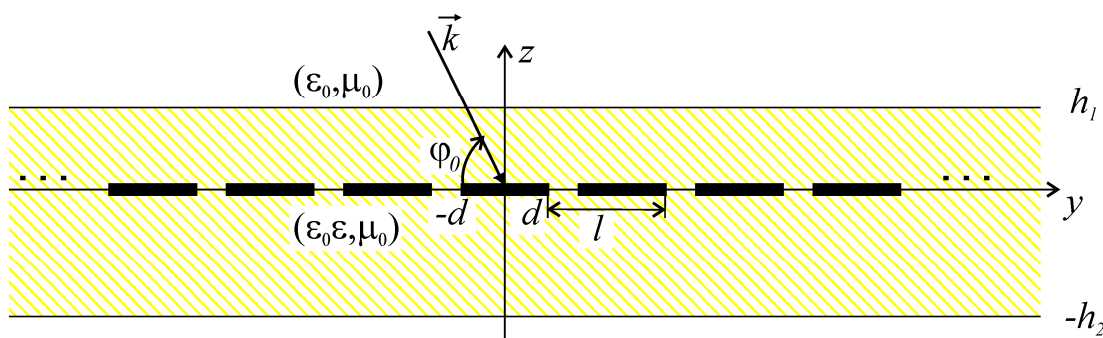


Рис.5.1 Геометрія нескінченної решітки з імпедансних стрічок нульової товщини, розміщеної в діелектричному шарі

Падаюче H -поляризоване поле надамо як плоску хвилю з одиничною амплітудою (1.37)

$$H_x^i(y, z) = \exp(ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)).$$

Повне поле будемо шукати як суперпозицію двох полів. Одне з них – це первинне поле H_x^{slab} , яке є полем, що виникає в просторі в присутності діелектричного шару (за відсутності решітки). Друге – це поле H_x^g , розсіяне решіткою

$$H_x = H_x^{slab} + H_x^g. \quad (5.1)$$

Повне поле задовольняє рівнянню Гельмгольца, граничним умовам і умовам неперервності в площині графенових стрічок, $z=0$, (1.49), (1.50), (1.52), умові випромінювання та умові на ребрі. Крім цього, повне поле повинно задовольняти умовам неперервності на границях розділу вільний простір – діелектрик

$$E_y^+ = E_y^-, H_x^+ = H_x^-, z = h_1, \quad (5.2)$$

$$E_y^+ = E_y^-, H_x^+ = H_x^-, z = -h_2, \quad (5.3)$$

де знак "+" і знак "-" означають граничні значення поля при наближенні до границі розділу зверху чи знизу відповідно.

Первинне поле H_x^{slab} може бути знайдено, якщо надати його у вигляді плоскої хвилі в кожній з областей з невідомими амплітудами:

$$H_x^{slab} = \begin{cases} H_x^i + A \exp(ik(y \cos \varphi_0 + z \sin \varphi_0)), & z > h_1, \\ C \exp(ik_1(y \cos \varphi_1 - z \sin \varphi_1)) + B \exp(ik(y \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)), & h_1 > z > -h_2, \\ D \exp(ik(y \cos \varphi_0 - z \sin \varphi_0)), & z < -h_2, \end{cases} \quad (5.4)$$

де $k_1 = k\sqrt{\varepsilon}$ – хвильове число в діелектричному шарі, φ_1 – кут заломлення, відлічуваний від негативного напрямку осі, при цьому

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi_0}{\varepsilon}}.$$

Амплітуди A , B , C , D в (5.4) можна визначити, прирівнявши дотичні компоненти електричного і магнітного поля на границі розділу середовищ (5.2), (5.3).

Розсіяне решіткою поле шукаємо як ряд Фур'є (суперпозиції плоских хвиль) в кожній з областей з невідомими амплітудами,

$$H_x^g = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n z)), & z > h_1, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y - \gamma_n^1 z)) + b_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y + \gamma_n^1 z))), \\ h_1 > z > 0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y - \gamma_n^1 z)) + g_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y + \gamma_n^1 z))), \\ 0 > z > -h_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp(ik(\zeta_n y - \gamma_n z)), & z < -h_2, \end{cases}$$

де $\zeta_n^1 = \frac{2\pi n}{k_1 l} + \sin \alpha_1$, $\gamma_n^1 = \sqrt{1 - (\zeta_n^1)^2}$, $\sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\alpha = \pi/2 - \varphi_0$. Застосовуючи умови неперервності (1.49), (1.50), (5.2), (5.3), можемо виразити амплітуди a_n , c_n , f_n , g_n і d_n через b_n .

Після застосування граничних умов (1.50), (1.52) можуть бути отримані парні ряди Фур'є, записані для одного періоду, $|y| < l/2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) = 0, \quad |y| \geq d, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2ik_1 \sqrt{\varepsilon}}{\sigma Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) + \\ & + ik_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \gamma_n^1 \frac{1 - C_n}{1 - G_n} \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) = -\frac{\partial}{\partial z} H_x^{slab}, \quad |y| < d, \end{aligned} \quad (5.6)$$

де $\hat{b}_n = (b_n - g_n)$. Коефіцієнт \hat{b}_n введений для того, щоб надати парні ряди Фур'є у вигляді, подібному з випадком поодинокі періодичної решітки (дивись (1.55), (1.56)). Тоді, для того, щоб звести рівняння (5.5), (5.6) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою, можна застосовувати єдину схему.

5.1.1. Сингулярне інтегральне рівняння

Введемо безрозмірні величини $\xi = 2\pi y/l$, $\kappa = kl/(2\pi)$, $\delta = 2\pi d/l$.

Зауважимо, що виконуються наступні асимптотичні співвідношення

$$\frac{1-C_n}{1-G_n} \sim 1 + \exp(-4\pi n), \quad \gamma_n^1 \sim i \frac{|n|}{\kappa} + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тоді, як і у разі поодинокі нескінченної решітки, для доданків в (5.6) виконується

$$\gamma_n^1 \frac{1-C_n}{1-G_n} \sim i \frac{|n|}{\kappa} + O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Для того, щоб звести парні ряди Фур'є (5.5), (5.6) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами в безрозмірних величинах, введемо функції

$$U(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \exp(in\xi),$$

$$F(\xi) = U'(\xi) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \hat{b}_n \exp(in\xi). \quad (5.8)$$

Зауважимо, що

$$U(y) = 0 \quad \text{і} \quad F(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| > \delta. \quad (5.9)$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до (5.8), з урахуванням (5.9), можемо виразити амплітуди \hat{b}_n через $F(\xi)$:

$$\hat{b}_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) \exp(-in\xi) d\xi, \quad n \neq 0 \quad (5.10)$$

$$\hat{b}_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\xi}{2} F(\xi) d\xi. \quad (5.11)$$

Використовуючи асимптотичний вираз (5.7), елементи другого ряду в (5.6) наведемо як суму спадаючого і неспадаючого доданка. Далі, до неспадаючого доданку застосуємо періодичний оператор Гільберта (1.45), який призведе до появи сингулярного інтеграла. Решту доданків згрупуємо в

ядро рівняння. Після застосуванні виразів (5.8)-(5.11), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою

$$\frac{1}{\pi} PV \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K(\psi, \xi) F(\xi) d\xi = -\frac{l}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} H_x^{slab}, \quad |\psi| < \delta,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) d\xi = 0,$$

розв'язання якого може бути отримано методом дискретних особливостей.

Ядро має вигляд

$$K_{2\pi}(\psi, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \Gamma_n \right) \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} +$$

$$+ i\gamma_0 \kappa \frac{\psi - \xi}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\psi - \xi}{2} \right) \right) + q(\psi, \xi), \quad (5.12)$$

$$q(\psi, \xi) = \begin{cases} \frac{2i\kappa\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq \psi, \\ 0, & \xi > \psi, \end{cases}$$

$$\Gamma_n = \gamma_n^1 \frac{1 - C_n}{1 - G_n}.$$

5.1.2. Числові результати

Розглянемо решітку з графенових стрічок, провідність яких задається формулою (1.78). Поодинокі графенові стрічки, а також системи графенових стрічок, які є складовою частиною решітки, здатні підтримувати плазмонні резонанси. Положенням плазмонних резонансів на частотній осі можна керувати за рахунок зміни хімічного потенціалу стрічок. На відміну від періодичних решіток у вакуумі, у яких спостерігалися резонанси поблизу аномалій Релея, пов'язані з періодичністю, у решіток в діелектричній пластині відбувається збудження так званих резонансів на решіткових модах. Резонансні частоти залежать від параметрів діелектричного шару та періоду решітки. Поодинокі діелектрична плита, в тому числі і без решітки, здатна

підтримувати резонанси хвиль, багатократно перевідбитих між границями вакуум-діелектрик. Ці резонанси залежать, в основному, від параметрів діелектричного шару, таких як діелектрична проникність або розмір. Таким чином, досліджувана структура здатна підтримувати три типи резонансів: плазмонні резонанси, резонанси на решіткових модах і власні резонанси діелектричної плити.

На рис.5.2 наведено залежності коефіцієнтів відбиття, проходження, поглинання від частоти. Для порівняння також наведено результати, отримані методом аналітичної регуляризації у [98]. Для кращого візуального порівняння, параметри структури вибрані такими саме, як і в [98]. Результати співпадають з графічною точністю. Поблизу плазмонних резонансів, як і у разі решітки у вакуумі, спостерігається зростання коефіцієнта поглинання та відбиття. Поблизу резонансів на решіткових модах також спостерігається зростання коефіцієнта поглинання та відбиття, але у набагато більш вузькій смузі частот.

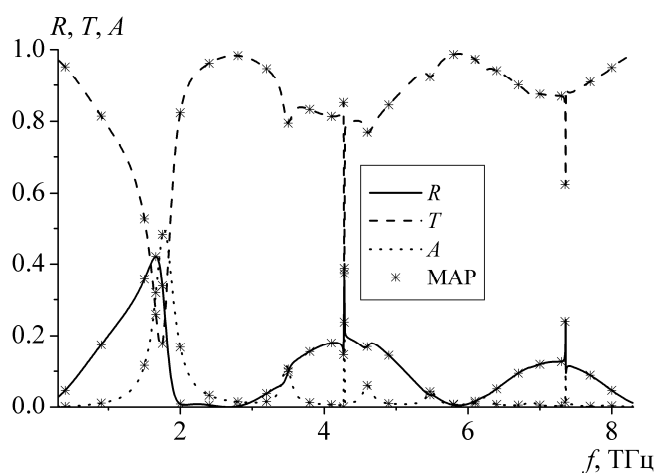


Рис.5.2 Залежності коефіцієнтів відбиття R (суцільна крива), проходження T (штрихова крива) і поглинання A (пунктирна крива) від частоти при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $h_1 = h_2 = l/4$, $\mu_c = 0.39$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. Також у вигляді зірочок наведені результати, отримані методом аналітичної регуляризації (МАР)

5.2. Нескінченна решітка у діелектричній пластині з ідеальною провідною площиною

Розглянемо решітку, яка знаходиться всередині діелектричної пластини, яка, в свою чергу, знаходиться на ідеально провідній площині.

Припустимо, плоска нескінченна періодична решітка з нескінченно тонких імпедансних стрічок знаходиться в площині $z = 0$. Ідеально провідна площина описується рівнянням $z = -h_2$. Діелектричний шар ширини $h_1 + h_2$ розташуємо так, щоб нижня його границя співпадала з ідеальною провідною площиною, а відстань від верхньої границі до решітки дорівнювала h_1 . Відносна діелектрична проникність шару дорівнює ε , відносна магнітна проникність $\mu = 1$, ширина стрічок дорівнює $2d$, період решітки дорівнює l . Геометрію структури й систему координат наведено на рис.5.3. Структура є нескінченною і однорідною вздовж осі Ox .

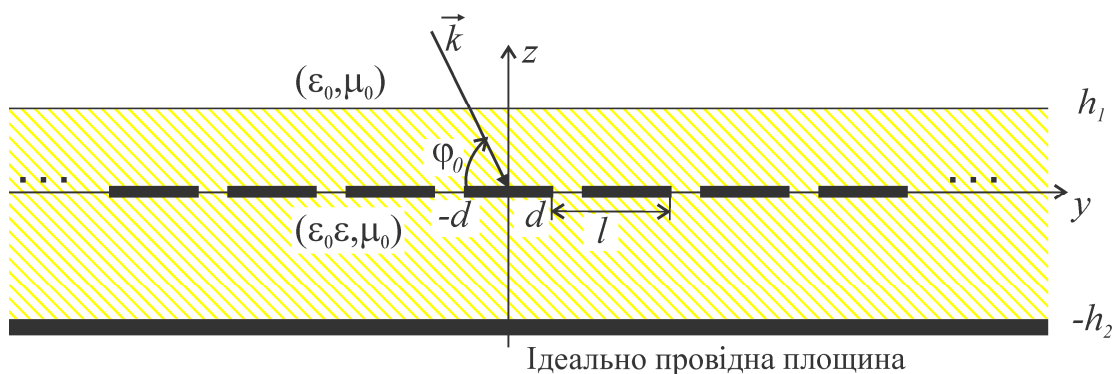


Рис.5.3 Геометрія нескінченної решітки з імпедансних стрічок нульової товщини, розміщеної в діелектричному шарі з ідеальною провідною площиною

Падаюче H -поляризоване поле надамо як плоску хвилю з одиничною амплітудою (1.37). Повне поле будемо шукати як суперпозицію двох полів. Одне з них – це первинне поле H_x^{slab} , яке є полем, що виникає в просторі в присутності діелектричного шару, розташованого над ідеальною провідною

площиною (за відсутності решітки). Друге – це поле H_x^g , розсіяне решіткою (5.1),

$$H_x = H_x^{slab} + H_x^g.$$

Повне поле задовольняє рівнянню Гельмгольца, граничним умовам та умовам неперервності в площині графенових стрічок, $z = 0$, умові неперервності на границі розділу вільний простір – діелектрик при $z = h_1$ (1.49), (1.50), (1.52), (5.2), умові випромінювання та умові на ребрі. Крім цього, повинна виконуватись умова рівності нулю дотичної компоненти електричного поля на ідеально провідній площині

$$E_y = 0, z = -h_2. \quad (5.13)$$

Первинне поле H_x^{slab} може бути знайдено, наприклад, якщо надати його як плоску хвилю в кожній з областей з невідомими амплітудами:

$$H_x^{slab} = \begin{cases} H_x^i + A \exp(ik(y \cos \varphi_0 + z \sin \varphi_0)), & z > h_1, \\ C \exp(ik_1(y \cos \varphi_1 - z \sin \varphi_1)) + B \exp(ik(y \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)), & h_1 > z > -h_2. \end{cases} \quad (5.14)$$

Амплітуди A , B , C в (5.14) можна визначити, застосувавши умови (5.2), (5.13).

Розсіяне решіткою поле H_x^g шукаємо як ряд Фур'є (суперпозиції плоских хвиль) в кожній з областей з невідомими амплітудами

$$H_x^g = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n z)), & z > h_1, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y - \gamma_n^1 z)) + b_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y + \gamma_n^1 z))), & h_1 > z > 0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y - \gamma_n^1 z)) + g_n \exp(ik_1(\zeta_n^1 y + \gamma_n^1 z))), & 0 > z > -h_2. \end{cases}$$

Після застосування граничних умов можуть бути отримані парні ряди Фур'є, записані для одного періоду, $|y| < l/2$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n - f_n - (g_n - b_n)) \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) = 0, |y| \geq d, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
& ik_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^1 (-c_n + b_n) \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) + \\
& + \frac{ik_1 \sqrt{\varepsilon}}{\sigma Z_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n - f_n - (g_n - b_n)) \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) = -\frac{\partial}{\partial z} H^{slab}, \quad |y| < d.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Застосувавши умови неперервності (5.2) і граничну умову (5.13) можемо виразити амплітуди a_n , c_n , f_n і g_n через b_n .

5.2.1. Сингулярне інтегральне рівняння

Для того, щоб звести парні ряди Фур'є (5.15), (5.16) до сингулярного інтегрального рівняння, необхідно доданки привести до такого вигляду, щоб виконувався асимптотичний вираз (5.7). Для цього введемо коефіцієнти \hat{b}_n за формулою

$$\hat{b}_n = b_n - g_n = b_n (1 - G_n). \tag{5.17}$$

Тоді парні ряди Фур'є (5.15), (5.16) перепишуться як

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) = 0, \quad |y| \geq d, \tag{5.18}$$

$$\frac{2ik_1 \sqrt{\varepsilon}}{\sigma Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) + ik_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{b}_n \gamma_n^1 \frac{1 - C_n}{1 - G_n} \exp(ik_1 \zeta_n^1 y) = -\frac{\partial}{\partial z} H_x^{slab}, \quad |y| < d. \tag{5.19}$$

Парні ряди Фур'є (5.18), (5.19) мають такий самий вигляд, як і парні ряди Фур'є (5.5), (5.6). Застосувавши до них таку саму процедуру, як і до (5.5), (5.6), може бути отримано сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} PV \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K(\psi, \xi) F(\xi) d\xi &= -\frac{l}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} H_x^{slab}, \quad |\psi| < \delta, \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) d\xi &= 0.
\end{aligned}$$

Ядро має вигляд (5.12). Амплітуди \hat{b}_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ виражаються через функцію $F(\xi)$ за допомогою формул (5.10), (5.11).

Відмітимо, що швидкість збіжності ядра (5.12) можна збільшити. Для цього замість (5.7) використаємо асимптотичний вираз більш високого порядку. Надамо коефіцієнти у (5.6), (5.19) як

$$\gamma_n^1 \frac{1-C_n}{1-G_n} = \left(\gamma_n^1 \frac{1-C_n}{1-G_n} - i \frac{|n|}{\kappa\sqrt{\varepsilon}} + i \frac{|n|}{n} \cos \varphi_1 \right) + i \frac{|n|}{\kappa\sqrt{\varepsilon}} - i \frac{|n|}{n} \cos \varphi_1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} K(\psi, \xi) = & -\frac{\kappa\sqrt{\varepsilon}}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa\sqrt{\varepsilon}} - i \frac{|n|}{n} \cos \varphi_1 - \Gamma_n \right) \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} \\ & + \frac{\kappa\sqrt{\varepsilon}}{2} \cos \varphi_1 \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \xi}{2} \right) \\ & + i\gamma_0 \kappa\sqrt{\varepsilon} \frac{\psi - \xi}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\psi - \xi}{2} \right) \right) + q(\psi, \xi). \end{aligned}$$

5.2.2. Числові результати

Дослідимо числову збіжність алгоритму. Введемо похибку коефіцієнта відбиття за формулою $\varepsilon_N = |A(2N) - A(N)|$, де N – це кількість вузлів у методі дискретних особливостей. Залежності ε_N від N наведено на рис.5.4. Як видно, обіжність є монотонною, починаючи з певного значення. При збільшенні відносної ширини стрічок kd необхідно вибрати більшу кількість вузлів.

Дослідимо поглинальні властивості розглянутої структури. На рис.5.5 наведено залежності коефіцієнта поглинання від частоти для різних значень хімічного потенціалу. Залежності коефіцієнта відбиття не наводяться, тому що виконується рівність $R = 1 - A$. Для порівняння також наведено результати для випадку відсутності діелектричної пластини ($\varepsilon = 1$) при $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$.

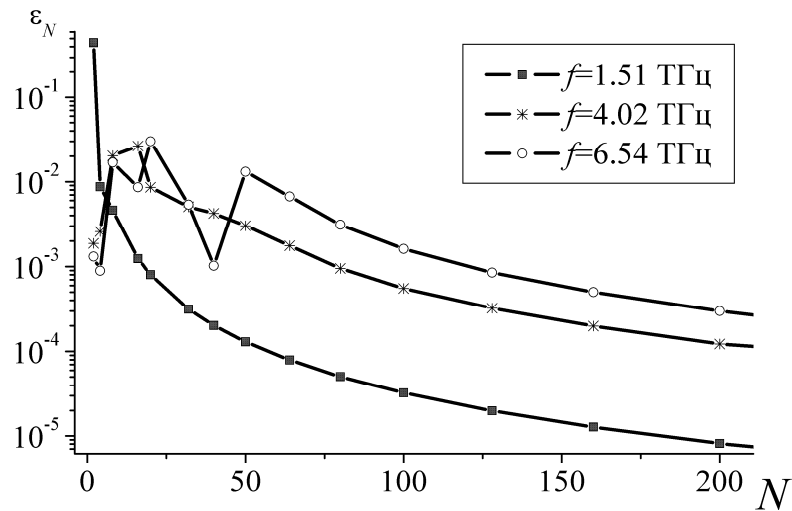


Рис.5.4 Залежності похибки від числа вузлів при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = l/2$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\varepsilon = 2.25$, $\varphi_0 = 90^\circ$ поблизу частот першого, третього і п'ятого плазмонних резонансів

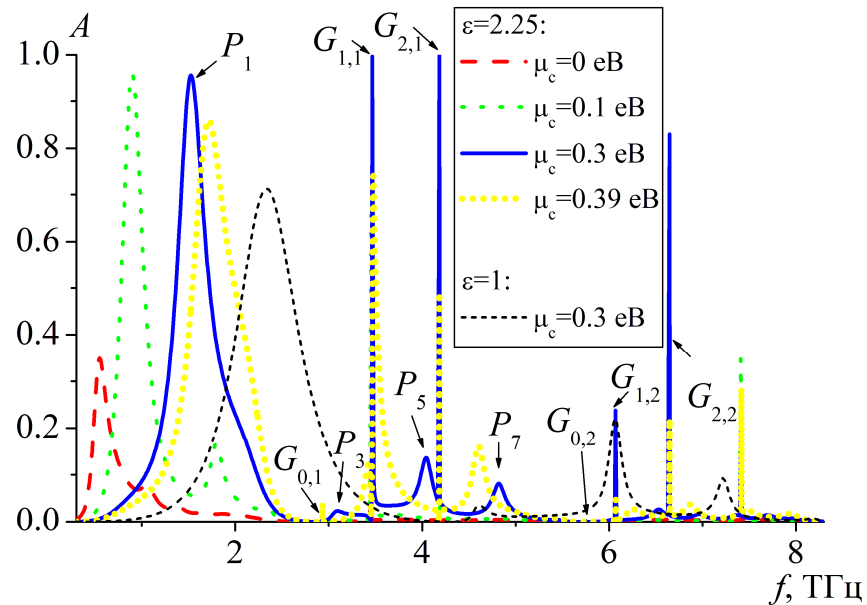


Рис.5.5 Залежності коефіцієнта поглинання від частоти при $\mu_c = 0$ еВ (штрихова крива), $\mu_c = 0.1$ еВ (пунктирна крива), $\mu_c = 0.3$ еВ (суцільна крива), $\mu_c = 0.39$ еВ (короткий пунктир), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = l/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. Для порівняння також наведено криву для випадку $\varepsilon = 1$, $\mu_c = 0.3$ еВ

Досліджуються різноманітні резонанси, які розглянута структура здатна підтримувати. Плазмонні резонанси позначені як P_i . Як і у разі решітки у вакуумі, при нормальному падінні плоскої хвилі збуджуються лише плазмонні резонанси з непарними індексами. Їх положення на частотній осі зсунуто приблизно на значення $1/\sqrt{\varepsilon}$ відносно випадку решітки без діелектричної пластини. Резонанси на решіткових модах, які залежать від параметрів пластини й періоду, позначені як $G_{j,i}$. Поблизу цих резонансів спостерігається різке зростання поглинання у надвузькій смузі частот у вигляді гострих піків на рис.5.5. Коефіцієнт поглинання тут досягає глобального максимуму майже в одиницю ($A \approx 0.997$ при $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$). На відміну від плазмонних резонансів, положенням резонансів на решіткових модах на частотній осі не вдається керувати за рахунок прикладення електростатичного поля, тим самим змінюючи хімічний потенціал, так як воно надзвичайно слабо залежить від властивостей поодинокі стрічки. При вивчені графенових решіток у вакуумі резонанси на решіткових модах не збуджувалися. Їх аналогами є резонанси поблизу аномалій Релея.

Для того, щоб продемонструвати вплив ідеально провідної площини, на рис.5.6 наведено залежності коефіцієнта поглинання від частоти для таких саме параметрів, як і на рис.5.2. Введення ідеально провідної площини призводить до зростання поглинання біля плазмонних резонансів і резонансів на решіткових модах. Це пояснюється багатократним перевідбиттям хвиль у просторі між ідеально провідною площиною і границею діелектрик-вакуум. Також з'являються додаткові резонанси на решіткових модах у такій самій смузі частот. Це пояснюється тим, що структура без ідеально провідної площини є симетричною відносно площини $z=0$ і, у разі падіння на неї хвилі з також симетричним розподілом поля, будуть збуджуватися лише резонанси з симетричним розподілом поля. Проте структура з ідеально провідною площиною вже не є симетричною. Для порівняння та валідації

алгоритму також наведено результати, отримані в HFSS. Спостерігається співпадіння з графічною точністю.

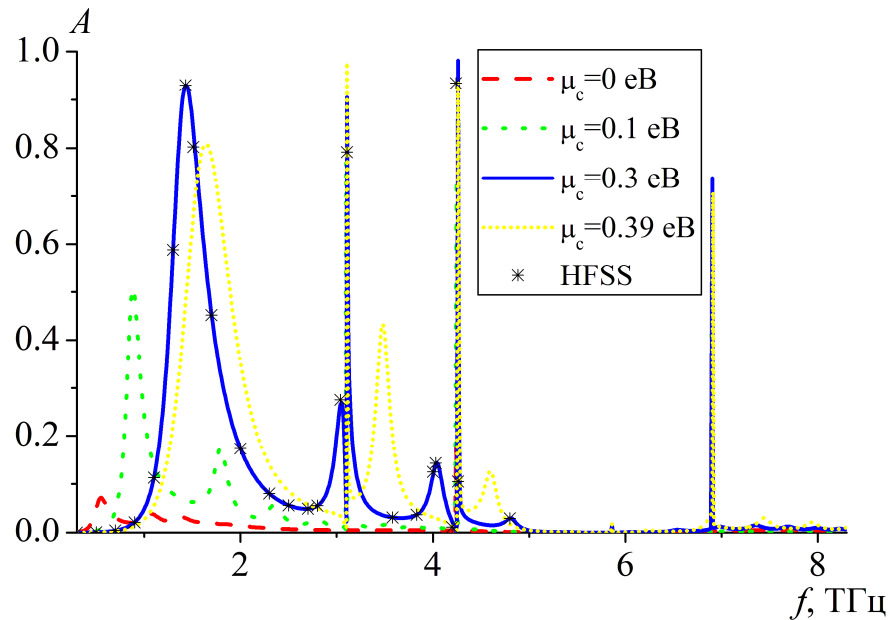


Рис.5.6 Залежності коефіцієнта поглинання від частоти при $\mu_c = 0$ еВ (штрихова крива), $\mu_c = 0.1$ еВ (пунктирна крива), $\mu_c = 0.3$ еВ (суцільна крива), $\mu_c = 0.39$ еВ (короткий пунктир), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = l/4$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. Для порівняння у вигляді маркерів наведено результати, отримані в HFSS

На рис.5.7 наведено розподіл поля поблизу частоти резонансів на решіткових модах. Виявлено три групи таких резонансів у розглянутій смузі частот, картини поля яких відрізняються кількістю варіацій вздовж осі Oz . Рис.5.7 побудовано для резонансів $G_{1,i}$ і $G_{2,i}$, які відповідають решітковим модам з однією і двома варіаціями поля вздовж осі Oz у діелектричній пластині, а також для резонансів $G_{j,1}$ і $G_{j,2}$.

На рис.5.8 наведено розподіл поля поблизу частоти першого і п'ятого плазмонних резонансів, P_1 , P_5 . Всі картини поля нормуються на глобальний максимум. Розподіл поля поблизу плазмонних резонансів суттєво

відрізняється від випадку резонансів на решіткових модах. Максимуми поля спостерігаються біля стрічок. Кількість максимумів на стрічках співпадає з номером резонансу.

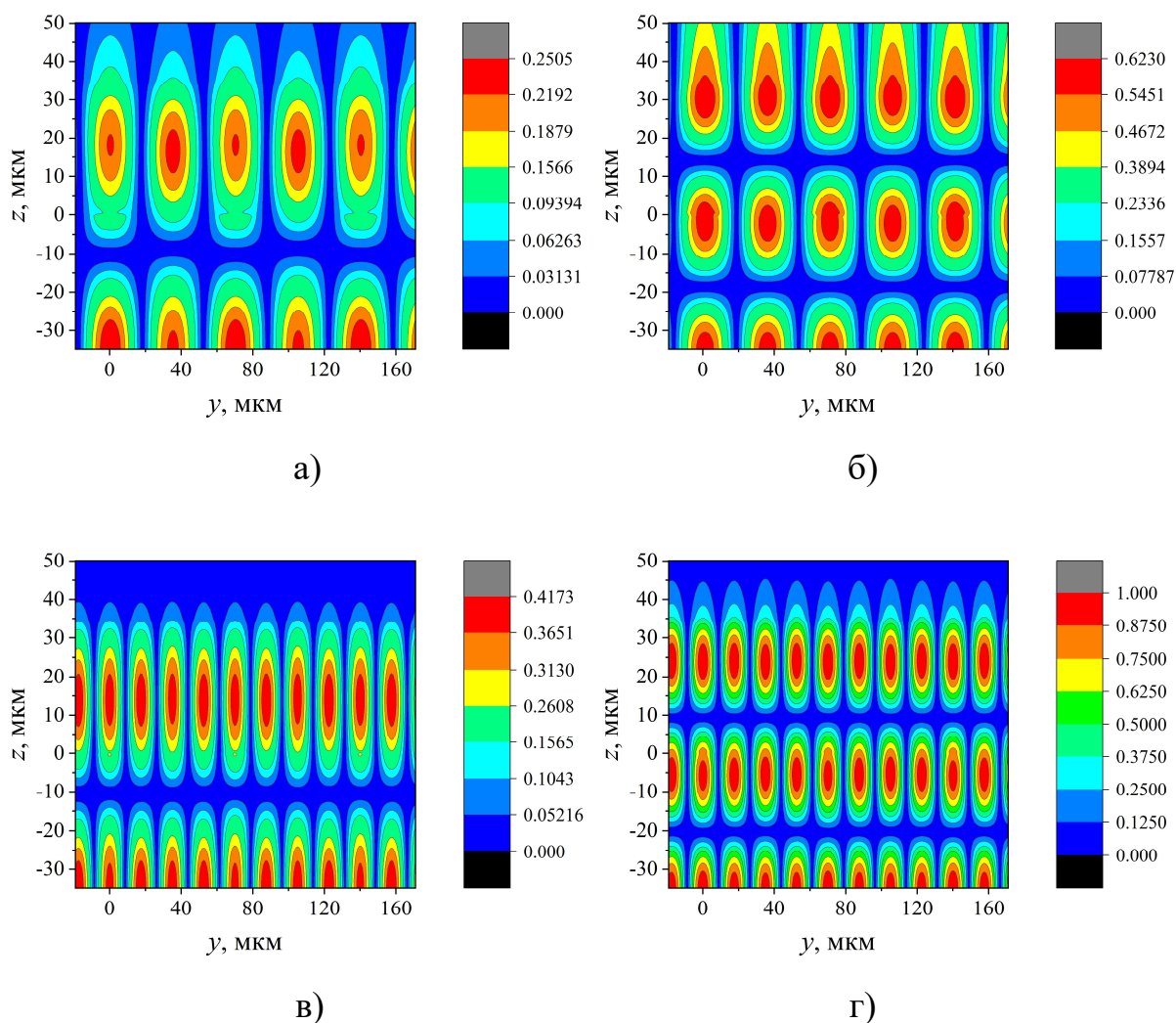


Рис.5.7 Розподіл поля поблизу частот резонансів на решіткових модах при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = l/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 0.3$ eВ, $\tau = 1$ пс,

$T = 300$ К. а) $G_{1,1}$, $f = 3.4655$ ТГц, б) $G_{2,1}$, $f = 4.1829$ ТГц, в) $G_{1,2}$,

$f = 6.0701$ ТГц, г) $G_{2,2}$, $f = 6.6468$ ТГц

Слід зазначити, що значення часу релаксації $\tau = 1$ пс є на верхній межі доступних на цей день значень. Значення $\tau = 0.1 - 0.5$ пс є більш легко

досяжні для вирощених графенових стрічок з використанням хімічного осадження [194]-[196]. Тому має сенс дослідити вплив часу релаксації на характеристики параметрів розсіювання.

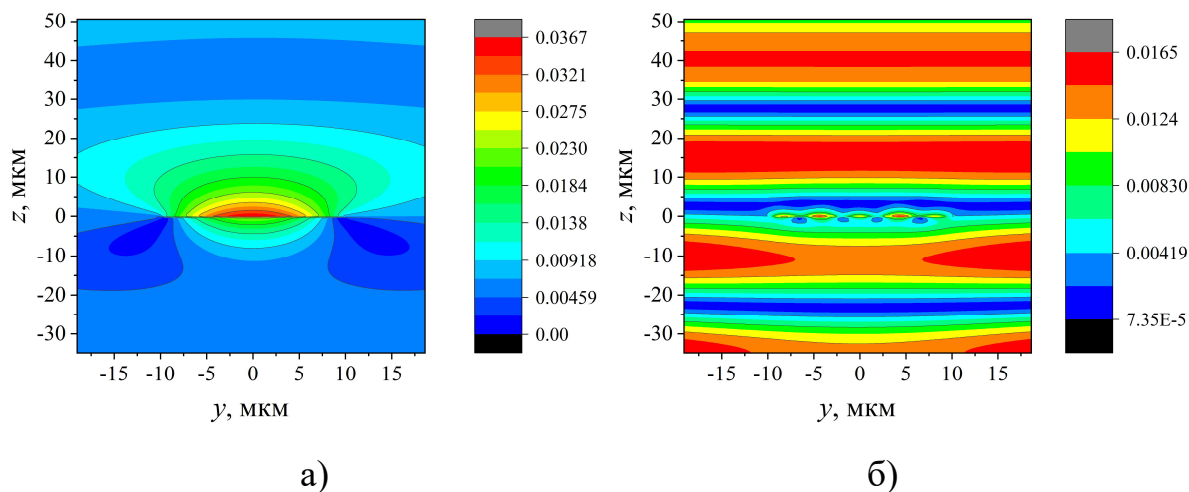


Рис.5.8 Розподіл поля поблизу частот плазмонних резонансів при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = l/2$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К.

а) P_1 , $f = 1.53$ ТГц, б) P_5 , $f = 4.04$ ТГц

На рис.5.9 наведено залежності коефіцієнта поглинання для двох різних значенні часу релаксації від частоти. Зменшення значення τ з 1 пс до 0.3 пс призводить до зменшення поглинання на приблизно 10% поблизу першого плазмонного резонансу при вибраних значеннях параметрів. Всі інші плазмонні резонанси стають набагато гірше помітні. Резонанси на решіткових модах все ще добре помітні, хоча коефіцієнт поглинання поблизу них також зменшується.

5.3. Скінченна решітка у діелектричній пластині

Розглянемо розсіювання та поглинання хвиль скінченною графеновою стрічковою решіткою всередині діелектричної пластини. Задача зводиться до сингулярного інтегрального рівняння. На відміну від випадку нескінченної

графенової решітки, тут отримано два типи сингулярних інтегралів: інтеграл у сенсі головного значення за Коші та інтеграл з полюсами на дійсній осі.

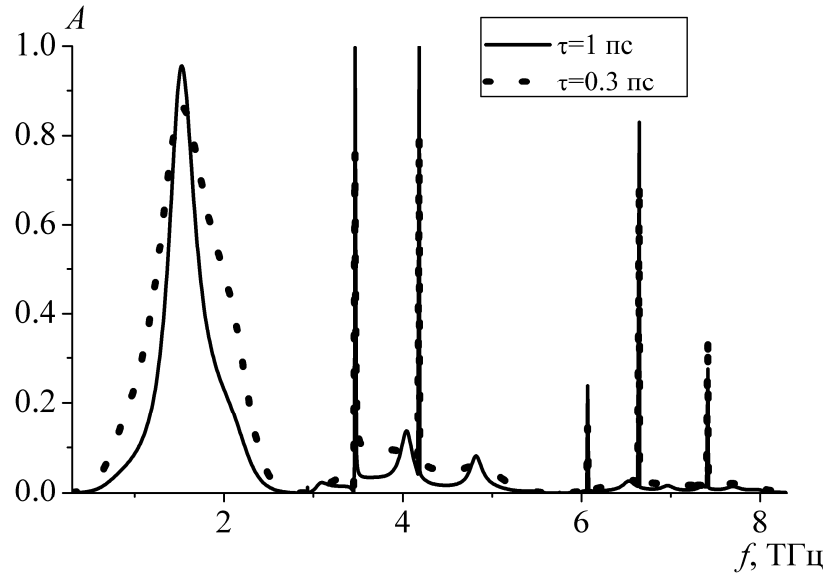


Рис.5.9 Залежності коефіцієнта поглинання від частоти при $\tau = 1$ пс (суцільна крива), $\tau = 0.3$ пс (пунктирна крива), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = l/4$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

Скінченна решітка дозволяє вивчити збудження власних хвиль діелектричного хвилеводу. До того ж з практичної точки зору цікавим є розглянути не лише падіння плоскої хвилі, а ще й падіння власних хвиль діелектричного хвилеводу. Такі задачі знаходять своє застосування при створенні антен [62], [124], [196].

Розглянемо дифракцію H -поляризованої хвилі на скінченній кількості імпедансних стрічок нульової товщини, розміщених всередині діелектричної пластини, як зображено на рис.5.10. Ширина пластини дорівнює $2h$, відносна діелектрична проникність – ε . Множина y -координат стрічок –

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n, \quad L_n - \text{множина } y\text{-координат } n\text{-ї стрічки, } N - \text{кількість стрічок.}$$

Структура є нескінченною й однорідною вздовж осі Ox .

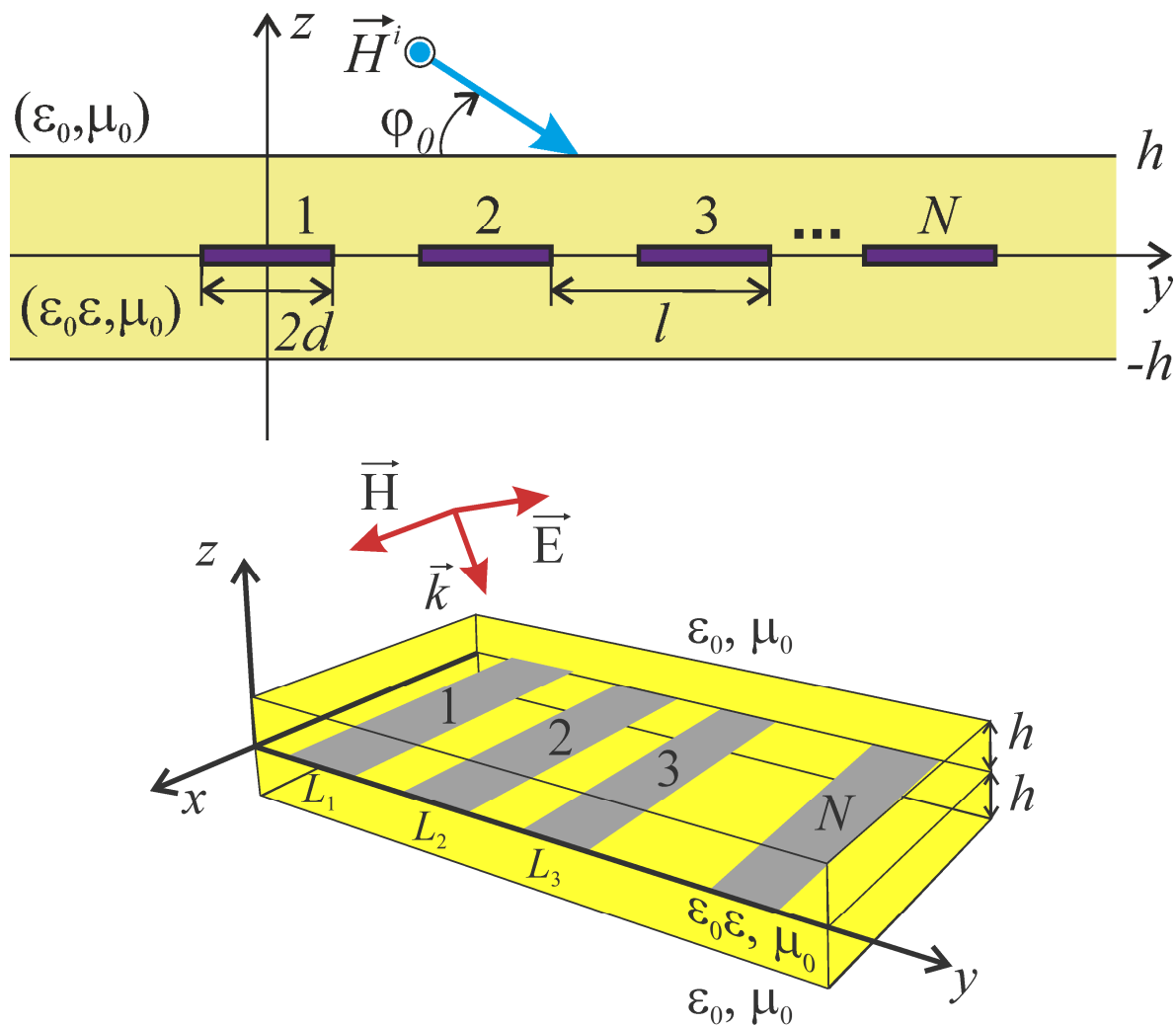


Рис.5.10 Геометрія скінченної решітки з імпедансних стрічок нульової товщини, розміщеної в діелектричному шарі

Повне поле повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца, граничним умовам на стрічках, умовам неперервності у площині стрічок, умовам на границі розділу вакуум-діелектрик (1.49), (1.50), (1.52), (5.2), (5.3) (при $z = \pm h$), умовам на ребрі і випромінювання. Розв'язок граничної задачі – єдиний.

Діелектричну пластину можна розглядати як плоский діелектричний хвилевід. Власні хвилі такого хвилеводу можуть поширюватися вздовж осі Oy та не згасати при $y \rightarrow \pm\infty$. Належним чином модифікована умова випромінювання для випадку відкритого хвилеводу була виведена, наприклад, у [36], [197], [198].

Повне поле шукаємо як суперпозицію первинного поля, H_x^{slab} , та поля, розсіяного на решітці, H_x^g , як у (5.1). Аналогічно до параграфу 1, первинне поле є сумою поля, що падає, та поля, розсіяного на ізольованій діелектричній пластині (без графенової решітки). Поле H_x^{slab} можна знайти аналітично, застосовуючи граничні умови. Таким чином, задача зводиться до знаходження поля H_x^g .

Шукаємо розсіяне поле як інтеграл Фур'є у кожній області

$$H_x^g(y, z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi, & z > h, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (C(\xi) \exp(ik_1\xi y - ik_1\gamma(\xi)z) + B(\xi) \exp(ik_1\xi y + ik_1\gamma(\xi)z)) d\xi, & h > z > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi) \exp(ik_1\xi y - ik_1\gamma(\xi)z) + G(\xi) \exp(ik_1\xi y + ik_1\gamma(\xi)z)) d\xi, & 0 > z > -h, \\ \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi) \exp(ik\xi y - ik\gamma(\xi)z) d\xi, & z < -h, \end{cases} \quad (5.20)$$

де $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$, $F(\xi)$ та $G(\xi)$ – невідомі амплітуди Фур'є, $k_1 = k\sqrt{\varepsilon}$ – хвильове число в діелектричній пластині. Вираз (5.20) – розкладення поля за плоскими хвилями, які поширюються у додатному і від'ємному напрямку осі Oz . Умова випромінювання поза діелектричною плитою виконується автоматично у (5.20).

5.3.1. Сингулярне інтегральне рівняння

З граничних умов випливає, що у (5.20) всі невідомі амплітуди можна виразити через єдину невідому функцію. У якості єдиної невідомої функції виберемо $b(\xi) = B(\xi)(1 - g(\xi))$. Тоді (5.20) можна переписати як

$$\begin{aligned}
 H^g(y, z) = & \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \frac{b(\xi / \sqrt{\varepsilon})}{1 - g(\xi / \sqrt{\varepsilon})} \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi, \quad z > h, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} (c(\xi) \exp(ik_1 \xi y - ik_1 \gamma(\xi)z) + \exp(ik_1 \xi y + ik_1 \gamma(\xi)z)) \frac{b(\xi)}{1 - g(\xi)} d\xi, \\
 & 0 < z < h, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi) \exp(ik_1 \xi y - ik_1 \gamma(\xi)z) + g(\xi) \exp(ik_1 \xi y + ik_1 \gamma(\xi)z)) \frac{b(\xi)}{1 - g(\xi)} d\xi, \\
 & -h < z < 0, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} d(\xi) \frac{b(\xi / \sqrt{\varepsilon})}{1 - g(\xi / \sqrt{\varepsilon})} \exp(ik\xi y - ik\gamma(\xi)z) d\xi, \quad z < -h,
 \end{aligned} \right. \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

В області над та під пластиною, $z > h$, $z < -h$, розсіяне поле у формі (5.20) задовольняє умові випромінювання. Всередині пластини, при $-h_2 < z < h_1$ та $y \notin L$, розсіяне поле може бути надано як суперпозиція власних хвиль плоского діелектричного хвилеводу. Функції $B(\xi)$, $C(\xi)$, $f(\xi)$ та $G(\xi)$ є мероморфними функціями з полюсами в точках, що відповідають сталим поширення власних хвиль діелектричного хвилеводу, які позначимо як β_m . Функція $1 - g(\xi)$ у (5.21) має нулі у точках β_m , $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Для згасаючих хвиль ці точки є комплексними з $\text{Im } \beta_m \neq 0$. Для хвиль, що поширюються, значення β_m є чисто дійсними, $\text{Im } \beta_m = 0$. Точки $\beta_m > 0$ ($\beta_m < 0$) відповідають хвилям, які поширюються у позитивному (негативному) напрямку осі Oy . Застосуємо формулу Коші. Для обчислення інтегралів у (5.21) перетворимо шлях інтегрування у вигляді контуру у комплексній площині. Підінтегральні функції у (5.21), як і у (5.20), є мероморфними і задовольняють наступному асимптотичному виразу:

$$\text{підінтегральна функція} \sim |\xi|^{-3/2} \exp(-k y \text{Im } \xi), \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty, |y| \gg 1. \quad (5.22)$$

При $y \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow -\infty$) всередині хвилеводу, $-h < z < h$, вираз (5.21) повинен мати вигляд поля хвиль, які поширюються у позитивному

(негативному) напрямку осі Oy , або спадають експоненційно. Замість інтегралів по дійсній осі розглянемо інтеграли по контуру у вигляді напівкола, розташованого у верхньому або нижньому напівпросторі комплексної площини. З (5.22) випливає, що для того, щоб отримати збіжні інтеграли при $y > 0$ ($y < 0$) у (5.21) необхідно вибрати напівколо у верхньому $\text{Im} \xi > 0$ (нижньому $\text{Im} \xi < 0$) напівпросторі. При $y > 0$ ($y < 0$) додатні точки $\beta_m > 0$ (від'ємні точки $\beta_m < 0$) повинні знаходитись всередині контуру, а точки $\beta_m < 0$ ($\beta_m > 0$) навпаки, повинні знаходитись поза контуром. Шлях інтегрування вздовж дійсної осі необхідно трансформувати таким чином, щоб він співпадав з дійсною віссю всюди, за виключенням особливих точок β_m . Від'ємні точки $\beta_m < 0$ повинен обходити зверху, а додатні точки $\beta_m > 0$ – знизу. При такому виборі контуру інтегрування умови випромінювання всередині діелектричної пластини також виконуються. Контур інтегрування наведено на рис.5.11.

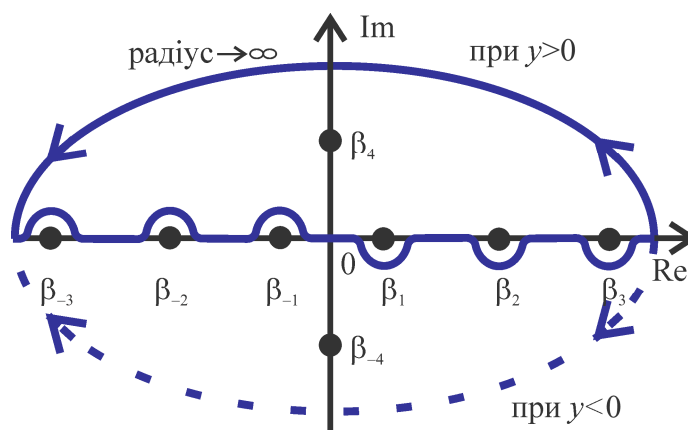


Рис.5.11 Контур інтегрування в комплексній площині

Використовуючи теорему Коші, на нескінченності, при $y \rightarrow \pm\infty$, розсіяне поле можна подати так

$$H_x^g(y, z) = -4\pi \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sin(k_1 \gamma(\beta_m) z) \exp(ik |\beta_m y|), \quad -h < z < h,$$

де $\alpha_m = \lim_{\xi \rightarrow \text{sgn}(y)\beta_m} B(\xi)(\xi - \text{sgn}(y)\beta_m)$.

Крайова задача для рівняння Гельмгольца, з урахуванням (5.21), може бути зведена до наступних парних інтегральних рівнянь відносно єдиної невідомої амплітуди

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \exp(ik_1 \xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (5.23)$$

$$ik_1 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\xi)(1-c(\xi)) \frac{b(\xi)}{1-g(\xi)} \exp(ik_1 \xi y) d\xi + \frac{2ik_1 \sqrt{\varepsilon}}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \exp(ik_1 \xi y) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H^{\text{slab}}(y, 0), \quad y \in L. \quad (5.24)$$

Зауважимо, що підінтегральна функція у (5.24) задовольняє наступному асимптотичному виразу:

$$\frac{1-c(\xi)}{1-g(\xi)} \sim 1 + \exp(-4\pi|\xi|), \quad \gamma(\xi) = i|\xi| + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (5.25)$$

Тому для того, щоб звести парні інтегральні рівняння (5.23), (5.24) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами, можна застосувати таку саму процедуру, як і у разі решітки у вакуумі з параграфу 1.4.

Введемо нові невідомі функції за формулами

$$U(y) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \exp(ik_1 \xi y) d\xi, \quad (5.26)$$

$$F(y) = \frac{\partial U(y)}{\partial y} = ik_1 \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \xi \exp(ik_1 \xi y) d\xi. \quad (5.27)$$

Функція $U(y)$ у (5.26) з точністю до постійного множника є густиною струмів на стрічках.

З (5.25) випливає, що функція $\gamma(\xi) \frac{1-c(\xi)}{1-g(\xi)} - i|\xi| \rightarrow 0$, при $\xi \rightarrow \infty$.

Перепишемо (5.24) у вигляді

$$\begin{aligned}
& ik_1 \int_{-\infty}^{\infty} i |\xi| \exp(ik_1 \xi y) d\xi ik_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\gamma(\xi)(1-c(\xi)) \frac{b(\xi)}{1-g(\xi)} - i |\xi| \right) \exp(ik_1 \xi y) d\xi + \\
& + \frac{2ik_1 \sqrt{\varepsilon}}{\sigma Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \exp(ik_1 \xi y) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H^{slab}(y,0), \quad y \in L.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

До першого інтегралу у (5.28) застосуємо оператор Гільберта (1.87). Всі інші інтеграли згрупуємо у ядро. З використанням (5.27) після перетворень отримаємо сингулярне інтегральне рівняння з додатковими умовами вигляду (1.106), (1.107),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} v.p. \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H^{slab}(y,0), \quad y \in L, \\
\frac{1}{\pi} \int_{L_n} F(\xi) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Ядро інтегрального рівняння має вигляд

$$\begin{aligned}
K(y, \xi) = k_1 \int_0^{\infty} \frac{\sin(k_1 \zeta (y - \xi))}{\zeta} \left(\zeta + i\gamma(\zeta) \frac{1-c(\zeta)}{1-g(\zeta)} \right) d\zeta + q(y, \xi), \\
q(y, \xi) = \begin{cases} 2ik\pi(\sigma Z)^{-1}, & \xi \leq y, \\ 0, & \xi > y. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Як було зазначено вище, підінтегральна функція $\frac{1-c(\zeta)}{1-g(\zeta)}$ у (5.30) може мати особливості у точках β_m . Тому інтеграл у (5.30) неможливо обчислити з використанням квадратурних формул. Для виключення особливостей необхідно провести процедуру регуляризації.

5.3.2. Регуляризація ядра рівняння

Процедуру регуляризації (5.30) можна виконати відповідно до схеми:

- перетворити шлях інтегрування у комплексній площині таким чином, що він співпадає з дійсною віссю всюди, окрім полюсів, а полюси

обходив знизу, враховуючи, що інтервал інтегрування у (5.30) – позитивна напіввісь (рис.5.12, при $y > 0$);

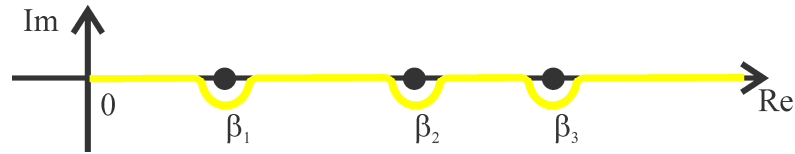


Рис.5.12 Контур інтегрування в виразі для ядра сингулярного інтегрального рівняння

- надати інтеграл у вигляді суми сингулярної та регулярної частин;
- аналітично обчислити сингулярні інтеграли.

Вираз (5.30) можна представити у вигляді суми двох інтегралів

$$K(y, \xi) = k_1 \left\{ \int_0^1 + \int_1^\infty \right\} + q(y, \xi). \text{ Припустимо, що } P \text{ – кількість власних хвиль,}$$

що поширюються. Для визначеності будемо позначати додатнім індексом додатні числа $\beta_m > 0$, $m = 1, 2, \dots, P$, а від’ємним індексом – від’ємні числа $-\beta_m = \beta_{-m} < 0$, $m = -1, -2, \dots, -P$. Оскільки полюси лежать в інтервалі $(0, 1)$, необхідно регуляризувати лише інтеграл по цьому інтервалу:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\sin(k_1 \zeta (y - \xi))}{\zeta} \left(\zeta + i\gamma(\zeta) \frac{1 - c(\zeta)}{1 - g(\zeta)} \right) d\zeta = \\ & = \int_0^1 \left[\frac{\sin(k_1 \zeta (y - \xi))}{\zeta} \left(\zeta + i\gamma(\zeta) \frac{1 - c(\zeta)}{1 - g(\zeta)} \right) - \sum_{m=1}^P \tau_m \frac{1}{\zeta - \beta_m} \right] d\zeta + \quad (5.31) \\ & \quad + \tau_p \left(\ln \frac{1 - \beta_p}{\beta_p} + \pi i \right), \end{aligned}$$

де границя $\tau_m = \tau_m(y, \xi) = \lim_{\zeta \rightarrow \beta_m} \left(\frac{\sin(k_1 \zeta (y - \xi))}{\zeta} i\gamma(\zeta) \frac{1 - c(\zeta)}{1 - g(\zeta)} \cdot (\zeta - \beta_m) \right) \in$

скінченною.

В (5.31) враховано, що $\int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta - \beta_m} = \ln((1 - \beta_m) / \beta_m) + \pi i$. Інтеграл в правій частині (5.31) можна обчислити за допомогою квадратурних формул.

Сингулярне інтегральне рівняння з додатковими умовами (5.29) та регуляризованим ядром має єдиний розв'язок.

5.3.3. Наближений розв'язок операторним методом у випадку падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу

Розглянемо задачу про дифракцію власної хвилі діелектричного хвилеводу на скінченній системі стрічок у припущенні, що взаємодія стрічок по вільному простору відсутня [199].

Нехай на структуру з області $y < 0$ набігають власні хвилі з вектором Фур'є амплітуд Q . Вектор амплітуд Фур'є відбитого поля позначимо як R , а поля, яке пройшло, позначимо як T . Власні хвилі діелектричного хвилеводу, розсіюючись на кожній стрічці, можуть випромінюватись у вільний простір. Амплітуду Фур'є поля, випромінюваного на стрічці з номером n , позначимо як D_n . Вектори амплітуд Фур'є поля між стрічками позначимо як B_n і C_n (див. рис.5.13). Вони пов'язані між собою наступними операторними рівняннями:

$$\begin{aligned} R &= r_1 Q + t_1 e_1 C_1, \\ T &= t_N e_{N-1} B_{N-1}, \\ B_1 &= t_1 Q + r_1 e_1 C_1, \\ C_{N-1} &= r_N e_{N-1} B_{N-1}, \\ B_n &= t_n e_{n-1} B_{n-1} + r_n e_n C_n, \\ C_{n-1} &= r_n e_{n-1} B_{n-1} + t_n e_n C_n, \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \\ D_1 &= \Omega_1 Q + \tilde{\Omega}_1 e_1 C_1, \end{aligned}$$

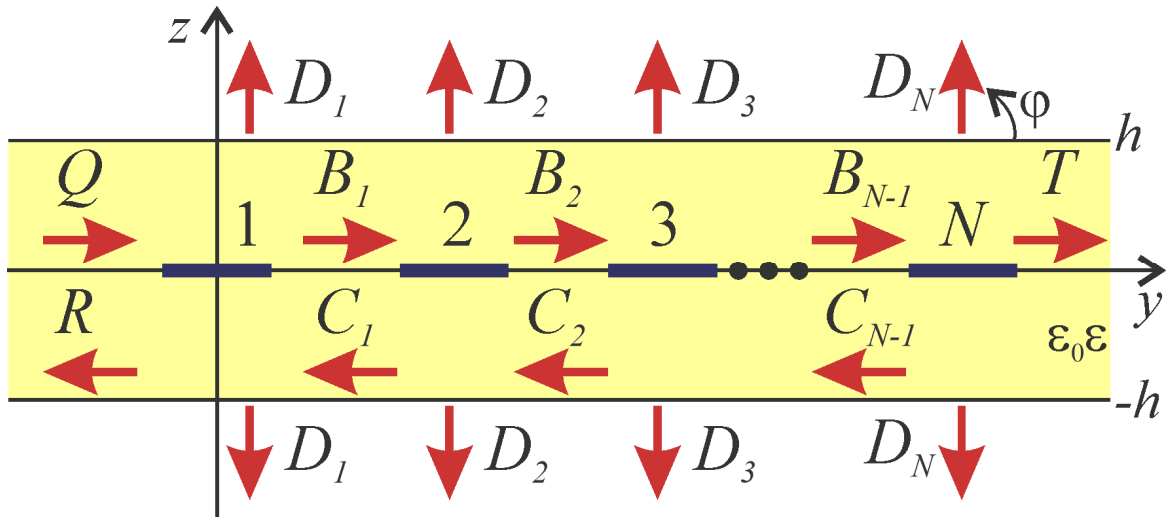


Рис.5.13 Геометрія скінченної системи стрічок у діелектричному хвилеводі і напрямки поширення хвилі

$$D_n = E_{n-1}^{-1} (\Omega_n e_{n-1} B_{n-1} + \tilde{\Omega}_n e_n C_n),$$

$$D_N = E_{N-1}^{-1} \Omega_N e_{N-1} B_{N-1},$$

$$D = \sum_{n=1}^N D_n,$$

де оператор e_n визначає зміну фази при зсуві системи координат на величину, яка дорівнює відстані між n -ю і $n+1$ -ю стрічками, у напрямку поширення поля, а оператор E_{n-1}^{-1} – у негативному напрямку осі Oy , оператори r_n , t_n , Ω_n і $\tilde{\Omega}$ – оператори відбиття, проходження і випромінювання n -ї стрічки.

Оператор відбиття напівнескінченної періодичної системи стрічок R_∞ можна визначити з нелінійного операторного рівняння другого роду [15]

$$R_\infty = r_1 + t_1 (I - e_1 R_\infty e_1 t_1)^{-1} e_1 R_\infty e_1 t_1 \quad (5.32)$$

Оператор випромінювання з діелектричного хвилеводу з напівнескінченною періодичною системою стрічок Ω можна знайти використовуючи властивість трансляційної симетрії. Мають місце два

рівняння, які пов'язують амплітуду Фур'є поля D_∞ , випроміненого з такого хвилеводу, і оператор випромінювання

$$D_\infty = \Omega Q, \quad (5.33)$$

$$D_\infty = \Omega_1 Q + \tilde{\Omega}_1 e_1 C_1 + \Omega e_1 B_1. \quad (5.34)$$

Після підстановки (5.33) у (5.34), з використанням (5.32), отримаємо

$$\Omega = (\Omega_1 + \tilde{\Omega}_1 e_1 c_1) (I - e_1 b_1)^{-1},$$

де

$$c_1 = R_\infty e_1 b_1,$$

$$b_1 = (I - r_1 e_1 c_1 R_\infty e_1)^{-1} t_1.$$

5.3.4. Числові результати. Падіння плоскої хвилі

Розглянемо графенові стрічки. Падаюче поле – це плоска хвиля з одиничною амплітудою (1.37). Розсіяну та поглинену решіткою потужність можна виразити за допомогою перерізу розсіювання циліндричних хвиль (CW-SCS), перерізу поглинання (ACS) та перерізу розсіювання власних хвиль діелектричного хвилеводу (GW-SCS),

$$\text{CW-SCS} = \frac{2\pi}{k} \int_0^\pi |A(-\cos \varphi) \sin \varphi|^2 d\varphi + \frac{2\pi}{k} \int_0^\pi |D(-\cos \varphi) \sin \varphi|^2 d\varphi, \quad (5.35)$$

$$\text{ACS} = \text{Re} \left(\frac{4}{Z_0 \sigma} \right) \int_L |U(y)|^2 dy, \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \text{GW-SCS} = & 4\pi^2 \sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P \left(I_{1,p} \left| \lim_{\xi \rightarrow \beta_p} (B(\xi)(\xi - \beta_p)) \right|^2 + \right. \\ & \left. + I_{2,p} \left| \lim_{\xi \rightarrow \beta_p} (A(\xi \sqrt{\varepsilon})(\xi - \beta_p)) \right|^2 + I_{2,p} \left| \lim_{\xi \rightarrow \beta_p} (D(\xi \sqrt{\varepsilon})(\xi - \beta_p)) \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

де вирази для $I_{1,p}$ і $I_{2,p}$ можна отримати в результаті інтегрування y -компоненти вектора Пойнтінга по поперечному перерізу діелектричного хвилеводу, $-h < z < h$, і по області поза хвилеводом, $-\infty < z < -h$ і $h < z < \infty$,

$$I_{1,p} = \frac{4\beta_p}{\varepsilon} \left(h - \frac{\cos(k_1 \gamma(\beta_p) h) \sin(k_1 \gamma(\beta_p) h)}{k_1 \gamma(\beta_p)} \right)$$

$$I_{2,p} = \frac{\beta_p \sqrt{\varepsilon}}{k \sqrt{\varepsilon \beta_p^2 - 1}} e^{-2hk \sqrt{\varepsilon \beta_p^2 - 1}}.$$

Коефіцієнт TSCS обчислюється інтегруванням вектора Пойнтінга по колу великого радіусу, $r \gg h$, а коефіцієнт ACS обчислюється інтегруванням функції густини струмів (5.26) по стрічках.

Розглянемо випадок скінченної періодичної решітки, ширина стрічок – $2d$, період решітки – l . Тоді $L = \bigcup_{n=1}^N (-d + l \cdot n; d + l \cdot n)$.

На рис.5.14 наведено залежності ACS від частоти. Проводиться порівняння результатів, отриманих запропонованим методом та у HFSS. Спостерігається добра відповідність результатів на низьких частотах. Проте, на більш високих частотах, $f > 2$ ТГц, хоча характер кривих співпадає, спостерігаються суттєві розбіжності в значеннях ACS.

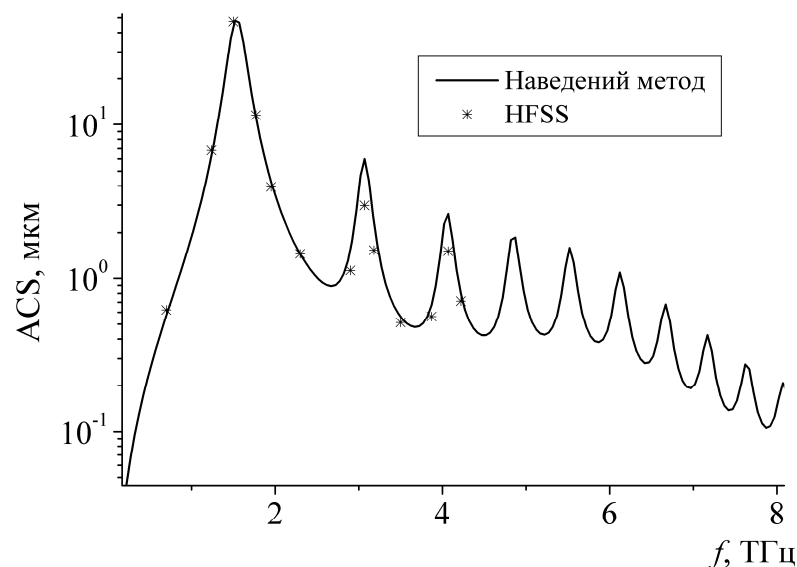


Рис.5.14 Залежності ACS від частоти при $N = 1$, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l/4$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3$ еВ. Запропонований метод (суцільна крива) та HFSS (маркери у вигляді зірочок)

Для отримання ACS у HFSS обчислюється інтеграл по стрічці вздовж осі Oy . Для того, щоб досягти співпадіння результатів, необхідно вибирати більше вузлів, як наслідок, більш щільну сітку. Розрахунок значення ACS біля другого максимуму ($f = 3.07$ ТГц) займає приблизно 3 секунди запропонованим методом та близько 3 хвилин у HFSS.

На рис.5.15, рис.5.16, рис.5.17 наведено залежності CW-SCS, ACS, та GW-SCS на стрічку від частоти для різної кількості стрічок N та різних значень хімічного потенціалу μ_c .

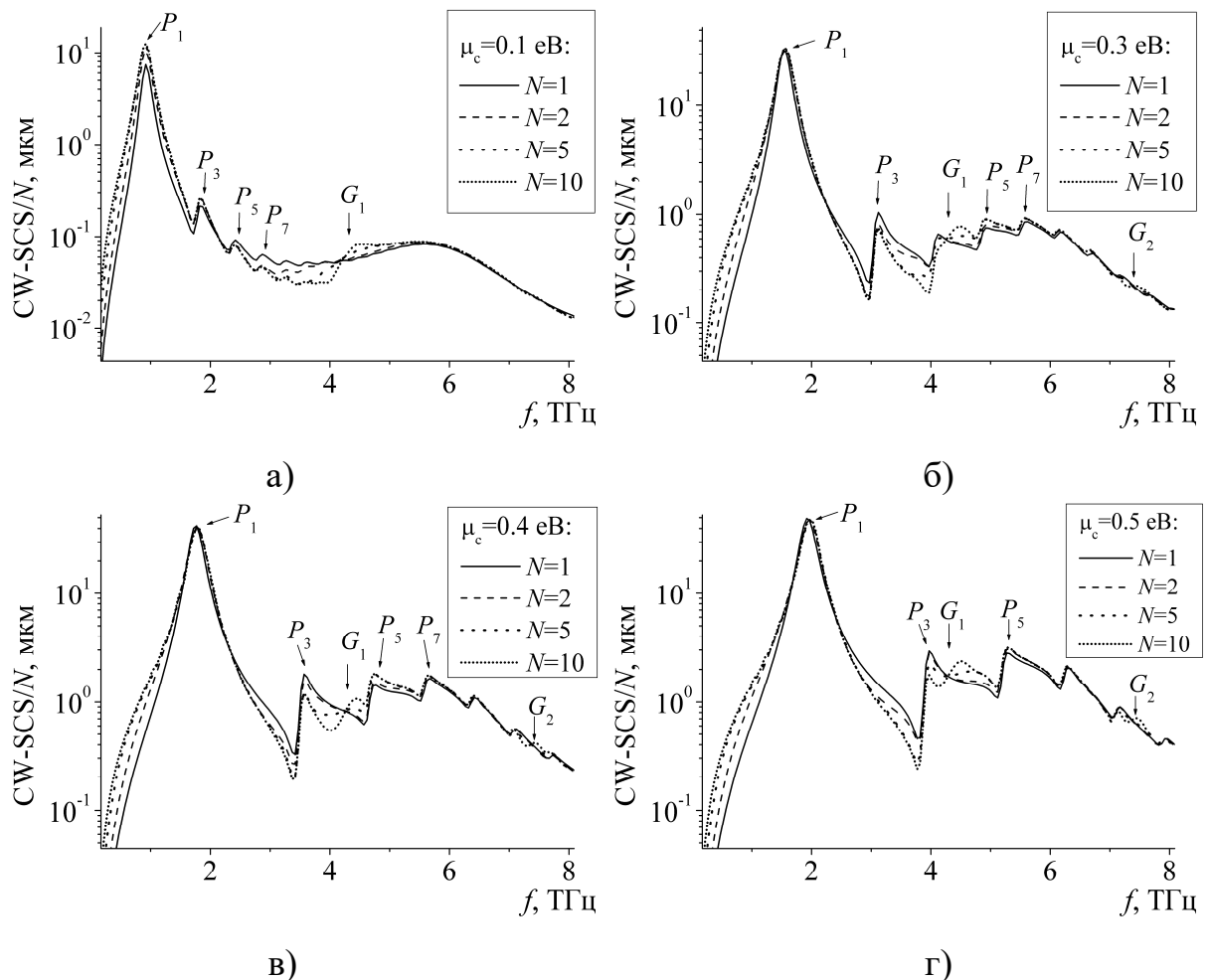


Рис.5.15 Залежності CW-SCS на стрічку від частоти при $N = 1$ (суцільні криві), $N = 2$ (штрихові криві), $N = 5$ (пунктирні криві), $N = 10$ (короткі пунктирні криві), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l/4$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $\mu_c = 0.1$ eV, б) $\mu_c = 0.3$ eV, в) $\mu_c = 0.4$ eV, г) $\mu_c = 0.5$ eV

Очевидно, що у випадку нормального падіння, $\varphi_0 = 90^\circ$, енергія, яку переносять власні хвилі діелектричного хвилеводу у напрямку $y = +\infty$ дорівнює енергії, яку переносять власні хвилі у напрямку $y = -\infty$. Залежності носять ярко виражений резонансний характер. У залежностей CW-SCS, ACS максимуми відповідають плазмонним резонансом (позначені як P_i). Положення цих резонансів залежить від хімічного потенціалу графенових стрічок і зсунуто приблизно на $\sqrt{\varepsilon}$ по осі частот у порівнянні з решіткою у вакуумі.

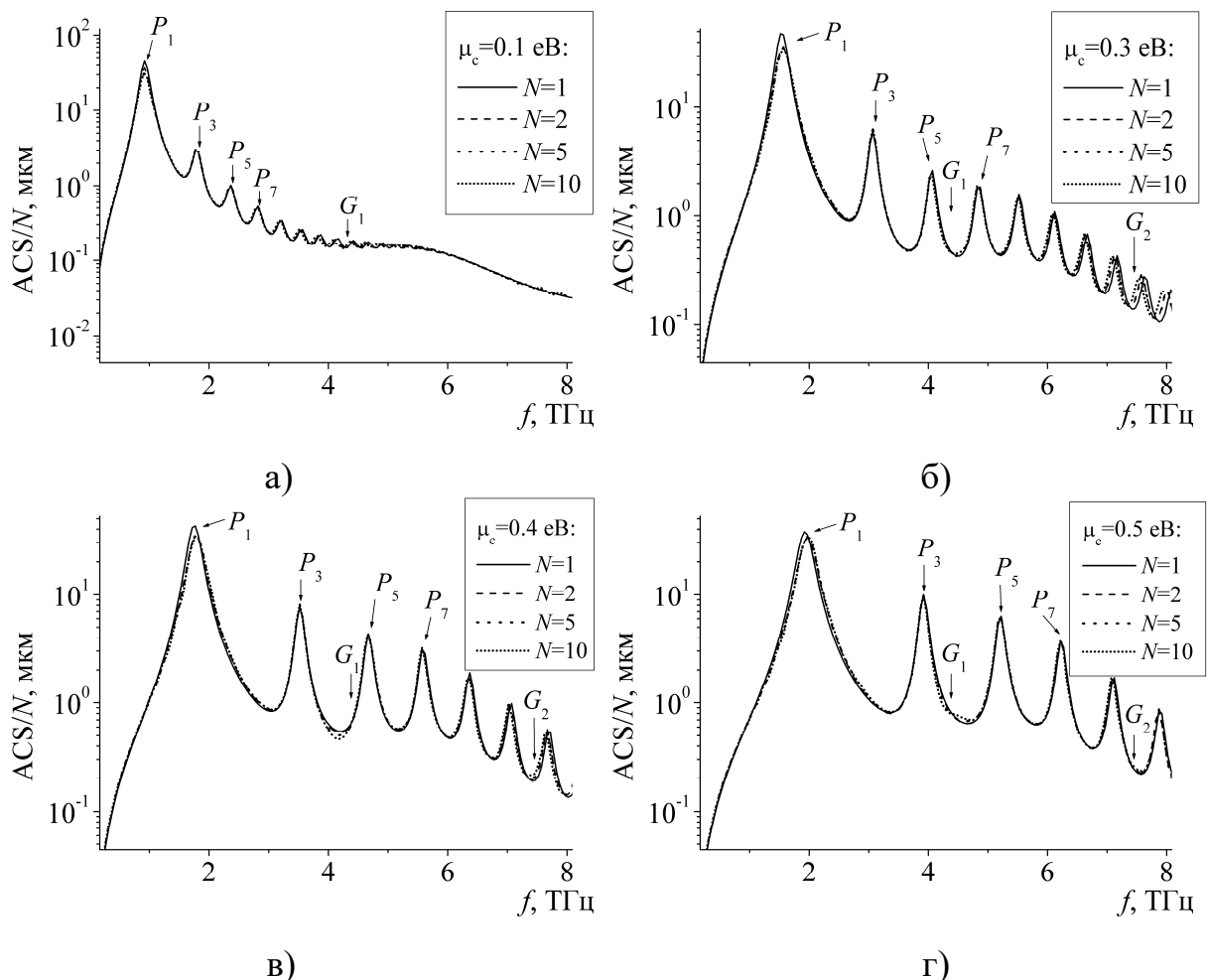


Рис.5.16 Залежності ACS на стрічку від частоти при $N = 1$ (суцільні криві), $N = 2$ (штрихові криві), $N = 5$ (пунктирні криві), $N = 10$ (короткі пунктирні криві), $d = 10 \text{ мкм}$, $l = 70 \text{ мкм}$, $h = l/4$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $T = 300 \text{ К}$, $\varphi_0 = 90^\circ$.

а) $\mu_c = 0.1 \text{ eV}$, б) $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, в) $\mu_c = 0.4 \text{ eV}$, г) $\mu_c = 0.5 \text{ eV}$

Графіки залежностей CW-SCS на одну стрічку і ACS на одну стрічку практично співпадають при збільшенні кількості стрічок за винятком резонансів на решіткових модах (позначені як G_i). Скінченна решітка дозволяє дослідити резонанси на решіткових модах з точки зору збудження власних хвиль діелектричного хвилеводу.

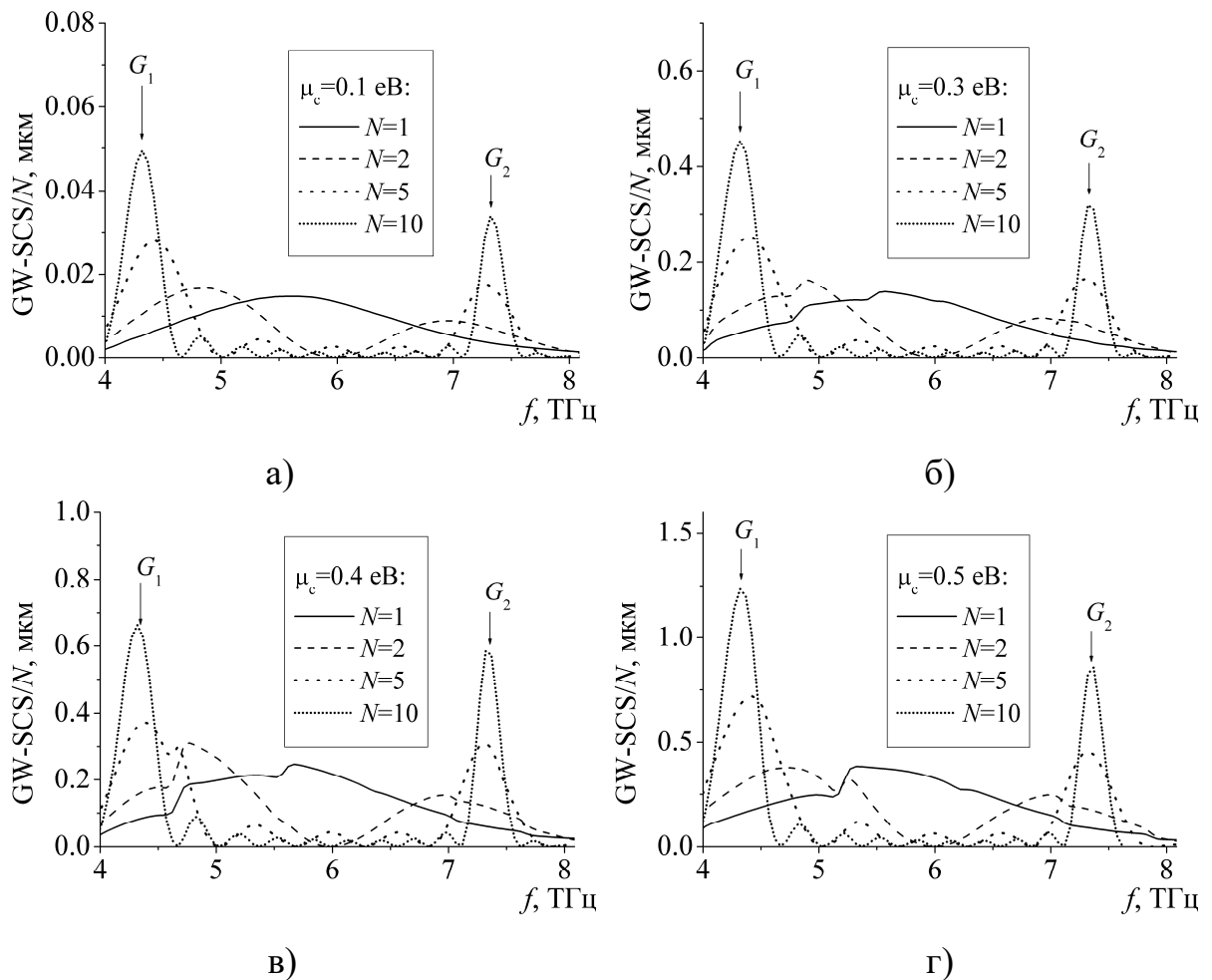


Рис.5.17 Залежності GW-SCS на стрічку від частоти при $N = 1$ (суцільні криві), $N = 2$ (штрихові криві), $N = 5$ (пунктирні криві), $N = 10$ (короткі пунктирні криві), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l/4$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$. а) $\mu_c = 0.1$ еВ, б) $\mu_c = 0.3$ еВ, в) $\mu_c = 0.4$ еВ, г) $\mu_c = 0.5$ еВ

У разі, коли період решітки пропорційний до довжини власних хвиль діелектричного хвилеводу, виникає резонанс. Таким чином, резонанси на

решіткових модах спостерігаються лише при наявності діелектричної пластини та не виникають у разі решітки у вільному просторі. Поблизу резонансів на решіткових модах відбувається значне зростання потужності власних хвиль. Більш того, на відміну від плазмонних резонансів, при збільшенні кількості стрічок потужність власних поблизу резонансів на решіткових модах зростає не пропорційно.

Частоти резонансів на решіткових модах пов'язані з періодом наступним наближеним рівнянням:

$$f \approx \frac{cn}{l\sqrt{\varepsilon\xi_p}}. \quad (5.38)$$

На рис.5.18 наведено залежності резонансної частоти перших двох плазмонних резонансів від періоду. Наближені результати (5.38) також наведено у вигляді штрихової кривої для порівняння. Як видно, вираз (5.38) досить точно описує резонансні частоти.

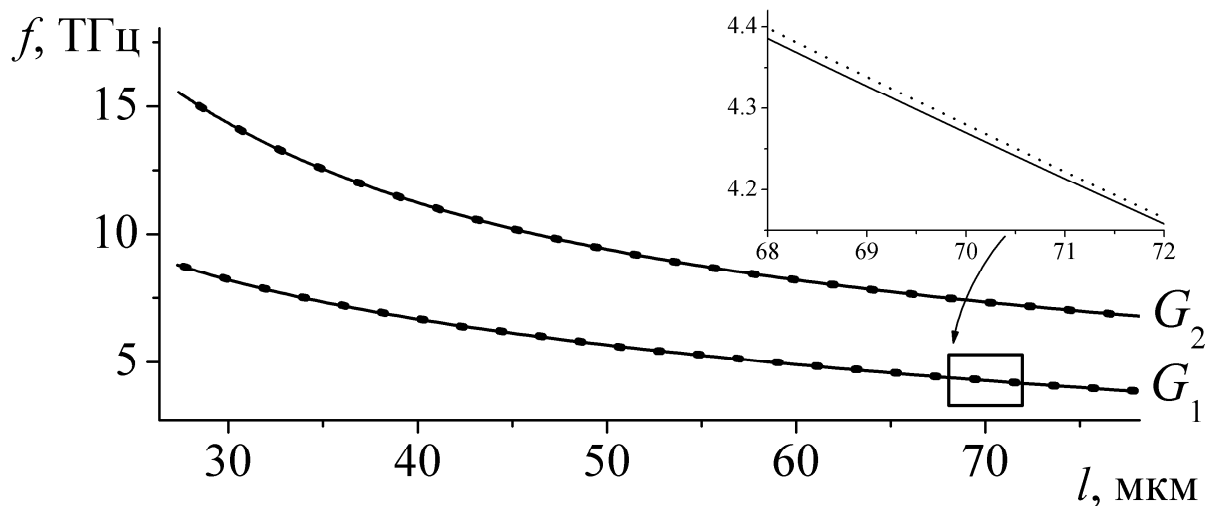


Рис.5.18 Залежності частоти 1-го та 2-го резонансів на решіткових модах від періоду l при $d = 10$ мкм, $h = 17.5$ мкм, $\mu_c = 0.4$ еВ, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс,

$$T = 300\text{К}, \varphi_0 = 90^\circ$$

На рис.5.19 наведено залежності GW-SCS від періоду поблизу частоти першого резонансу G_1 . Параметри структури вибрані таким чином, що лише одна власна хвиля діелектричного хвилеводу може поширюватись. Залежності є майже періодичними з періодом $l/\lambda_g \approx 0.5$, де λ_g – довжина власної хвилі. Кількість локальних максимумів дорівнює $N-1$ на кожному періоді.

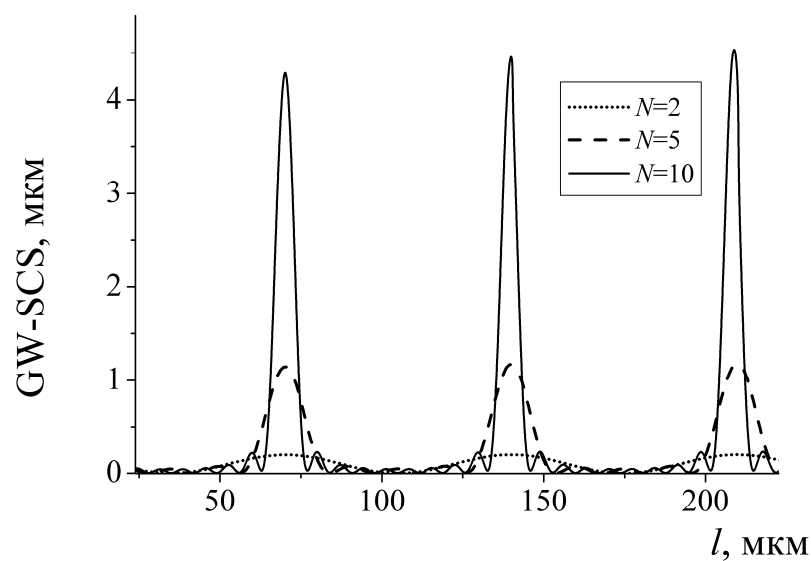


Рис.5.19 Залежності GW-SCS від періоду l при $N = 2$ (пунктирна крива), $N = 5$ (штрихова крива), $N = 10$ (суцільна крива), $d = 10$ мкм, $h = 17.5$ мкм, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$

Цікавим є порівняти результати для скінченної та нескінченної періодичної решітки. У якості величини для порівняння можна вибрати струми на стрічках, усереднивши їх. Усереднене значення густини струмів надамо як інтеграл $\int_{L_n} |U(y)|^2 dy$. Маючи на увазі, що ACS є величиною, пропорційною до наведеного інтегралу (з частотно залежним коефіцієнтом пропорційності), остаточно виберемо для нескінченної періодичної решітки коефіцієнт ACS_∞ , який дорівнює перерізу поглинання однієї графенової

стрічки в решітці. Для розрахунку ACS_{∞} використано результати з параграфу 5.1. Для скінченної решітки виберемо коефіцієнт ACS_N , який дорівнює перерізу поглинання однієї стрічки, розташованої всередині решітки з N стрічок. Результати наведено на рис.5.20. Спостерігається співпадіння результатів з графічною точністю на всьому розглянутому частотному відрізку навіть вже для $N = 2$ стрічок за винятком області поблизу резонансу на решітковій моді (збільшено на вставці до рис.5.20). У скінченних решітках (див. рис.5.15, рис.5.16) з'являються набагато менш виражені максимуми у залежностях CW-SCS і ACS від частоти, ніж у разі нескінченної решітки.

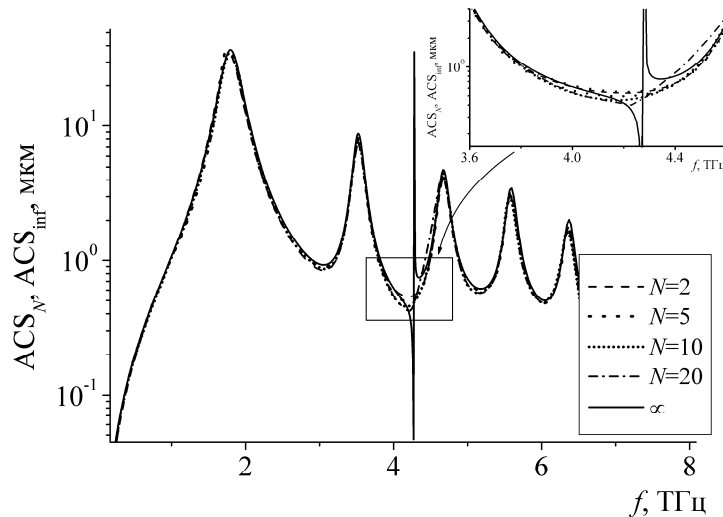


Рис.5.20 Залежності ACS_{inf} , ACS_N на стрічку від частоти при $N = 2$ (штрихова крива), $N = 5$ (пунктирна крива), $N = 5$ (короткий пунктир), $N = 10$ (штрих-пунктирна крива), нескінченна періодична решітка (суцільна крива), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l/4$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс,

$$T = 300 \text{ К}, \varphi_0 = 90^\circ$$

На рис.5.21 наведено залежності CW-SCS, ACS, GW-SCS від частоти при кількості стрічок до $N = 80$. Як було зазначено вище, поблизу резонансів на решіткових модах значна частина потужності падаючої хвилі перетворюється на потужність власних хвиль діелектричного хвилеводу. У

разі нескінченної решітки, ці власні хвилі поширюються вздовж нескінченної кількості графенових стрічок та зрештою повністю поглинаються решіткою. Як наслідок, коефіцієнт поглинання значно зростає. Для скінченної решітки не спостерігається поглинання всієї потужності власних хвиль на графенових стрічках, частина енергії передається у напрямку $y \rightarrow \pm\infty$. Під час розсіювання плоскої хвилі на нескінченній решітці, резонанси на решіткових модах мають вигляд гострих піків на частотній залежності коефіцієнтів відбиття та поглинання.

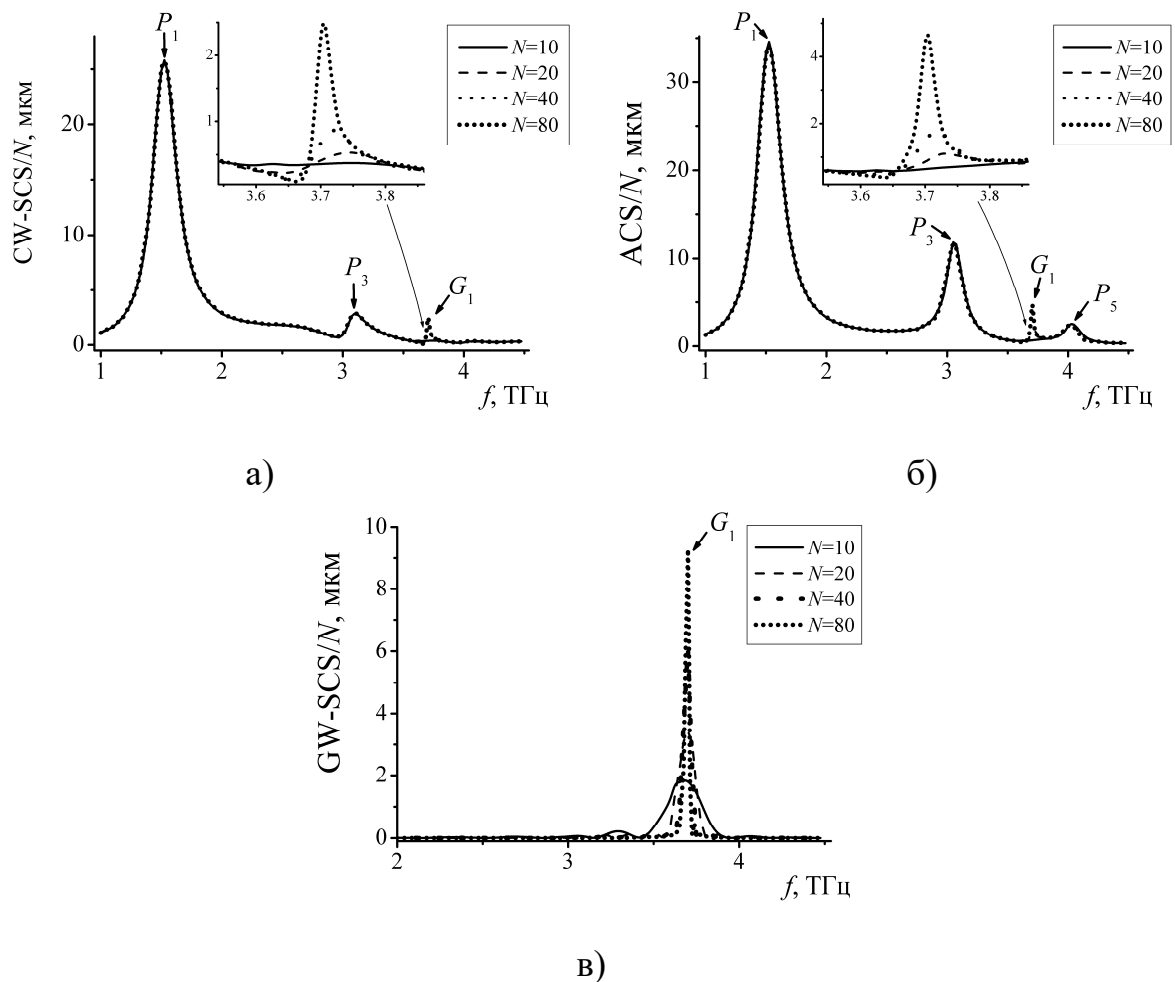


Рис.5.21 Залежності а) CW-SCS, б) ACS, в) GW-SCS від частоти при $N = 10$ (суцільні криві), $N = 20$ (штрихові криві), $N = 40$ (пунктирні криві), $N = 80$ (короткі точки), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l/2$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс,

$$T = 300\text{K}, \varphi_0 = 90^\circ$$

На рис.5.22, рис.5.23 наведено розподіл повного поля поблизу частоти плазмонних резонансів P_1 , P_3 та резонансів на решіткових модах G_1 , G_2 . Вирази для поля всередині діелектричної пластини можна отримати з (5.20) або (5.21) після проведення процедури регуляризації, наведеної у пункті 5.3.2. Проте, підсумовування має здійснюватися за $p = -P, \dots, P$. Поблизу частоти плазмонних резонансів, як і у попередніх параграфах, поблизу стрічки кількість максимумів амплітуди дорівнює номеру резонансу. Зауважимо, що поле H^{slab} , яке існує в діелектричній пластині без графенової решітки, переносить енергію лише вздовж осі Oz . Власні ж хвилі діелектричного хвилеводу переносять енергію вздовж осі Oy . Поблизу резонансів на решіткових модах картина поля зберігає свій характерний вигляд і у просторі поза решіткою. Стрічки відмічено білим, а границя діелектричної пластини – чорним на рис.5.22, рис.5.23. Спостерігається наявність вузлів і пучностей поля, що є свідченням збудження решіткової моди (поле власної хвилі має постійну амплітуду і не має вузлів і пучностей).

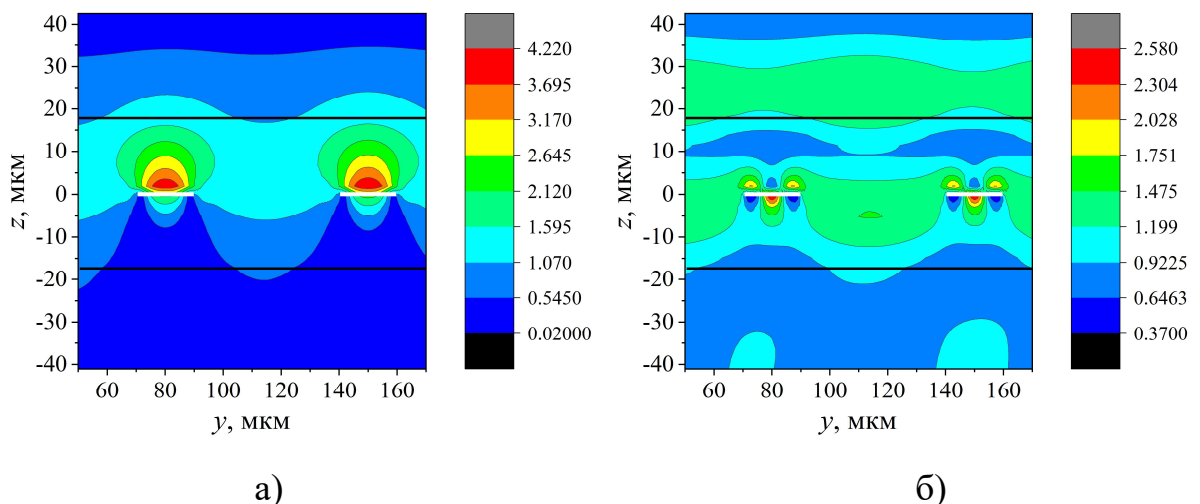


Рис.5.22 Розподіл повного поля (модуль амплітуди $|H_x|$) поблизу частот а) першого та б) третього плазмонних резонансів при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм,

$$h = l/4, \varphi_0 = 90^0, \varepsilon = 2.25, \mu_c = 0.4 \text{ eB}, \tau = 1 \text{ пс}, T = 300 \text{ K}$$

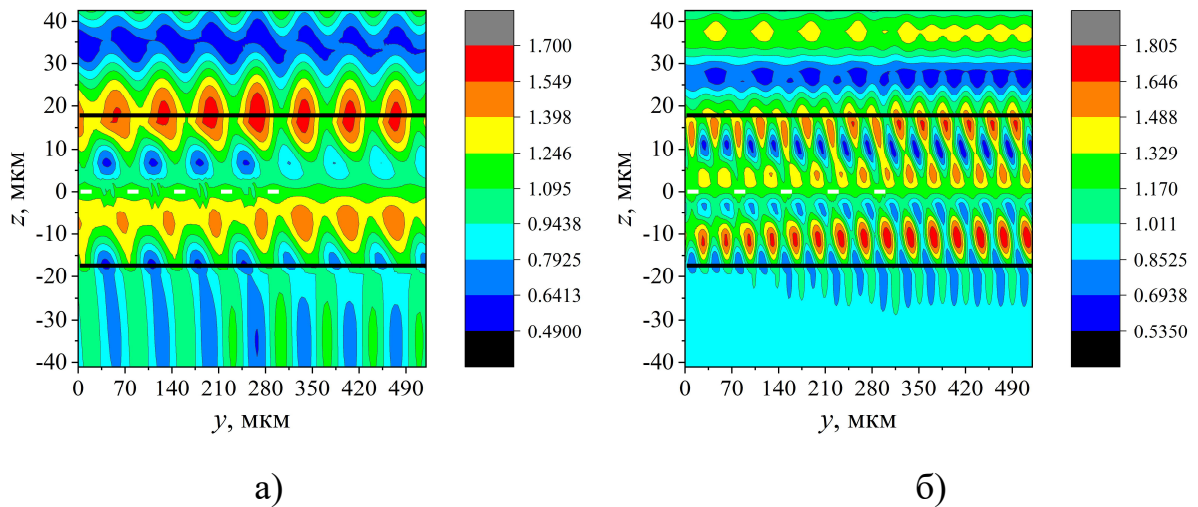


Рис.5.23 Розподіл повного поля (модуль амплітуди $|H_x|$) поблизу частот а) першого та б) другого резонансу на решіткових модах при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l/4$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 0.4$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

5.3.5. Числові результати. Падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу

Припустимо, що з області $y < 0$ на решітку набігає одна з власних хвиль діелектричного хвилеводу з номером p . Тоді у (5.29) у якості $H^{slab}(y, z)$ необхідно взяти вираз для поля цієї хвилі. Введемо коефіцієнти випромінювання Rad , поглинання A , відбиття R та проходження T як співвідношення відповідної енергії розсіяного поля до енергії падаючої власної хвилі діелектричного хвилеводу. Їх можна отримати, використовуючи (5.35)-(5.37). Закон збереження енергії має вигляд $Rad + A + R + T = 1$.

Як і в пункті 5.3.4, розглянемо періодичну решітку, ширина стрічок у якій дорівнює $2d$, а період – l .

Помітимо, що значення коефіцієнтів проходження й відбиття основної симетричної хвилі діелектричного хвилеводу за амплітудою (у разі падіння хвилі з одиничною амплітудою) дорівнюють $T^{ampl} = 1 - 4\pi\alpha_1$ і $R^{ampl} = -4\pi\alpha_{-1}$,

де $\alpha_{\pm 1} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_{\pm 1}} B(\xi)(\xi - \beta_{\pm 1})$. Поле у хвилеводі при достатньому віддаленні від стрічок визначається лише власними хвилями. У одномодовому режимі в точці максимуму z_0 повинно виконуватись співвідношення

$$H^g(y, z_0) \rightarrow -4\pi\alpha_{\pm 1}, \text{ при } y \rightarrow \pm\infty. \quad (5.39)$$

Для валідації алгоритму виконання (5.39) перевірялось чисельно при збільшенні значень $|y|$. Вдається досягти виконання рівності (5.39) на рівні комп'ютерної точності, що дозволяє зробити висновок о вірності отриманих результатів. На рис.5.24 наведено залежності коефіцієнтів випромінювання, поглинання, відбиття та проходження основної симетричної хвилі діелектричного хвилеводу від частоти.

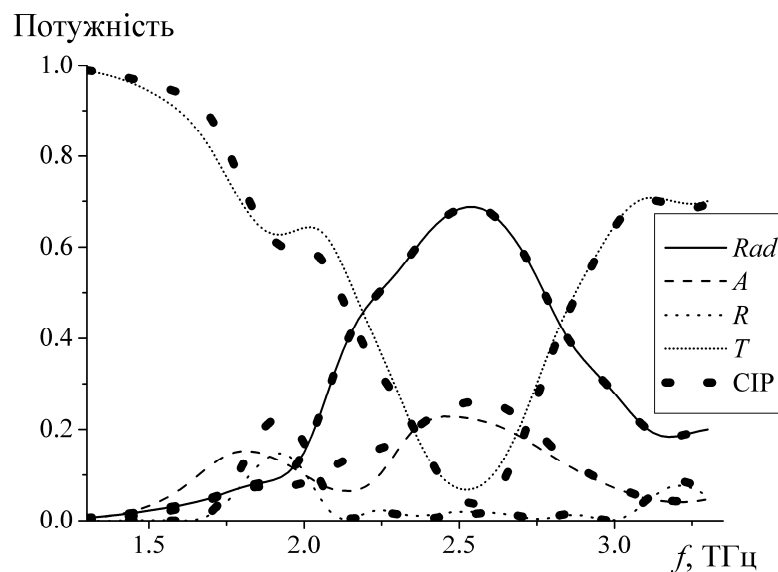


Рис.5.24 Залежності Rad (суцільна крива), A (штрихова крива), R (пунктирна крива), T (короткий пунктир) від частоти, отримані операторним методом при $\mu_c = 1$ еВ, $l = 70$ мкм, $h = 60$ мкм, $d = 10$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $N = 10$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, основна симетрична мода $p = 1$. Точками наведені результати, отримані методом сингулярних інтегральних рівнянь (CIP)

Проводиться порівняння результатів з наближеним розв'язком, отриманим операторним методом за алгоритмом, описаним в пункті 5.3.3. Поведінка кривих співпадає. Спостерігаються незначні відмінності в значеннях амплітуди, викликані взаємодією хвиль по вільному простору.

На рис.5.25, рис.5.26, рис.5.27 наведено залежності коефіцієнтів (за потужністю) випромінювання, поглинання, відбиття та пропускання від частоти у разі падіння основної симетричної власної хвилі діелектричного хвилеводу.

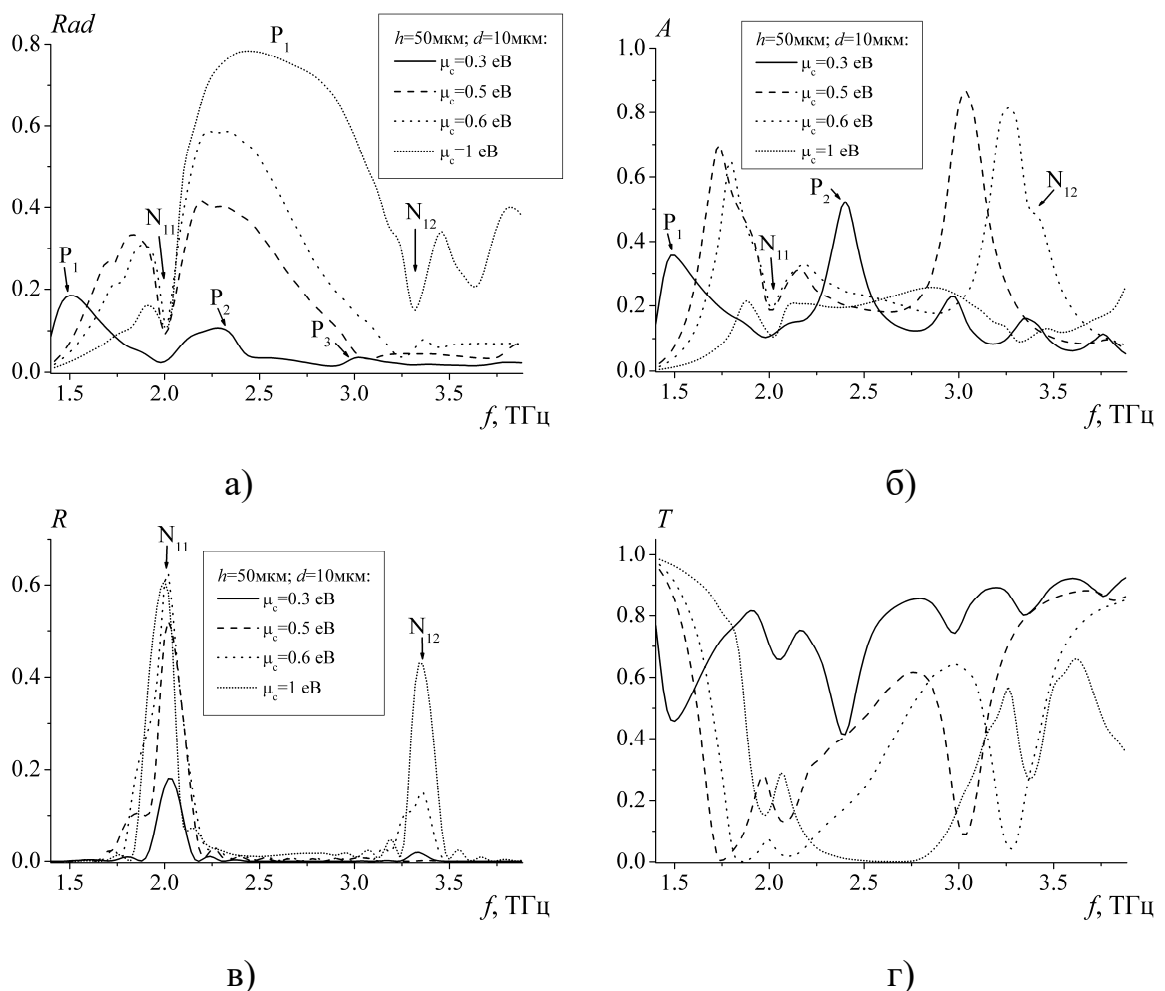


Рис.5.25 Залежності а) Rad , б) A , в) R , г) T від частоти при $\mu_c = 0.3$ eВ (суцільні криві), $\mu_c = 0.5$ eВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.6$ eВ (пунктирні криві), $\mu_c = 1$ eВ (короткі пунктирні криві), $l = 70$ мкм, $h = 50$ мкм, $d = 10$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $N = 10$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, основна симетрична мода $p = 1$

Поведінку кривих можна пояснити з точки зору резонансів, які може підтримувати досліджувана структура. Максимуми коефіцієнта випромінювання відповідають плазмонним резонансам (позначено як P_i).

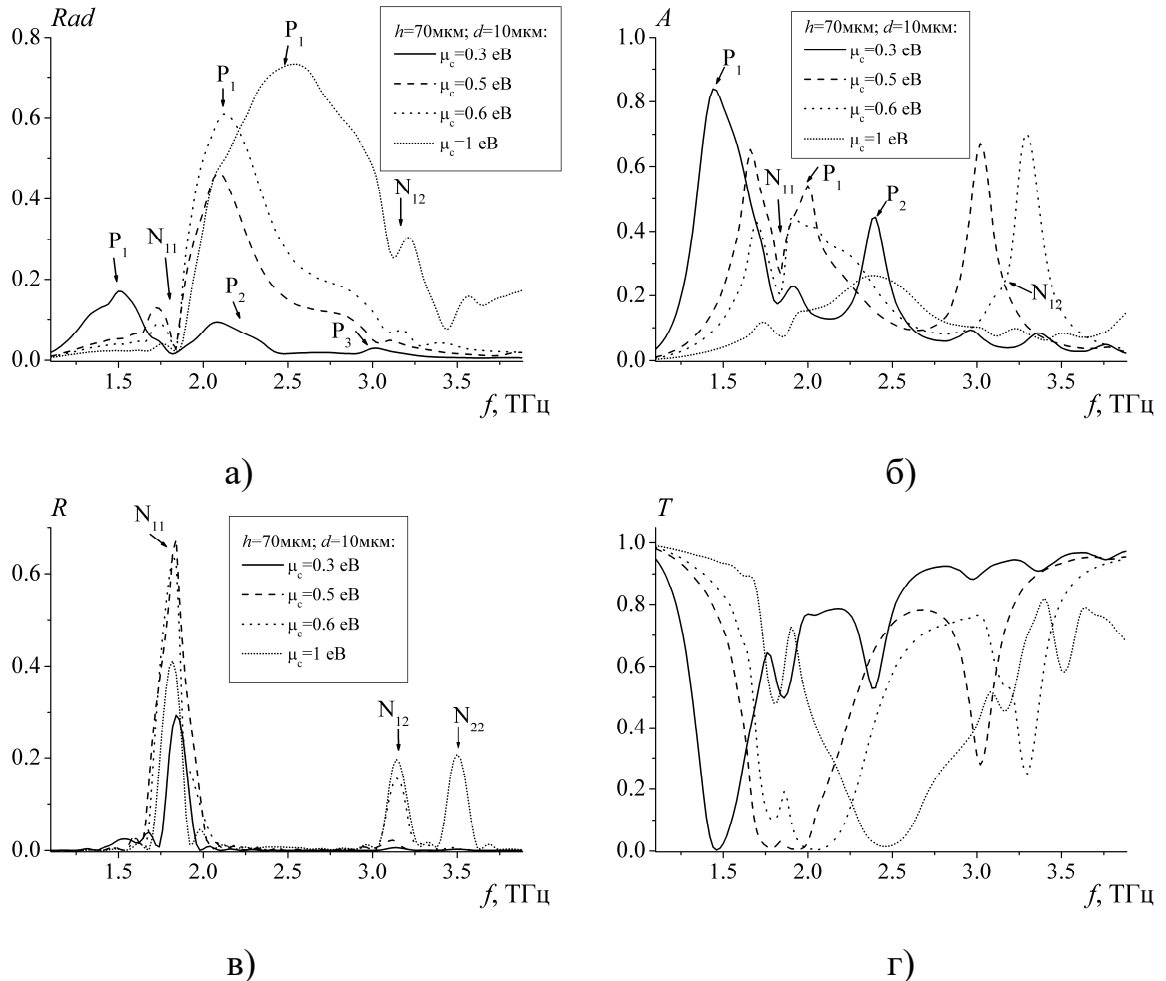


Рис.5.26 Залежності а) Rad , б) A , в) R , г) T від частоти при $\mu_c = 0.3$ eВ (суцільні криві), $\mu_c = 0.5$ eВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.6$ eВ (пунктирні криві), $\mu_c = 1$ eВ (короткі пунктирні криві), $l = 70$ мкм, $h = 70$ мкм, $d = 10$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $N = 10$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, основна симетрична мода $p = 1$

Найбільш ефективно випромінювання спостерігається при $\mu_c = 1$ eВ. При $\mu_c = 0.3$ eВ спостерігається відносно низький рівень випромінювання поблизу першого плазмонного резонансу, менше ніж 20%. Зі збільшенням значення хімічного потенціалу потужність випромінювання також зростає

поблизу першого плазмонного резонансу і досягає максимального значення приблизно 79% для $\mu_c = 1$ еВ. При збільшенні кількості стрічок, при розглянутих параметрах, не спостерігається зростання випромінювання. Майже вся невипромінювана потужність поглинається графеновими стрічками. Тому ефективність випромінювання також становить близько 79%. Для $\mu_c = 1$ еВ поблизу частоти першого плазмонного резонансу значення R і T не перевищують 2%.

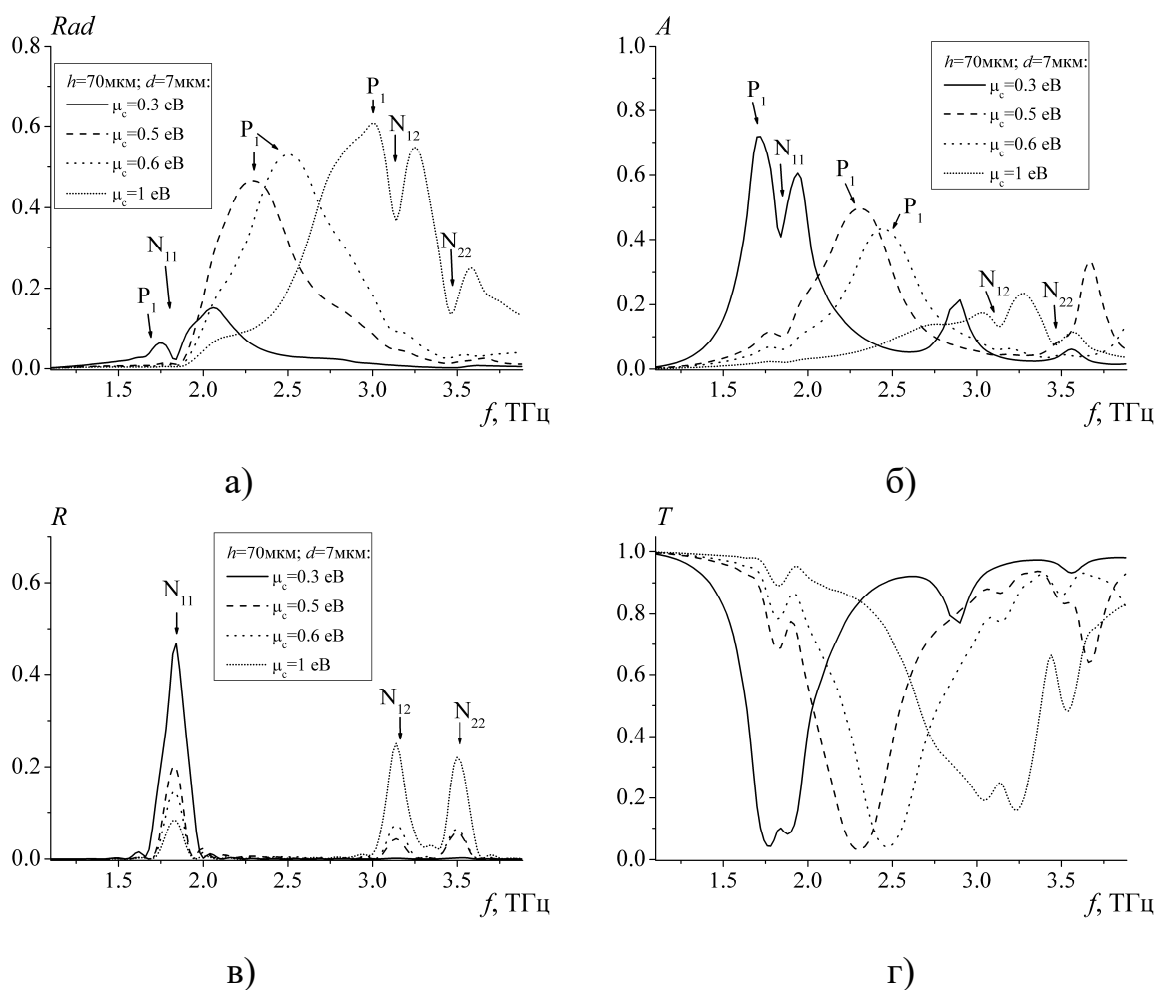


Рис.5.27 Залежності а) Rad , б) A , в) R , г) T від частоти при $\mu_c = 0.3$ еВ (суцільні криві), $\mu_c = 0.5$ еВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.6$ еВ (пунктирні криві), $\mu_c = 1$ еВ (короткі пунктирні криві), $l = 70$ мкм, $h = 70$ мкм, $d = 7$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $N = 10$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, основна симетрична мода $p = 1$

Відмітимо, що у дослідженні [124] також максимальне випромінювання з діелектричного хвилеводу з графеновими стрічками не перевищувало 80%. При цьому, у [62], [200], [201] графенова антена витікаючої хвилі показувала ефективність випромінювання на рівні 20%, а у [202] графенова антена витікаючої хвилі на базі циліндричного хвилеводу – на рівні 50%. Не дивлячись на відносно низьку ефективність випромінювання графенових антен, основної їх перевагою є можливість дистанційно, за рахунок зміни хімічного потенціалу стрічок, керувати їх властивостями.

Як відомо, у періодичних структурах можуть збуджуватись власні хвилі та відповідні резонанси. Крім плазмонних резонансів, досліджувана структура може підтримувати резонанси, які викликані періодичністю розташування стрічок. Такі резонанси позначені як N_{ij} . Перший індекс – кількість варіацій поля вздовж осі z при $z > 0$ (збуджуються лише симетричні хвилі відносно площини $z = 0$), другий індекс – кількість варіацій поля вздовж осі Oy на періоді. Положення цих резонансів на частотній осі здебільшого залежить від параметрів діелектричної пластини та періоду l . В набагато меншому ступені залежить від параметрів стрічок. Таким чином, їх положенням не вдається керувати за рахунок зміни хімічного потенціалу. Для ідентифікації цих резонансів розглянуто два значення ширини хвилеводу $h = 50$ мкм і $h = 70$ мкм. Поблизу резонансів N_{ij} спостерігаються ярко виражені максимуми коефіцієнта R і мінімуми коефіцієнта Rad . У разі падіння плоскої хвилі з області $z > 0$ резонанс N_{12} ідентифікується як резонанс на решітковій моді. Таким чином, можна встановити зв'язок між резонансами на решіткових модах, які збуджуються при падінні плоскої хвилі, та резонансами власних хвиль діелектричного хвилеводу. У разі резонансів на решіткових модах набіг фаз на сусідніх стрічках повинен бути кратним 2π . Резонанси N_{2i} з парними індексами, тобто такі, у яких

спостерігається 2 варіації поля вздовж осі Oy , відповідають резонансам на решіткових модах.

Постійну поширення власних хвиль періодичної структури можна отримати з наступного рівняння [176]:

$$\det(I - \exp(-i\chi l)te - erer(I - \exp(i\chi l)et)^{-1}) = 0, \quad (5.40)$$

де t і r – матриці проходження та відбиття поодинокі стрічки всередині хвилеводу, діагональна матриця e має елементи $\exp(ik_1 l \beta_m)$. На рис.5.28 наведено залежності $\text{Im} \chi$ від періоду l . Екстремуми $\text{Im} \chi$ відповідають резонансом власних хвиль періодичної частини структури.

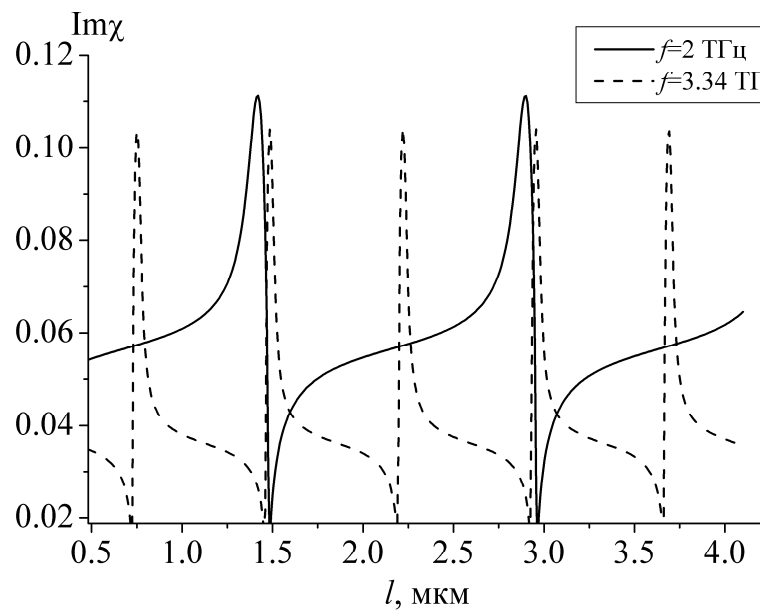


Рис.5.28 Залежності $\text{Im} \chi$ від періоду l при $f = 2$ ТГц (суцільна крива), $f = 3.34$ ТГц (штрихова крива), $h = 50$ мкм, $d = 10$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 1$ eВ, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $p = 1$

На рис.5.29 наведено розподіл повного поля поблизу плазмонних резонансів, а на рис.5.30 – поблизу резонансів N_{ij} . В цілому, поблизу плазмонних резонансів картина поля є характерною. Спостерігається максимальна концентрація поля біля графенових стрічок. Поблизу резонансів

на власних хвилях періодичної частини структури чітко помітні варіації поля вздовж осей Oz і вздовж Oy всередині хвилеводу.

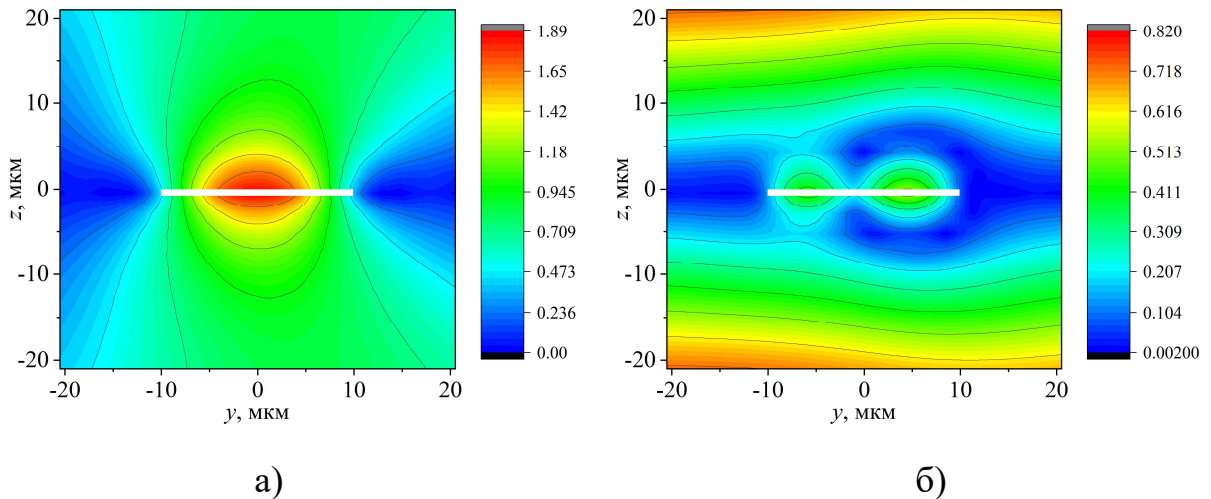


Рис.5.29 Розподіл повного поля (модуль амплітуди $|H_x|$) поблизу частот а) першого, $f = 1.5$ ТГц, та б) другого, $f = 2.5$ ТГц, плазмонних резонансів при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l$, $N = 10$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

Дослідимо випромінене поле у далекій зоні при різних параметрах. На рис.5.31 наведено нормовані діаграми спрямованості (за потужністю) поблизу першого плазмонного резонансу та поблизу резонансу власної хвилі періодичної структури. Діаграми нормуються на глобальний максимум, який відповідає першому плазмонному резонансу при $f = 2.46$ ТГц, $\mu_c = 1$ еВ. Параметри структури вибрані такими, щоб лише одна власна хвиля діелектричного хвилеводу могла поширюватись. Результати наведено для параметрів поблизу першого плазмонного резонансу P_1 для $\mu_c = 0.3$ еВ і $\mu_c = 1$ еВ, а також поблизу резонансу N_{12} . Головний пелюсток досягає максимуму, якщо параметри структури відповідають плазмонному резонансу. Сильна залежність провідності графену від хімічного потенціалу дозволяє налаштувати резонансну частоту антени та величину максимуму головного пелюстка.

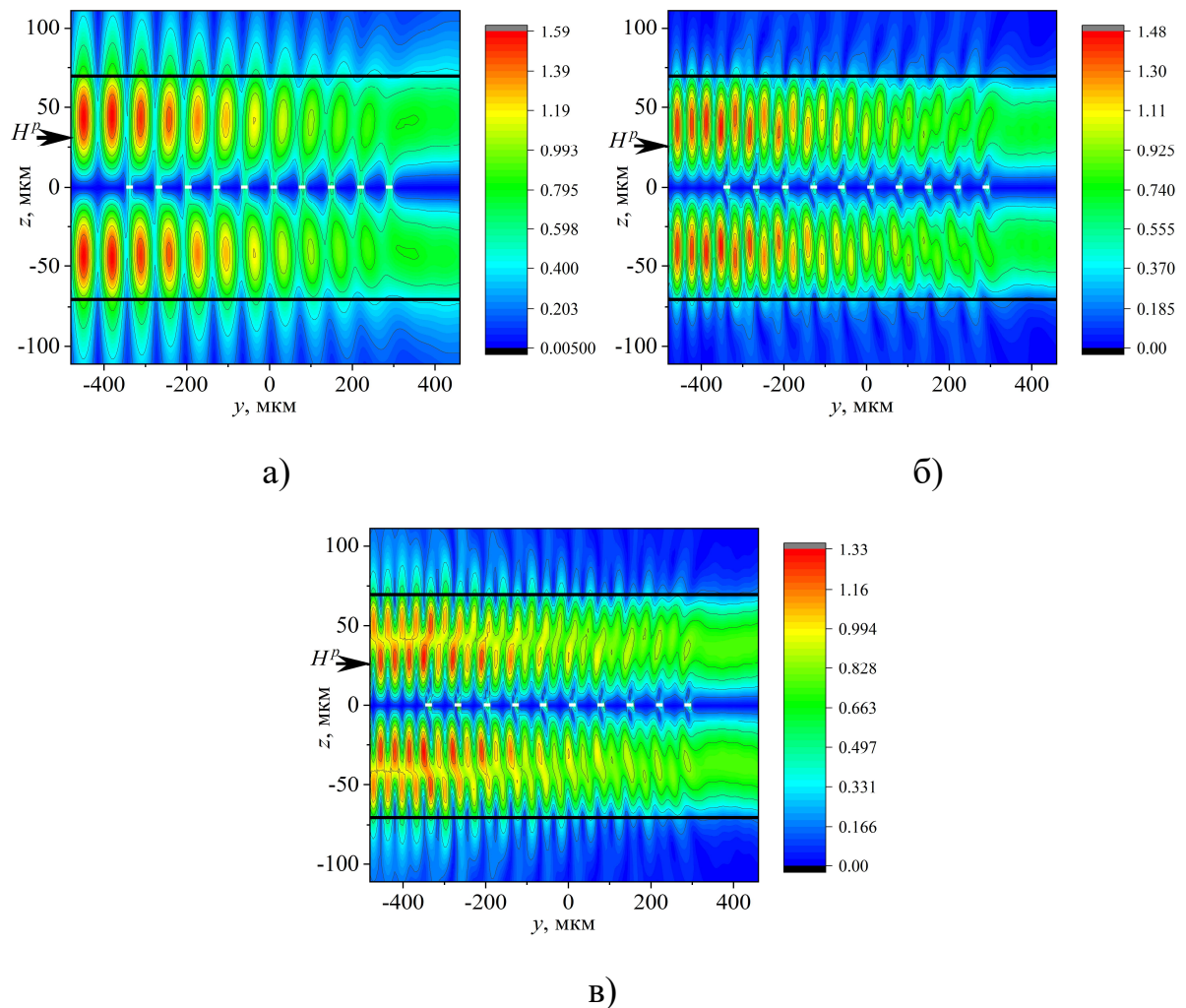


Рис.5.30 Розподіл повного поля (модуль амплітуди $|H_x|$) поблизу частот резонансів N_{ij} при $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l$, $N = 10$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 1$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. а) $f = 1.85$ ТГц, резонанс N_{11} , б) $f = 3.14$ ТГц, резонанс N_{12} , в) $f = 3.5$ ТГц, резонанс N_{22}

Незважаючи на велике відбиття поблизу резонансів власних хвиль періодичної структури, для практичних застосувань можуть бути цікаві резонанси з парними індексами. Поблизу N_{12} спостерігається синфазне збудження струмів на стрічках. В результаті кут головного пелюстка діаграми спрямованості становить $\varphi = 90^\circ$. Як було зазначено вище, положення цих резонансів на частотній осі не залежить від параметрів

графенових стрічок. Проте амплітуду головного пелюстка тут також можна контролювати за рахунок зміни хімічного потенціалу графену.

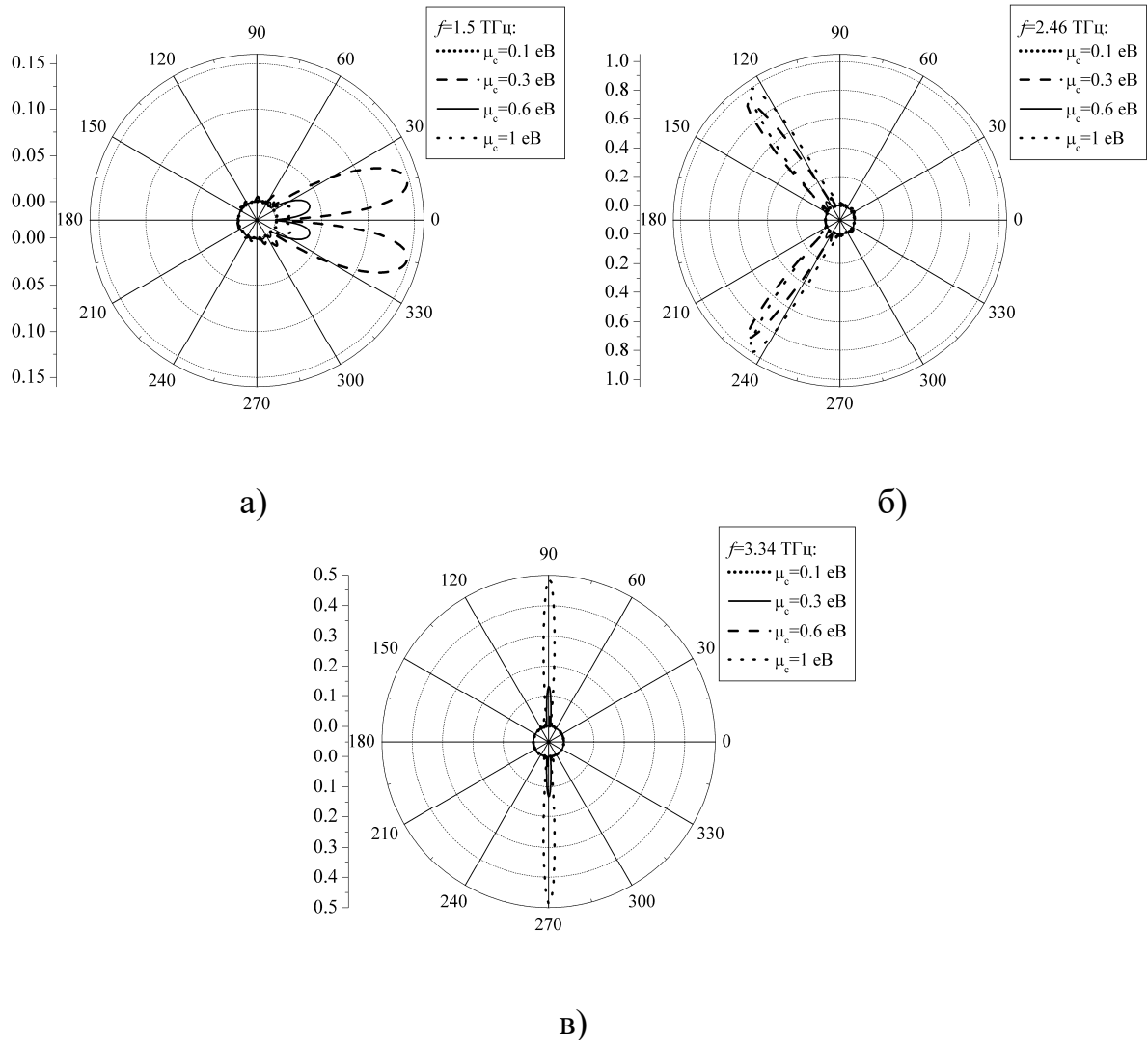


Рис.5.31 Нормовані діаграми спрямованості при $\mu_c = 0.1$ eВ (короткі пунктирні криві), $\mu_c = 0.3$ eВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.6$ eВ (суцільні криві), $\mu_c = 1$ eВ (пунктирні криві), $h = 50$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 10$, $p = 1$. а) $f = 1.5$ ТГц поблизу першого плазмонного резонансу для $\mu_c = 0.3$ eВ, б) $f = 2.46$ ТГц поблизу першого плазмонного резонансу для $\mu_c = 1$ eВ, в) $f = 3.34$ ТГц поблизу резонансу N_{12}

Як це зазвичай буває для випромінюючих періодичних систем, розглянута структура демонструє здатність до частотного сканування. Кут головного пелюстка в основному залежить від значення нормованого періоду kl . На рис.5.32 наведено діаграми спрямованості, які демонструють частотну залежність кута нахилу головного пелюстка при однакових значеннях хімічного потенціалу $\mu_c = 1$ еВ.

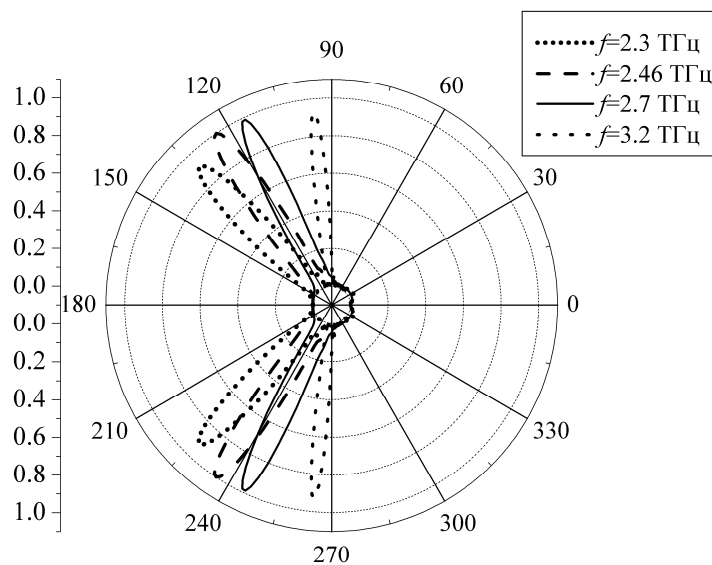


Рис.5.32 Нормовані діаграми спрямованості для різних значень частоти, $f = 2.3$ ТГц (короткий пунктир), $f = 2.46$ ТГц (штрихова крива), $f = 2.7$ ТГц (суцільна крива), $f = 3.2$ ТГц (пунктирна крива), $\mu_c = 1$ еВ, $h = 50$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 10$, $p = 1$

Розглянемо діаграми спрямованості при збільшенні числа стрічок включно до значення $N = \infty$, яке відповідає напівнескінченній структурі. Зауважимо, що розв'язок задачі для напівнескінченної періодичної послідовності є наближеним і його отримано у пункті 5.3.3. Проте, як видно з рис.5.24, наближений розв'язок добре погоджується зі строгим, вочевидь, до критичних частот власних хвиль хвилеводу. Результати наведено на рис.5.33.

При збільшенні числа стрічок збільшується число бічних пелюстків амплітуда яких, разом з амплітудою головного пелюстка, наближається до граничного значення, яке відповідає випадку напівнескінченної структури.

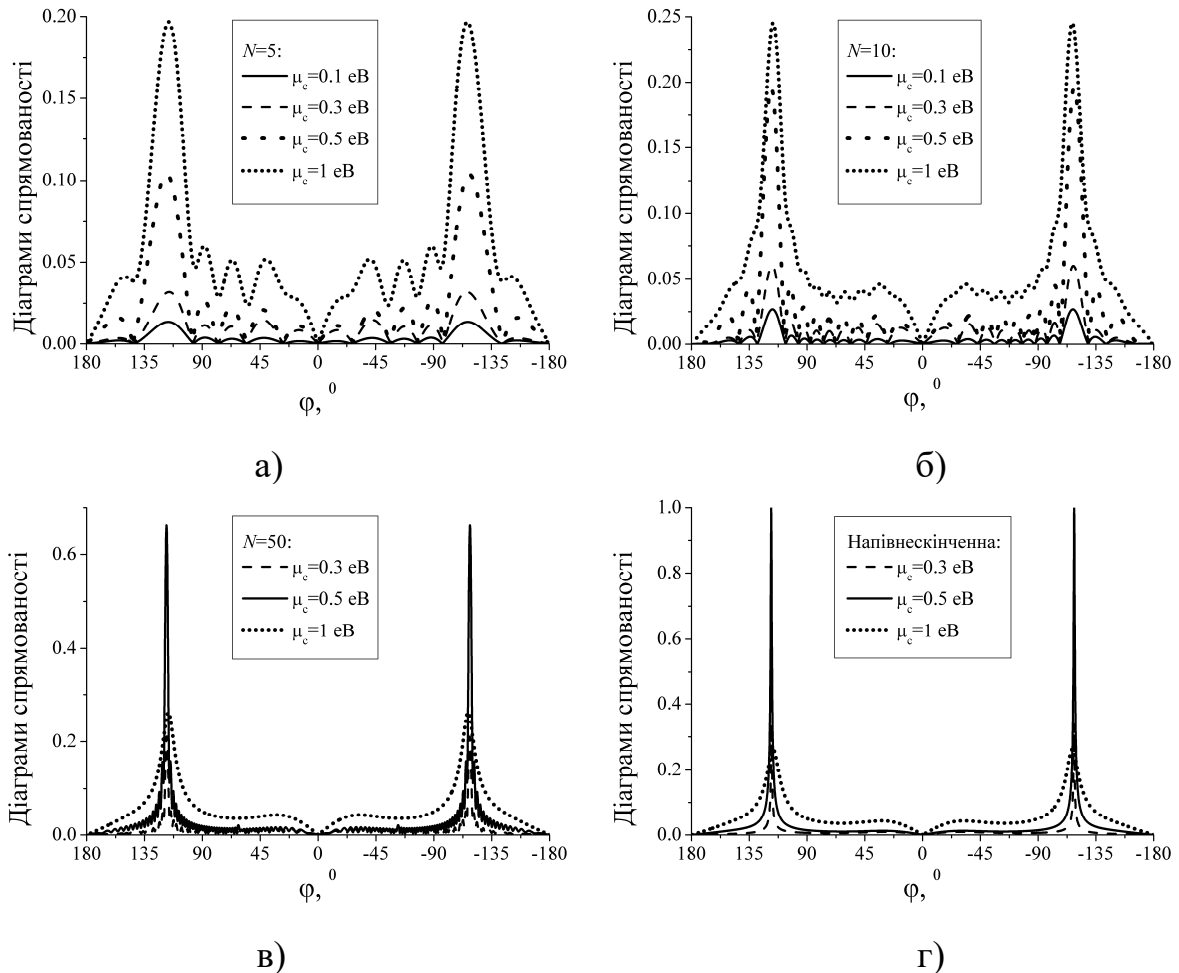


Рис.5.33 Нормовані діаграми спрямованості при $f = 2.525$ ТГц, $h = 60$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $p = 1$ і різній кількості стрічок

5.3.6. Оптимізація параметрів решітки

До цього було наведено результати числових експериментів при однакових значення хімічного потенціалу всіх графенових стрічок у решітці. Проте можливість незалежного надання кожній стрічці значення хімічного

потенціалу забезпечує додаткові ступені свободи. Водночас це суттєво збільшує кількість вхідних параметрів задачі.

При створенні антен вимагається, щоб діаграма спрямованості мала найнижчий рівень бічних пелюсток. Метою є, обираючи значення хімічного потенціалу кожної окремої графенової стрічки в масиві незалежно від інших, зменшити рівень бічних пелюсток. Ця задача відноситься до задачі оптимізації. Зважаючи на кількість параметрів, необхідно вибрати ефективний метод. Пропонується використання паралельного генетичного алгоритму [203], [204].

Задача оптимізації, яка розглядається, може бути сформульована як

$$f(\mu) \rightarrow \min, \quad (5.41)$$

де $\mu = \{\mu_{c1}, \mu_{c2}, \dots, \mu_{cN}\}$ – множина значень хімічного потенціалу кожної стрічки, $f(\mu)$ – це цільова функція. Нашою метою є отримати найнижчий рівень бічних пелюсток (SLL). Проте також необхідно визначити інші характеристики нашої структури, такі як рівень головного пелюстка (MLL) і його ширину (MLW). Таким чином, (5.41) можна переписати у вигляді

$$f(\mu) = \omega_1 g(SLL, S) + \omega_2 g(-MLL, -M) + \omega_3 g(MLW, W),$$

де $g(\xi, \zeta)$ – неперервна функція, яка визначає внесок рівня бічних пелюсток, рівня і ширини головного пелюстка, ω_i – вагові коефіцієнти. Параметри S , M , W визначають момент зупинення виконання процедури оптимізації,

$$g(\xi, \zeta) = \begin{cases} \xi, & \xi > \zeta, \\ \zeta, & \xi \leq \zeta. \end{cases}$$

У генетичному алгоритмі кожна i -а особина в популяції визначалася множиною $\mu^i = \{\mu_{c1}^i, \mu_{c2}^i, \dots, \mu_{cN}^i\}$, де кожне значення μ_{cj}^i – ген.

Для початкової популяції гени обираються випадковим чином з заданого інтервалу.

Кожна наступна “нова” популяція формується з попередньої шляхом рекомбінації генів або процедури схрещування. Кожна нова особина у

“новій” популяції створюється з двох особин із “старої” популяції, які беруться довільно. Особини з меншим значенням цільової функції будуть відібрані з більшою ймовірністю для схрещування. Процес рекомбінації відбувається наступним чином. Нехай маємо дві особини p і q для схрещування зі “старої” популяції. Ці особини визначаються наборами генів $\mu^p = \{\mu_{c_1}^p, \mu_{c_2}^p, \dots, \mu_{c_N}^p\}$ і $\mu^q = \{\mu_{c_1}^q, \mu_{c_2}^q, \dots, \mu_{c_N}^q\}$. Спершу, випадковим чином вибираються значення M_1^l та M_2^l : $1 \leq M_1^l < M_2^l \leq N$, $M_2^p - M_1^p = M_2^q - M_1^q$, $l = p, q$. Після цього відбувається обмін генами. В результаті отримано дві нові особини в “новій” популяції з генами

$$\mu^p = \{\mu_{c_1}^p, \dots, \mu_{c_{M_1^p-1}}^p, \mu_{c_{M_1^p}}^q, \dots, \mu_{c_{M_2^p}}^q, \mu_{c_{M_2^p+1}}^p, \dots, \mu_{c_N}^p\},$$

$$\mu^q = \{\mu_{c_1}^q, \dots, \mu_{c_{M_1^q-1}}^q, \mu_{c_{M_1^q}}^p, \dots, \mu_{c_{M_2^q}}^p, \mu_{c_{M_2^q+1}}^q, \dots, \mu_{c_N}^q\}.$$

Передбачається, що на етапі створення нової популяції може відбуватися мутація. Імовірність мутації фіксована і дорівнює 0.1, значення мутації – 10%. Значення хімічного потенціалу вибиралися з інтервалу $\mu_c \in (0.1 \text{ eV}, 1.1 \text{ eV})$.

Паралельні обчислення організовано за схемою сервер-клієнти. Сервер відповідає за генетичний алгоритм, створює “нову” популяцію. Він надсилає набір генів клієнтам. Клієнти виконують обчислення, пов’язані з розв’язком граничної задачі, повертають на сервер значення цільової функції. Програма написана мовою C++.

Необхідно зазначити, що вибір значень вагових коефіцієнтів ω_1 , ω_2 , ω_3 є окремою задачею. Для підбору цих коефіцієнтів можна використовувати наближений розв’язок задачі дифракції, який потребує значно менше комп’ютерного часу, ніж строгий розв’язок, при цьому відображає основні фізичні закономірності. Тоді можна виконувати генетичний алгоритм оптимізації без значних витрат часу для різних значень вагових коефіцієнтів і вибирати ті, при яких показано бажані результати. Після цього виконувати оптимізацію за генетичним алгоритмом вже з використанням строгого

методу при обраних вагових коефіцієнтах. Нами у якості наближеного розв'язку використовувався розв'язок, отриманий операторним методом у пункті 5.3.3 у одномодовому наближенні, коли операторі рівняння відносно операторів проходження та відбиття стають не матричними, а скалярними.

Результати оптимізації надано на рис.5.34, рис.5.35 для двох значень частоти, $f = 2.7$ ТГц і $f = 3$ ТГц. Значення ширини стрічок та періоду є однаковими та залишалися незмінними в процесі оптимізації. Наша мета — отримати рівень бічних пелюстків менше ніж -20 дБ. Як видно, фактичний рівень бічних пелюстків добре узгоджується з бажаним. Значення хімічного потенціалу наведено в табл.5.1. Кутова ширина головного пелюстка отриманої діаграми спрямованості за рівнем -20 дБ є приблизно 25° для $f = 2.7$ ТГц і приблизно 20° для $f = 3$ ТГц. Також для порівняння наведено діаграми спрямованості при постійному значенні хімічного потенціалу $\mu_c = 1$ еВ.

Таблиця 5.1 Значення хімічного потенціалу графенових стрічок

Номер стрічки	Хімічний потенціал для рис.5.34 (еВ)	Хімічний потенціал для рис.5.35 (еВ)
1	0.544665	0.646117
2	0.579733	0.627085
3	0.729025	0.865287
4	0.828113	0.966635
5	0.893959	1.099578
6	0.946739	1.029578
7	0.949503	1.043876
8	0.972799	1.099578
9	0.939843	1.046381
10	1.073118	0.896205

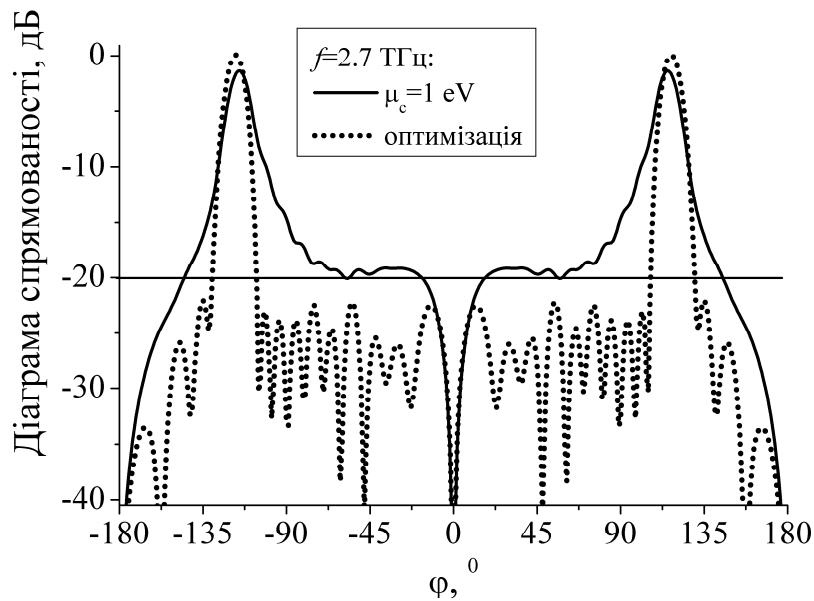


Рис.5.34 Нормовані діаграми спрямованості при $f = 2.7$ ТГц, $h = 50$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 10$, $p = 1$. Результати оптимізації генетичним алгоритмом (пунктирна крива) $\mu_c = 1$ eВ на всіх стрічках (суцільна крива)

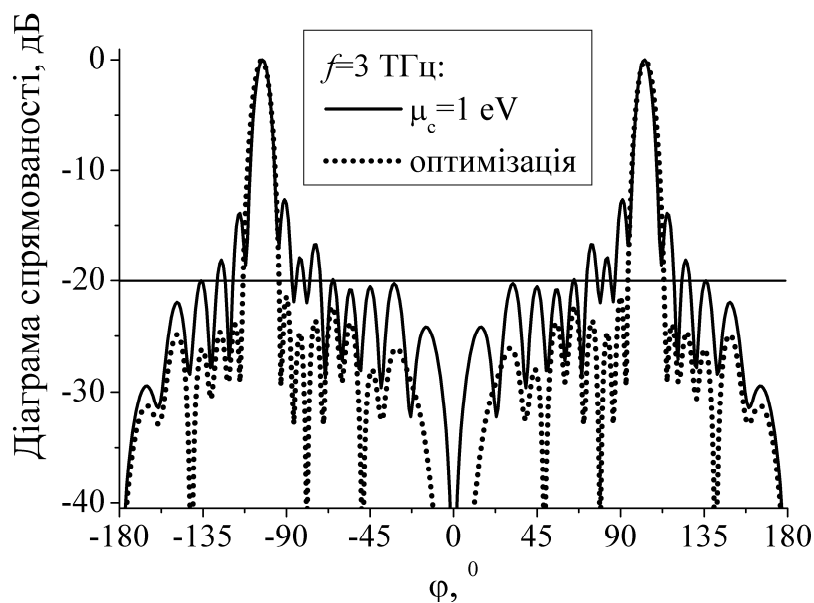


Рис.5.35 Нормовані діаграми спрямованості при $f = 3$ ТГц, $h = 50$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 10$, $p = 1$. Результати оптимізації генетичним алгоритмом (пунктирна крива) $\mu_c = 1$ eВ на всіх стрічках (суцільна крива)

Наостанок зауважимо, що також проводилася оптимізація методом градієнтного спуску. Проте, по-перше, на відміну від генетичного алгоритму, обмеження значень параметрів, які оптимізуються, не є природнім для градієнтного спуску. Без обмежень значень хімічного потенціалу градієнтний спуск рухався в бік збільшення μ_c до значень, які набагато перевищують $\mu_c \gg 1$, що є недосяжним на цей день з точки зору технології створення графенових стрічок. По-друге, метод градієнтного спуску набагато гірше масштабується, ніж паралельний генетичний алгоритм.

5.4. Скінченна решітка у діелектричній пластині з ідеальною провідною площиною

Розглянемо плоский діелектричний хвилевід висоти $h_1 + h_2$ з ідеальною провідною стінкою у площині $z = -h_2$. Всередині хвилеводу у площині $z = 0$ розміщено систему з N імпедансних стрічок нульової товщини. Відносна діелектрична проникність хвилеводу ε , y -координати стрічок визначаються множиною L . Геометрія структури наведена на рис.5.36. Структура є нескінченною і однорідною вздовж осі Ox .

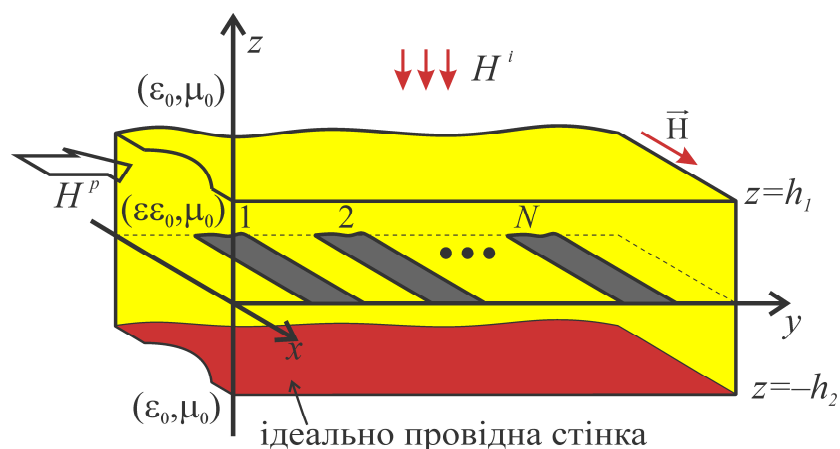


Рис.5.36 Геометрія скінченної решітки з імпедансних стрічок нульової товщини, розміщеної в діелектричному шарі з ідеальною провідною площиною

Припустимо, що падаюче поле H -поляризоване. Розглядається два випадки. Якщо падаюче поле – це плоска хвиля (1.37), то повне поле шукається як сума первинного H_x^{slab} і розсіяного на решітці H_x^g поля (5.1). У разі падіння з області $y < 0$ власної хвилі діелектричного хвилеводу, то повне поле – це сума падаючого поля власної хвилі з номером p , $H_x^{slab} = H_x^p$, і розсіяного поля H_x^g .

Поле повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца, граничним умовам у площині імпедансних стрічок, (1.49), (1.50), (1.52), граничним умовам на границі розділу вакуум-діелектрик і на ідеально провідній площині (5.2), (5.13), умовам Майкснера на ребрі і випромінювання. Розв'язок граничної задачі – єдиний.

Розсіяне поле шукаємо як інтеграли Фур'є з невідомими амплітудами у кожній з областей,

$$H_x^g = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \frac{b(\xi/\sqrt{\varepsilon})}{1-g(\xi/\sqrt{\varepsilon})} \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z) d\xi, & z > h_1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (c(\xi) \exp(ik_1\xi y - ik_1\gamma(\xi)z) \\ + \exp(ik_1\xi y + ik_1\gamma(\xi)z)) \frac{b(\xi)}{1-g(\xi)} d\xi, & 0 < z < h_1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi) \exp(ik_1\xi y - ik_1\gamma(\xi)z) \\ + g(\xi) \exp(ik_1\xi y + ik_1\gamma(\xi)z)) \frac{b(\xi)}{1-g(\xi)} d\xi, & -h_2 < z < h_1, \end{cases} \quad (5.42)$$

причому, як і у разі структури без ідеально провідної площини, всі амплітуди можна виразити через єдину невідому функцію $b(\xi)$.

Вираз (5.42) вже задовольняє граничним умовам (1.49), (1.50) і умові випромінювання поза діелектричним хвилеводом. Для того, щоб (5.42) задовольняло умові випромінювання і у хвилеводі, необхідно контур інтегрування деформувати так, як було описано у пункті 5.3.1 і наведено на

рис.5.11, β_m , $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, – постійні поширення власних хвиль хвилеводу. Для не згасаючих хвиль покладемо $\beta_m = -\beta_{-m}$.

З граничних умов (1.50), (1.52) впливають парні інтегральні рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \exp(ik_1 \xi y) d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (5.43)$$

$$ik_1 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\xi)(1-c(\xi)) \frac{b(\xi)}{1-g(\xi)} \exp(ik_1 \xi y) d\xi + \frac{2ik_1 \sqrt{\varepsilon}}{\sigma Z} \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \exp(ik_1 \xi y) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H_x^{slab}(y, 0), \quad y \in L. \quad (5.44)$$

Парні інтегральні рівняння (5.43) і (5.44) мають такий самий вигляд, як і рівняння (5.23), (5.24). Підінтегральна функція задовольняє асимптотичному виразу (5.25). Таким чином, застосувавши алгоритм з пункту 5.31, можна звести парні інтегральні рівняння (5.43), (5.44) до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (5.29) і ядром (5.30). Для регуляризації ядра рівняння необхідно виконати процедуру регуляризації, яку надано у пункті 5.3.2.

Поле всередині хвилеводу, при $y \rightarrow \pm\infty$, можна надати як:

$$H_x^g(y, z) = 4\pi \sum_{q=1}^Q b(\pm\beta_q) \alpha_q^{\pm} \cos(k_1 \gamma(\beta_q)(z + h_2)) \exp(-ik_1 h_2 \gamma(\beta_q) + ik_1 |\beta_q y|), \quad (5.45)$$

$$\text{де } \alpha_q^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\beta_q} ((\xi \mp \beta_q)/(1-g(\xi)))$$

5.4.1. Числові результати. Падіння плоскої хвилі

Нехай всередині діелектричного хвилеводу розташована періодична система графенових стрічок. Ширина стрічок – $2d$, період – l , $L = \bigcup_{n=1}^N (-d + l \cdot n; d + l \cdot n)$. На решітку з області $z > 0$ падає плоска H -поляризована хвиля (1.37). Як і раніше, характеристики розсіяння та поглинання будемо описувати за допомогою поперечного перерізу розсіяння

циліндричних хвиль (CW-SCS), перерізу поглинання (ACS), поперечного перерізу розсіяння власних хвиль діелектричного хвилеводу (GW-SCS),

$$\text{CW - SCS} = \frac{2\pi}{k} \int_0^\pi (A(-\cos \varphi) \sin \varphi)^2 d\varphi, \quad (5.46)$$

$$\text{GW - SCS} = 4\pi^2 \sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P \left(I_{1,p} \left| \lim_{\xi \rightarrow \xi_p} (B(\xi)(\xi - \beta_p)) \right|^2 + I_{2,p} \left| \lim_{\xi \rightarrow \xi_p} (A(\xi\sqrt{\varepsilon})(\xi - \beta_p)) \right|^2 \right), \quad (5.47)$$

$$\text{ACS} = \text{Re} \left(\frac{4}{Z_0 \sigma} \right) \int_L |U(y)|^2 dy, \quad (5.48)$$

де P – кількість власних хвиль хвилеводу, що поширюються

$$I_{1,p} = \frac{2\xi_p}{\varepsilon} \left(h_1 + h_2 + \frac{\cos(k_1 \gamma(\beta_p)(h_1 + h_2)) \sin(k_1 \gamma(\beta_p)(h_1 + h_2))}{k_1 \gamma(\beta_p)} \right),$$

$$I_{2,p} = \frac{\beta_p \sqrt{\varepsilon}}{2k \sqrt{\varepsilon \beta_p^2 - 1}} e^{-2h_1 k \sqrt{\varepsilon_p^2 - 1}},$$

$A(\xi)$, $B(\xi)$ – амплітуди Фур'є поля над хвилеводом, $z > h_1$, і всередині хвилеводу, $h_1 > z > -h_2$.

На рис.5.37, рис.5.38, рис.5.39 наведено залежності CW-SCS, ACS, GW-SCS від частоти для різних значень кількості стрічок N і хімічного потенціалу μ_c при ширині діелектричної пластини $h_1 = h_2 = l/2$. Розглядається нормально падаюча плоска хвиля з одиничною амплітудою. Тоді оптична теорема (закон збереження енергії) має вигляд $\text{CW - SCS} + \text{ACS} + \text{GW - SCS} = -4\pi/k \text{Re}(A(0)/R)$, де R – коефіцієнт відбиття плоскої хвилі від ізольованої діелектричної плити з ідеально провідною площиною (без графенових стрічок).

Можна виділити три групи резонансів, які розглянута структура здатна підтримувати: плазмонні резонанси (позначений як P_i), власні резонанси діелектричної пластини (позначений як S_i) і резонанси на решіткових модах (позначені як G_{ij}). Збільшення кількості стрічок N призводить до незначних

змін CW-SCS і ACS на стрічку, за винятком резонансів на решіткових модах. Зміна хімічного потенціалу призводить до зсуву положення плазмонних резонансів по осі частот через сильну залежність провідності графену від цього параметра у ТГц діапазоні. Різниця в частоті плазмонних резонансів помітна для поодинокі стрічки, $N = 1$, і для періодичної системи стрічок, $N > 1$.

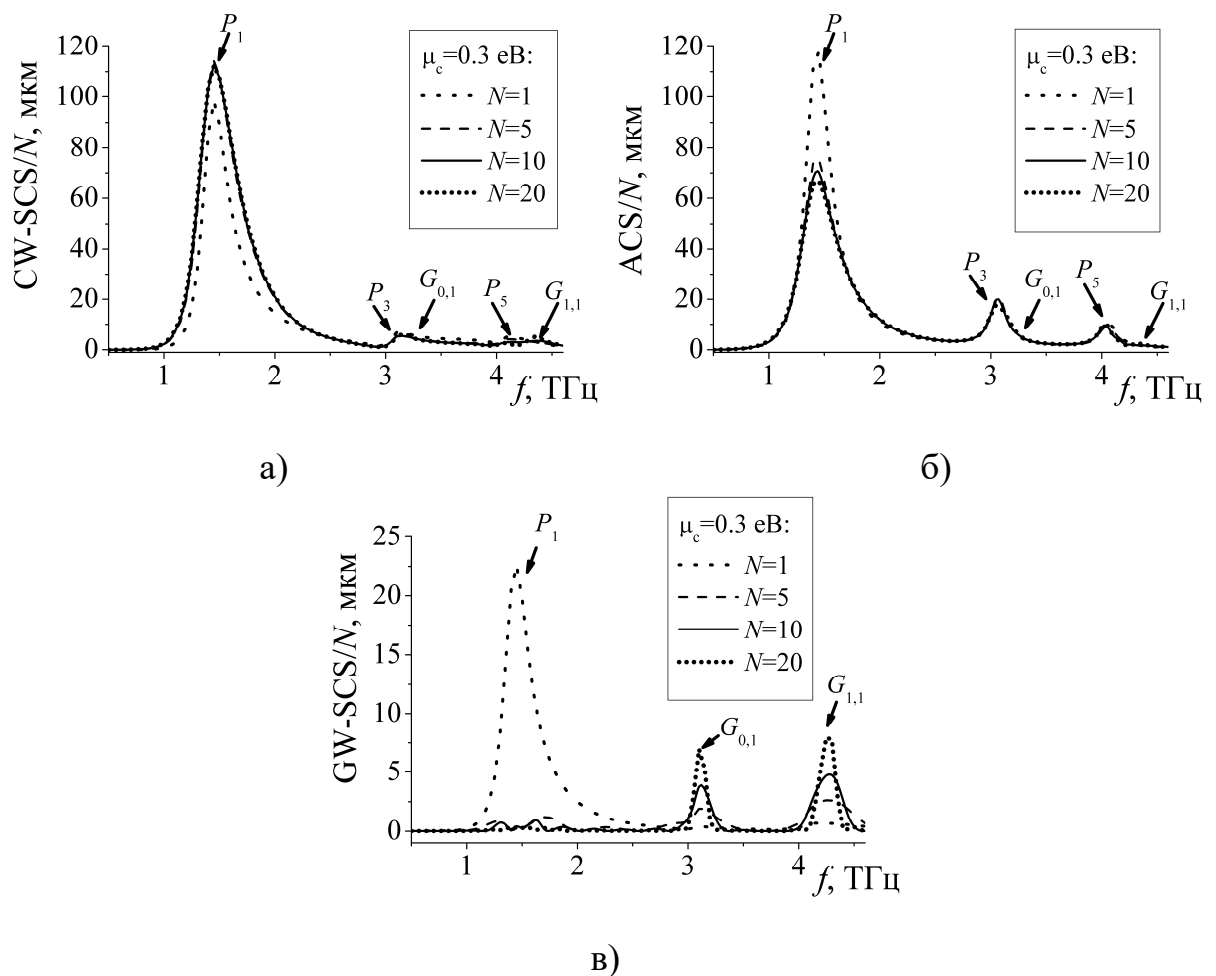


Рис.5.37 Залежності а) CW-SCS, б) ACS, в) GW-SCS на стрічку від частоти при $N = 1$ (пунктирні криві), $N = 5$ (штрихові криві), $N = 10$ (суцільні криві), $N = 20$ (короткі пунктирні криві), $\mu_c = 0.3$ eV, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм,

$$h_1 = h_2 = l/4, \quad \varepsilon = 2.25, \quad \tau = 1 \text{ пс}, \quad T = 300 \text{ К}, \quad \varphi_0 = 90^\circ$$

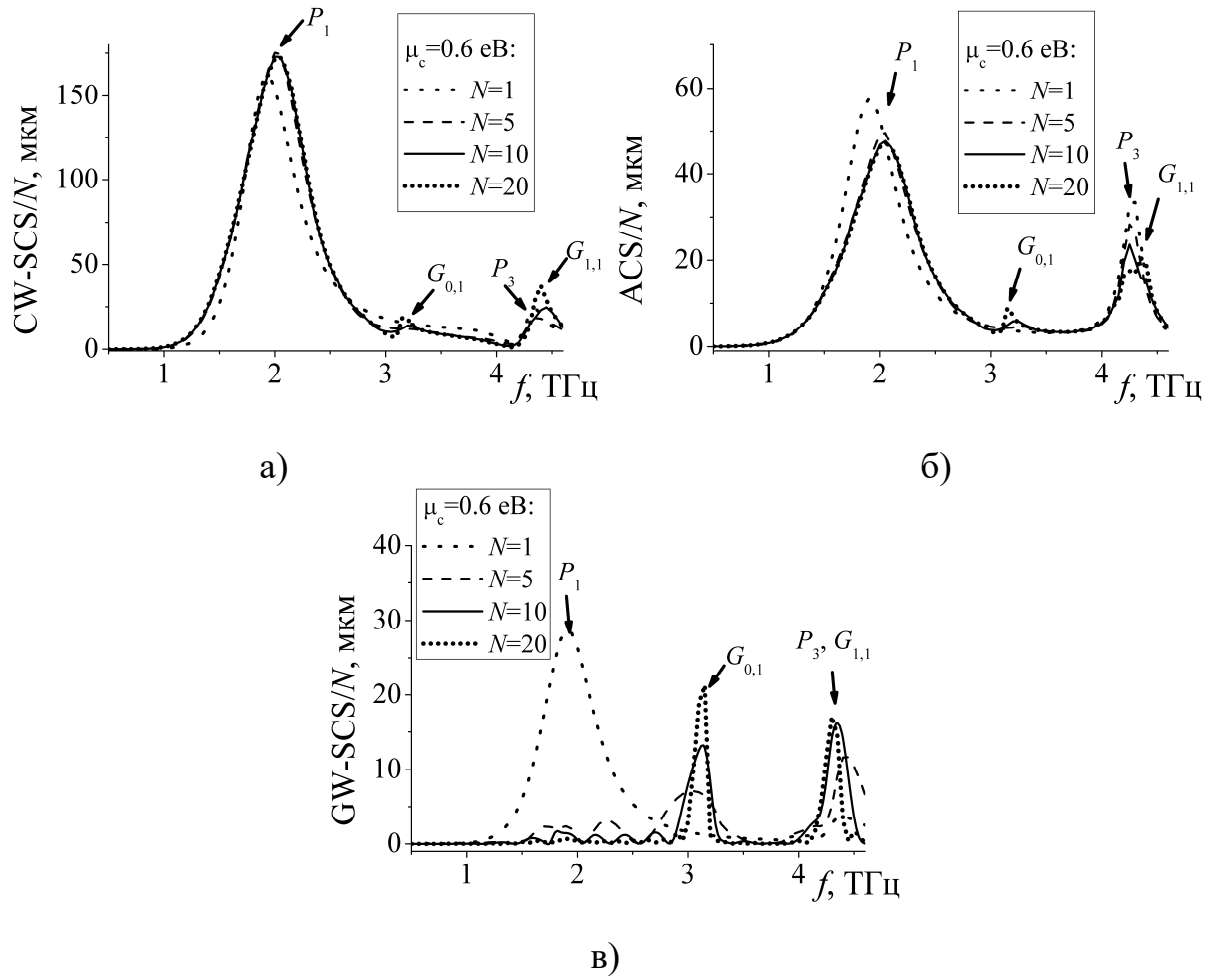


Рис.5.38 Залежності а) CW-SCS, б) ACS, в) GW-SCS на стрічку від частоти при $N = 1$ (пунктирні криві), $N = 5$ (штрихові криві), $N = 10$ (суцільні криві), $N = 20$ (короткі пунктирні криві), $\mu_c = 0.6$ еВ, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм,

$$h_1 = h_2 = l/4, \quad \varepsilon = 2.25, \quad \tau = 1 \text{ пс}, \quad T = 300 \text{ К}, \quad \varphi_0 = 90^\circ$$

Збудження власних хвиль діелектричного хвилеводу є найпомітнішим поблизу резонансів на решіткових модах, як і у разі скінченної решітки у діелектричній пластині без ідеально провідної площини.

На рис.5.40 наведено залежності CW-SCS, ACS та GW-SCS від частоти для різного положення h_1 і h_2 графенових стрічок всередині плити, але $h_1 + h_2 = l/2$. Зміна h_1 і h_2 призводить до невеликого зсуву плазмонних резонансів уздовж осі частот. Резонансна частота решіткових мод залишається майже незмінною.

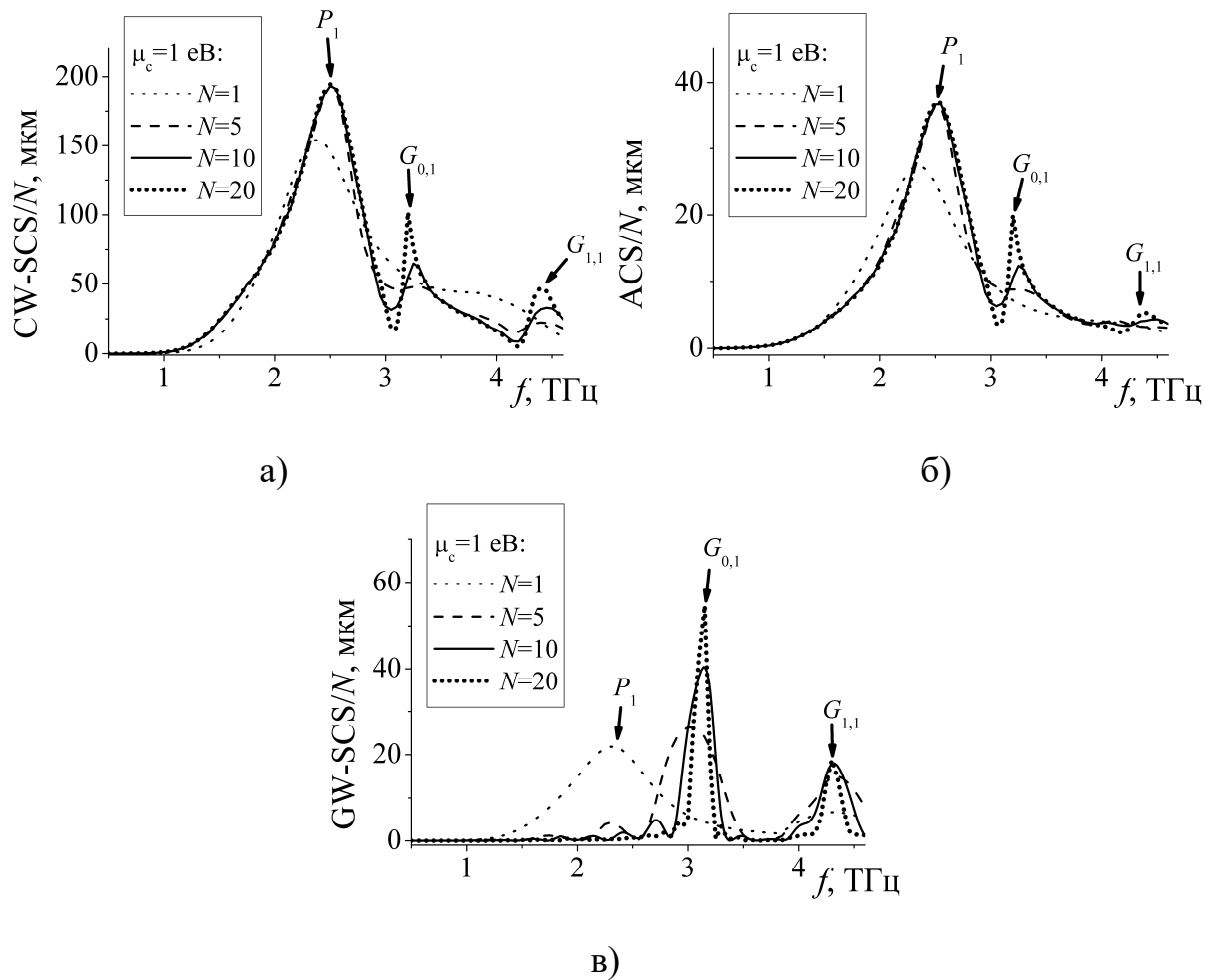


Рис.5.39 Залежності а) CW-SCS, б) ACS, в) GW-SCS на стрічку від частоти при $N = 1$ (пунктирні криві), $N = 5$ (штрихові криві), $N = 10$ (суцільні криві), $N = 20$ (короткі пунктирні криві), $\mu_c = 1$ eВ, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм,

$$h_1 = h_2 = l/4, \quad \varepsilon = 2.25, \quad \tau = 1 \text{ пс}, \quad T = 300 \text{ К}, \quad \varphi_0 = 90^\circ$$

Виникнення власних резонансів діелектричної пластини можна пояснити, якщо розглянути резонатор Фабрі-Перо з відстанню між дзеркалами $h_1 + h_2$, заповнений діелектриком з діелектричною проникністю ε . Положення цих резонансів на частотній осі є декілька зсунутим за рахунок наявності графенової решітки.

Виберемо параметри структури таким чином, щоб відбувалося одночасне збудження плазмонного резонансу та резонансу на решітковій моді. Залежності GW-SCS від частоти наведено на рис.5.41.

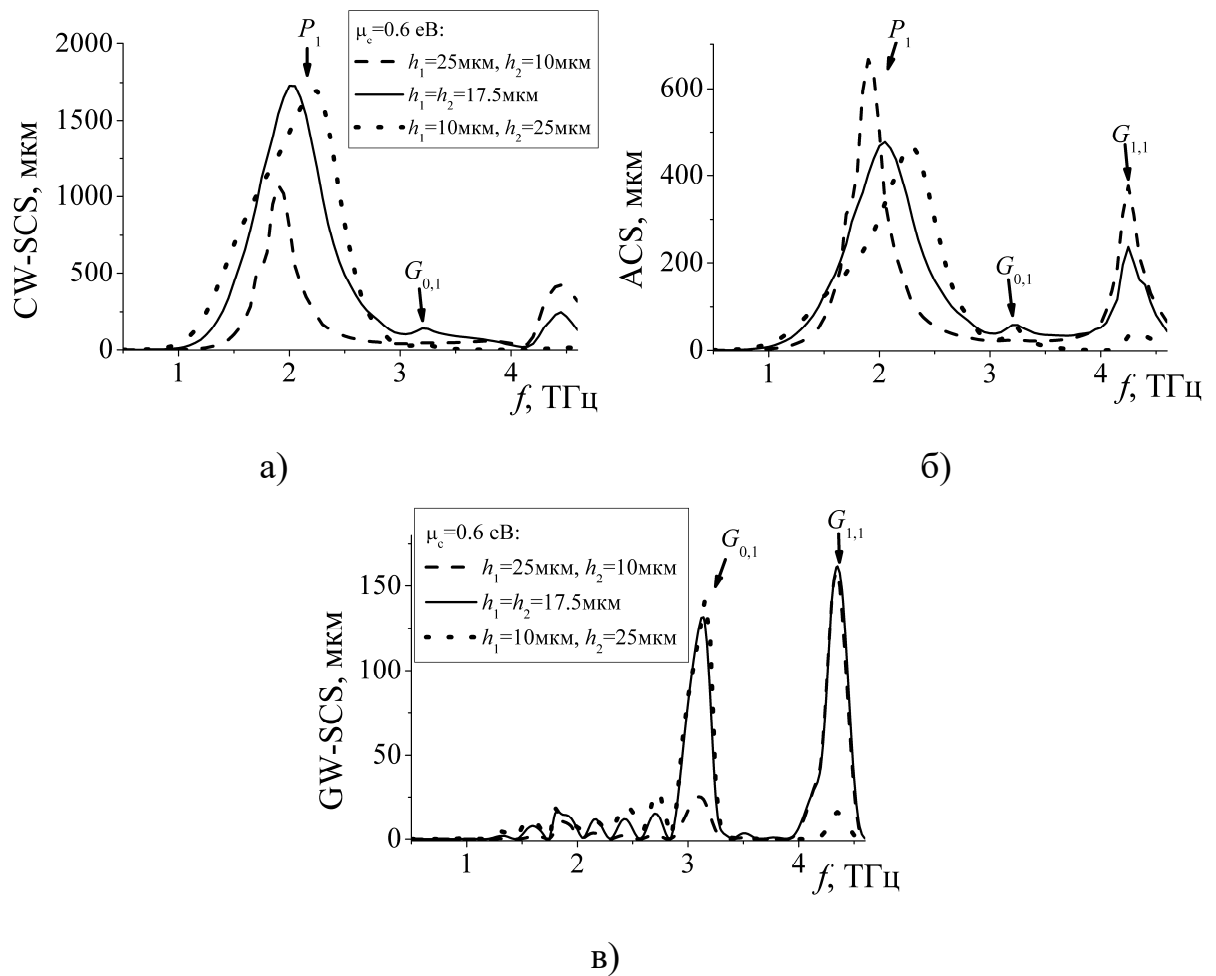


Рис.5.40 Залежності а) CW-SCS, б) ACS, в) GW-SCS від частоти при $h_1 = 25$ мкм, $h_2 = 10$ мкм (штрихові криві), $h_1 = h_2 = l/4$ (суцільні криві), $h_1 = 10$ мкм, $h_2 = 25$ мкм (пунктирні криві), $\mu_c = 0.6$ еВ, $N = 10$, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$

Частоти збудження першого плазмонного резонансу P_1 при $\mu_c = 1$ еВ і резонансу $G_{0,2}$ співпадають. У цьому випадку за рахунок зміни хімічного потенціалу можна ефективно контролювати енергію, яку переносять власні хвилі діелектричного хвилеводу.

Порівняємо результати для скінченної і нескінченної періодичної графенової решітки. Методику описано в пункті 5.3.4. На рис.5.42 наведено залежності ACS_N і ACS_∞ від частоти.

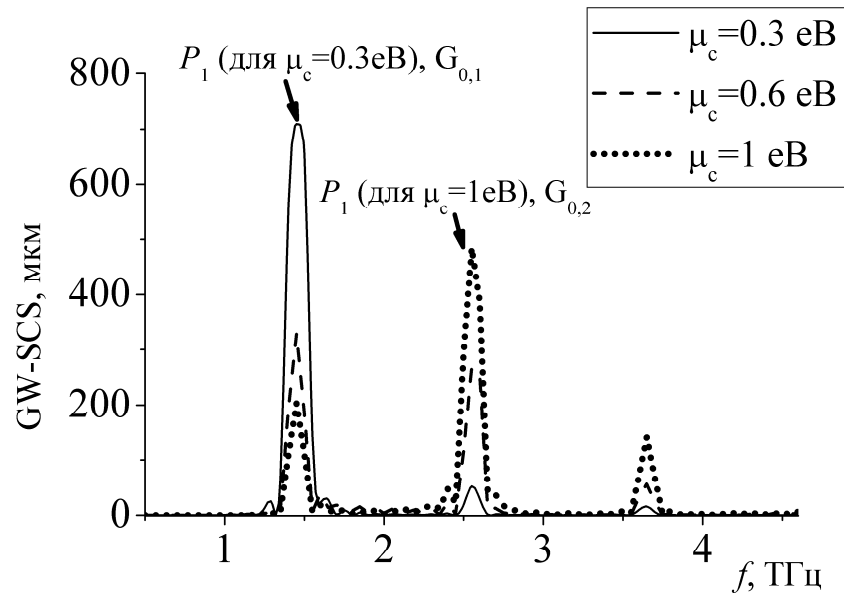


Рис.5.41 Залежності GW-SCS від частоти при $\mu_c = 0.3$ eВ (суцільна крива), $\mu_c = 0.6$ eВ (штрихова крива), $\mu_c = 1$ eВ (пунктирна крива), $N = 10$, $d = 10$ мкм, $l = 125$ мкм, $h_1 = h_2 = l/10$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$

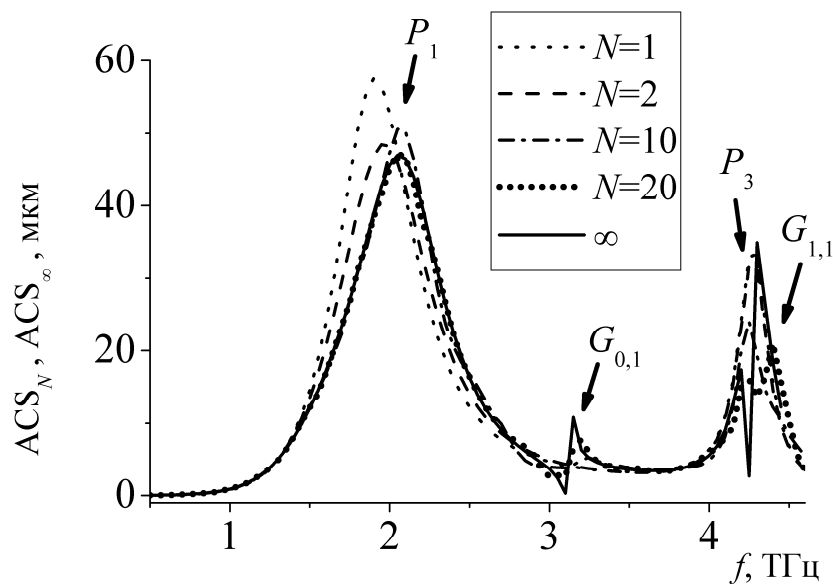


Рис.5.42 Порівняння результатів для скінченної і нескінченної періодичної решітки, залежності ACS_N , ACS_∞ від частоти при $N = 1$ (пунктирна крива), $N = 2$ (штрихова крива), $N = 10$ (штрих-пунктирна крива), $N = 20$ (короткий пунктир), нескінченна періодична решітка (суцільна крива), $\mu_c = 0.6$ eВ, $d = 10$ мкм, $l = 125$ мкм, $h_1 = h_2 = l/4$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$

Поведінка кривих співпадає. Криві для скінченної решітки наближаються до кривої для нескінченної решітки. Помітні розбіжності спостерігаються поблизу резонансів на решіткових модах. Така ж картина спостерігалася і у разі решітки у діелектрику без ідеально провідної площини, і у разі решітки у вакуумі, де розбіжності спостерігалися поблизу зон аномалій Релея.

На рис.5.43 наведено розподіл повного поля у ближній зоні поблизу плазмонних резонансів і резонансів на решіткових модах.

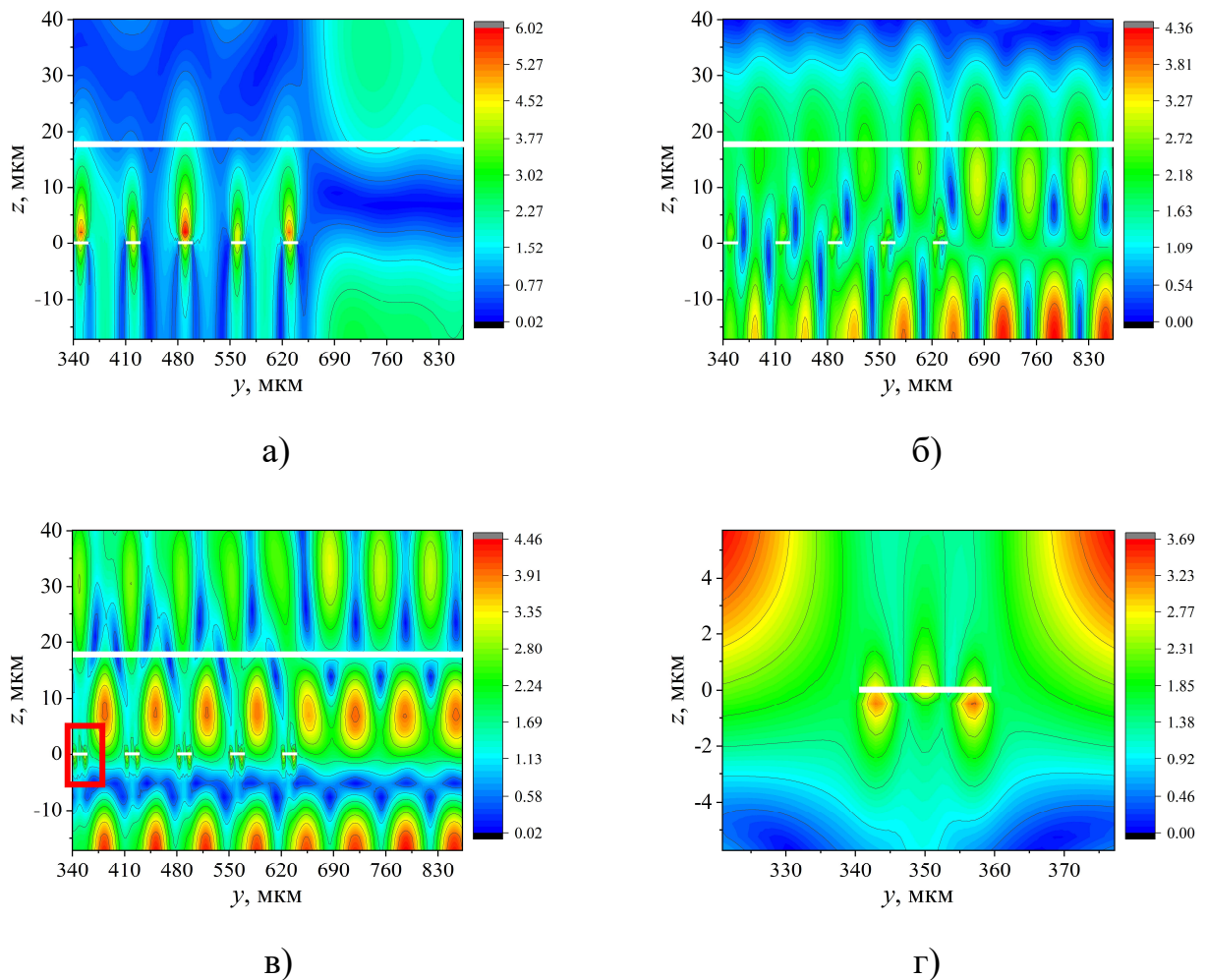


Рис.5.43 Розподіл повного поля, $|H_x|$, при $\mu_c = 0.6$ eV, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = l/4$, $N = 10$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon = 2.25$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К поблизу частот резонансів а) P_1 , $f = 2.05$ ТГц, б) $G_{0,1}$, $f = 3.15$ ТГц, в) $G_{1,1}$ і P_3 , $f = 4.35$ ТГц, г) збільшена область поблизу стрічки при $f = 4.35$ ТГц

Для обраних значень параметрів третій плазмонний резонанс P_3 і резонанс $G_{1,1}$ збуджуються на приблизно однаковій частоті. На рис.5.43 г) для кращого відображення характерних рис поля при резонансі на поверхневих плазмон-поляритонних хвилях, область поблизу стрічки з рис.5.43 в) збільшено. З рис.5.43 б) і в) видно, що характер розподілу поля поблизу резонансів на решіткових модах залишається незмінним навіть при переміщенні вздовж осі Oy у область поза решіткою. Також пучності поля простягаються за діелектричну плиту вздовж осі Oz , що є характерною рисою цих резонансів [190].

5.4.2. Числові результати. Падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу

Розглянемо падіння H -поляризованої власної хвилі діелектричного хвилеводу з ідеально провідною стінкою з області $y < 0$ на скінченну періодичну систему гарфенових стрічок. Ширина стрічок – $2d$, період – l .

Як і у разі решітки без площини, введемо коефіцієнти випромінювання (Rad), поглинання (A), відбиття (R) та проходження (T) як співвідношення відповідної енергії розсіяного поля до енергії поля падаючої власної хвилі діелектричного хвилеводу. Їх можна отримати, використовуючи (5.46)-(5.48). Закон збереження енергії має вигляд $Rad + A + R + T = 1$.

На рис.5.44 наведено залежності коефіцієнтів випромінювання, поглинання, відбиття та проходження від частоти. На рис.5.45 наведено нормовані діаграми спрямованості (за потужністю). Для валідації алгоритму наведено результати, отримані в HFSS.

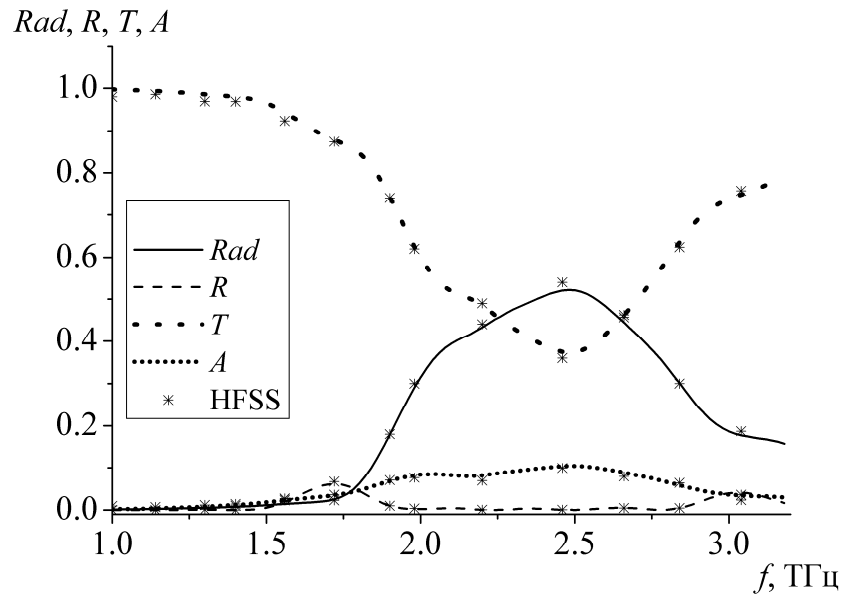


Рис.5.44 Залежності Rad , R , T , A від частоти при $\mu_c = 1$ еВ, $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $N = 5$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, основна мода $p = 1$. У якості зірочок наведені результати, отримані в HFSS

Спостерігається співпадіння в поведінці кривих і невеликі розбіжності в абсолютних значеннях. Необхідно зазначити декілька моментів. Кут нахилу головного пелюстка діаграм спрямованості і максимум бічних пелюстків, отриманих за допомогою HFSS, суттєво залежить від розміру простору розв'язку "vacuum box" і варіюється в інтервалі приблизно $1^\circ \dots 3^\circ$ навіть при надзвичайно великому у порівнянь з довжиною хвилі "vacuum box". У протилежність, похибка результатів, отриманих з використанням викладеного підходу, спадає монотонно і обмежується, в принципі, лише машинною точністю. Обчислення, які виконані в програмі, написаній на мові C++, на базі наведеного у даному розділі підходу, займають в десятки разів менше часу. Збільшення кількості стрічок призводить до суттєвого зростання часу обчислень в HFSS. Тому на рис.5.44, рис.5.45 результати наведено лише для $N = 5$ стрічок.

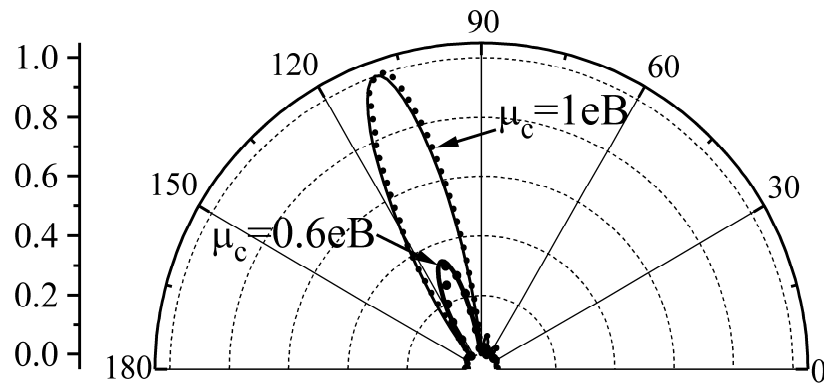


Рис.5.45 Нормовані діаграми спрямованості для двох значень хімічного потенціалу $\mu_c = 0.6 \text{ eV}$, $\mu_c = 1 \text{ eV}$ при $f = 2.5 \text{ ТГц}$, $N = 5$, $l = 70 \text{ мкм}$, $d = 10 \text{ мкм}$, $h = h_2 = 20 \text{ мкм}$, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300 \text{ К}$, $\tau = 1 \text{ пс}$. Результати, отримані в HFSS наведені у якості точок

На рис.5.46 наведено залежності Rad , A , R , T від частоти для $N = 20$ стрічок. Виникнення максимумів в залежностях можна пояснити за рахунок збудження резонансів. Плазмонні резонанси позначені як P_1 . Поблизу плазмонних резонансів спостерігається зростання випромінювання і поглинання. Саме зростання поглинання поблизу плазмонних резонансів є значним недоліком графенових антен витікаючої хвилі. Резонанси власних хвиль періодичної частини структури позначені як N_{ij} . Поблизу них спостерігаються мінімуми випромінювання і ярко виражені максимуми коефіцієнта відбиття. Константу поширення χ власних хвиль періодичної частини структури можна знайти з рівняння (5.19). На рис.5.47 наведено залежність χ від частоти у одномодовому наближенні. Екстремуми залежностей (дійсної і уявної частини) відповідають резонансам N_{ij} .

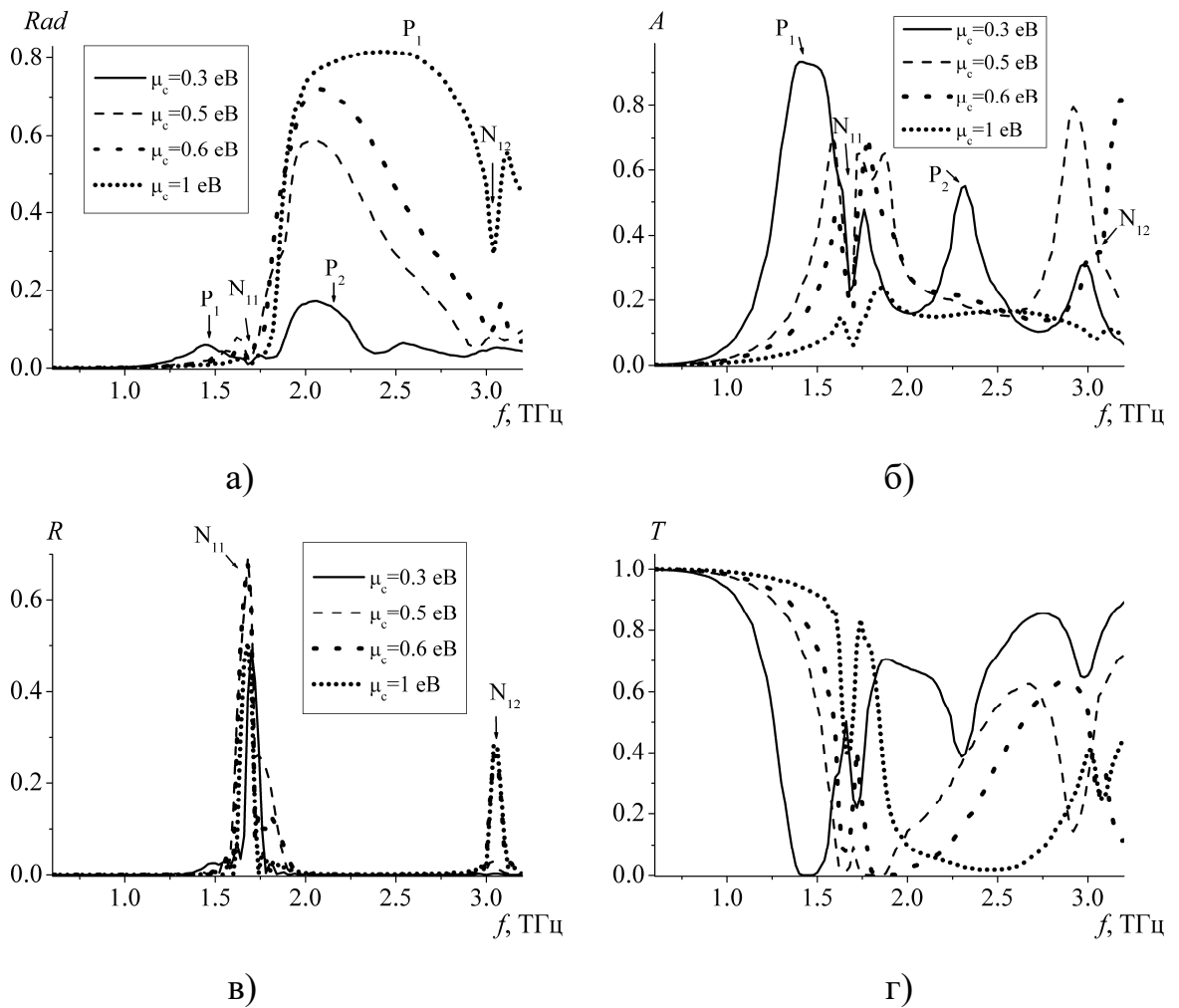


Рис.5.46 Залежності а) Rad , б) A , в) R , г) T від частоти при $\mu_c = 0.3$ eВ (суцільні криві), $\mu_c = 0.5$ eВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.6$ eВ (пунктирні криві), $\mu_c = 1$ eВ (короткі пунктирні криві), $l = 70$ мкм, $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $N = 20$, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$, основна мода $p = 1$

На рис.5.48 наведено нормовані діаграми спрямованості (за потужністю) для трьох резонансних частот: частоти першого плазмонного резонансу для $\mu_c = 0.6$ eВ, для $\mu_c = 1$ eВ і частоти резонансу N_{12} , а також при різних значеннях хімічного потенціалу графену.

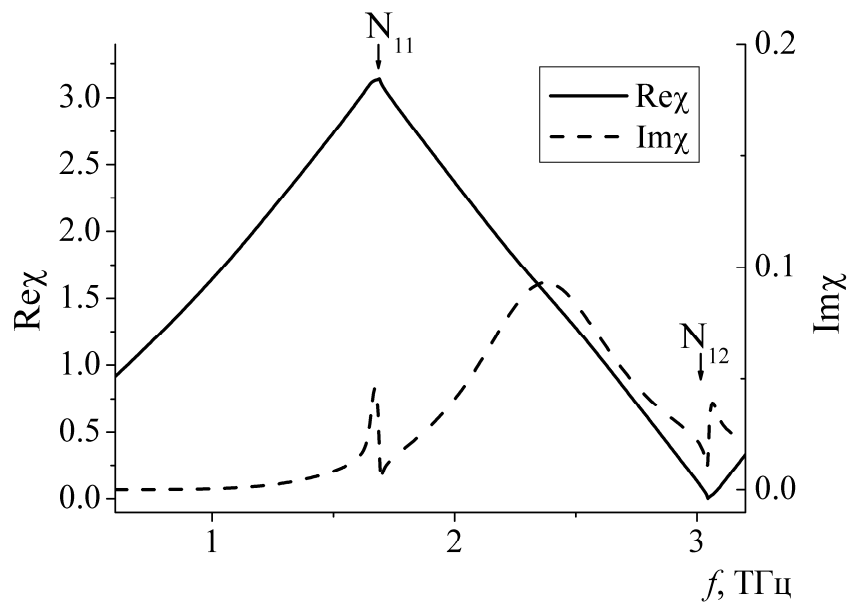


Рис.5.47 Залежності постійної поширення χ від частоти при $\mu_c = 1$ еВ,
 $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $\mu_c = 1$ еВ, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс

На рис.5.49 наведено нормовані діаграми спрямованості для фіксованого значення хімічного потенціалу та для різних значень частоти. Всі діаграми на рис.5.48, рис.5.49 нормовані на глобальний максимум, який досягається при $f = 2.5$ ТГц, $\mu_c = 1$ еВ.

Зміна значення хімічного потенціалу дозволяє контролювати рівень головного пелюстка. У розглянутому діапазоні частот головний пелюсток досягає свого максимуму для значення хімічного потенціалу $\mu_c = 1$ еВ. При $\mu_c = 0.1$ еВ максимум головного пелюстка складає лише 2% від глобального максимуму. Діаграми спрямованості демонструють частотне сканування. При параметрах структури вибраних поблизу резонансу N_{12} кут нахилу головного пелюстка дорівнює 90° . На частоті резонансу N_{12} розподіл струмів на стрічках має симфазний характер. Проте через велике відбиття (див. рис.5.46 в) максимум головного пелюстка досягає значення лише в 60% від глобального.

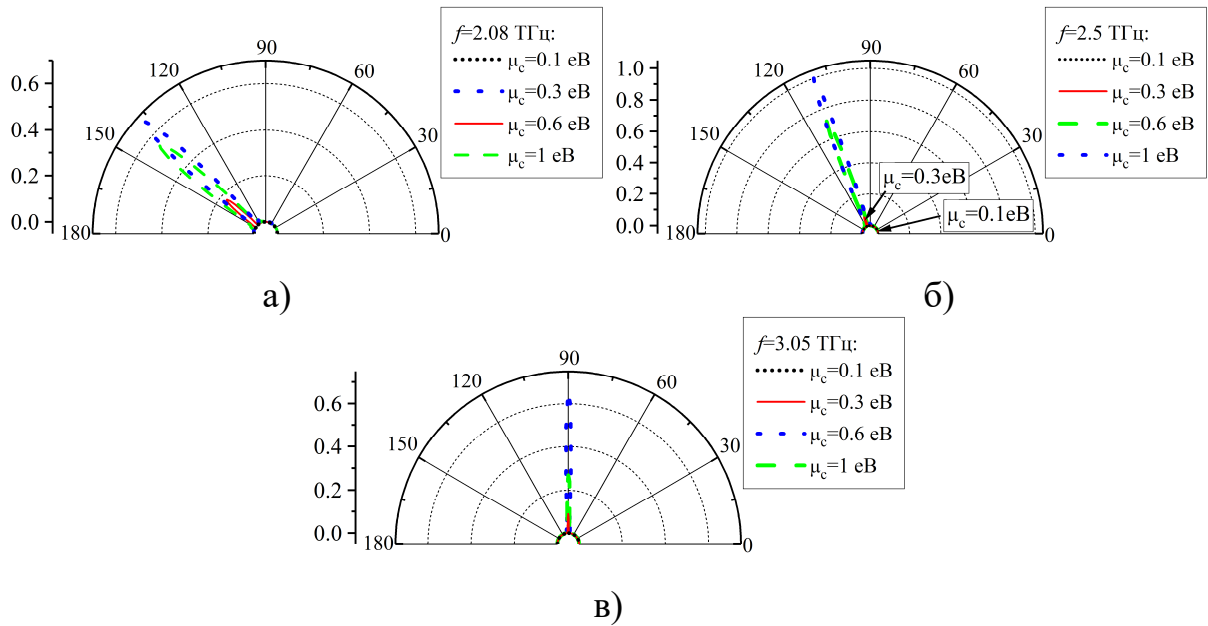


Рис.5.48 Нормовані діаграми спрямованості при $\mu_c = 0.1$ eВ (короткі пунктирні криві), $\mu_c = 0.3$ eВ (суцільні криві), $\mu_c = 0.6$ eВ (пунктирні криві), $\mu_c = 1$ eВ (штрихові криві), $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 20$, $p = 1$. а) $f = 2.08$ ТГц, б) $f = 2.5$ ТГц, в) $f = 3.05$ ТГц поблизу резонансу N_{12}

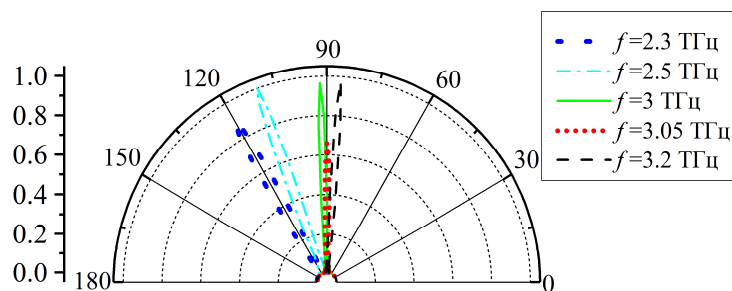


Рис.5.49 Нормовані діаграми спрямованості при $f = 2.3$ ТГц (пунктирна крива), $f = 2.25$ ТГц (штрих-пунктирна крива), $f = 3$ ТГц (суцільна крива), $f = 3.05$ ТГц (короткий пунктир), $f = 3.2$ ТГц (штрихова крива), $\mu_c = 1$ eВ, $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 20$, $p = 1$

5.4.3. Оптимізація параметрів решітки

Як і в пункті 5.3.6, з використанням паралельного генетичного алгоритму проведемо оптимізацію параметрів структури. Будемо вимагати, щоб діаграма спрямованості мала найнижчий рівень бічних пелюстків і найвищу ефективність випромінювання. Для розглянутої періодичної структури перша вимога може бути виконана в смузі аж до частоти збудження вищих типів хвиль діелектричного хвилеводу. На частотах, вищих за неї, з'являються додаткові бічні пелюстки. Таким чином, бажано, щоб могла поширюватися лише одна власна хвиля діелектричного хвилеводу. Взаємне перетворення мод вищого порядку і головної моди може призвести до збільшення відбиття і появи додаткових бічних пелюсток. Тому параметри хвилеводу та ширина смуги частот обирається таким чином, щоб лише одна головна власна хвиля діелектричного хвилеводу могла поширюватися на частотах першого плазмонного резонансу для $\mu_c = 0.1...1\text{eV}$ і до частоти резонансу N_{12} . Зауважимо, що через суттєве зростання відбиття на частотах біля резонансу N_{12} , досягти оптимальних значень, а саме, максимуму ефективності випромінювання, не вдається. Значення хімічного потенціалу $\mu_c = 0.1...1\text{eV}$ на цей день є реально досяжними.

Дослідження показали, що діаграми спрямованості з однаковим значенням хімічного потенціалу всіх стрічок демонструють відносно високий рівень бічних пелюстків. Наприклад, на рис.5.48 для $\mu_c = 1\text{eV}$ і $f = 2.5\text{ТГц}$ поблизу першого плазмонного резонансу, рівень бічних пелюстків становить приблизно -11.5дБ .

При виконанні оптимізації за генетичним алгоритмом оптимізованими параметрами були значення хімічного потенціалу кожної стрічки при постійних значеннях інших матеріальних і геометричних параметрів. Результати оптимізації наведено на рис.5.50, рис.5.51, рис.5.52 для

$f = 2.3$ ТГц, $f = 2.5$ ТГц, $f = 2.9$ ТГц. Значення хімічного потенціалу стрічок, отримані в результаті оптимізації, наведено в табл.5.2.

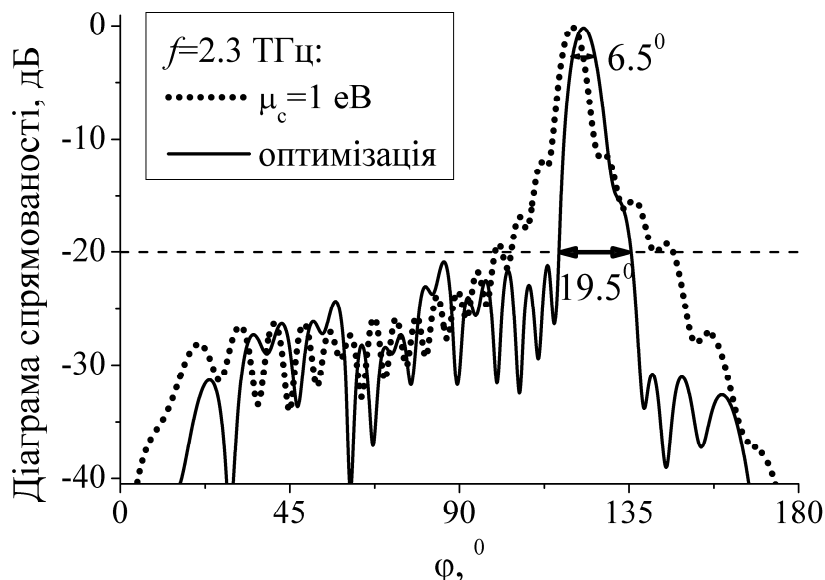


Рис.5.50 Нормовані діаграми спрямованості при $f = 2.3$ ТГц, $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 20$, $p = 1$. Результати оптимізації генетичним алгоритмом (суцільна крива) $\mu_c = 1$ еВ на всіх стрічках (пунктирна крива)

Вимагалось, щоб рівень бічних пелюстків був нижчим за -20 дБ, максимум головного пелюстка був не менше, ніж для випадку $\mu_c = 1$ еВ на всіх стрічках, кутова ширина головного пелюстка – 20° . Значення хімічного потенціалу вибиралися з інтервалу $\mu_c \in (0.1 \text{ еВ}, 1.1 \text{ еВ})$. Кількість ітерацій становить 40 для $f = 2.3$ ТГц, 100 для $f = 2.5$ ТГц, 70 для $f = 2.9$ ТГц. Для порівняння також наведено діаграми спрямованості для значення $\mu_c = 1$ еВ для всіх стрічок. Як видно, процес оптимізації досяг своєї мети. Для $f = 2.3$ ТГц ширина головного пелюстка за рівнем -3 дБ становить приблизно 6.5° , а за рівнем -20 дБ – приблизно 19.5° . Для $f = 2.5$ ТГц

ширина головного пелюстка за рівнем -3 дБ становить приблизно 6° , а за рівнем -20 дБ – приблизно 17° . Для $f = 2.9$ ТГц ширина головного пелюстка за рівнем -3 дБ становить приблизно 4° , а за рівнем -20 дБ – приблизно 13° .

Таблиця 5.2 Значення хімічного потенціалу графенових стрічок

Номер стрічки	Хімічний потенціал для рис.5.50 (eV)	Хімічний потенціал для рис.5.51 (eV)	Хімічний потенціал для рис.5.52 (eV)
1	0.48694	0.44766	0.73616
2	0.44314	0.63772	0.66567
3	0.43915	0.47595	0.63011
4	0.53951	0.63955	0.88663
5	0.64582	0.78066	0.94818
6	0.67502	0.79989	1.09568
7	0.69399	0.90445	1.09568
8	0.67155	0.93154	1.09568
9	0.82363	0.94635	1.08361
10	0.74457	0.91621	1.09568
11	0.75849	0.96338	1.09568
12	0.85419	0.90760	1.09568
13	0.77910	0.95796	1.06838
14	0.85419	0.90129	1.08815
15	0.83621	0.88982	1.04808
16	1.01678	0.86353	1.09993
17	0.85224	0.74939	0.73467
18	1.04371	0.83579	0.90967
19	1.08308	0.79693	0.95244
20	1.03291	0.93118	0.87460

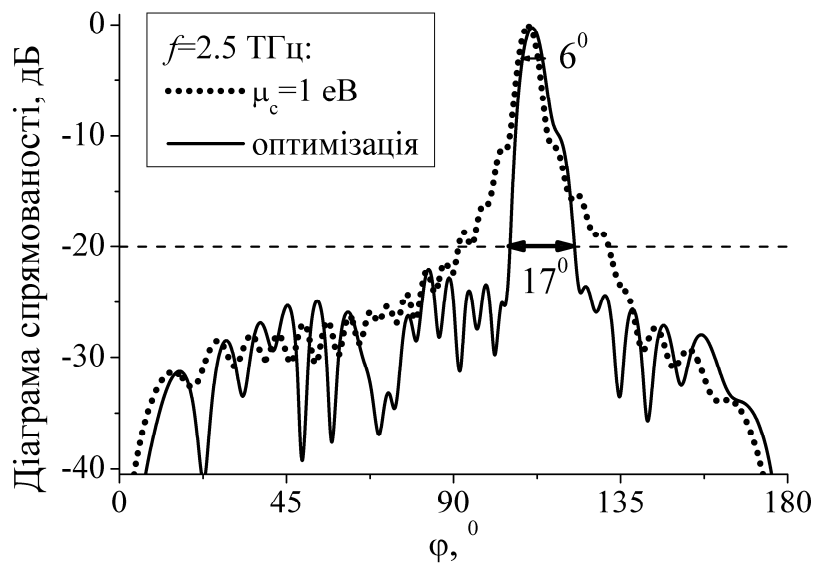


Рис.5.51 Нормовані діаграми спрямованості при $f = 2.5$ ТГц,
 $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 20$,
 $p = 1$. Результати оптимізації генетичним алгоритмом (суцільна крива)
 $\mu_c = 1$ еВ на всіх стрічках (пунктирна крива)

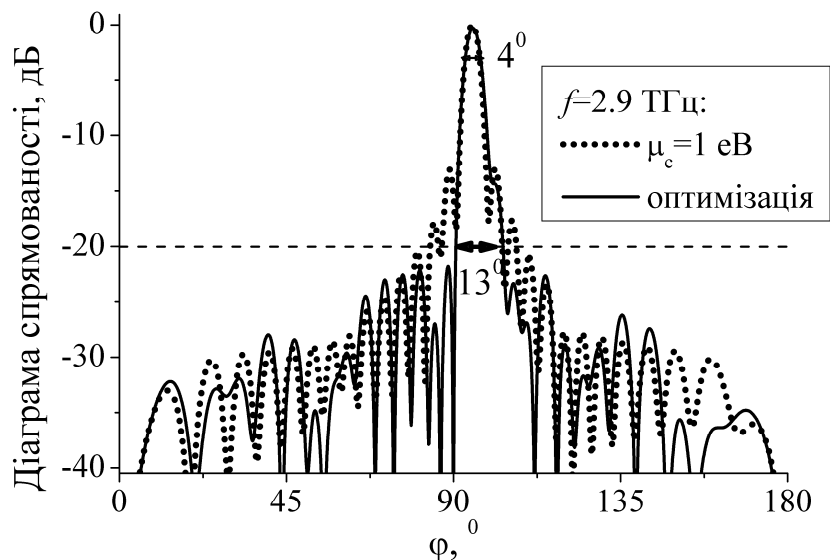


Рис.5.52 Нормовані діаграми спрямованості при $f = 2.9$ ТГц,
 $h_1 = h_2 = 20$ мкм, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $\varepsilon = 2.25$, $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $N = 20$,
 $p = 1$. Результати оптимізації генетичним алгоритмом (суцільна крива)
 $\mu_c = 1$ еВ на всіх стрічках (пунктирна крива)

Висновки до розділу 5

На базі методу сингулярних інтегральних рівнянь побудовано строгий розв'язок задач про дифракцію хвиль на нескінченній періодичній та скінченній системі імпедансних стрічок нульової товщини, розміщених у діелектричній пластині. Також розглянуто випадок, коли діелектрична пластина розташована на ідеально провідній площині. Падаюче поле – це поле або плоскої хвилі, або власної хвилі діелектричного хвилеводу, утвореного діелектричною пластиною. Також з використанням операторного методу отримано наближений розв'язок задачі у припущенні, що взаємодія стрічок по вільному простору відсутня. Числові результати наведено для випадку графенових стрічок.

Проведено дослідження числової збіжності при збільшенні числа вузлів. Похибка спадає монотонно, починаючи з певного значення числа вузлів. Проведено порівняння результатів з результатами, отриманими в HFSS, а також з результатами, отриманими операторним методом і методом аналітичної регуляризації. Співпадіння характеру поведінки залежностей, виконання фізичних принципів, закону збереження енергії дозволяє зробити висновок про вірність отриманих розв'язків.

Досліджувані структури підтримують цілу низку резонансів. Частотні залежності мають ярко виражений резонансний характер. Резонанси на поверхневих плазмон поляритонних хвилях здебільшого залежать від параметрів поодинокі графенової стрічки, таких як ширина або провідність. Їх положенням вздовж частотної осі, а значить і характеристиками розсіяних полів, можна керувати динамічно, за рахунок прикладення електростатичного поля, змінюючи хімічний потенціал графену. Поблизу плазмонних резонансів спостерігаються максимуми перерізу розсіювання та поглинання, максимуми випромінювання енергії з діелектричного хвилеводу,

головний пелюсток діаграми спрямованості випроміненого поля досягає свого максимального значення. Резонанси на решіткових модах і резонанси власних хвиль періодичної частини структури здебільшого залежать від параметрів діелектричної пластини та періоду. Поблизу цих резонансів спостерігаються ярко виражені екстремуми характеристик розсіювання у надвузькій смузі частот, суттєве зростання енергії, яку переносять власні хвилі діелектричного хвилеводу, суттєве зростання (при деяких параметрах майже до 1) коефіцієнта поглинання нескінченної періодичної графенової решітки. Головний пелюсток діаграм спрямованості у разі падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу поблизу цих резонансів є ортогональним до площини хвилеводу. Також присутні слабо виражені власні резонанси діелектричної пластини, положення яких вздовж частотної осі залежить здебільшого від параметрів пластини.

У разі нескінченної періодичної графенової решітки введення ідеально провідної площини може призводити до значного зростання (майже до 1) коефіцієнта поглинання за рахунок багатократного перевідбиття хвилі між площиною та границею вакуум-діелектрик. Відмітимо, що у випадку діелектричної пластини без ідеально провідної площини також можливе збудження власних резонансів пластини. Проте вони є набагато менш помітними і їх внесок у коефіцієнт поглинання не такий значний.

Діаграми спрямованості випроміненого поля у випадку падіння власної хвилі діелектричного хвилеводу демонструють частотно скануючий характер. Максимумом головного пелюстка вдається керувати за рахунок зміни хімічного потенціалу графенових стрічок.

При порівнянні результатів для скінченної й нескінченної періодичної решіток встановлено, що вже для декількох графенових стрічок спостерігається співпадіння частотних залежностей основних характеристик розсіювання і поглинання з графічною точністю окрім частот резонансів на решіткових модах. Тут на характеристики розсіяних полів суттєвий вплив

має кількість стрічок. При збільшенні кількості стрічок характеристики скінченної структури наближаються до характеристик нескінченної.

Проведено порівняння діаграм спрямованості для скінченної і напівнескінченної періодичної системи стрічок. При збільшенні числа стрічок збільшується число бічних пелюстків, амплітуда яких, разом з амплітудою головного пелюстка, наближається до граничного значення, яке відповідає випадку напівнескінченної структури.

Проведено процедуру оптимізації параметрів на базі паралельного генетичного алгоритму. Отримано діаграми спрямованості з рівнем бічних пелюстків менше за -20 дБ і шириною головного пелюстка за рівнем -20 дБ від 13° до 25° в залежності від частоти.

Розділ 6. Багатошарові решітки з імпедансних стрічок нульової товщини

Багатошарові решітки з імпедансних стрічок знаходять своє застосування при створенні поглиначів, частотно-селективних поверхонь, антенних систем та інше.

У [190], [205] багатошарові нескінченні періодичні решітки з імпедансних паралельно розташованих стрічок в шарі діелектрика досліджувалися за допомогою методу моментів у поєднанні з аналітичною регуляризацією. Метод моментів застосовано у [206] для розв'язання інтегральних рівнянь задачі про дифракцію на багатошаровій системі імпедансних стрічок, кожен шар якої повернуто на 90° відносно попереднього.

У випадку графенових стрічок, у практичних застосуваннях доволі часто вимагається великі зразки графену, які з практичної точки зору важко виготовити. З цієї причини можна використовувати багатошарову систему [207]-[210]. Багатошарові графенові структури більш привабливі для використання в якості з'єднувачів, оскільки одношарові структури мають високий опір [211]. В роботах [212]-[214] багатошарові графенові решітки розглядаються у якості фотонних кристалів ТГц діапазону.

У роботі [215] представлено поляризаційний перетворювач на основі двошарової системи графену, вбудованого в періодично розташовані діелектричні штирі з підкладкою. Розрахунки виконуються в COMSOL Multiphysics.

У [92] запропоновано поглинач на основі графенового шару, закріпленого на діелектричній підкладці з металевією площиною. Аналітичні вирази отримано з використанням методу еквівалентних схем та виразу провідності у формі Друде. Проведено порівняння з результатами, отриманими методом Фур'є. У [211] розглянуто багатошарову структуру графенових стрічок на діелектричній підкладці. Використовується метод

еквівалентних схем. У [216] методом об'ємних інтегральних рівнянь [217] досліджується графенова решітка на двошаровій підкладинці, а у [218] – багатошарова графенова решітка.

У цьому розділі розглянемо багатошарові решітки з імпедансних стрічок нульової товщини. При дослідженні багатошарових решіток, для зменшення розмірності результуючою матриці, має сенс розв'язок задачі отримати в декілька етапів. В результаті розв'язку задачі про дифракцію на одному шарі багатошарової системи отримано оператори розсіювання, які використано при записі операторних рівнянь відносно амплітуд Фур'є розсіяного поля всією багатошаровою структурою. При запису операторних рівнянь у разі неперервного просторового спектру розсіяного поля застосуємо два підходи. Перший дозволяє записати операторні рівняння відносно всієї структури в цілому. Другий засновано на рекурентній процедурі. Під час її застосування оператори розсіювання структури, яка складається з $m + 1$ шару, визначаються через оператори розсіювання структури, яка складається з m шарів.

6.1. Скінченна та напівнескінченна періодична багатошарова система нескінченних періодичних решіток, які розташовані в діелектричній пластині

Метод, який запропоновано у [15]-[18], [176] у даному параграфі розвинено на багатошарові системи імпедансних стрічок нульової товщини [129], [130].

Розглянемо задачу про дифракцію плоскої H -поляризованої електромагнітної хвилі на багатошаровій періодичній системі. Період розташування шарів дорівнює L . Кількість шарів дорівнює M . Також буде розглянуто випадок напівнескінченної періодичної системи шарів. Кожен шар складається з нескінченної періодичної решітки імпедансних стрічок нульової товщини, занурених у діелектричну пластину з відносною

діелектричною проникністю ε . Період решітки, яка утворює поодинокий шар, дорівнює l , ширина стрічок – $2d$, ширина діелектричної пластини – $2h$. Решітка розміщена в центрі пластини паралельно до площини xOy . Структура є нескінченною і однорідною вздовж осі Ox . Її геометрію наведено на рис.6.1

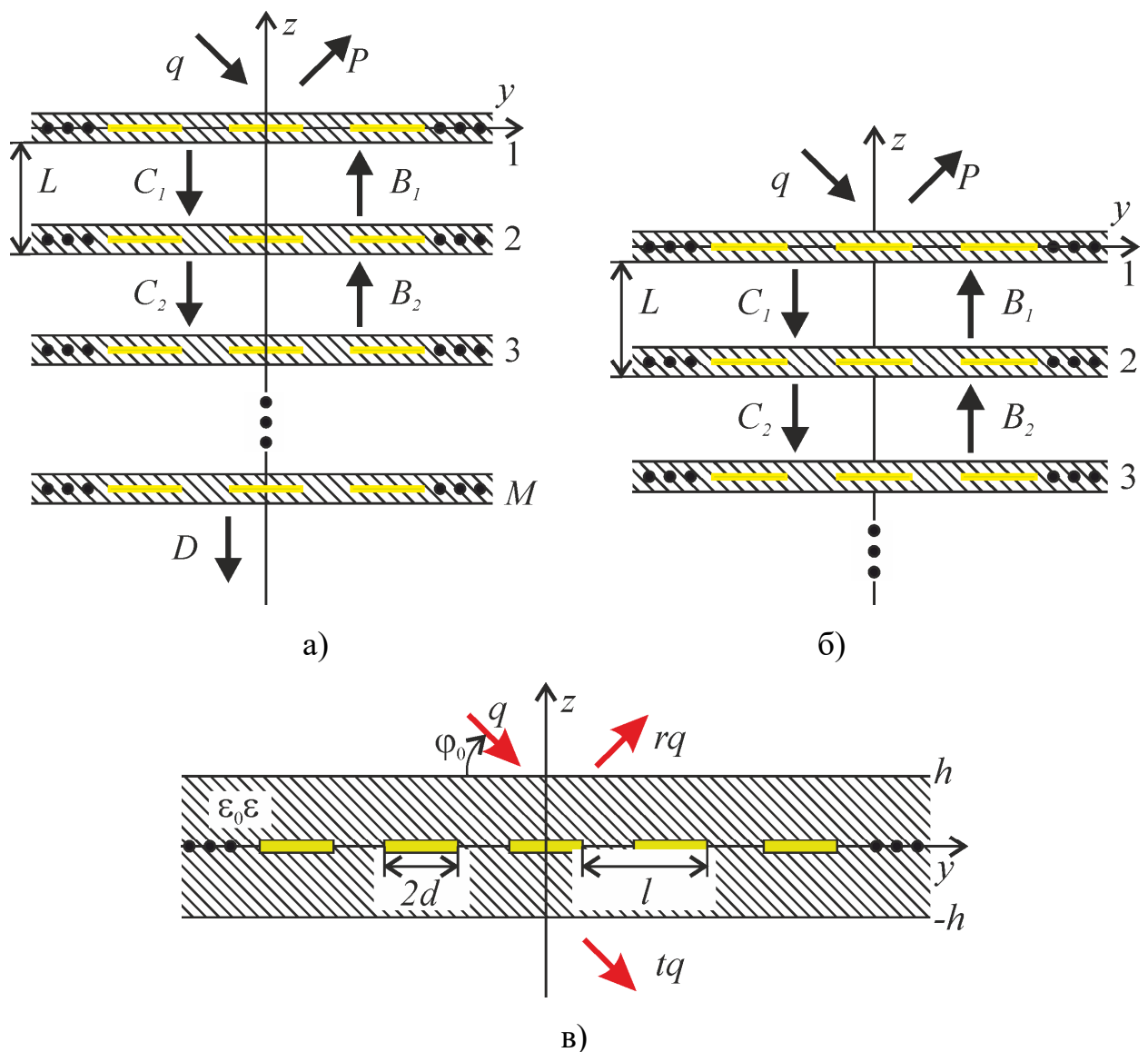


Рис.6.1 Геометрія досліджуваного об'єкта і напрямки поширення хвиль. а) Скінченна система шарів, б) напівнескінченна періодична система, в) поодинокий шар

6.1.1. Операторні рівняння

Позначимо через q – вектор амплітуд Фур’є падаючого поля. У параграфі 5.1 було отримано розв’язок задачі про дифракцію плоскої хвилі на періодичній імпедансній решітці, зануреній у діелектричну площину, що складає поодинокий шар досліджуваної у цьому параграфі структури. Матричні оператори проходження і відбиття поодинокого шару позначимо через t і r . Вони пов’язані як

$$t = I - r. \quad (6.1)$$

У випадку, якщо на поодинокий шар падає хвиля з вектором амплітуд Фур’є q , то амплітуди Фур’є поля, яке пройшло d і відбитого поля a можна надати як

$$a = rq,$$

$$d = tq.$$

Позначимо через P , D , B_m , C_m амплітуди Фур’є відбитого поля, поля, яке пройшло через багат шарову систему, яка складається з M шарів, розсіяного поля між m -м та $(m+1)$ -м шарами. Вони пов’язані наступними операторними рівняннями [15]-[18], [176]

$$P = rq - reB_1 + eB_1, \quad (6.2)$$

$$B_1 = q - rq + reC_1, \quad (6.3)$$

$$C_1 = reB_1, \quad (6.4)$$

$$B_m = eB_{m+1} - reB_{m+1} + reC_m, \quad (6.5)$$

$$C_m = reB_m - reC_{m-1} + eC_{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots, M - 2, \quad (6.6)$$

$$B_{M-1} = reC_{M-1}, \quad (6.7)$$

$$C_{M-1} = reB_{M-1} - reC_{M-2} + eC_{M-2}, \quad (6.8)$$

$$D = eC_{M-1} - reC_{M-1}, \quad (6.9)$$

де e – діагональна матриця з елементами $e^{ik\gamma_n L}$. Напрямок поширення відповідної плоскої хвилі зображено на рис.6.1 а). У рівняннях враховано (6.1). Рівняння (6.2)-(6.9) є матричними рівняннями другого роду. Враховуючи діагональну матрицю e з елементами $e^{ik\gamma_n L}$, що експоненційно спадають, при $n \rightarrow \infty$, при числовому розв'язанні нескінченні матриці в (6.2)-(6.9) можна замінити скінченними. Самі матричні системи рівнянь можна розв'язувати методом редукції.

Напівнескінченна періодична система шарів є нескінченною в одному напрямку. Її можна отримати зі скінченної структури, вважаючи $M \rightarrow \infty$, та можна розглядати як модель скінченної решітки з надзвичайно великою кількістю шарів. Для створення математичної моделі напівнескінченної системи було використано результати [15]. Позначимо через R невідомий оператор відбиття (матрицю) напівнескінченної періодичної системи шарів. Його можна знайти з нелінійного операторного рівняння другого роду

$$R = r + t(I - eRer)^{-1} eRet. \quad (6.10)$$

Тоді вектор Фур'є амплітуд відбитого поля P можна записати як

$$P = Rq.$$

6.1.2. Числові результати

Нехай плоска хвиля одиничної амплітуди нормально падає на багатошарову структуру. У якості стрічок будемо розглядати графенові стрічки. У матрицях операторів відбиття та проходження поодинокого шару враховується 4 плоских хвилі, що згасають. У досліджуваному частотному діапазоні можуть поширюватися тільки основна плоска хвиля та ± 1 вищі гармоніки Флоке. Отже, розмір матриць операторів проходження і відбиття – 7×7 . Для розв'язання нелінійного операторного рівняння (6.10) використовувався метод ітерацій з параметром релаксації [40].

Позначимо через R , T і A коефіцієнти відбиття, проходження та поглинання. Для підтвердження вірності отриманих результатів проведено порівняння їх з результатами, отриманими за допомогою методу аналітичної регуляризації [190] для випадку двошарової графенової решітки, розташованої в одній діелектричній пластині, тобто для $2h = L$, $M = 2$. Залежність коефіцієнта відбиття від частоти наведено на рис.6.2. Результати співпадають з графічною точністю.

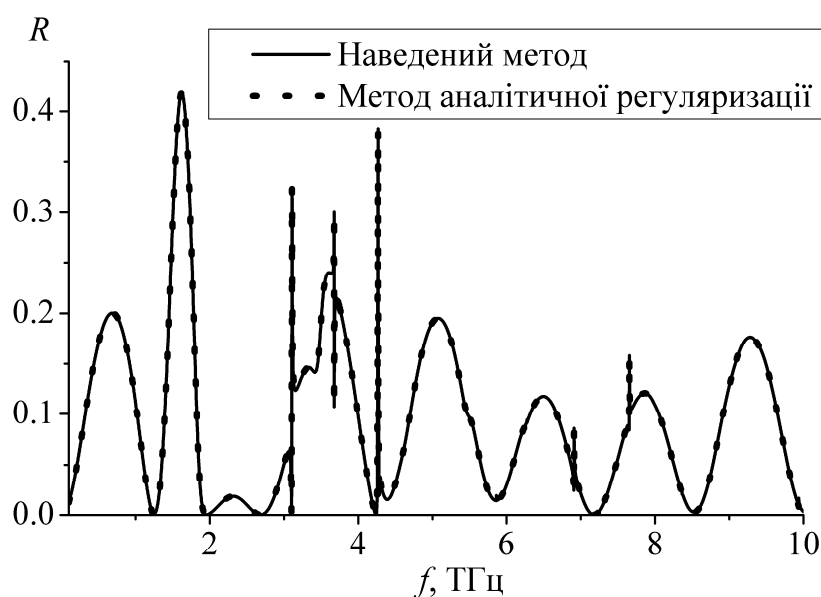


Рис.6.2 Залежності коефіцієнта відбиття від частоти при $M = 2$, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $L = 35$ мкм, $2h = L$, $\mu_c = 0.39$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$.

Запропонований метод (суцільна крива), метод аналітичної регуляризації (пунктирна крива)

На рис.6.3 зображено залежності коефіцієнтів відбиття, проходження та поглинання (за потужністю) від частоти для різної кількості шарів та фіксованого значення хімічного потенціалу $\mu_c = 0.39$ еВ. Зі збільшенням числа шарів залежності для скінченної структури наближаються до залежностей для напівнескінченної структури. У смугах запирання спостерігаються осциляції коефіцієнтів відбиття та проходження у

скінченних структурах. На рис.6.4 наведено залежності коефіцієнтів відбиття та поглинання від частоти для різних значень хімічного потенціалу для напівнескінченної системи шарів. Поведінку кривих на рис.6.3, рис.6.4 можна пояснити на мові резонансів, що можуть збуджуватися у досліджуваній структурі.

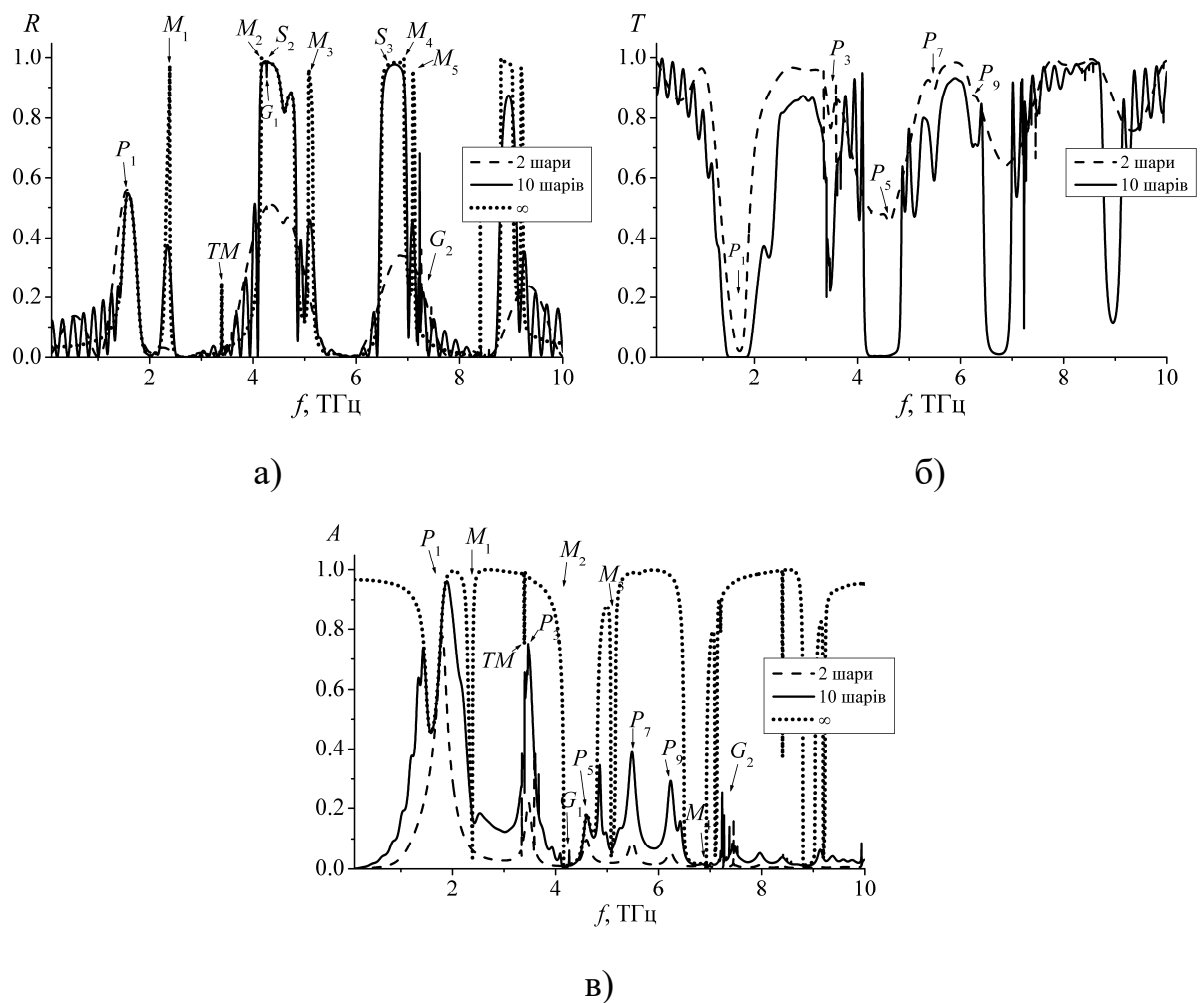


Рис.6.3 Залежності коефіцієнтів а) відбиття, б) проходження, в) поглинання від частоти при $M = 2$ (штрихові криві), $M = 10$ (суцільні криві), напівнескінченна система (пунктирні криві), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $L = 50$ мкм, $h = l/4 = 17.5$ мкм, $\mu_c = 0.39$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$

Плазмонні резонанси, які виникають на графенових стрічках, позначені як P_i . Як видно з рис.6.3, рис.6.4, зміна хімічного потенціалу приводить до

зсуву плазмонних резонансів вздовж частотної осі. Збільшення кількості шарів приводить до зростання поглинання. Коефіцієнт поглинання напівнескінченної системи майже дорівнює 1, $A \rightarrow 1$, біля плазмонних резонансів.

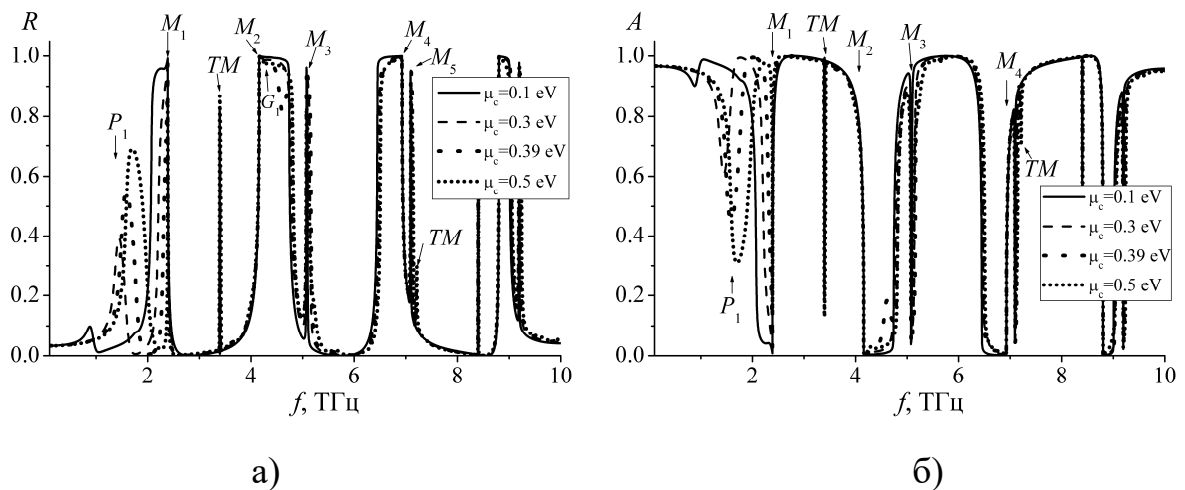


Рис.6.4 Залежності коефіцієнтів а) відбиття та б) поглинання від частоти напівнескінченної періодичної системи шарів при $\mu_c = 0.1$ еВ (суцільні криві), $\mu_c = 0.3$ еВ (штрихові криві), $\mu_c = 0.39$ еВ (пунктирні криві), $\mu_c = 0.5$ еВ (короткі пунктирні криві), $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $L = 50$ мкм, $h = l/4 = 17.5$ мкм, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $\varphi_0 = 90^\circ$

У розглянутій структурі присутні два типи періодичності. Перша періодичність пов'язана з періодом решітки, яка складає поодинокий шар. Друга періодичність пов'язана з багатошаровою системою.

У періодичних стрічкових решітках, розміщених у діелектричній пластині, можуть виникати резонанси на решіткових модах (позначені як G_i). Діелектрична пластина у даному випадку діє як хвилевід. Природа виникнення цих резонансів обумовлена взаємодією власних хвиль плоского діелектричного хвилеводу з періодичною структурою. Плоска хвиля, розсіяна стрічками, збуджує власні хвилі цього хвилеводу, що поширюються

вздовж осі Oy . Власні хвилі взаємодіють з періодичною системою стрічок, дві суміжні стрічки діють як резонатор. Біля цих резонансів спостерігаються гострі екстремуми у частотних залежностях коефіцієнтів відбиття та поглинання. Розташування резонансів на решіткових модах залежить від параметрів діелектричної пластини та періоду решітки, майже не залежить від параметрів окремої графенової стрічки.

Добре відомо [33], що при розсіюванні хвиль на скінченних багат шарових структурах виникають смуги пропускання та запирання. Вони пов'язані зі збудженням та поширенням власних хвиль у подібному періодичному середовищі, але з нескінченною системою шарів. Резонанси власних хвиль періодичної частини багат шарової структури позначені як M_i . Постійну поширення власних хвиль нескінченного багат шарового середовища можна визначити з наступного рівняння [176], аналогічного до рівняння (5.52):

$$\det(I - \exp(-i\chi L)te - e\text{er}(I - \exp(i\chi L)et)^{-1}) = 0. \quad (6.11)$$

Рівняння (6.11) має декілька розв'язків. За умови одномодової апроксимації, тобто у припущенні, що розмірність матриць дорівнює 1, (6.11) має два незалежні набори розв'язків. Проте, враховуючи, що поле падає з напівпростору $z > 0$, тільки ті розв'язки мають сенс, які відповідають власним хвилям, які поширюються або згасають у від'ємному напрямку осі Oz .

В ізольованій діелектричній пластині можуть виникати власні резонанси (позначені як S_i). Їхні частоти залежать від параметрів діелектричної пластини та, у нашому випадку, трохи зміщені через наявність графенової решітки. Добротність цих резонансів низька, вони стають непомітними на рис.6.3, рис.6.4 через більш добротні плазмонні резонанси P_i та резонанси багат шарової решітки M_i .

У розглянутій структурі може збуджуватися ще одне сімейство резонансів, які позначені як TM . Вони також належать до G -типу, проте ці резонанси на решіткових модах іншого типу.

На рис.6.5 зображено залежності коефіцієнта відбиття від періоду L багат шарової структури. Параметри структури вибрано таким чином, щоб лише основна плоска хвиля могла поширюватися між шарами. Залежності є майже періодичними. Для скінченних структур можна спостерігати осциляції. Кількість локальних максимумів на кожному періоді дорівнює $M-1$. Спостерігається поява смуг пропускання та запирання, що є звичайним для багат шарових структур. Для ідеально провідних стрічок смуга запирання відповідає значенням $\text{Im } \chi \neq 0$. Оскільки графенові стрічки поглинають електромагнітне поле, то $\text{Im } \chi \neq 0$ на усіх частотах. Смуги запирання на рис.6.5 відповідають максимумам $\text{Im } \chi$. Залежність $\text{Im } \chi$ від періоду наведено на рис.6.6.

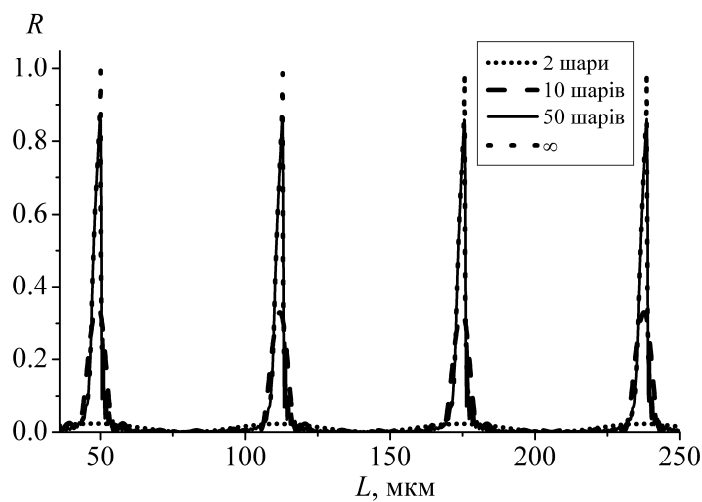


Рис.6.5 Залежності коефіцієнта відбиття від періоду багат шарової структури L для $M = 2$ (короткий пунктир), $M = 10$ (штрихова крива), $M = 50$ (суцільна крива), напівнескінченна система (пунктирна крива), $\mu_c = 0.39$ eV, $f = 2.3875$ ТГц, $d = 10$ мкм, $l = 70$ мкм, $h = l/4 = 17.5$ мкм,

$$\tau = 1 \text{ пс}, T = 300 \text{ К}, \varphi_0 = 90^\circ$$

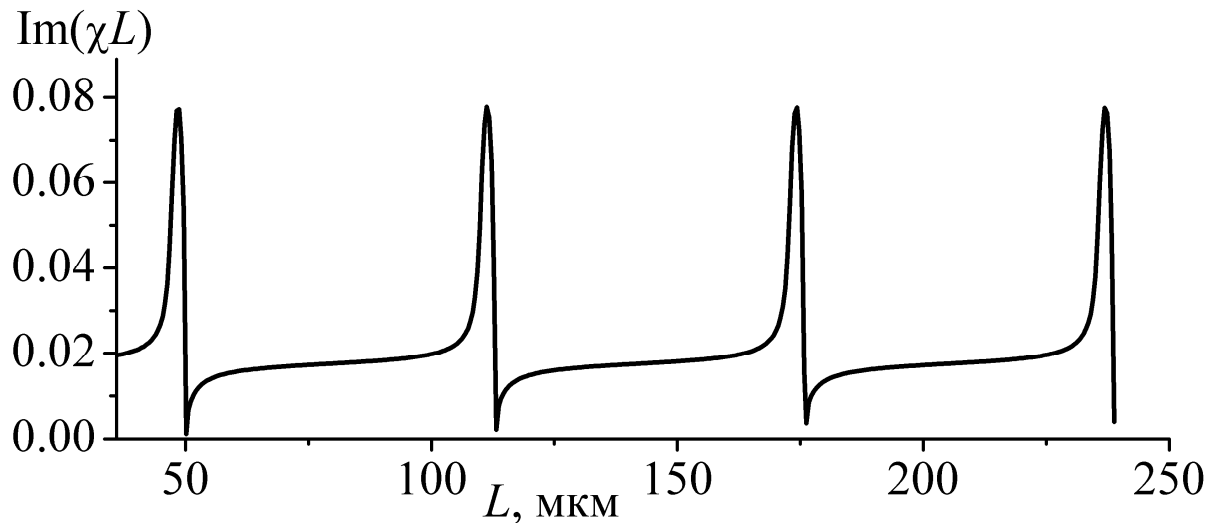


Рис.6.6 Залежність $\text{Im}(\chi L)$ від періоду багат шарової структури L при $\mu_c = 0.39 \text{ eV}$, $f = 2.3875 \text{ ТГц}$, $d = 10 \text{ мкм}$, $l = 70 \text{ мкм}$, $h = l/4 = 17.5 \text{ мкм}$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $T = 300 \text{ К}$, $\varphi_0 = 90^\circ$

6.2. Скінченна багат шарова система скінченних решіток у вакуумі

Розглянемо дифракцію плоскої H -поляризованої хвилі на багат шаровій скінченноелементній решітці, яка складається з імпедансних стрічок нульової товщини. Процес розв'язання задачі продемонструємо на прикладі використання двох підходів. Перший підхід цілком засновано на методі сингулярних інтегральних рівнянь. Тут буде отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами для всієї багат шарової решітки в цілому. Зі збільшенням числа розсіювачів зростає і розмірність результуючої системи лінійних рівнянь алгебри. Причому, як відомо, при збільшенні числа рівнянь в n разів час розв'язання системи рівнянь методом Гауса зростає в n^3 разів. Тому має сенс застосовувати підхід, при якому складна структура розбивається на більш прості. Складовий елемент структури аналізується одним з методів, а об'єднуються елементи за допомогою іншого методу. При застосуванні другого підходу один шар багат шарової решітки аналізується з застосуванням методу

сингулярних інтегральних рівнянь, використовуючи результати параграфу 1.3, а властивості всієї багатошарової структури визначаються з системи операторних рівнянь [15]-[18], [176], [219]-[223]. Причому, операторні рівняння мають такий самий вигляд, як і у випадку багатошарової системи нескінченних періодичних решіток, проте вони вже є еквівалентними інтегральним, а не матричним рівнянням.

Першу решітку або шар багатошарової структури розмістимо в площині $z=0$. Кожен наступний m -й шар – в площині $z=-h(m-1)$, $m=1, 2, \dots, M$, так, щоб відстань між сусідніми шарами дорівнювала h , де M – число шарів. Структура знаходиться у вакуумі. Множину y -координат стрічок поодинокого шару позначимо через $L = \bigcup_{n=1}^M L_n$, де L_n – множина y -координат n -ї стрічки. Кількість стрічок у поодинокому шарі дорівнює N . Загальна кількість стрічок – $N \cdot M$. Геометрію решітки й систему координат наведено на рис.6.7. Припустимо, що хвиля падає з області $z > 0$. Падаюче поле надамо як інтеграл Фур'є з невідомою амплітудою $q(\xi)$

$$H_x^i(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \exp(ik(\xi y - \gamma(\xi)z)) d\xi. \quad (6.12)$$

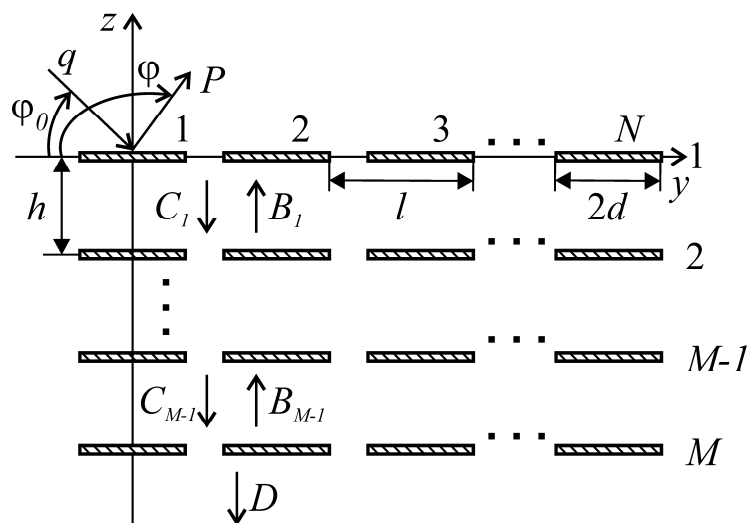


Рис.6.7 Геометрія багатошарової скінченної решітки у випадку еквідистантного розташування стрічок

У разі падіння плоскої хвилі під кутом φ_0 до негативного напрямку осі Oy у (6.12) необхідно покласти $q(\xi) = \delta(\xi - \cos \varphi_0)$. Повне поле – сума падаючого і розсіяного полів. Поле повинно задовольняти рівнянню Гельмгольца, граничним умовам на імпедансних стрічках і умовам неперервності у площині стрічок (1.49), (1.50), (1.52), умовам випромінювання і на ребрі. Розв’язок граничної задачі єдиний. Розсіяне поле будемо шукати як інтеграл Фур’є у кожній з областей:

$$H_x^r = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)z), \quad z > 0, \quad (6.13)$$

$$H_x^m(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_m(\xi) \exp(ik\xi y - ik\gamma(\xi)(z + (m-1)h)) d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} B_m(\xi) \exp(ik\xi y + ik\gamma(\xi)(z + mh)) d\xi, \quad -mh < z < -(m-1)h, \quad (6.14)$$

$$H_x^l(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi) \exp(ik\xi y - ik\gamma(\xi)(z + (M-1)h)) d\xi, \\ z < -h(M-1), \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad (6.15)$$

де $P(\xi)$, $C_m(\xi)$, $B_m(\xi)$, $D(\xi)$ – невідомі амплітуди Фур’є. Поле у вигляді (6.13), (6.14), (6.15) задовольняє умові випромінювання.

6.2.1. Сингулярні інтегральні рівняння

Після використання граничних умов і введення функції [36]

$$x_m^{\pm} = B_m \pm C_m, \\ u_m = x_m^{\pm} - (B_{m-1} \pm C_{m+1}) \exp(ik\gamma(\xi)h),$$

граничну задачу можна звести до функціональних рівнянь, які, в свою чергу, зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} PV \int_L \frac{F_m^\pm(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L F_m^\pm(\xi) K^\pm(y, \xi) d\xi \pm \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{m-1} \int_L (F_p^+(\xi) - F_p^-(\xi)) K_{p,m}^\pm(y, \xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{p=m+1}^{M-1} \int_L (F_p^+(\xi) + F_p^-(\xi)) K_p^\pm(y, \xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, -hm) \pm \frac{\partial}{\partial z} H_x^i(y, -h(m-1)), \\ & y \in L, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d+l(n-1)}^{d+l(n-1)} F_m^\pm(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.17)$$

Ядра рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} K^\pm(y, \xi) &= k \int_0^\infty \frac{\sin(k\zeta(y-\xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta \mp \\ & \mp ik \int_0^\infty \frac{\sin(k\zeta(y-\xi))}{\zeta} \gamma(\zeta) \exp(ik\gamma(\zeta)h) d\zeta + q(y, \xi), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$q(y, \xi) = \begin{cases} \frac{2ik\pi}{\sigma Z}, & \xi \leq y, \\ 0, & \xi > y, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_{p,m}^\pm(y, \xi) &= ik \int_0^\infty \frac{\sin(k\zeta(y-\xi))}{2\zeta} \gamma(\zeta) (1 \mp \exp(ik\gamma(\zeta)h)) \times \\ & \times \exp(ik\gamma(\zeta)h |p-m|) d\zeta, \end{aligned} \quad (6.19)$$

де $F_m^\pm(\xi)$ – з точністю до постійного множника є похідною густини струмів.

Розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами (6.16), (6.17) може бути отримано методом дискретних особливостей після проведення відповідних модифікацій [47]-[50].

Другий інтеграл у виразі для $K^\pm(\xi, y)$ в (6.18) та інтеграл у виразі для $K_{p,m}^\pm(\xi, y)$ в (6.19) збігаються експоненційно при $p \neq m$. Перший же інтеграл в (6.26) збігається як $1/\zeta^2$. Проте, використовуючи асимптотичні вирази для $\gamma(\xi)$ більш високого порядку і подання для інтегрального синуса через ряд, можна збільшити швидкість збіжності, як у пункті 1.4.2. При отриманні числових результатів застосовувалися вирази для ядра, що збігаються як $1/\zeta^6$, при $\zeta \rightarrow \infty$.

6.2.2. Операторні рівняння

Введемо інтегральний оператор відбиття r і проходження t поодинокого шару. Опишемо їх дію на довільну функцію $g(\zeta)$ формулами

$$(rg)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad (6.20)$$

$$(tg)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta \quad (6.21)$$

де $r(\xi, \zeta)$ і $t(\xi, \zeta)$ – ядра операторів. Говорячи про те, що функція $g(\zeta)$ – довільна, будемо мати на увазі приналежність її до класу функцій, для яких інтеграли вигляду (6.20), (6.21) збігаються.

У позначеннях (6.13), (6.14), (6.15), (6.20), (6.21) амплітуди Фур'є розсіяного поля можна знайти з операторних рівнянь (6.2)-(6.9). Зауважимо, що на відміну від випадку нескінченних періодичних решіток, коли рівняння (6.2)-(6.9) були матричними, у випадку скінченних решіток вони є інтегральними. Дослідимо інтегральні рівняння (6.2)-(6.9) на приналежність до класу інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Визначимо поведінку ядер $r(\xi, \zeta)$ і $t(\xi, \zeta)$, при $\xi, \zeta \rightarrow \infty$. Покажемо, що для збіжності інтегралів (6.20), (6.21) достатньо, щоб $g(\zeta)$ зростала не швидше, ніж $|\zeta|^{1/2-\alpha}$, $\alpha > 0$, при $\zeta \rightarrow \infty$. Важливо, що у задачах, які розглядаються в цій роботі, функція $g(\zeta)$ завжди є амплітудою Фур'є розсіяного поля, тому вона задовольняє умові $g(\zeta) \sim |\zeta|^{-3/2}$, $\zeta \rightarrow \infty$. В деяких випадках функція $g(\zeta)$ є дельта функцією. Тоді питання про збіжність інтегралів (6.20), (6.21) не виникає.

Оператори відбиття r і проходження t зв'язують амплітуду Фур'є поля (як функцію ζ), що падає, з амплітудами Фур'є розсіяного поля (як функцію ξ). У випадку, якщо розв'язання задачі для поодинокого шару є відомим (дивись пункт 1.4) і розсіяне поле записане у вигляді в (1.108), то для

падаючого поля у вигляді (6.12) можемо записати оператор відбиття в явному вигляді

$$(rq)(\xi) = C(\xi). \quad (6.22)$$

У випадку H -поляризації, ядро оператора проходження виражається через ядро оператора відбиття за формулою

$$t(\xi, \zeta) = \delta(\xi - \zeta) - r(\xi, \zeta).$$

Тому достатньо розглянути лише оператор відбиття.

Запишемо асимптотичний вираз для ядер операторів розсіяння, при $\xi, \zeta \rightarrow \infty$. З умови на ребрі випливає, що $H_x^s(y, 0) \sim \sqrt{(y - \alpha_n)(\beta_n - y)}$, при y , що наближається до ребра n -ї стрічки, $L_n = (\alpha_n; \beta_n)$. Тоді, як Фур'є образ функції $H_x^s(y, 0)$, функція $C(\xi)$ задовольняє наступній умові на нескінченності: $|C(\xi)| \sim |\xi|^{-3/2}$, $\xi \rightarrow \infty$. Тому, з урахуванням виразу (6.22) маємо

$$r(\xi, \zeta) \sim |\xi|^{-3/2}, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.23)$$

З принципу взаємності випливає, що вираз (6.23) для ядра оператора відбиття виконується і по змінній ζ :

$$r(\xi, \zeta) \sim |\zeta|^{-3/2}, \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

З асимптотичних виразів (6.23), (6.24) випливає, що $\|r\|_2 < \infty$, де $\|\cdot\|_2$ – норма у просторі L^2 . Таким чином оператор r належить до класу операторів Фредгольма. З виразу (6.20) випливає, що дія оператора r на довільну функцію описується за допомогою інтеграла. Таким чином, рівняння (6.2)-(6.9) у випадку скінченної багаточислової решітки еквівалентні інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду.

При розв'язанні рівнянь (6.2)-(6.9) нескінченний інтервал інтегрування замінювався скінченним $(-a, a)$. Враховуючи експоненційно спадаючий множник $\exp(ik\gamma(\zeta)h)$, при $|\zeta| > 1$, необхідно вибирати $a > 1$. Після чого, для дискретизації застосовувалася складена квадратурна формула Гауса. Цю

процедуру дискретизації для інтегралу $\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) d\zeta$ можна записати у наступному вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) d\zeta \approx \int_{-a}^a g(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^K \int_{-a+\frac{2a}{K}(k-1)}^{-a+\frac{2a}{K}k} g(\zeta) d\zeta \approx \sum_{q=1}^Q c_q g(\zeta_q),$$

де $g(\zeta)$ – одна з підінтегральних функцій в (6.2)-(6.9) c_q – коефіцієнти квадратурної формули, ζ_q – вузли квадратурної формули, Q – кількість вузлів.

Зауважимо, що збіжність числового розв'язання безпосередньо залежить від збіжності методу визначення оператора r . У цій роботі оператор r отримано в результаті розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (дивись пункт 1.4.2). Сингулярне інтегральне рівняння з додатковими умовами розв'язується з використанням методу дискретних особливостей. Його збіжність підтверджується теоремами [48]. Таким чином, з урахуванням теорем про збіжність числового розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, наближений розв'язок рівнянь (6.2)-(6.9) збігається до точного.

Разом з операторними рівняннями (6.2)-(6.9) амплітуди Фур'є відбитого поля і поля, яке пройшло, можна отримати з операторних рівнянь, записаних за допомогою рекурентної процедури. Позначимо через t_m і r_m оператори проходження та відбиття системи, яка складається з m шарів. Тоді можемо записати наступні операторні рівняння,

$$P^{m+1} = t_m e B_m^{m+1} + r_m q \quad (6.25)$$

$$D^{m+1} = t e C_m^{m+1}, \quad (6.26)$$

$$C_m^{m+1} = r_m e B_m^{m+1} + t_m q, \quad (6.27)$$

$$B_m^{m+1} = r e C_m^{m+1}, \quad (6.28)$$

де P^{m+1} , D^{m+1} , B_m^{m+1} , C_m^{m+1} – амплітуди Фур'є відбитого поля, поля, яке пройшло, а також поля між m -м і $m+1$ -м шаром системи, яка складається з $m+1$ шару.

Підставляючи (6.28) у (6.27) можна знайти C_m^{m+1} , потім з (6.18) знайти B_m^{m+1} . Підставляючи результат у (6.25), (6.26) остаточно можна записати вирази для операторів проходження та відбиття системи, яка складається з $m+1$ шару:

$$r_{m+1} = te(I - r_m ere)^{-1} t_m, \quad (6.29)$$

$$t_{m+1} = t_m ere(I - r_m ere)^{-1} t_m + r_m, \quad m = 1, 2, M - 1. \quad (6.30)$$

Маючи на увазі, що імпедансні стрічки мають властивість поглинання електромагнітного поля, норма операторів проходження та відбиття завжди є меншою за 1, обернені оператори в (6.29), (6.30) існують.

Важливо, що операторні рівняння (6.29), (6.30) виконуються як для випадку, коли поодинокий шар багат шарової системи є скінченна решітка, так і для випадку, коли поодинокий шар є нескінченна періодична решітка.

Асимптотично обчислимо комп'ютерний час, який необхідно витратити при використанні методу дискретних особливостей і при використанні операторного методу. Позначимо через p кількість вузлів на кожній стрічці у методі дискретних особливостей, Q – загальна кількість вузлів у операторному методу.

Для того, щоб заповнити матрицю розмірності $MNp \times MNp$ необхідно затратити час, пропорційний до $(MNp)^2$. Проте, для того, щоб розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь такої розмірності методом Гауса, необхідно витратити час, пропорційний до $(MNp)^3$. Тому комп'ютерний час розв'язання задачі методом дискретних особливостей приймемо пропорційним до

$$t \sim (MNp)^3. \quad (6.31)$$

При розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса, отриманої після дискретизації операторних рівнянь (6.2)-(6.9), необхідно витратити час, пропорційно до $(Np)^3 + (2Mq)^3$, або, поклавши асимптотично $p \sim q$ отримаємо

$$t \sim (N^3 + (2M)^3)p^3. \quad (6.32)$$

При послідовному розв'язанні рівнянь (6.29), (6.30) методом Гауса отримаємо, що час обчислень є пропорційним до

$$t \sim (Np)^3 + 2Mq^3. \quad (6.33)$$

При збільшенні числа шарів $M \rightarrow \infty$ ($M \gg N$) і при постійній кількості стрічок у кожному шарі будемо мати: з (6.31) $t \sim (Mp)^3$, з (6.32) $t \sim (Mp)^3$, з (6.33) $t \sim Mp^3$. У разі, коли $M \sim N \gg 1$ маємо: з (6.31) $t \sim M^6 p^3$, з (6.32) $t \sim (Mp)^3$, з (6.33) $t \sim (Mp)^3$ (знак “ \sim ” означає пропорційний). З чого можна зробити висновок, що використання ітераційної процедури запису операторних рівнянь є найбільш ефективним з точки зору машинного часу у випадку, якщо немає необхідності знаходити поле між шарами.

6.2.3. Числові результати

В випадку багат шарових решіток, повний поперечний переріз розсіяння і поглинання можуть бути обчислені за формулами

$$TSCS = \frac{2\pi}{k} \int_0^\pi |P(-\cos \varphi) \sin \varphi|^2 d\varphi + \frac{2\pi}{k} \int_\pi^{2\pi} |D(-\cos \varphi) \sin \varphi|^2 d\varphi,$$

$$ACS = TSCS + \frac{4\pi}{k} \operatorname{Re}(D(-\cos \varphi_0)).$$

Будемо розглядати випадок періодичної решітки у кожному шарі з періодом l , шириною стрічок – $2d$. Тоді

$$L = \bigcup_{n=1}^N (-d + l(n-1); d + l(n-1)).$$

Нехай матеріал стрічок – це графен, який визначається провідністю (1.78). Падаюча плоска хвиля має одиничну амплітуду.

Дослідимо числову збіжність розв'язку. Відносну похибку будемо обчислювати за формулою

$$\varepsilon(p) = \left| \frac{TSCS(p) - TSCS(2p)}{TSCS(2p)} \right|,$$

де p – кількість вузлів на кожній стрічці у методі дискретних особливостей. Результати наведено на рис.6.8 для двох графенових стрічок, розташованих в паралельних площинах $N = 1$, $M = 2$. Ядра обчислювалися з точністю 10^{-6} . Як видно, починаючи з деякого значення p , похибка спадає монотонно.

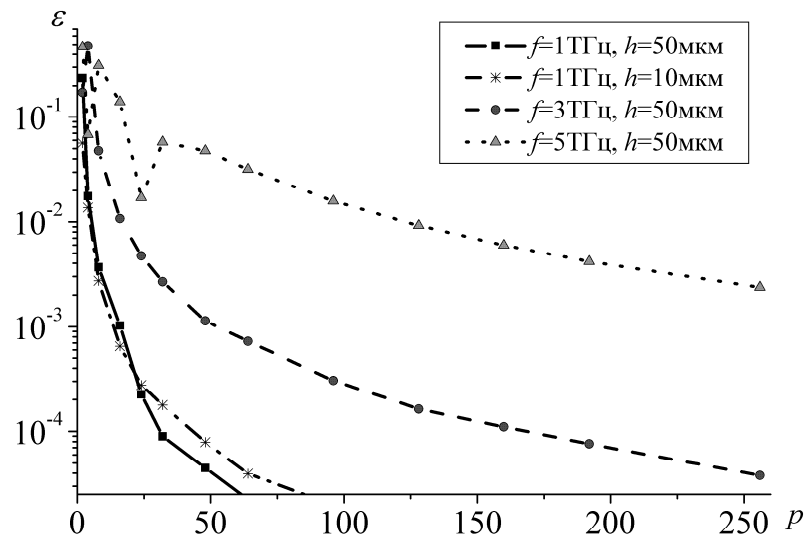


Рис.6.8 Залежності похибки ε від числа вузлів на кожній стрічці p у методі дискретних особливостей для $N = 1$, $M = 2$, $\mu_c = 0.2 \text{ eV}$, $d = 10 \text{ мкм}$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $T = 300 \text{ К}$

Дослідимо збіжність розв'язку, отриманого операторним методом. Похибку обчислимо за формулами $\varepsilon(a) = \left| \frac{TSCS(a) - TSCS^{CIP}}{TSCS^{CIP}} \right|$, $\varepsilon(Q) = \left| \frac{TSCS(a) - TSCS^{CIP}}{TSCS^{CIP}} \right|$, де $TSCS$ знайдено в результаті розв'язання операторних рівнянь (6.2)-(6.9), а $TSCS^{CIP}$ – в результаті розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими

умовами (6.16), (6.17) з точністю 10^{-6} . На рис.6.9 наведено залежності ε від розмірів відрізка інтегрування і числа вузлів. Очевидно, що зі збільшенням довжини інтервалу інтегрування потрібно вибрати більшу кількість вузлів Q . Тому по горизонтальній осі відкладено величину числа вузлів на одиницю довжини Q/a на рис.6.9 б). Враховуючи експоненційно спадаючий множник $\exp(ik\gamma(\zeta)h)$, при $|\zeta| > 1$, з ростом значень параметра kh можна зменшувати значення a експоненційно, але при цьому має виконуватися умова $a > 1$.

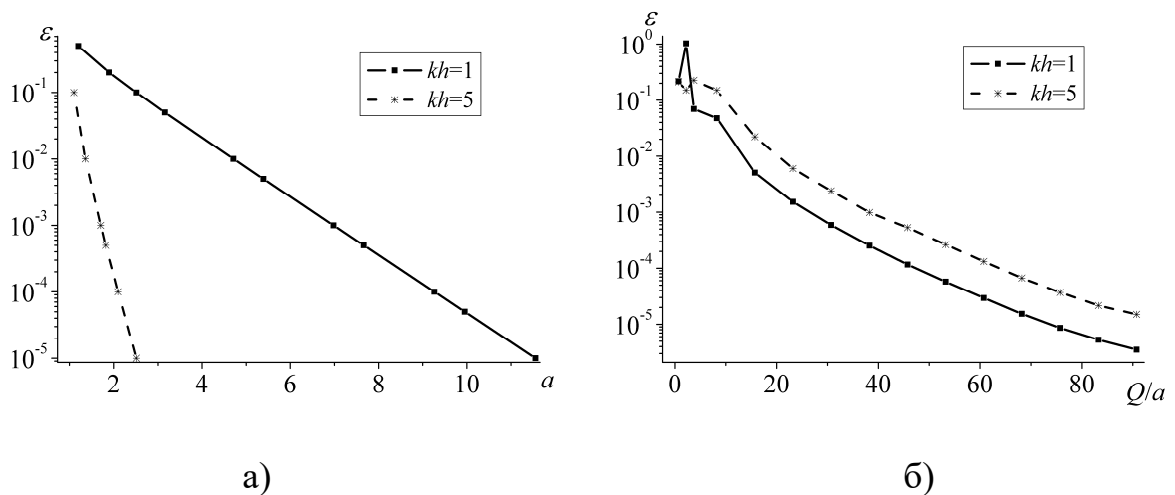


Рис.6.9 Залежності похибки ε від а) розміру відрізка інтегрування і б) числа вузлів у операторному методі

Порівняємо результати, отримані операторним методом з результатами, отриманими методом сингулярних інтегральних рівнянь в розділі 1 для двох стрічок, розташованих в одній площині. Для того, щоб знайти розв'язок задачі про дифракцію на стрічках, розташованих в одній площині, в рівняннях (6.2)-(6.9) слід замість оператора e взяти оператор s^+ , який дорівнює $(s^+g)(\zeta) = \exp(ik\zeta\Delta)g(\zeta)$ всюди, де e діє на C_m , і взяти оператор s^- , який дорівнює $(s^-g)(\zeta) = \exp(-ik\zeta\Delta)g(\zeta)$, всюди, де e діє на B_m . Залежність TSCS від частоти, яку отримано двома методами, наведено на рис.6.10.

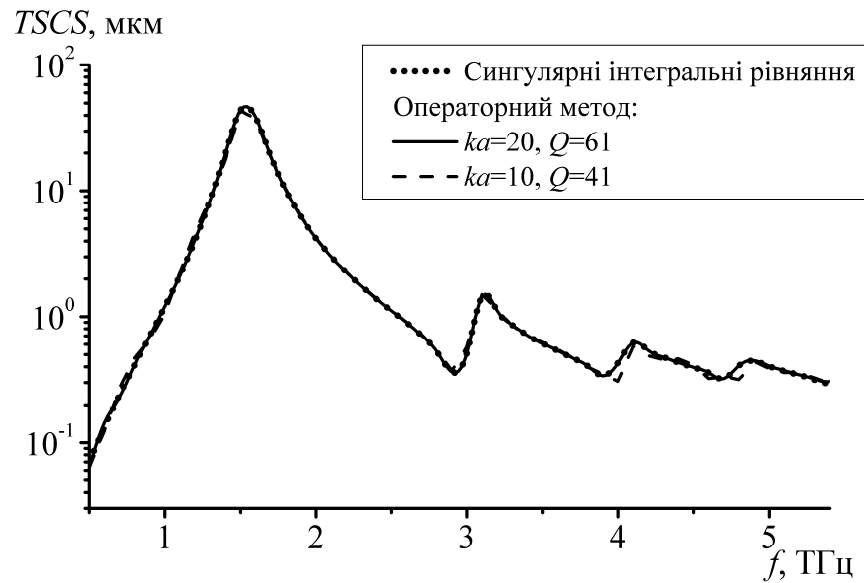


Рис.6.10 Залежності TSCS від частоти для двох стрічок, розташованих в одній площині, при $\mu_c = 0.13\text{eV}$, $d = 10\text{мкм}$, $l = 70\text{мкм}$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1\text{пс}$, $T = 300\text{К}$. Метод сингулярних інтегральних рівнянь (пунктирна крива) і операторний метод (суцільна і штрихова криві)

При використанні операторного методу, для наочності, отримано дві криві для різних значень числа вузлів на стрічках. Зі збільшенням числа вузлів вдається досягти співпадіння результатів з заданою точністю.

Дослідимо особливості у розсіяних (та поглинених) полях, які виникають за рахунок одночасного або послідовного збудження резонансів. Наведемо дві групи залежностей. У першій групі параметри структури виберемо таким чином, щоб резонанс багат шарової решітки розташовувався слідом по частотній осі за плазмонним резонансом графенових стрічок. Метою є за рахунок вибору параметрів структури розширити смугу частот, в якій спостерігається екстремуми у поглинанні і розсіюванні. У другій групі параметри структури виберемо такими, щоб резонанси багат шарової структури і плазмонний резонанс розташовувалися достатньо близько один до одного на частотній осі для того, щоб отримати зростання TSCS або ACS.

Спочатку ідентифікуємо резонанси багат шарових структур і плазмонні резонанси.

На рис.6.11, рис.6.12, рис.6.13 наведено залежності TSCS і ACS від відстані між шарами h . Криві розраховані для різного числа шарів і значень хімічного потенціалу на частоті $f = 2$ ТГц, розташованої поблизу першого плазмонного резонансу, який виникає при $f \approx 1.9$ ТГц для $\mu_c = 0.2$ еВ і при $f \approx 2.6$ ТГц для $\mu_c = 0.4$ еВ. Спостерігається виникнення зон запирання і пропускання. На графіках присутні максимуми поблизу резонансів багат шарової структури, в зонах пропускання присутні невеликі осциляції. При збільшенні значення хімічного потенціалу, мінімуми так само стають більш чітко вираженими.

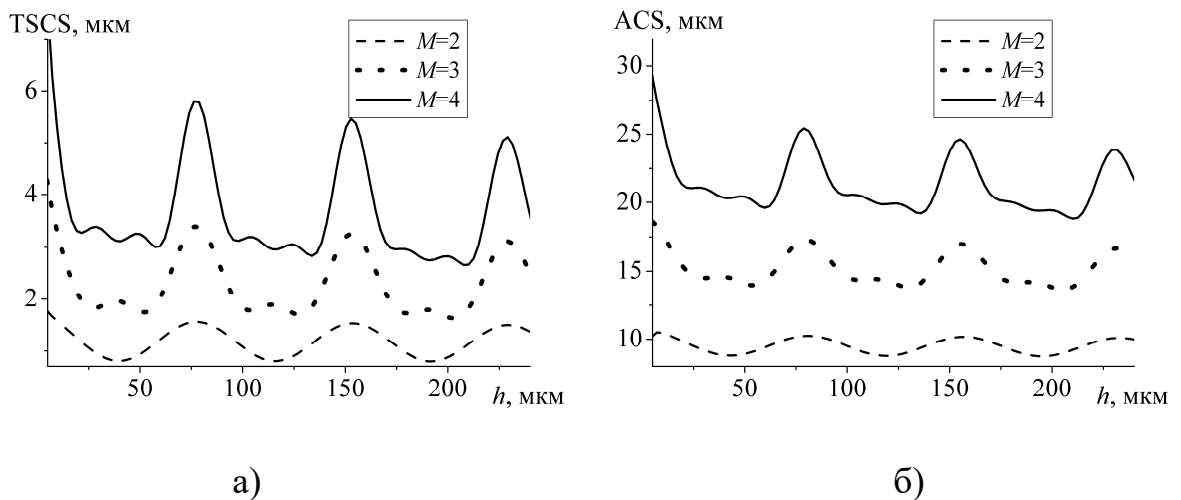


Рис.6.11 Залежності а) TSCS і б) ACS від h для $N = 5$ стрічок у кожному шарі при $M = 2$ (штрихові криві), $M = 3$ (пунктирні криві), $M = 4$ (суцільні криві), $d = 10$ мкм, $l = 40$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К,
 $f = 2$ ТГц

Залежності TSCS і ACS від частоти наведено на рис.6.14 для $h = 19$ мкм і на рис.6.15 для $h = 52.5$ мкм. Як видно з рис.6.12, рис.6.13, величина TSCS майже співпадає для двох різних значень хімічного потенціалу $\mu_c = 0.2$ еВ і

$\mu_c = 0.4$ еВ, при $h = 19$ мкм, $f = 2$ ТГц. Значення $h = 52.5$ мкм відповідає першому резонансу багатошарової структури при $\mu_c = 0.4$ еВ. (див. рис.6.13).

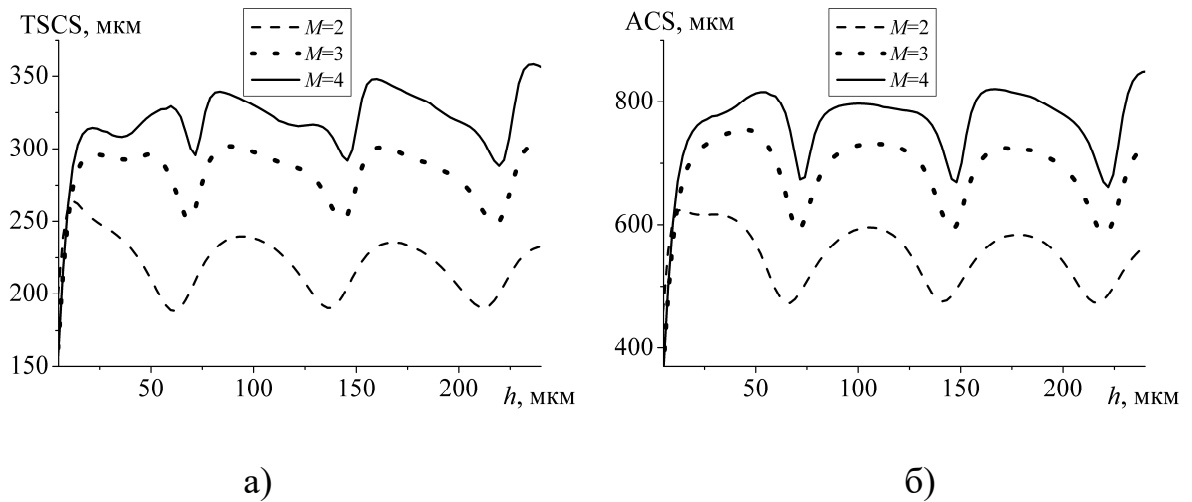


Рис.6.12 Залежності а) TSCS і б) ACS від h для $N = 5$ стрічок у кожному шарі при $M = 2$ (штрихові криві), $M = 3$ (пунктирні криві), $M = 4$ (суцільні криві), $d = 10$ мкм, $l = 40$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.2$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $f = 2$ ТГц

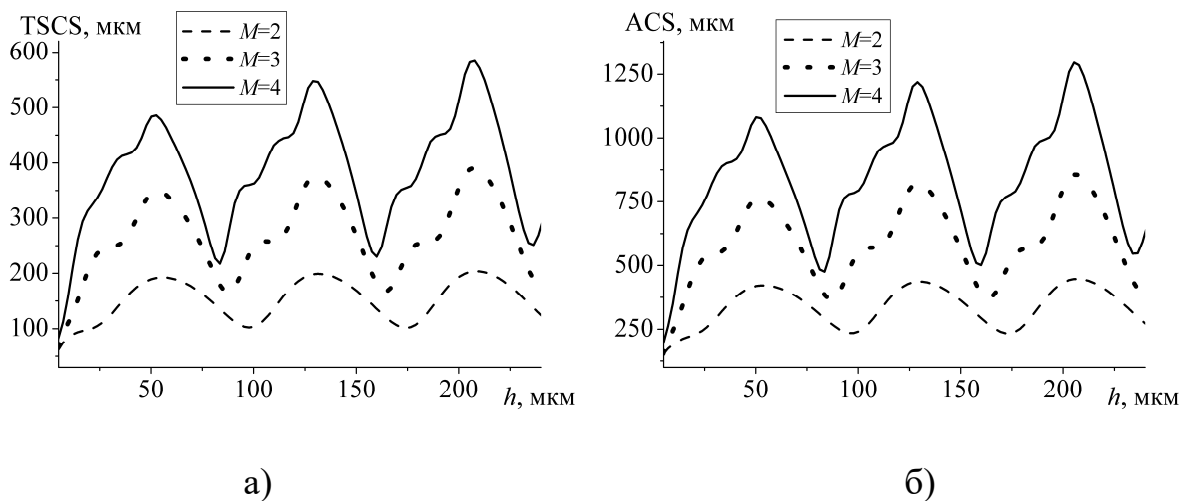


Рис.6.13 Залежності а) TSCS і б) ACS від h для $N = 5$ стрічок у кожному шарі при $M = 2$ (штрихові криві), $M = 3$ (пунктирні криві), $M = 4$ (суцільні криві), $d = 10$ мкм, $l = 40$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.4$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $f = 2$ ТГц

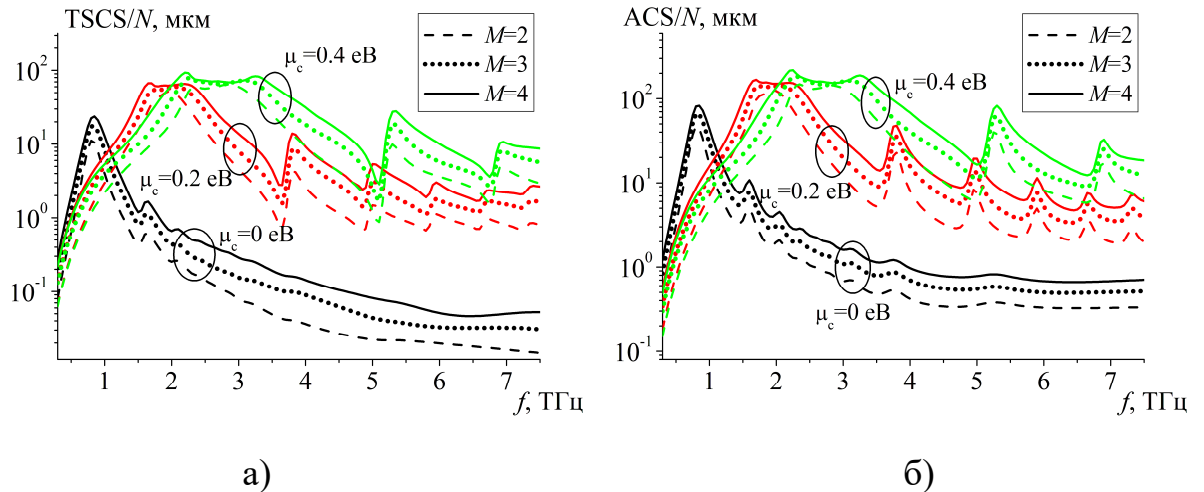


Рис.6.14 Залежності а) TSCS і б) ACS від частоти при $M = 2$ (штрихові криві), $M = 3$ (пунктирні криві), $M = 4$ (суцільні криві), $N = 5$, $d = 10 \text{ мкм}$, $l = 40 \text{ мкм}$, $h = 19 \text{ мкм}$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $T = 300 \text{ К}$ і різних значень хімічного потенціалу $\mu_c = 0 \text{ eV}$, $\mu_c = 0.2 \text{ eV}$, $\mu_c = 0.4 \text{ eV}$

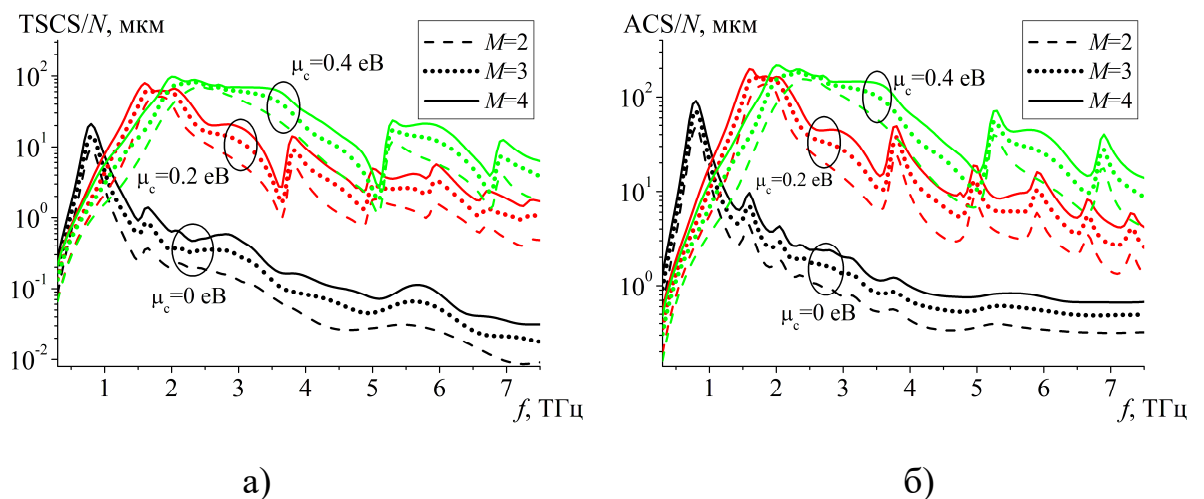


Рис.6.15 Залежності а) TSCS і б) ACS від частоти при $M = 2$ (штрихові криві), $M = 3$ (пунктирні криві), $M = 4$ (суцільні криві), $N = 5$, $d = 10 \text{ мкм}$, $l = 40 \text{ мкм}$, $h = 52.5 \text{ мкм}$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\tau = 1 \text{ пс}$, $T = 300 \text{ К}$ і різних значень хімічного потенціалу $\mu_c = 0 \text{ eV}$, $\mu_c = 0.2 \text{ eV}$, $\mu_c = 0.4 \text{ eV}$

Поблизу частоти $f = 2$ ТГц спостерігається зростання розсіяння і поглинання падаючої хвилі. Таким чином, виникає зона запирання, в границях якої значна частина енергії падаючої хвилі поглинається, а не проходить крізь решітку. Зона запирання тут виникає з двох причин: збудження першого плазмонного резонансу, збудження резонансу багат шарової структури. Значення TSCS і ACS поблизу резонансу багат шарової структури $f \approx 2$ ТГц перевищують відповідні значення поблизу плазмонного резонансу $f \approx 2.6$ ТГц, $\mu_c = 0.4$ еВ. Резонанси багат шарової структури так само виникають при $h = 52.2$ мкм і поблизу другого плазмонного резонансу для $\mu_c = 0.4$ еВ (див рис.6.14). Для підтвердження на рис.6.16 наведено залежності TSCS і ACS від h для частоти $f = 5.8$ ТГц, близької до частоти другого плазмонного резонансу. Для порівняння, на рис.6.16 також наведена залежність для кута падіння $\varphi_0 = 45^\circ$.

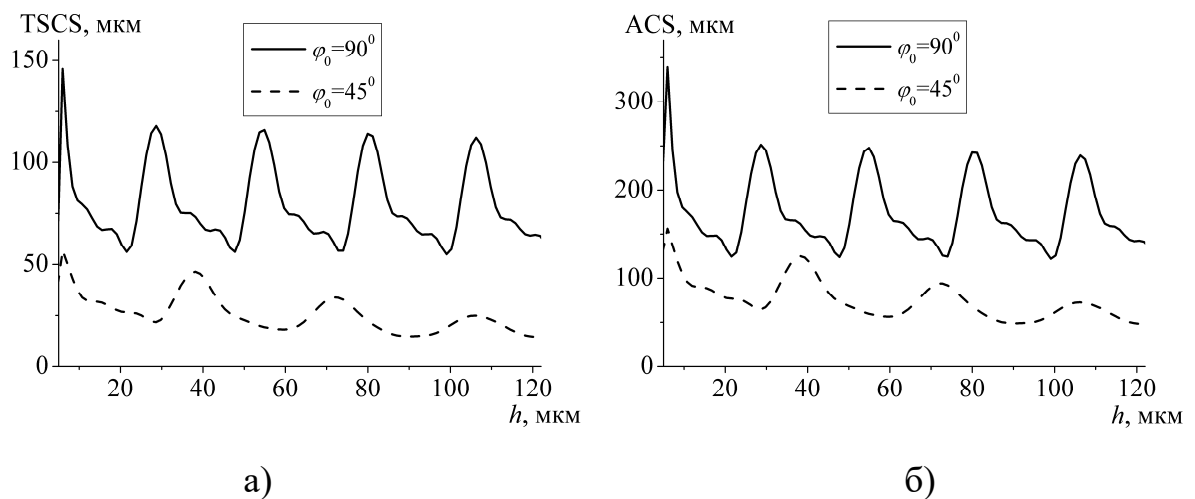


Рис.6.16 Залежності а) TSCS і б) ACS від h для $\varphi_0 = 90^\circ$ (суцільні криві) $\varphi_0 = 45^\circ$ (штрихові криві), $N = 5$, $M = 4$, $d = 10$ мкм, $l = 40$ мкм, $\mu_c = 0.4$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $f = 5.8$ ТГц

Відомо (див., наприклад, [176]), що у випадку, коли відстань між шарами (або період) співпадає з половиною довжини власної хвилі

періодичної частини структури, виникають резонанси і спостерігається поява зон запирання і пропускання з періодом $kh \approx \pi$. Графенові решітки зі стрічками, розташованими в одній площині, як і поодинокі графенові стрічки, здатні підтримувати збудження поверхневих плазмон-поляритонних хвиль і відповідних плазмонних резонансів, що також може призводити до появи зон запирання і пропускання. Таким чином, при певних умовах можливе розширення по частотній осі зон запирання або пропускання. На рис.6.14, рис.6.15 зони запирання поблизу $f = 2$ ТГц і $f = 5.5$ ТГц значно ширші, ніж у випадку одношарової решітки (пор. з рис.1.58, рис.1.59, рис.1.60) саме за рахунок послідовного збудження двох типів резонансів. Надалі розглянемо випадок, при якому одночасне збудження двох типів резонансів не призводить до розширення зон запирання або пропускання, а призводить до зміни вигляду залежностей.

Однією з істотних переваг підходу, заснованого на застосуванні операторного методу, є можливість значно збільшувати число розсіювачів, зберігаючи при цьому час обчислень на прийнятному рівні. Дослідимо вплив числа стрічок в кожному шарі на характеристики розсіювання.

На рис.6.17, рис.6.18, рис.6.19 наведено залежності TSCS і ACS від частоти для різного числа шарів M і різного числа стрічок N в кожному шарі. Фрагмент залежностей поблизу першого плазмонного резонансу збільшено на рис.6.17, рис.6.18. У разі поодинокі графенової решітки, що складається з одного шару, поблизу плазмонних резонансів розташовано максимуми TSCS і ACS. На рис.6.17, рис.6.18, рис.6.19, у разі багатошарової решітки, спостерігається зовсім інша ситуація. Зі збільшенням числа шарів значення повного поперечного перерізу розсіювання на шар ($TSCS/M$) зменшується поблизу частоти першого плазмонного резонансу, $f \approx 2.25$ ТГц. Тут значення TSCS зменшується частково за рахунок взаємодії шарів решітки.

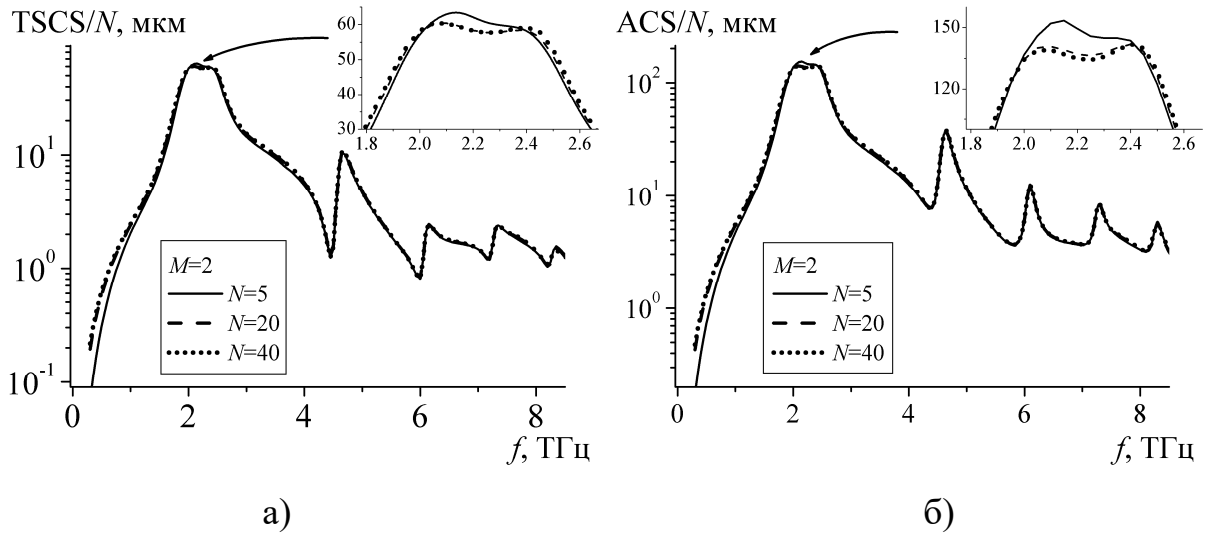


Рис.6.17 Залежності а) TSCS і б) ACS від частоти для $N = 5$ (суцільні криві), $N = 20$ (штрихові криві), $N = 40$ (пунктирні криві), $M = 2$, $d = 10\text{мкм}$, $h = l = 40\text{мкм}$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3\text{еВ}$, $\tau = 1\text{пс}$, $T = 300\text{К}$

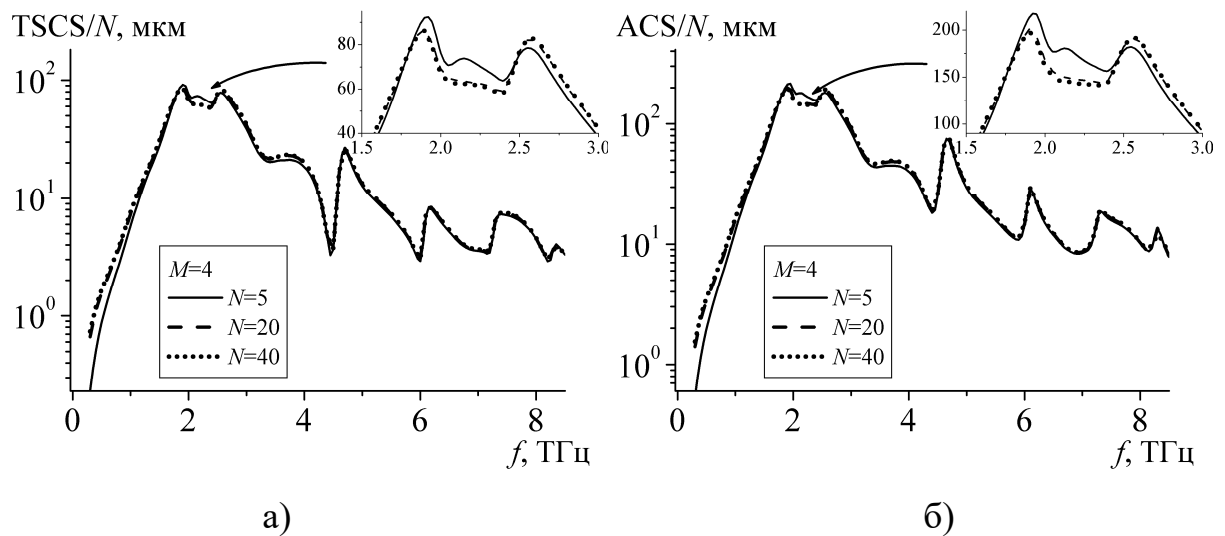


Рис.6.18 Залежності а) TSCS і б) ACS від частоти для $N = 5$ (суцільні криві), $N = 20$ (штрихові криві), $N = 40$ (пунктирні криві), $M = 4$, $d = 10\text{мкм}$, $h = l = 40\text{мкм}$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3\text{еВ}$, $\tau = 1\text{пс}$, $T = 300\text{К}$

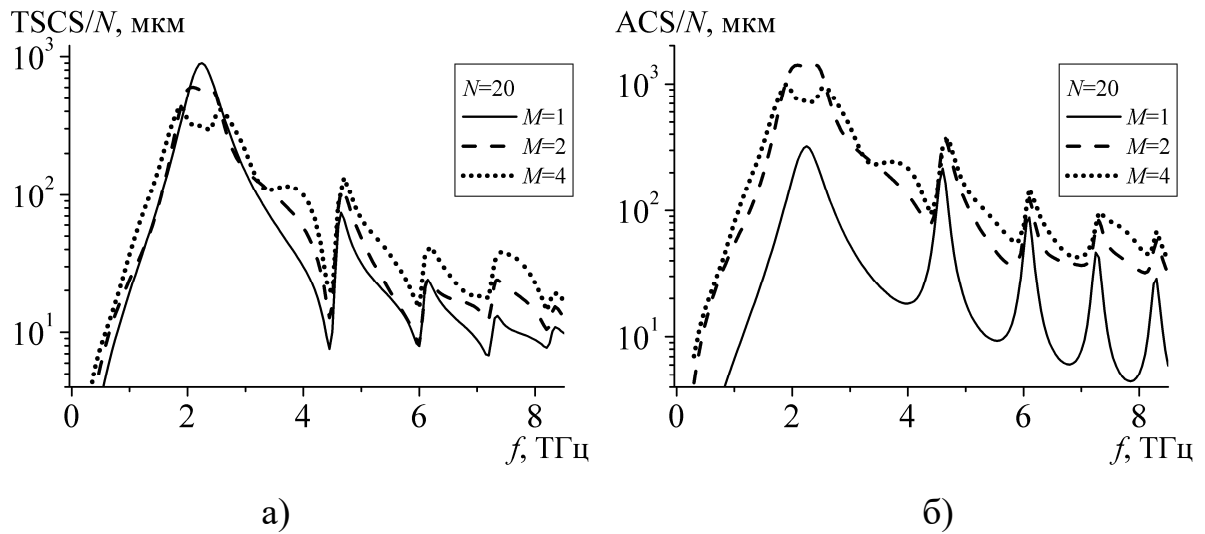


Рис.6.19 Залежності а) TSCS і б) ACS від частоти, $d = 10$ мкм, $h = l = 40$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К

При вибраних параметрах решітки на рис.6.17, рис.6.18, рис.6.19 перший резонанс власних хвиль багатошарової структури виникає при $f \approx 3.8$ ТГц, другий – при $f \approx 7.6$ ТГц. Зауважимо, що частота другого резонансу близька до зони аномалії Релея-Вуда, а також, до частоти плазмонного резонансу. Таким чином, поблизу $f = 7.6$ ТГц сумарно виникають три резонанси. Як результат, крива залежності TSCS має зовсім іншу форму в порівнянні з випадком одношарової решітки. Як видно з рисунків, в розглянутому частотному діапазоні навіть 5 стрічок забезпечують нормовані характеристики розсіяння і поглинання досить близькі до відповідних характеристик для решіток, що складаються з 20 і 40 стрічок. Істотна різниця спостерігається лише поблизу першого плазмонного резонансу і резонансів багатошарової структури.

У табл.6.1 наведено час обчислень (в секундах) для однієї частоти $f = 2.25$ ТГц і хімічного потенціалу $\mu_c = 0.3$ еВ, двома методами: методом сингулярних інтегральних рівнянь і операторним методом. Як і

передбачалося, операторний метод має перевагу за часом обчислень при збільшенні числа розсіювачів.

Таблиця 6.1 Порівняння часу обчислень

		Операторний метод, с.	Метод сингулярних інтегральних рівнянь, с.
$M = 2$	$N = 5$	5.3	1.5
	$N = 20$	16	29
	$N = 40$	86	223
$M = 4$	$N = 5$	26	17
	$N = 20$	47	519
	$N = 40$	245	4843

На рис.6.20, прис.6.21 наведено нормовані діаграми спрямованості розсіяного поля для трьох значень частоти: поблизу першого плазмонного резонансу, $f = 2.25$ ТГц, поблизу першого і другого резонансів багат шарової структури, $f = 3.8$ ТГц і $f = 7.6$ ТГц. Для наведених діаграм виконуються такі самі закономірності, як і для стрічкових решіток з ідеально провідних стрічок. Зі збільшенням числа стрічок збільшується число бічних пелюсток, збільшується рівень і зменшується ширина головного пелюстка. Проте рівень головного пелюстка відбитого поля ($0 < \varphi < 180^\circ$) і поля, яке пройшло ($180^\circ < \varphi < 360^\circ$), практично співпадають за винятком випадку, коли частота обрана поблизу плазмонного резонансу, $f = 2.25$ ТГц. Залежності на рис.6.20 наведено з метою порівняння розсіяного поля в дальній зоні при різній кількості шарів. Важливо, що поблизу першого плазмонного резонансу практично відсутня різниця в значенні максимуму головного пелюстка відбитого поля при різній кількості шарів. У всіх інших випадках, зі

збільшенням числа шарів зростає і рівень головного пелюстка відбитого поля.

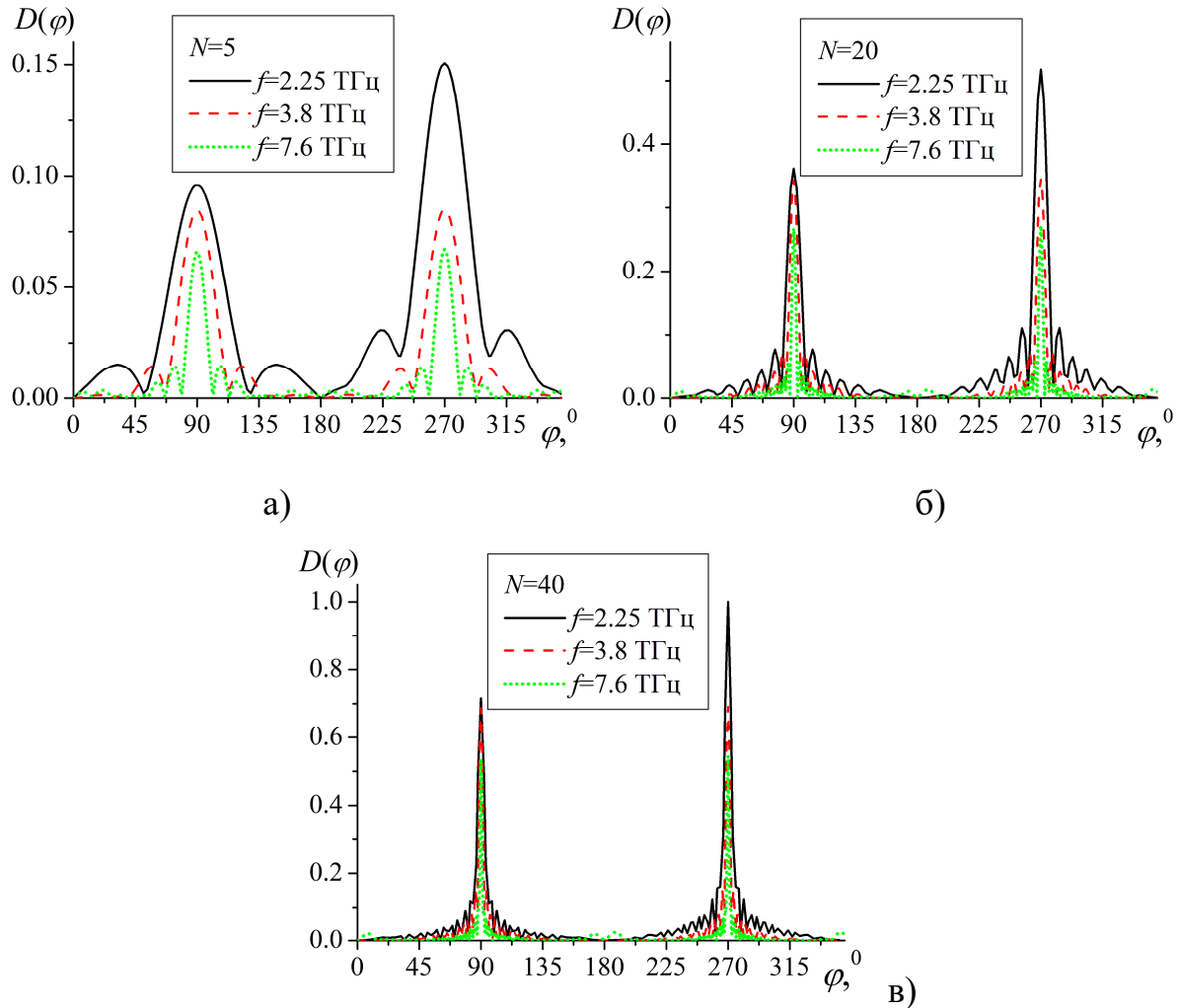


Рис.6.20 Нормовані діаграми спрямованості розсіяного поля при $f = 2.25$ ТГц (суцільні криві), $f = 3.8$ ТГц (штрихові криві), $f = 7.6$ ТГц (пунктирні криві), $M = 4$, $d = 10$ мкм, $h = l = 40$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К. а) $N = 5$, б) $N = 20$, в) $N = 40$

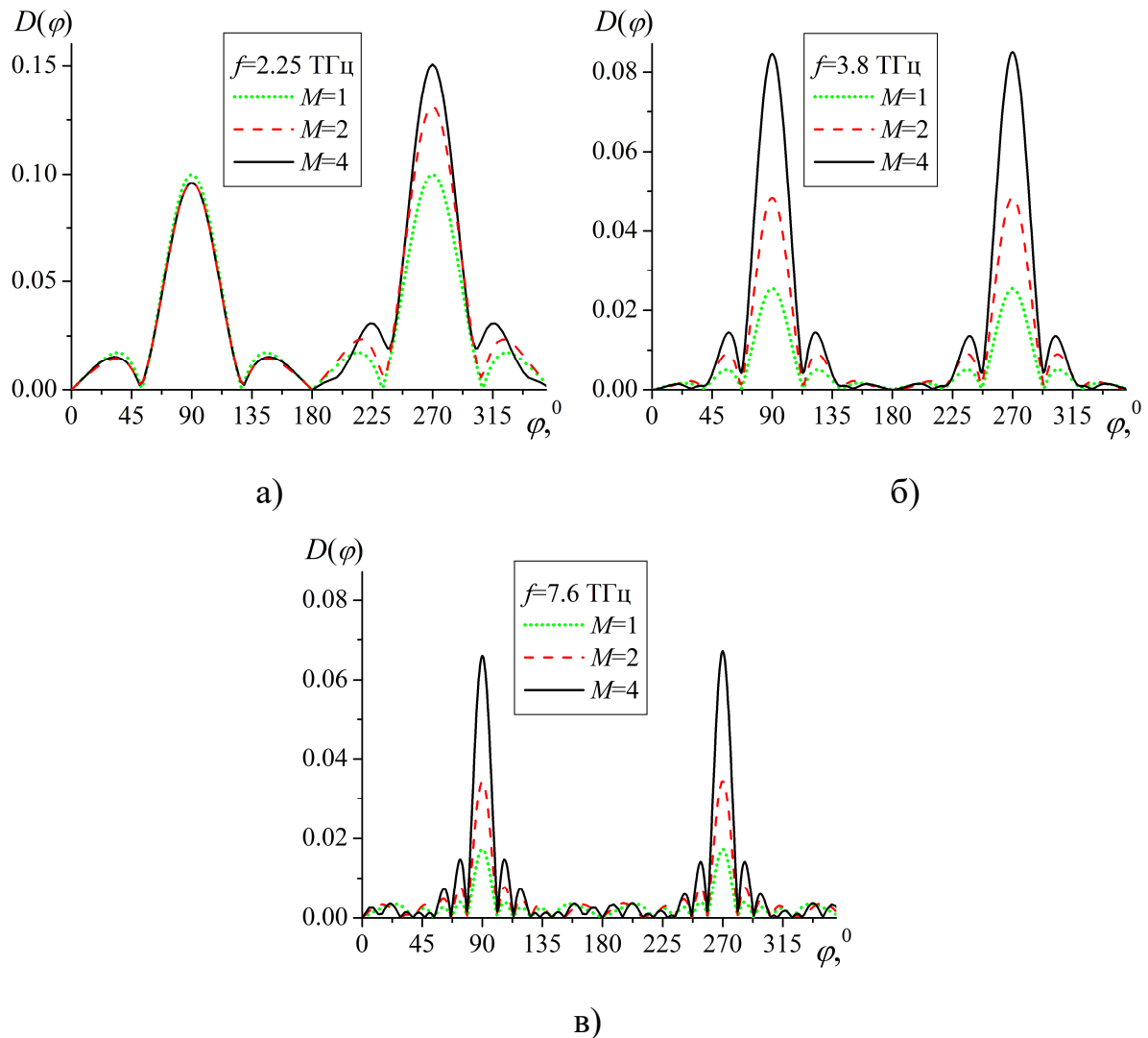


Рис.6.21 Нормовані діаграми спрямованості розсіяного поля для $M = 1$ (пунктирні криві), $M = 2$ (штрихові криві), $M = 4$ (суцільні криві), $N = 5$, $d = 10$ мкм, $h = l = 40$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К.

а) $f = 2.25$ ТГц, б) $f = 3.8$ ТГц, в) $f = 7.6$ ТГц

Для повноти картини, на рис.6.22 наведено залежності TSCS і ACS від відстані між шарами. Як і в попередньому випадку, залежності носять практично періодичний характер з періодом $kh \approx \pi$. Значне відхилення від періодичності спостерігається при малих значеннях параметра kh , $kh \ll 1$. Це пояснюється сильною взаємодією між шарами і частково проявляє вплив затухаючих хвиль.

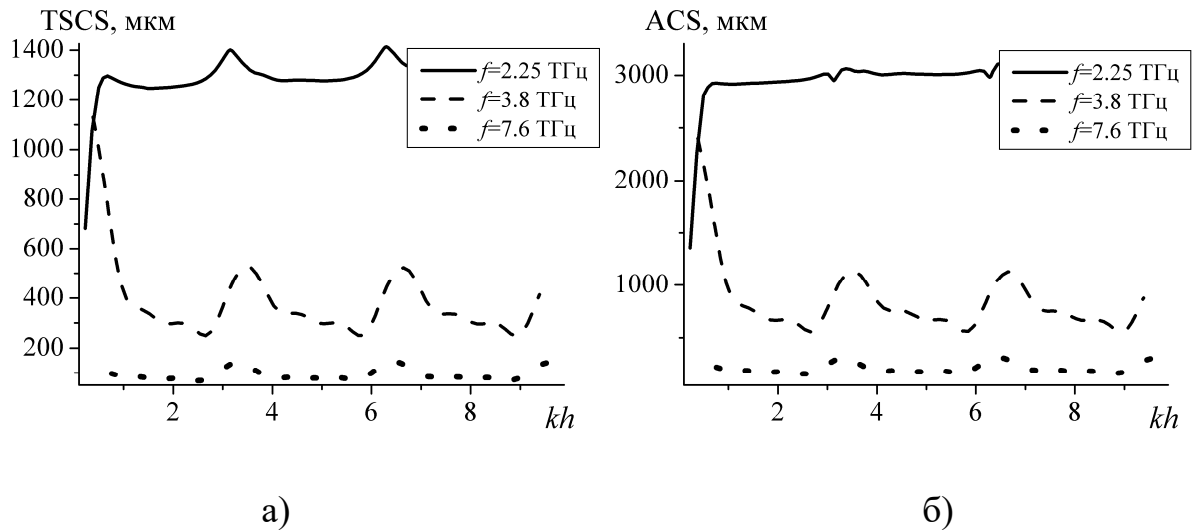


Рис.6.22 Залежності а) TSCS і б) ACS від h для $f = 2.25$ ТГц (суцільні криві), $f = 3.8$ ТГц (штрихові криві), $f = 7.6$ ТГц (пунктирні криві), $N = 20$, $M = 4$, $d = 10$ мкм, $l = 40$ мкм, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\mu_c = 0.3$ еВ, $\tau = 1$ пс, $T = 300$ К, $f = 5.8$ ТГц

Висновки до розділу 6

У розділі строгі методи аналізу багатошарових структур розвинено на системи, які складаються з імпедансних стрічкових решіток. Операторні рівняння мають єдиний вигляд для структури, яка складається зі скінченних і з нескінченних періодичних стрічкових решіток. Доведено, що отримані операторні рівняння еквівалентні інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду у випадку скінченних решіток. Розглянута напівнескінченна система шарів.

Співпадіння результатів, отриманих методом сингулярних інтегральних рівнянь і операторним методом, а також з методом аналітичної регуляризації дозволяє зробити висновок о вірності побудованих алгоритмів.

Використання операторного методу у сукупності з методом сингулярних інтегральних рівнянь дозволило скоротити час обчислень. Так, у припущенні, що системи лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуються

методом Гауса, при використанні лише методу сингулярних інтегральних рівнянь час обчислень є пропорційним до $t \sim (Mnp)^3$. При використанні методу сингулярних інтегральних рівнянь у поєднанні з операторними рівняннями, записаними з застосуванням ітераційної процедури, час обчислень є пропорційним до $t \sim (Np)^3 + 2Mq^3$.

Числові результати наведено для графенових стрічок. Показано, що досліджувані структури підтримують низку резонансів. Окрім плазмонних резонансів, резонансів на решіткових модах або резонансів поблизу аномалій Релея (у випадку решітки у вакуумі), власних резонансів діелектричної пластини, спостерігається збудження резонансів багатошарової структури і резонансів на решіткових модах іншої природи, пов'язаних з періодичністю у розташуванні шарів.

У разі напівнескінченної періодичної структури резонанси є набагато більш вираженими, ніж у випадку скінченношарової структури, що полегшує задачу їх ідентифікації.

Показано, що у випадку багатошарової системи, завдяки послідовному збудженню плазмонних резонансів і резонансів на власних хвилях періодичної частини структури вздовж частотної осі, вдається збільшити ширину смуги частот, у якій спостерігається максимальне поглинання, а також визначено параметри, при яких спостерігається зростання максимуму коефіцієнта поглинання.

Поблизу першого плазмонного резонансу практично відсутня різниця в значенні максимуму головного пелюстка відбитого поля при різній кількості шарів.

Розділ 7. Дифракція плоскої хвилі на кільці або на напівплощині та нескінченно тонких ідеально провідних дисках

7.1. Нескінченно тонке ідеально провідне кільце

Задачі про дифракцію на аксіально-симетричних розсіювачах, наприклад на диску або кільці, виникають при створенні антенних систем [224], [225]. Крім чисто числових методів розв'язання цих задач, таких як метод сіток або метод скінченних елементів, які використовують наближені умови випромінювання, і точність яких обмежена кількома знаками, можна виділити декілька строгих підходів. Один з них базується на методі граничних інтегральних рівнянь. В [226] розглянуто дифракцію акустичної хвилі на кільці у випадку граничної умови Діріхле. Отримано інтегральне рівняння першого роду з логарифмічною особливістю. В роботі [227] отримано інтегральні рівняння Фредгольма першого роду для струмів, які збуджуються на ідеально провідному кільці. В [228] запропоновано схему зведення інтегральних рівнянь першого роду до рівнянь другого роду та розглянуто дифракцію на концентричній скінченній системі кілець. Двоперіодичні решітки з круглих отворів та кільцевих щілин у екрані, розташованому на діелектричній підкладці, розглянуто у [229] з використанням суматорних рівнянь, які розв'язувалися методом Гальоркіна. Асимптотичні методи дозволяють дослідити базові фізичні явища за набагато менший комп'ютерний час. У [230] розглянуто наближений розв'язок задачі про дифракцію на кільці, радіуси якого значно перевищують довжину хвилі.

Ще один підхід базується на операторному методі. Основна ідея полягає в тому, щоб розглядати складну неоднорідність як об'єднання більш простих. Якщо оператори розсіяння кожного поодинокого простого елемента вважати відомими, то властивості всієї структури можна визначити з операторних рівнянь. Раніше операторний метод успішно застосовувався для

дослідження структур зі стрічок або щілин в екрані, ребра яких паралельні осям декартової системи координат [21], [176].

Метою цього розділу є розвинення операторного методу для розв'язання задачі дифракції акустичних і електромагнітних хвиль на кільцевих неоднорідностях у вільному просторі [231]-[233].

Розв'язання задачі операторним методом передбачає використання операторів розсіяння окремих елементів, які складають складену структуру. Розсіяне поле надамо як суперпозицію полів, розсіяних на диску і на круглому отворі в площині. Використовується відомий розв'язок для диску.

7.1.1. Падіння акустичної хвилі

Розташуємо нескінченно тонке ідеально провідне кругле кільце (рис.7.1 а) або площину з кільцевою щілиною (рис.7.1 б) у площині $z = 0$. Менший радіус дорівнює r_d , більший – r_h . Припустимо, що плоска монохроматична хвиля з амплітудою q падає з області $z > 0$ під кутом α до осі Oz , площина падіння відповідає $\varphi = 0^0$. Повне поле в області $z > 0$ будемо шукати як суму падаючого і відбитого полів

$$u = u_0 + u_r.$$

Падаюче u_0 і відбите u_r поле розкладемо в ряд Фур'є по азимутальному куту φ у інтеграл Фур'є-Беселя по радіусу:

$$u_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q i^m e^{im\varphi} J_m(kr \sin \alpha) e^{-ikz \cos \alpha}, \quad (7.1)$$

$$u_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\varphi} \int_0^{\infty} a^{(m)}(\xi) J_m(r\xi) e^{iz\gamma(\xi)} d\xi, \quad z > 0,$$

де (r, φ, z) – циліндричні координати, $J_m(x)$ – функція Беселя першого роду порядку m . У даному параграфі позначимо через $\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, $\text{Re } \gamma \geq 0$,

$\text{Im } \gamma \geq 0$. Як відомо, в силу принципу суперпозиції задачу для кожної азимутальної гармоніки з номером m можна розглядати окремо.

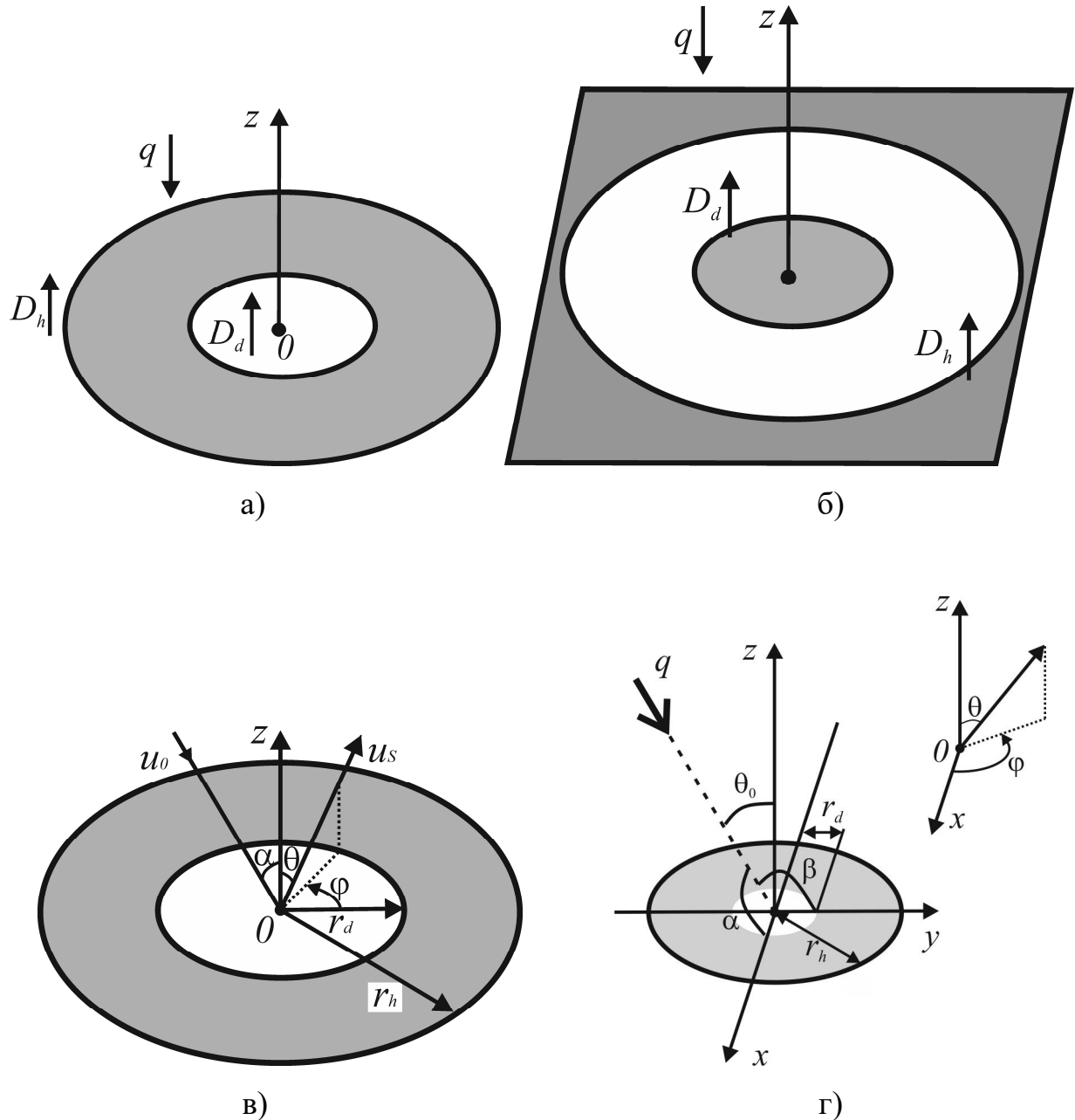


Рис.7.1 Геометрія досліджуваної структури. а) Кругле кільце, б) кільцева щілина в площині, в) система координат і позначення у випадку скалярної задачі, г) система координат і позначення у випадку векторної задачі

Надалі обмежимося випадком кільцевої щілини в площині. Розсіяне поле кільця можна отримати, використовуючи принцип дуальності.

Помітимо, що поле, розсіяне на щілині, можна надати як суперпозицію полів, розсіяних на диску, $r < r_d$, і на круглому отворі в площині, $r < r_h$. Спектральну функцію (амплітуду Фур'є) $a^{(m)}(\xi)$ для гармоніки поля з номером m будемо шукати як суму двох спектральних функцій полів, відбитих диском $D_d(\xi)$ і екраном з отвором $D_h(\xi)$

$$a^{(m)}(\xi) = D_d(\xi) + D_h(\xi).$$

Індекс m у функцій $D_d(\xi)$ і $D_h(\xi)$ опущено.

Позначимо через R_d і R_h інтегральні оператори відбиття від поодинокого диска й екрана з отвором. Ядра операторів дорівнюють $R_d(\xi, \zeta)$ і $R_h(\xi, \zeta)$. Їх визначення зводиться до розв'язання парних інтегральних рівнянь [234].

7.1.1.1. Операторні рівняння

Поле, відбите диском (зі спектральною функцією $D_d(\xi)$), можна надати як суперпозицію падаючого поля, відбитого поодиноким диском (під час відсутності площини з отвором) $R_d q$ і поля площини з отвором, відбитого диском $R_d D_h$. Так само й поле, відбите площиною з отвором (зі спектральною функцією $D_h(\xi)$) можна надати як суперпозицію падаючого поля, відбитого поодиноким площиною з отвором (під час відсутності диска) $R_h q$ і поля диска, відбитого площиною з отвором $R_h D_d$.

У випадку граничної умови Діріхле операторні рівняння є:

$$D_d = R_d q + R_d D_h, \quad (7.2)$$

$$D_h = R_h q - R_h D_d. \quad (7.3)$$

Враховуючи умову на ребрі й асимптотичні вирази для спектральних функцій розсіяного поля, при $\xi \rightarrow 0$, остаточно надамо операторні рівняння (7.2), (7.3) як

$$D_1 = \hat{R}_d \left(\frac{\zeta}{\gamma(\zeta)} P_1 \right), \quad (7.4)$$

$$P_1 = \gamma \hat{R}_h q - \gamma \hat{R}_h \left(\frac{\zeta}{\gamma(\zeta)} D_1 \right) - D_1, \quad (7.5)$$

де $D_1(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\xi} D_d(\xi)$, $P_1(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\xi} (D_h(\xi) + q\delta(\xi - k \sin \alpha))$. Оператори \hat{R}_d і

$\gamma \hat{R}_h$ мають ядра $\frac{\gamma(\xi)}{\xi} R_d(\xi, \zeta)$, $\frac{\gamma(\xi)}{\xi} \tilde{R}_h(\xi, \zeta)$. Причому важливо, що ядро

$\frac{\gamma(\xi)}{\xi} \tilde{R}_h(\xi, \zeta) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow k$, у той час як, взагалі кажучи, $\frac{\gamma(\xi)}{\xi} R_d(\xi, \zeta) \not\rightarrow 0$

при $\xi \rightarrow k$.

У випадку граничної умови Неймана, після перетворень, можна отримати наступні рівняння

$$D_1 = -\hat{R}_d \left(\frac{\zeta}{\gamma(\zeta)} P_1 \right), \quad (7.6)$$

$$P_1 = \hat{R}_h q + \hat{R}_h (\zeta D_1) - \gamma D_1, \quad (7.7)$$

де $D_1(\xi) = D_d(\xi) / \xi$, $P_1(\xi) = \gamma(\xi) (D_h(\xi) - q\delta(\xi - k \sin \alpha)) / \xi$. Оператори \hat{R}_d і

\hat{R}_h мають ядра $R_d(\xi, \zeta) / \xi$, $\gamma(\xi) \tilde{R}_h(\xi, \zeta) / \xi$, де $\tilde{R}_h(\xi, \zeta) = R_h(\xi, \zeta) - \delta(\xi - \zeta)$.

Функція $\tilde{R}_h(\xi, \zeta)$ є розв'язком парних інтегральних рівнянь (7.2), (7.3) при $\zeta = k \sin \alpha$, $r_d = r_h$.

Операторні рівняння у формі (7.4)-(7.7) еквівалентні до інтегральних і є придатними для числового розв'язання.

7.1.1.2. Числові результати

Використовуючи розв'язок рівнянь (7.4)-(7.7), проведемо дослідження розсіяних полів. У зв'язку з тим, що задачі про дифракцію на кільцевій щілині в екрані й на кільці є дуальними, наведемо результати для

нескінченно тонкого круглого кільця. Вірність отриманих результатів у випадку умови Діріхле підтверджувалася перевіркою виконання граничного інтегрального рівняння

$$\int_0^{\infty} a^{(m)}(\xi) J_m(r\xi) d\xi = -J_m(kr \sin \alpha), \quad r_d < r < r_p.$$

На рис.7.2 наведено залежність коефіцієнта розсіяння кільця від хвильового числа, $r_d = 2r_p$. Коефіцієнт розсіяння дорівнює перерізу розсіяння, діленому на площу кільця, де переріз розсіяння можна обчислити за формулою [234]

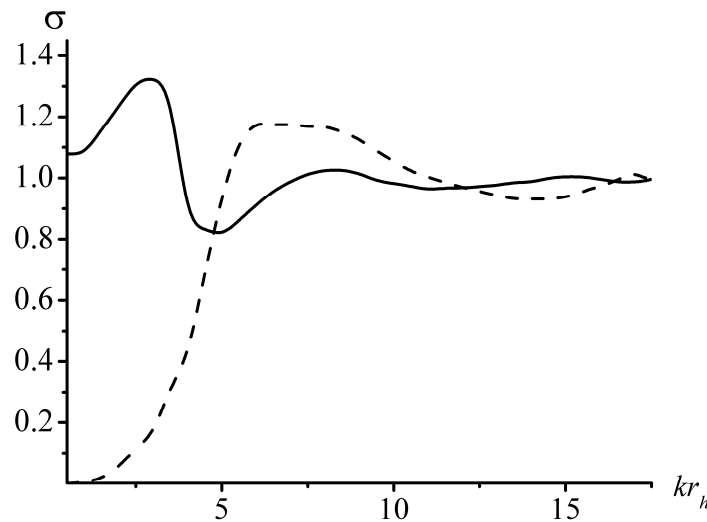


Рис.7.2 Залежності коефіцієнта розсіяння кільця від kr_h , $r_h = 2r_d$, $\alpha = 0^0$.

Умова Діріхле (суцільна крива) і умова Неймана (штрихова крива)

$$Q = \frac{4\pi}{\cos \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^k (2 - \delta_{0,m}) |a^{(m)}(\xi)| \frac{\sqrt{k^2 - \xi^2}}{\xi^2},$$

$$\delta_{0,m} = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \\ 1, & m = 0. \end{cases}$$

При довжинах хвиль набагато більших розміру, коефіцієнт розсіяння у випадку умов Неймана наближається до 0. При довжинах хвиль менших за поперечний розмір кільця, коефіцієнт розсіяння наближається до 1 як у

випадку умов Діріхле, так і у випадку умов Неймана. Схожа поведінка коефіцієнта розсіяння спостерігається й у круглого диска [234]. На рис.7.3, рис.7.4 наведено діаграми спрямованості відбитого поля для двох значень хвильового числа, $kr_h = 3$, $kr_h = 5$, і двох кутів падіння плоскої хвилі, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, у випадку умов Діріхле.

Графіки побудовано для двох значень азимутального кута, $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 90^\circ$. Діаграми нормуються на амплітуду падаючої хвилі. У разі падіння під кутом $\alpha = 45^\circ$ враховувалося 8 азимутальних гармонік. Криву для $kr_h = 3$ побудовано поблизу мінімуму коефіцієнта розсіяння (див. рис.7.2), а криву для $kr_h = 5$ – поблизу максимуму. З ростом хвильового числа збільшується максимум головного пелюстка й зменшується його ширина.

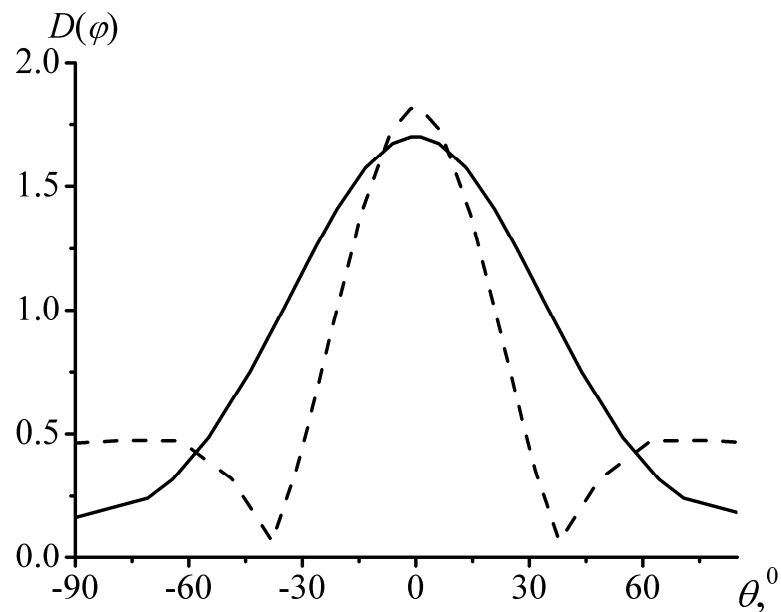
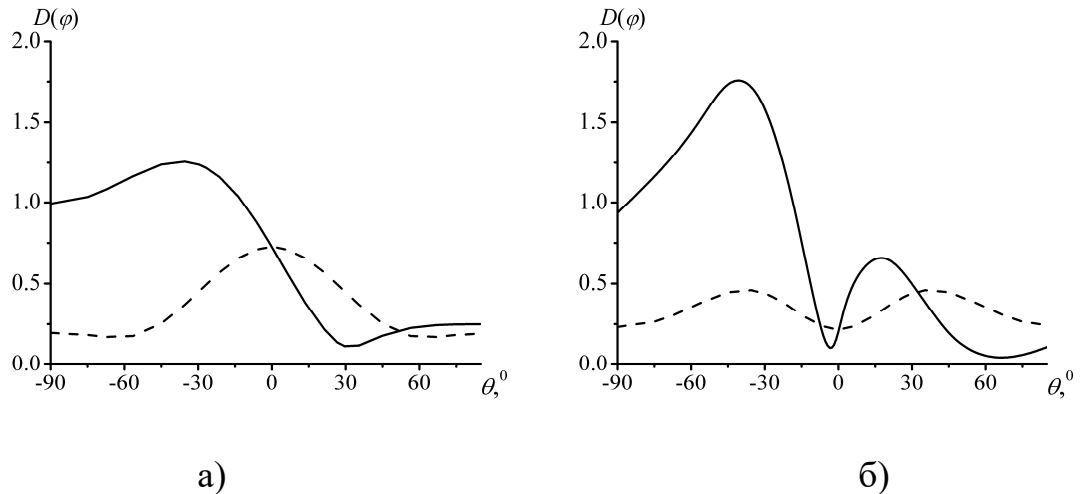


Рис.7.3 Нормовані діаграми спрямованості при $kr_h = 3$ (суцільна крива),

$kr_h = 5$ (штрихова крива), $r_h = 2r_d$, $\alpha = 0^\circ$.



Рису.7.4 Нормовані діаграми спрямованості, $\varphi = 0^\circ$ (суцільна крива),

$\varphi = 90^\circ$ (штрихова крива), $r_h = 2r_d$, $\alpha = 45^\circ$. а) $kr_h = 3$; б) $kr_h = 5$

7.1.2. Падіння плоскої електромагнітної хвилі

Розглянемо задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевому отворі в нескінченно тонкому ідеально провідному екрані або на нескінченно тонкому ідеально провідному кільці. Ці дві задачі є дуальними. Тому для визначеності далі отримаємо рівняння лише для отвору в екрані.

У випадку падіння плоскої електромагнітної хвилі виконується операторні рівняння (7.2), (7.3). Проте ці рівняння є векторними, а дотичні компоненти розсіяного електричного поля надаються у вигляді інтеграла Фур'є (суперпозиції плоских хвиль)

$$E_{\Theta}^{sc}(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} D_{\Theta}^E(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi)z)) d\xi_x d\xi_y, \quad \Theta = x, y,$$

$z > 0$,

(7.8)

де $D_{\Theta}^E(\xi_x, \xi_y)$ – невідомі амплітуди Фур'є або спектральні функції.

Розглянемо розсіяне поле в далекій зоні в задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевій щілини. Для того, щоб отримати

значення дотичних компонент електричного поля в далекій зоні, застосуємо асимптотичне надання для інтегралу (7.8) при $r \rightarrow \infty$, де r – це відстань у сферичній системі координат від щілини до точки спостереження. Визначимо діаграму спрямованості за формулою:

$$d_{\Theta}(\varphi, \theta) = |D_{\Theta}^E(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta) + q_{\Theta}| \gamma(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta),$$

$$\Theta = x, y,$$

де φ – полярний кут, який відраховується від осі Ox , θ – кут до осі Oz .

На рис.7.5 зображено нормовані діаграми спрямованості у випадку кільцевої щілини в площині. Діаграми нормовано на загальний максимум. На рис.7.6 зображено нормовані діаграми спрямованості для кільця. Плоска хвиля падає ортогонально з амплітудою $q_x = 1$, $q_y = 0$ (вектор електричного поля паралельний до осі Ox).

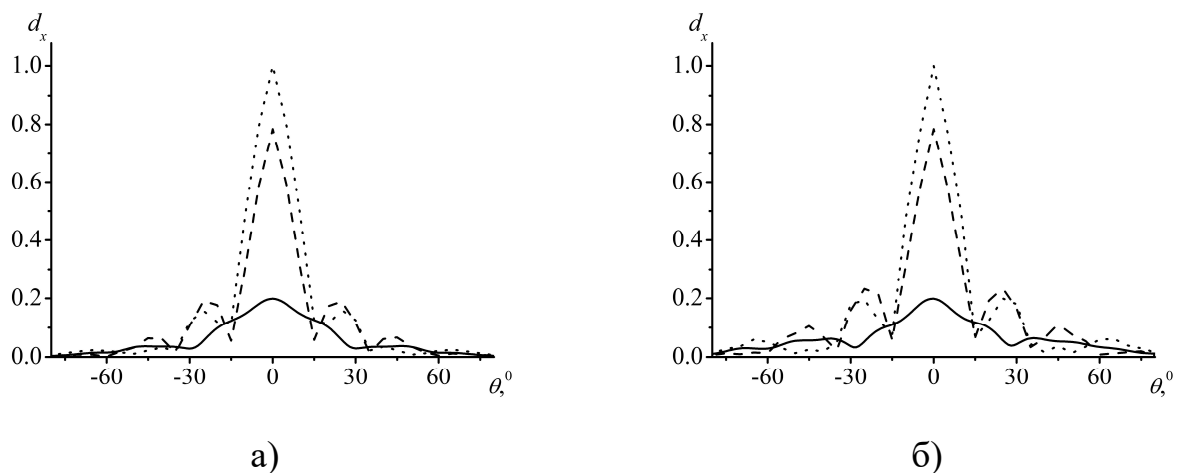


Рис.7.5 Нормовані діаграми спрямованості $d_x(\varphi, \theta)$ у випадку кільцевої щілини у площині при $r_d = \lambda/2$, $r_h = \lambda$ (суцільні криві), $r_d = \lambda$, $r_h = 2\lambda$ (штрихові криві), $r_d = \lambda/2$, $r_h = 2\lambda$ (пунктирні криві), $q_x = 1$, $q_y = 0$, ортогональне падіння, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\theta_0 = 0^\circ$. а) $\varphi = 0^\circ$, б) $\varphi = 90^\circ$

У разі ортогонального падіння максимум головного пелюстка діаграми спрямованості спостерігається при $\theta = 0^\circ$. Зі збільшенням площини поверхні

кільця або щілини збільшується значення максимуму. Криві на рисунках для кутів $\varphi = 0^\circ$ і $\varphi = 90^\circ$ відрізняються несуттєво. З ортогональним падінням $E_y = 0$ при $\varphi = 0^\circ$ і $\varphi = 90^\circ$.

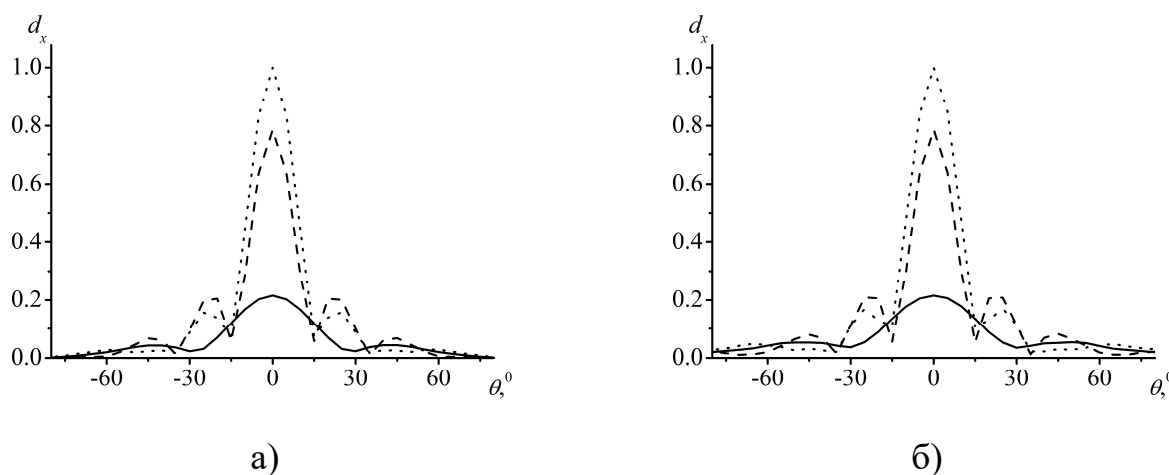


Рис.7.6 Нормовані діаграми спрямованості $d_x(\varphi, \theta)$ у випадку кільця при $r_d = \lambda/2$, $r_h = \lambda$ (суцільні криві), $r_d = \lambda$, $r_h = 2\lambda$ (штрихові криві), $r_d = \lambda/2$, $r_h = 2\lambda$ (пунктирні криві), $q_x = 1$, $q_y = 0$, ортогональне падіння, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\theta_0 = 0^\circ$. а) $\varphi = 0^\circ$, б) $\varphi = 90^\circ$

7.2. Дифракція на напівплощині та диску, які лежать в одній площині, або на круглomu отворі в напівплощині

Задачі про дифракцію на напівплощині або диску відносяться до класичних задач електродинаміки. У [236], [237] розв'язок задачі про дифракцію плоскої хвилі на напівплощині отримано методом Джонса. У [238], [239] записано інтегральні рівняння відносно густини струмів. У [240] розв'язок отримано за допомогою факторизації ядра парних інтегральних рівнянь. У [241] розглянуто випадок падіння довільного двовимірного електромагнітного поля, а у [242] – неоднорідної плоскої хвилі. У [243], [244] метод Вінера-Хопфа застосовано до системи паралельних напівплощин. В

даний час наведені розв'язки використовуються в асимптотичній теорії дифракції, при проєктуванні антен [245]-[247].

У [248], [249] розглянуто розсіяння хвиль круглим диском або щілиною у площині за допомогою розкладання у степеневий ряд. У [234], [235] використовується метод моментів. Невідомі спектральні функції розкладаються у ряд гіпергеометричних поліномів, які було отримано в результаті інтегрування функцій Беселя. У [250]-[252] парні інтегральні рівняння задачі про дифракцію на круглому ідеально провідному та імпедансному диску розв'язуються за допомогою методу потенціалів Кобаяші.

У [253]-[255] з використанням методу Гальоркіна виконано дискретизацію інтегральних рівнянь для електричного поля в області скалярного перетворення Ханкеля, отриманих для ідеально провідного нескінченно тонкого круглого резонатора у багат шаровому середовищі, а також диску на границі середовища з втратами. У [256] з використанням методу Гальоркіна виконано дискретизацію інтегральних рівнянь для електричного поля, але в області векторного перетворення Ханкеля у задачі про дифракцію на довільно орієнтованому диску, який розташовано на границі середовища з втратами.

Метод парних інтегральних рівнянь у поєднанні з процедурою аналітичної регуляризації вперше було використано для розв'язання задачі про дифракцію плоскої хвилі на ідеально провідному диску у [257], [258]. У [259] використовується метод аналітичної регуляризації для розв'язання задачі про дифракцію на нескінченно тонкому круглому диску. Тут проєктування виконується за допомогою методу Гальоркіна на власні функції статичної частини оператора задачі. У [260] метод аналітичної регуляризації використано для дослідження тонкого диску скінченної товщини. У [261] отримано інтегральні рівняння відносно функції розподілу струмів на диску, які розв'язуються у довгохвильовому наближенні. У [262],

[263] сингулярні інтегральні рівняння відносно густини струмів на диску зведено до інтегрального рівняння Фредгольма з використанням методу аналітичної регуляризації. Метод аналітичної регуляризації застосовується до задачі про дифракцію на тонкому діелектричному диску скінченної товщини у [264].

У наведених роботах розглядалися або напівплощини, або диски. Цікавим є розглянути систему, яка складається з напівплощини та дисків. Відмітимо, що, з одного боку, такий об'єкт має нескінченні розміри, тому що напівплощина є нескінченною. З іншого боку, розсіяні поля мають містити такі ж хвилі, які збуджуються й при дифракції на скінченних об'єктах. Розсіяне поле повинно складатися з плоскої хвилі, відбитої напівплощиною, з циліндричних хвиль, розсіяних на краю напівплощини, зі сферичних хвиль, розсіяних на диску та перевідбитих від напівплощини і диску.

До цього часу операторний метод вдало застосовувався і було отримано ефективні розв'язки задач про дифракцію на структурах, розсіяні поля в яких містили лише плоскі хвилі, лише циліндричні хвилі, лише сферичні хвилі, а також були суперпозицією полів плоских і циліндричних хвиль [15]-[26]. У цій роботі операторний метод розвивається на структуру, у якій розсіяні поля є суперпозицією плоских, циліндричних і сферичних хвиль одночасно [265]-[269].

7.2.1. Постановка задачі

Розглянемо ідеально провідну нескінченно тонку напівплощину $y < 0$, $z = 0$ і ідеально провідний нескінченно тонкий диск радіусу r , який лежить в площині $z = 0$ і зсунутий вздовж осі Oy на величину Δ . Диск задається рівнянням $x^2 + (y - \Delta)^2 < r^2$. Передбачається, що на структуру з області $z > 0$ падає плоска монохроматична хвиля з вектором амплітуд Фур'є $q = (q_x, q_y)^*$,

де “*” означає транспонування. Дотичні компоненти падаючого електричного поля мають вигляд

$$\begin{pmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \exp(-ik(Ax + By + \gamma(A,B)z)), \quad (7.9)$$

де $\gamma(A,B) = \sqrt{1 - A^2 - B^2}$, A , B – косинуси кутів падіння відносно осей Oz , Ox і Oy відповідно, $\text{Re } \gamma \geq 0$, $\text{Im } \gamma \geq 0$. Повне поле – сума падаючого і розсіяного полів, $E_\Theta = E_\Theta^i + E_\Theta^s$, $\Theta = x, y$. Всі інші компоненти електромагнітного поля можуть бути виражені через компоненти E_x і E_y .

Геометрію структури і напрямки поширення хвиль надано на рис.7.7.

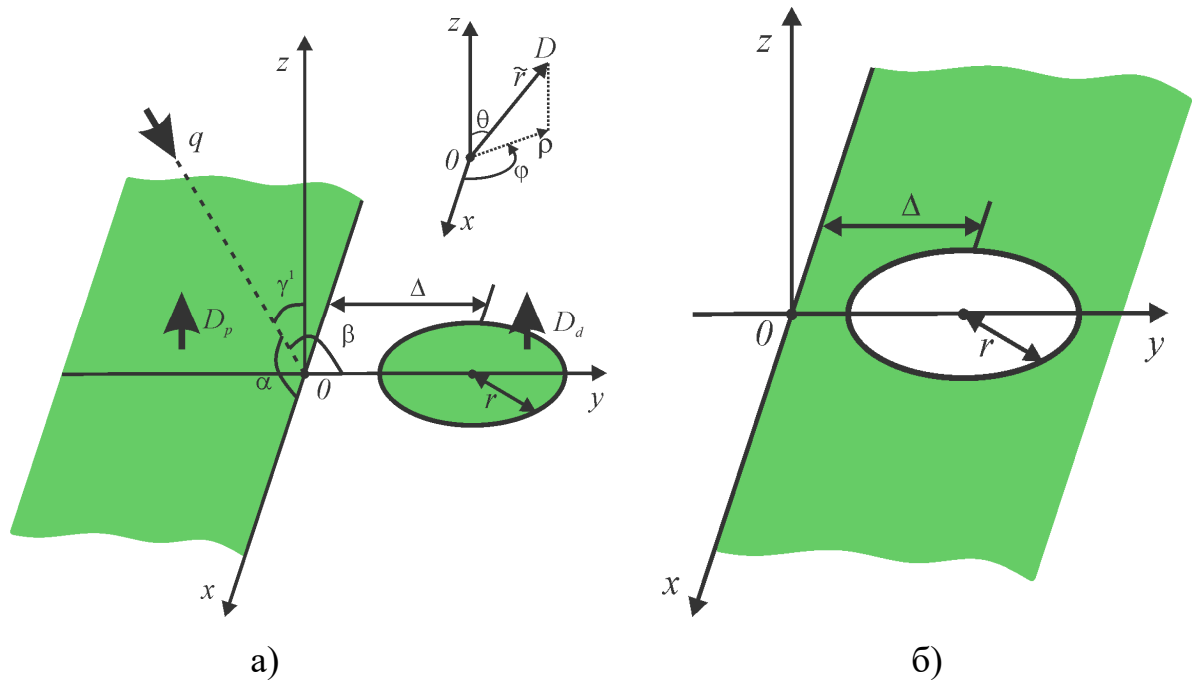


Рис.7.7 Геометрія досліджуваної структури. а) Пряма задача, напівплощина та диск, які лежать в одній площині. б) Дуальна задача, напівплощина з круглим отвором

Розв'язок задачі отримаємо в просторі перетворень Фур'є.

Введемо оператори проходження та відбиття напівплощини $y < 0$, $z = 0$, T_1 і R_1 , і диску радіусу r , $x^2 + y^2 < r$, центр якого співпадає з початком координат, T_2 і R_2 ,

$$T_j = \begin{pmatrix} T_{j,xx} & T_{j,xy} \\ T_{j,yx} & T_{j,yy} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

$$R_j = \begin{pmatrix} R_{j,xx} & R_{j,xy} \\ R_{j,yx} & R_{j,yy} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Їх дія на довільну функцію g може бути описана за допомогою інтегралів

$$(R_j g)_\Theta(\xi_x, \xi_y) = \sum_{\Xi=x,y} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int R_{j,\Theta\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) g_\Xi(\zeta_x, \zeta_y) d\zeta_x d\zeta_y \quad (7.10)$$

$$(T_j g)_\Theta(\xi_x, \xi_y) = \sum_{\Xi=x,y} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int T_{j,\Theta\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) g_\Xi(\zeta_x, \zeta_y) d\zeta_x d\zeta_y,$$

$$\Theta = x, y, \quad j = 1, 2, \quad (7.11)$$

де $R_{j,\Theta\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y)$, $T_{j,\Theta\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y)$ ядра операторів. Вони вважаються відомими. Оператори розсіяння напівплощини можуть бути знайдено методом факторизації [240], а оператори розсіяння диску можуть бути знайдено методом моментів [234], [235]. У роботах [234], [235] задачу розв'язано лише для випадку, коли хвильовий вектор падаючого поля лежить у площині xOy , а розсіяне поле надано у циліндричній системі координат. Випадок довільного падіння можна отримати з використанням афінних перетворень обертання. У подальшому аналізі необхідно надати розсіяне поле у декартовій системі координат як суперпозицію плоских хвиль, які поширюються під дійсними і уявними кутами. Для цього використовується надання функції Беселя як суперпозиції плоских хвиль,

$$J_m(x) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \exp(i(x \cos \psi - m \psi)) d\psi.$$

Амплітуди Фур'є поля, відбитого поодинокю напівплощиною $a_p = (a_{p,x}, a_{p,y})^*$ та поодиноким диском $a_d = (a_{d,x}, a_{d,y})^*$, можуть бути надані за допомогою (7.10), (7.11) як

$$a_j = R_j q, \quad j = 1, 2. \quad (7.12)$$

При формулюванні дуальної задачі розглядається напівплощина $y > 0$ з круглою щілиною з центром при $y = \Delta$ і радіусом r . Наступний аналіз, для визначеності, ми проведемо для напівплощини і диску.

7.2.2. Операторні рівняння

Поле, розсіяне системою, яка складається з напівплощини і диску, шукається як сума двох полів. Одне з них – поле з амплітудою Фур'є $D_p = (D_{p,x}, D_{p,y})^*$, розсіяне напівплощиною. Інше – поле з амплітудою Фур'є $D_d = (D_{d,x}, D_{d,y})^*$, розсіяне диском,

$$E_{\Theta}^s(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (D_{p,\Theta}(\xi_x, \xi_y) + D_{d,\Theta}(\xi_x, \xi_y)) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, \\ \Theta = x, y, z > 0. \quad (7.13)$$

Поле з амплітудою D_p у (7.13) – це поле струмів, які течуть напівплощиною.

Поле з амплітудою Фур'є D_d у (7.13) – це поле струмів, які течуть диском.

Для визначення невідомих амплітуд можуть бути отримані наступні операторні рівняння

$$D_p = R_1 D_d + R_1 q, \quad (7.14)$$

$$D_d = s^- R_2 s^+ D_p + s^- R_2 s^+ q, \quad (7.15)$$

де оператори s^{\pm} діють як і у (1.8). Рівняння (7.14), (7.15) означають, що розсіяне (відбите) поле можна надати як суму полів, розсіяних на ізольованій напівплощині і ізольованому диску (другі доданки у правій частині), а також поля, яке виникає за рахунок багатократних перевідбиттів між напівплощиною і диском (перші доданки у правій частині).

У (7.14) перший доданок справа пов'язано зі сферичною хвилею. Він є невідомим, так як містить невідому функцію D_d . Другий доданок є відомим.

Введемо нову функцію

$$D_{p,1} = D_p - R_1 q \quad (7.16)$$

і перепишемо (7.15) і (7.16) як

$$D_{p,1} = R_1 D_d, \quad (7.17)$$

$$D_d = s^- R_2 s^+ D_{p,1} + s^- R_2 s^+ q + s^- R_2 s^+ R_1 q. \quad (7.18)$$

Поле плоскої хвилі, розсіяне на ізольованій напівплощині, може бути надано як сума плоскої хвилі, відбитої нескінченною частиною, $y < 0$, і циліндричної хвилі, розсіяної на краї, $y = 0$. В результаті, ядро оператора R_p має не інтегровану на дійсній осі сингулярність. Для виключення сингулярності необхідно провести процедуру регуляризації.

7.2.3. Процедура регуляризації

Розглянемо інтеграл з не інтегрованою на дійсній осі сингулярністю

$$(\hat{R}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{R}(\xi, \zeta) f(\zeta)}{\zeta - B} d\zeta. \quad (7.19)$$

below

Для його регуляризації віднімемо від підінтегральної функції такий доданок, щоб їх різниця не мала особливостей. Інтеграл від самого доданка повинен обчислюватися аналітично. Для того, щоб підтримати тотожність, цей самий доданок і додається.

Перетворимо шлях інтегрування в (7.19) у комплексній площині так, щоб він співпадав з дійсною віссю всюди, за виключенням особливої точки $\zeta = B$, а особливу точку обходив знизу, як зазначено в (7.19) за допомогою позначення “*below*”. Тоді отримаємо, як і в пункті 1.1.3,

$$(\hat{R}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{R}(\xi, \zeta) f(\zeta)}{\zeta - B} - \frac{\hat{R}(\xi, B) f(B)}{\zeta - B} \right) d\zeta + \pi i \hat{R}(\xi, B) f(B). \quad (7.20)$$

У (7.20) враховано, що $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\zeta - \underset{\text{below}}{B}} d\zeta = \pi i$ [37]. Підінтегральна функція у

(7.20) не має вже особливостей. Таким чином, інтеграл можна розуміти у сенсі головного значення за Коші. Регулярні інтеграли можна розглядати як інтеграли у сенсі головного значення за Коші у будь-якій точці. Беручи до уваги, що $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\zeta - B} d\zeta = 0$, отримаємо

$$(\hat{R}f)(\xi) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{R}(\xi, \zeta) f(\zeta)}{\zeta - B} d\zeta + \pi i \hat{R}(\xi, B) f(B) \equiv (F^- \hat{R}f)(\xi). \quad (7.21)$$

Використовуючи такі саме ідеї, маємо

$$\begin{aligned} (\hat{R}_1 f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{R}_1(\xi, \zeta) f(\zeta)}{\zeta - \underset{\text{above}}{B}} d\zeta = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{R}(\xi, \zeta) f(\zeta)}{\zeta - B} d\zeta - \\ &- \pi i \hat{R}(\xi, B) f(B) \equiv (F^+ \hat{R}_1 f)(\xi), \end{aligned} \quad (7.22)$$

де позначення “above” означає, що сингулярність необхідно обходити зверху. Оператори F^\pm є регуляризуючими.

Після регуляризації (7.21), (7.22) операторні рівняння (7.17), (7.18) перетворюються як

$$D_{p,1} = F^- R_1 D_d, \quad (7.23)$$

$$D_d = s^- R_2 s^+ D_{p_1} + s^- R_2 s^+ q + s^- R_2 s^+ F^+ R_1 q. \quad (7.24)$$

Рівняння (7.23), (7.24) може бути зведено до інтегральних рівнянь, які містять інтегровані особливості.

7.2.4. Інтегральні рівняння

Зведемо операторні рівняння (7.23), (7.24) до еквівалентних інтегральних рівнянь такого вигляду, щоб до них можна було застосувати строгий метод числового розв'язання. При дискретизації для отримання швидко збіжної схеми необхідно враховувати всі сингулярності аналітично.

Ядро оператора R_d має кореневу особливість. Введемо новий оператор R , надавши цю особливість явно,

$$R_{2,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) = R_{\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) / \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}. \quad (7.25)$$

У (7.25) $R_{\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y)$, $\Theta = x, y$, $\Xi = x, y$, – це ядро оператора R , яке не має особливостей.

Невідомі амплітуди у (7.23), (7.24) мають особливості. Враховуючи явний вигляд оператора відбиття напівплощини і (7.16), (7.26), введемо нові функції $D_1 = (D_{1,x}, D_{1,y})^*$ і $D_2 = (D_{2,x}, D_{2,y})^*$, які б не мали особливостей, як

$$D_{1,x}(\xi_x, \xi_y) = \left(D_{p,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} \frac{q_x}{\xi_y - B_{below}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad (7.26)$$

$$D_{1,y}(\xi_x, \xi_y) = \left(D_{p,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{q_x}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}} \frac{q_y}{\xi_y - B_{below}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad (7.27)$$

$$D_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = D_{d,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad \Theta = x, y. \quad (7.28)$$

Підставляючи (7.25)-(7.28) і явний вигляд оператора R_p у (7.23), (7.24), беручи до уваги (7.10)-(7.12), остаточно отримуємо інтегральні рівняння відносно регулярних функцій $D_{j,\Theta}$:

$$D_{1,x}(\xi_x, \xi_y) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \xi_y} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{2,x}(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \zeta_y}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \xi_y} - \frac{D_{2,x}(\xi_x, \xi_y)}{2}, \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
D_{1,y}(\xi_x, \xi_y) &= \frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \xi_y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{2,x}(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{1-\xi_x^2 - \zeta_y^2}} \frac{\xi_x}{\sqrt{1-\xi_x^2}} \frac{d\zeta_y}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \zeta_y}} + \\
&+ \frac{i}{2\pi} \sqrt{1-\xi_x^2 - \xi_y^2} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \zeta_y}} \frac{D_{2,y}(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{1-\xi_x^2 - \zeta_y^2}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \xi_y} - \frac{D_{2,y}(\xi_x, \zeta_y)}{2},
\end{aligned} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned}
&D_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\xi_y \Delta) = \\
&= \sum_{\Xi=x,y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\zeta_y \Delta)}{\sqrt{1-\zeta_x^2 - \zeta_y^2}} D_{1,\Xi}(\zeta_x, \zeta_y) R_{\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) d\zeta_x d\zeta_y - \\
&- \frac{iq_x}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-A^2} - B} \times \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\zeta_y \Delta) R_{\Theta,x}(\xi_x, \xi_y, A, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \zeta_y}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - B} + \\
&+ \frac{iq_x}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1-\alpha^2} - B}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\zeta_y \Delta) R_{\Theta,y}(\xi_x, \xi_y, A, \zeta_y) d\zeta_y}{\sqrt{\sqrt{1-\alpha^2} - \zeta_y}} - \\
&- \frac{iq_y}{2\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \zeta_y} \exp(ik\zeta_y \Delta) R_{\Theta,y}(\xi_x, \xi_y, A, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - B}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - B} + \\
&+ \exp(ik\beta\Delta) \left(R_{\Theta,x}(\xi_x, \xi_y, A, B) \frac{q_x}{2} + R_{\Theta,y}(\xi_x, \xi_y, A, B) \frac{q_y}{2} \right).
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Рівняння (7.29)-(7.31) є сингулярними інтегральними рівняннями другого роду. У зв'язку з тим, що інтервал інтегрування є нескінченним (може бути перетворено у коло), додаткові умови не потрібні. Розв'язок єдиний [134]. Отже, для дискретизації можна використовувати квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

7.2.5. Дискретизація

Для дискретизації (7.29)-(7.31) нескінченний інтервал інтегрування замінювався скінченним симетричним, $(-a; a)$. Інтервал $(-a; a)$ розбивався на N однакових підінтервалів, що не перетинаються, $S_n = (-a + 2an/N; -a + 2a(n+1)/N)$, $n = 0, \dots, N-1$. На кожному n -му

підінтервалі S_n вибирався один вузол, $\eta_n = -a + 2a(n+1/2)/N$. Невідома функція замінювалася сталою на кожному підінтервалі, $f(\xi) \approx f(\eta_n)$:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)g(\xi)d\xi}{\xi - \zeta} \approx v.p. \int_{-a}^a \frac{f(\xi)g(\xi)d\xi}{\xi - \zeta} = \sum_{n=0}^{N-1} v.p. \int_{S_n} \frac{f(\xi)g(\xi)d\xi}{\xi - \zeta} \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(\eta_n)c_n, \quad (7.32)$$

де $c_n = v.p. \int_{S_n} \frac{g(\xi)d\xi}{\xi - \zeta}$ – коефіцієнти, $f(\xi)$ – одна з невідомих амплітуд, $g(\xi)$ – вагова функція. Коефіцієнти c_n є відомими і їх може бути виражено через елементарні функції.

Найбільший інтерес представляє відбиття у нормальному напрямку відносно площини структури, тобто вздовж осі Oz . Цей напрямок описується $\xi_x = 0$, $\xi_y = 0$. Таким чином, один з вузлів повинен співпадати з $\eta_l = 0$, а N повинно бути непарним.

Після дискретизації (7.29)-(7.31) за схемою (7.32) може бути отримано лінійне матричне рівняння другого роду вигляду

$$\hat{D}_1 = \hat{R}_1 \hat{D}_2, \quad (7.33)$$

$$\hat{D}_2 = \hat{R}_2 \hat{D}_1 + \hat{R}_3 q, \quad (7.34)$$

де \hat{D}_1 і \hat{D}_2 – вектори значень невідомих функцій у вузлах, \hat{R}_1 , \hat{R}_2 , \hat{R}_3 – матриці в правій частині (7.29)-(7.31).

Беручи до уваги відносно велику розмірність результуючої матриці (7.33), (7.34) (число елементів дорівнює $4N^4$), пропонується використання ітераційної процедури, яку можна реалізувати за формулою:

$$\hat{D}_2^0 = \hat{R}_3 q \quad (7.35)$$

$$\hat{D}_1^l = \hat{R}_1 \hat{D}_2^{l-1}, \quad (7.36)$$

$$\hat{D}_2^l = \hat{R}_2 \hat{D}_1^l + \hat{R}_3 q, \quad l = 1, \dots, L, \quad (7.37)$$

де (7.35) задає початкове наближення, L – число ітерацій, \hat{D}_1^l , \hat{D}_2^l – розв'язок, отриманий на l -й ітерації (7.36), (7.37).

7.2.6. Аналіз збіжності

Збіжність наближеного розв'язку до точного базується на відповідних теоремах про апроксимацію сингулярних інтегралів [134]. Дослідимо числову збіжність. Похибка числових результатів залежить від розміру інтервалу інтегрування $(-a; a)$ (дивись (7.32), кількості вузлів N , числа ітерацій L . Передбачається, що плоска паралельно поляризована (вектор \vec{E} є паралельним до границі напівплощини) хвиля ортогонально падає, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma_1 = 0^\circ$, на структуру. Визначимо відносну похибку як

$$\varepsilon(N) = |D(N) - D(2N - 1)| / |D(2N - 1)|, \quad (7.38)$$

$$\varepsilon(a) = |D(a) - D(\Phi)| / |D(\Phi)|, \quad (7.39)$$

$$\delta(L) = |D(L) - D(L + 1)| / |D(L + 1)|, \quad (7.40)$$

де $D = |D_{x,1}(0,0)| + |D_{y,1}(0,0)|$, $\Phi/r = 10$.

На рис.7.8 наведено результати дослідження числової збіжності. У зв'язку з тим, що значення $\xi_x^2 + \xi_y^2 \leq 1$ відповідають дійсним кутам поширення сферичних хвиль, обрано $a > 1$. На рис.7.8 а) співвідношення $N/a = const$. Починаючи з певних значень параметрів графіки спадають монотонно. Зі збільшенням радіусу диску необхідно вибрати більше вузлів.

Для валідації результатів проведено порівняння з результатами, отриманими в HFSS. Для того, щоб змодельовати напівплощину була обрана ідеально провідна стрічка розміром $5\lambda \times 5\lambda$. На рис.7.9 наведено результати порівняння, розподіл поля в області над структурою. Як видно, результати співпадають з графічною точністю. Необхідно відмітити, що у зв'язку з тим, що структура не є періодичною, хоча і нескінченною, періодичні граничні умови в HFSS неможна застосувати. Тому доводиться моделювати нескінченний об'єкт, яким є напівплощина, за допомогою скінченної стрічки. Отримані результати суттєво залежали від розміру "vacuum-box". Варіації результатів, отриманих в HFSS, склали приблизно 5%.

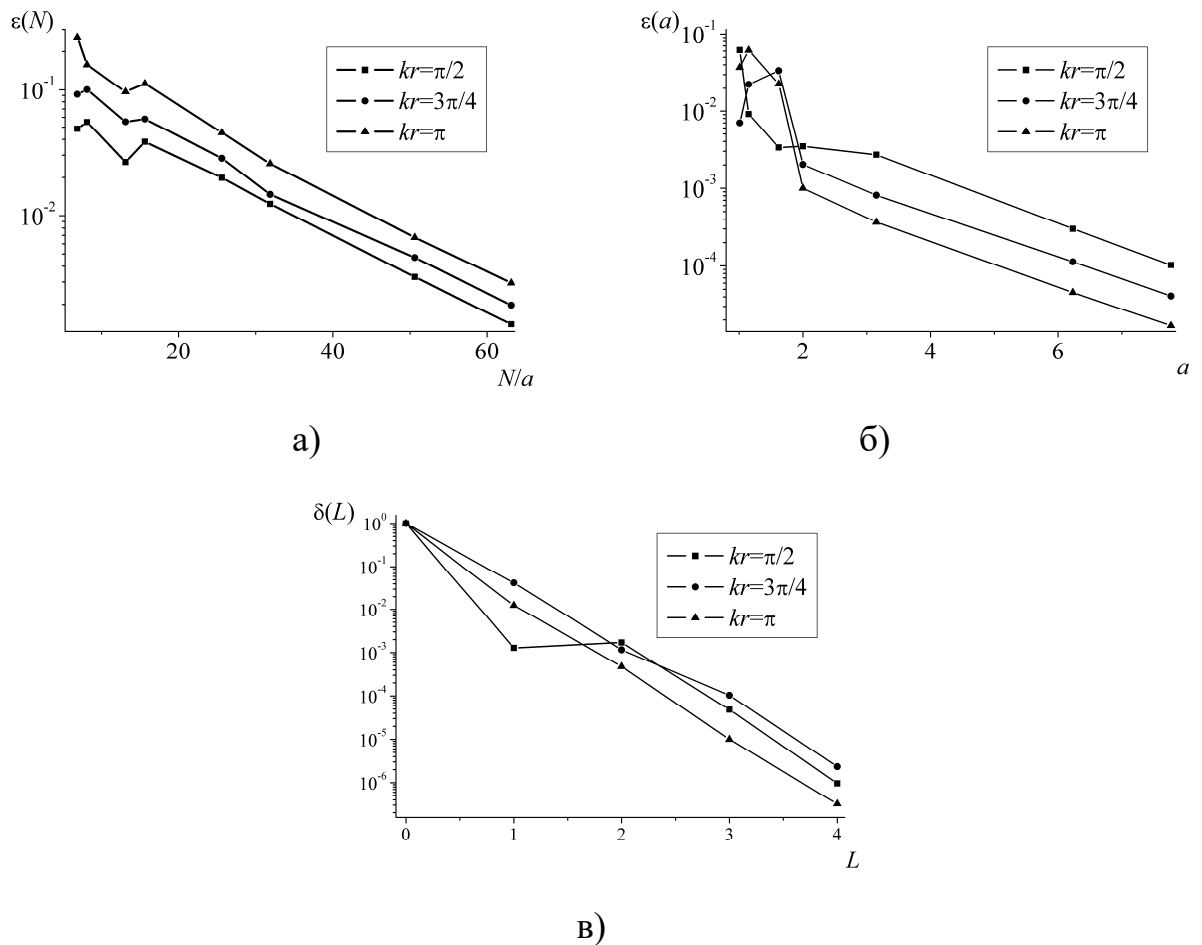


Рис.7.8 Залежності відносної похибки від а) N/a , б) a , в) L при $\Delta/r = 2$

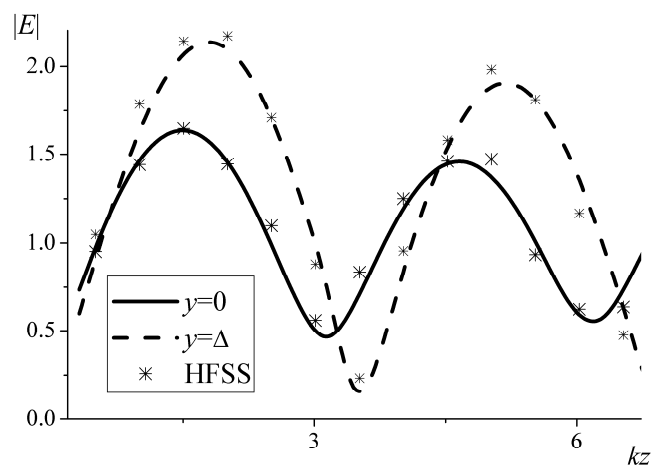


Рис.7.9 Порівняння результатів для розподілу повного поля при $y = 0$ (суцільна крива), $y = \Delta$ (штрихова крива), $x = 0$, $\Delta/r = 3$, $kr = \pi$, паралельна поляризація, $q_x = 1$, $q_y = 0$, нормальне падіння. Результати, отримані в HFSS, наведено у якості зірочок

7.2.7. Поля в далекій зоні

Поле, розсіяне структурою, складається з хвиль трьох типів,

$$E^{sc} = E^{pw} + E^{err} + E^{sw}. \quad (7.41)$$

Перший тип, доданок E^{pw} , – плоска хвиля, відбита нескінченною частиною структури. Її амплітуда не спадає при збільшенні відстані $\tilde{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Наявність плоскої хвилі в розсіяному полі призводить до появи не інтегрованих особливостей у ядрах інтегральних операторів. Другий тип, доданок E^{err} , – циліндричні хвилі, які виникають в результаті розсіювання ребром півплощини. Зі збільшенням полярної відстані $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ їх амплітуда спадає всюди, окрім площини $y = 0$. Поблизу площини $y = 0$ доданок E^{err} забезпечує неперервність асимптотичного надання поля у далекій зоні. Третій тип, доданок E^{sw} , – це сферичні хвилі. Зі збільшенням відстані \tilde{r} їх амплітуда спадає. Ці хвилі виникають в результаті розсіювання на диску та багаторазового перерозсіювання між півплощиною і диском.

За допомогою методу перевалу можна отримати асимптотичне співвідношення поля сферичних хвиль у далекій зоні, при $k\tilde{r} \rightarrow \infty$, [38]

$$|E_{\Theta}^{sw}(\tilde{r} \cos \varphi \sin \theta, \tilde{r} \sin \varphi \sin \theta)| \sim \frac{2\pi}{k\tilde{r}} D_{\Theta}(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta),$$

де $D_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) = |D_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y) + D_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y)|$, $\Theta = x, y$, $(\tilde{r}, \theta, \varphi)$ – координати сферичної системи координат.

На рис.7.10-рис.7.14 наведено діаграми спрямованості сферичних хвиль у далекій зоні для паралельної, $q_x = 1$, $q_y = 0$, та ортогональної, $q_x = 0$, $q_y = 1$, поляризації, які нормуються на глобальний максимум для всіх рис.7.10-рис.7.14. Позначення осей відповідають прямій задачі. У випадку двоїстої задачі слід замінити $D_x \leftrightarrow D_y$. Для порівняння як зірочки наведено результати для ізольованого диску.

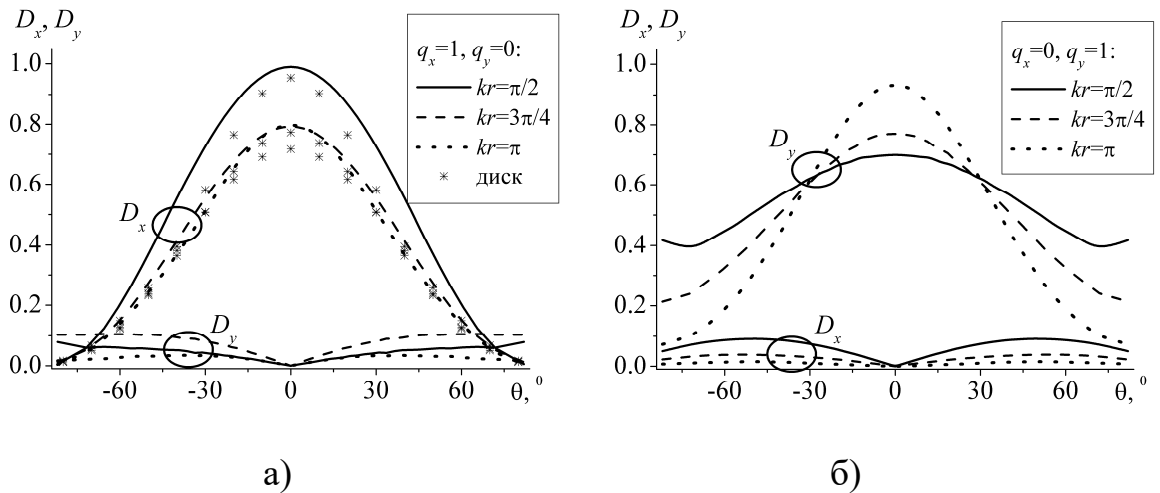


Рис.7.10 Нормовані діаграми спрямованості сферичних хвиль при $kr = \pi/2$ (суцільні криві), $kr = 3\pi/4$ (штрихові криві), $kr = \pi$ (пунктирні криві), ізольований диск (маркери), $\varphi = 0^\circ$, $\Delta/r = 2$, нормальне падіння. а) паралельна поляризація (ортогональна поляризація для дуальної задачі), $q_x = 1$, $q_y = 0$, б) ортогональна поляризація (паралельна поляризація для дуальної задачі), $q_x = 0$, $q_y = 1$

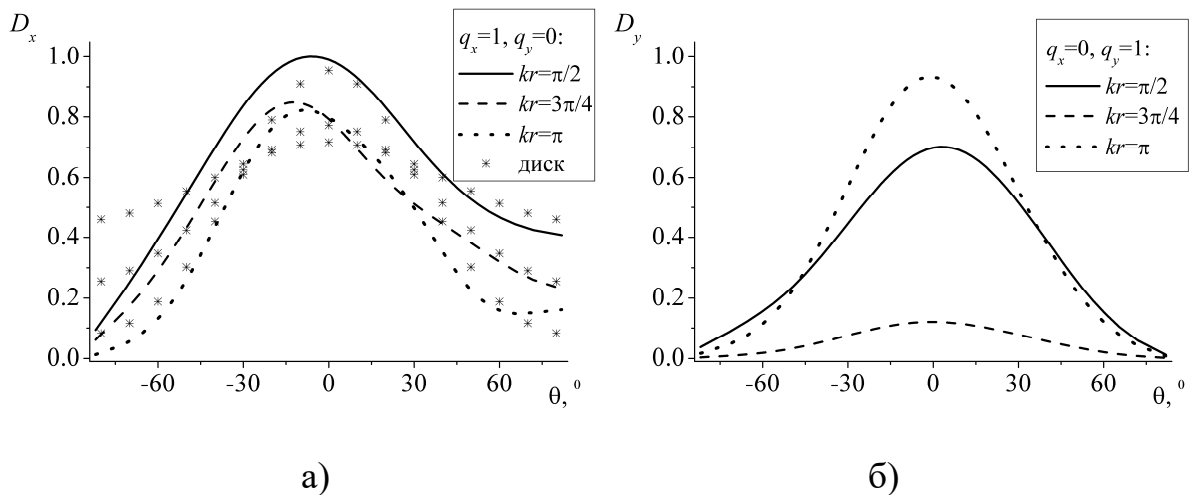


Рис.7.11 Нормовані діаграми спрямованості сферичних хвиль при $kr = \pi/2$ (суцільні криві), $kr = 3\pi/4$ (штрихові криві), $kr = \pi$ (пунктирні криві), ізольований диск (маркери), $\varphi = 90^\circ$, $\Delta/r = 2$, нормальне падіння. а) паралельна поляризація, $q_x = 1$, $q_y = 0$, б) ортогональна поляризація, $q_x = 0$, $q_y = 1$

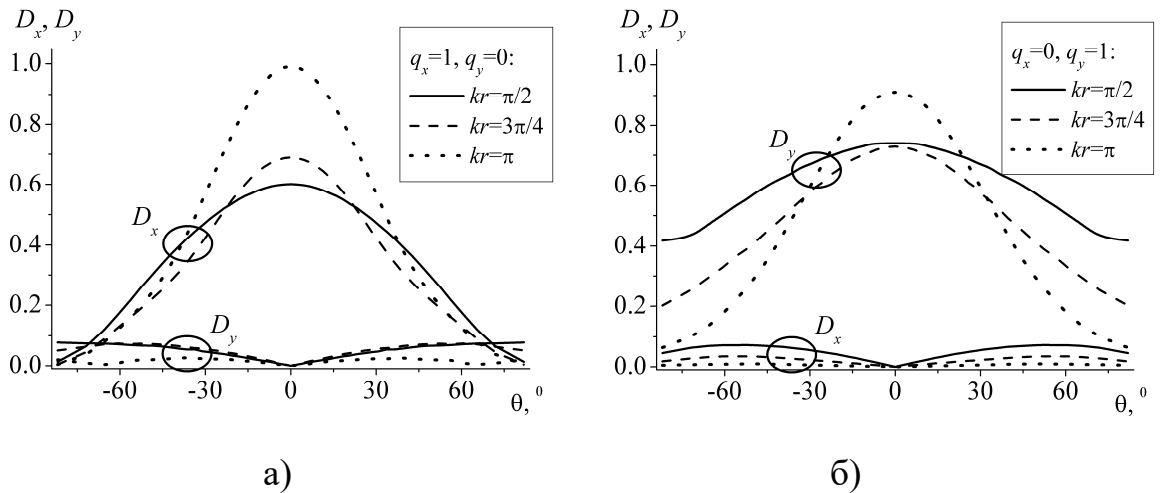


Рис.7.12 Нормовані діаграми спрямованості сферичних хвиль при $kr = \pi/2$ (суцільні криві), $kr = 3\pi/4$ (штрихові криві), $kr = \pi$ (пунктирні криві), $\varphi = 0^\circ$, $\Delta/r = 3$, нормальне падіння. а) паралельна поляризація, $q_x = 1, q_y = 0$, б) ортогональна поляризація, $q_x = 0, q_y = 1$

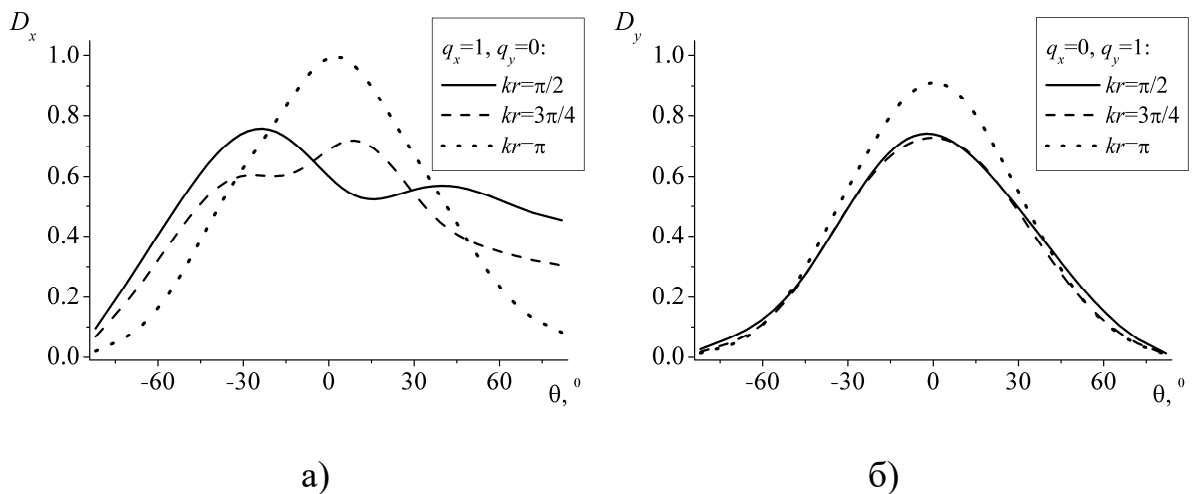


Рис.7.13 Нормовані діаграми спрямованості сферичних хвиль при $kr = \pi/2$ (суцільні криві), $kr = 3\pi/4$ (штрихові криві), $kr = \pi$ (пунктирні криві), $\varphi = 90^\circ$, $\Delta/r = 3$, нормальне падіння. а) паралельна поляризація, $q_x = 1, q_y = 0$, б) ортогональна поляризація, $q_x = 0, q_y = 1$

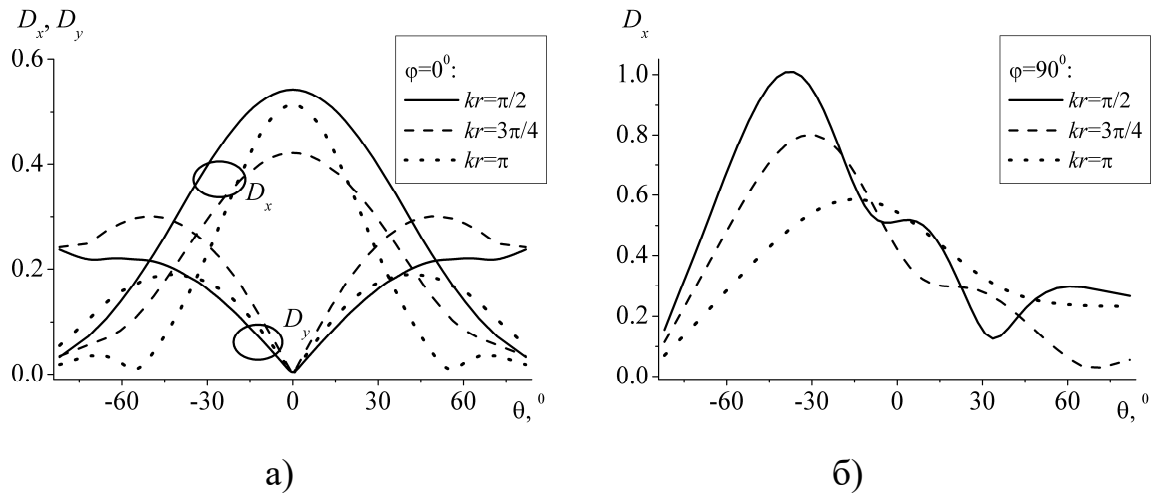


Рис.7.14 Нормовані діаграми спрямованості сферичних хвиль, $kr = \pi/2$ (суцільні криві) при $kr = 3\pi/4$ (штрихові криві), $kr = \pi$ (пунктирні криві), $\varphi = 90^\circ$, $\Delta/r = 2$, падіння під кутом, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 45^\circ$, паралельна поляризація, $q_x = 1$, $q_y = 0$. а) $\varphi = 0^\circ$, б) $\varphi = 90^\circ$

Особливий інтерес представляють два значення хвильового числа $kr = \pi/2$ (діаметр диску дорівнює $\lambda/2$) і $kr = \pi$ (діаметр диску дорівнює λ). Вони відповідають резонансній області. Повний переріз розсіювання ізолюваного диску має максимум, якщо $kr \approx \pi/2$, і мінімум біля точки $kr \approx \pi$.

У площині xOz , $\varphi = 0^\circ$, діаграми симетричні відносно $\theta = 0^\circ$, оскільки структура є симетричною відносно осі Oy . При $\varphi = 90^\circ$, у випадку паралельної поляризації маємо $D_y \equiv 0$, а при перпендикулярній – $D_x \equiv 0$. У порівнянні з ізолюваним диском, діаграми демонструють відмінну поведінку. Вони стають несиметричними при $\varphi \neq 0^\circ$ через електромагнітний зв'язок між півплощиною і диском. При $\Delta/r = 2$ і для паралельної поляризації максимум спостерігається біля $kr = \pi/2$. При збільшенні відстані між диском і півплощиною маємо іншу ситуацію, максимум спостерігається при $kr = \pi$, як і у випадку ізолюваного диску.

7.2.8. Поля в ближній зоні

Розсіяне поле описується за допомогою (7.13). З (7.26), (7.27) випливає, що D_p і D_d мають не інтегровані особливості в точках, які відповідають постійній поширення плоскої хвилі. Для усунення сингулярностей використано процедуру регуляризації (7.21). Після цього за допомогою (7.32) розраховано значення дотичних компонент електричного поля в будь-якій точці.

На рис.7.15-рис.7.18 наведено розподіл повного поля у ближній зоні. Компонента E_y обертається в нуль у площині $x=0$ при паралельній поляризації, а також компонента E_x обертається в нуль у цій самій площині при перпендикулярній поляризації. Те саме справедливо і для картин поля E_y у випадку паралельної поляризації, та E_x у випадку перпендикулярної поляризації.

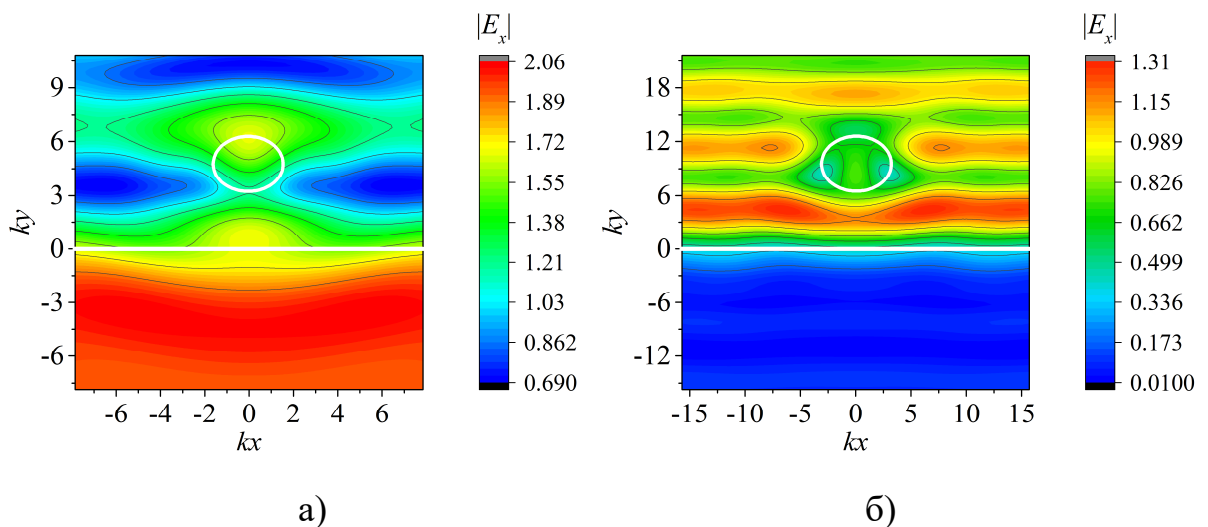


Рис.7.15 Розподіл повного поля, компонента $|E_x|$, у площині $z=r$, нормальне падіння, $\Delta/r=3$, паралельна поляризація, $q_x=1$, $q_y=0$. а) $kr = \pi/2$, б) $kr = \pi$. Білими лініями наведено контур диску та напівплощини

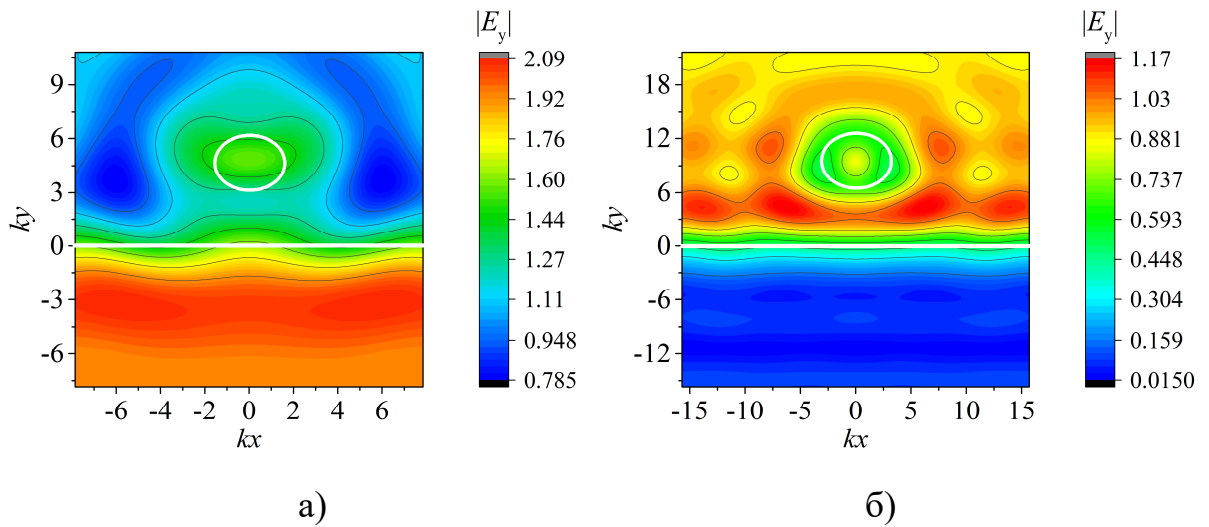


Рис.7.16 Розподіл повного поля, компонента $|E_y|$, у площині $z = r$, нормальне падіння, $\Delta/r = 3$, ортогональна поляризація, $q_x = 0$, $q_y = 1$.

а) $kr = \pi/2$, б) $kr = \pi$. Білими лініями наведено контур диску та напівплощини

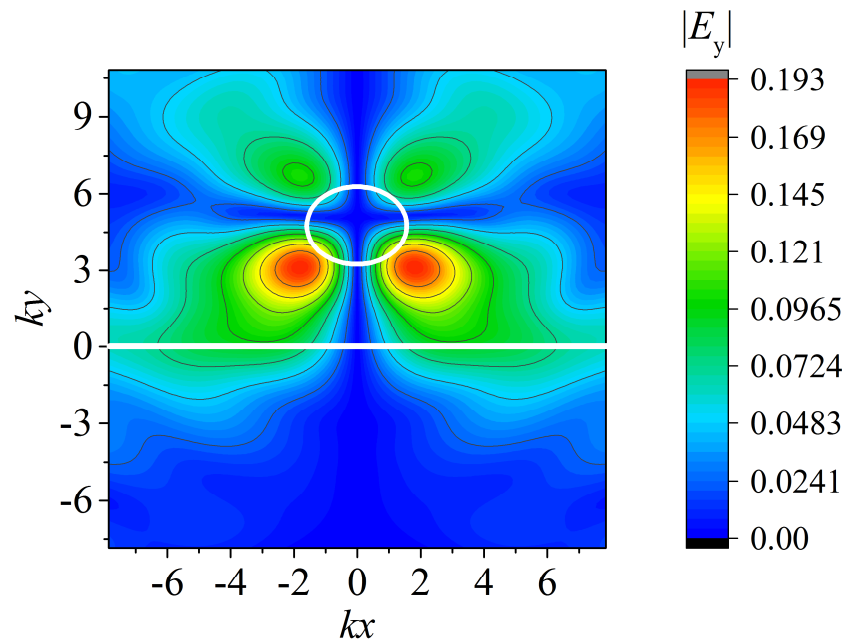


Рис.7.17 Розподіл повного поля, компонента $|E_y|$, у площині $z = r$, нормальне падіння, $\Delta/r = 3$, паралельна поляризація, $q_x = 1$, $q_y = 0$, $kr = \pi/2$.

Білими лініями наведено контур диску та напівплощини

Чітко простежується вплив диску на електромагнітне поле, в тому числі на поле, розсіяне напівплощиною. Як видно, у випадку $kr = \pi$ взаємний зв'язок між півплощиною і диском слабший. Контурні лінії (лінії однакової амплітуди) стають паралельними до краю півплощини.

Поле плоскої хвилі, як і поле сферичної хвилі, добре видно на рис.7.18. Відбита плоска хвиля існує лише в області $y < 0$. Тут картина поля циліндричних і сферичних хвиль затьмарюється картиною поля відбитої плоскої хвилі. Площина $y = 0$ діє як межа тіні або перехідна область. Дальнє поле тут, в основному, описується інтегралами Френеля [240].

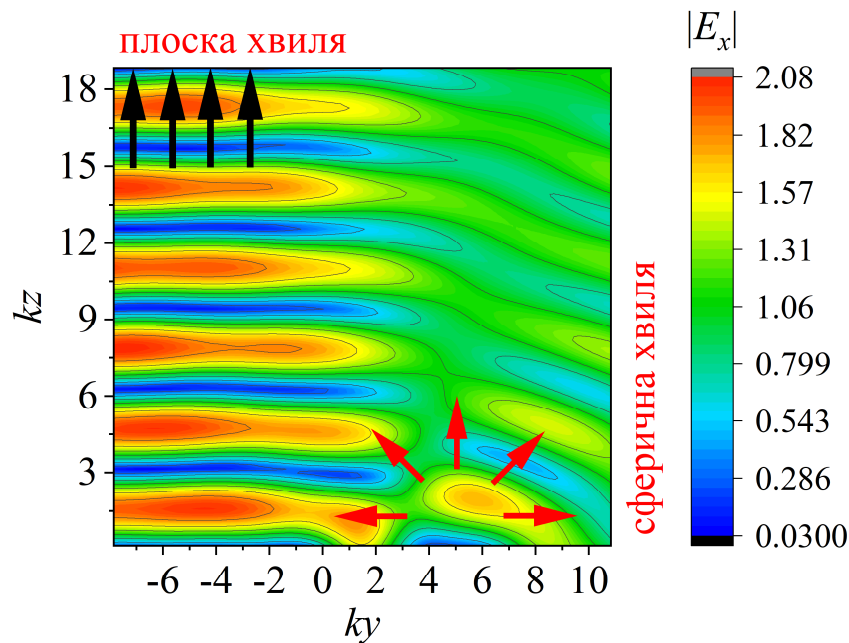


Рис.7.18 Розподіл повного поля, компонента $|E_x|$, у площині yOz , нормальне падіння, $\Delta/r = 3$, паралельна поляризація, $q_x = 1$, $q_y = 0$, $kr = \pi/2$

7.3. Дифракція плоскої електромагнітної хвилі на напівплощині та диску, які лежать в паралельних площинах

У попередньому параграфі було розглянуто диск і напівплощину, які лежать в одній площині. У цьому параграфі розглядається більш загальний

випадок, коли диск і напівплощина лежать у паралельних площинах. Таким чином з'являється ще одна область, область між напівплощиною та диском. З математичної точки зору це означає, що необхідно записати додаткові рівняння, які описують поля в цій області. З методологічної точки зору необхідно ввести нові оператори для того, щоб записати остаточні операторні рівняння у стислій формі. Ці оператори буде використано і у наступному параграфі, коли буде розглянуто напівплощину та два диски. Розміщення двох об'єктів у різних площинах дозволяє додатково вивчити ефекти, пов'язані з впливом краю на характеристики розсіяних полів. Наприклад, диск, знаходячись у області тіні, не будучи опромінений падаючою плоскою хвилею напряму, або знаходячись у вузлі поля стоячої хвилі, може розсіювати електромагнітне поле, яке з'являється через присутність краю у напівплощині.

7.3.1. Постановка задачі

Розглянемо систему ідеально провідних і нескінченно тонких розсіювачів, яка складається з напівплощини $y < 0$, $z = 0$ і диску радіусу r , $x^2 + (y - \Delta)^2 < r^2$, розміщеного у площині $z = h$, $h > 0$. Плоска монохроматична хвиля з вектором амплітуд Фур'є $q = (q_x, q_y)^*$ падає з “верхнього” напівпростору $z > h$. Плоска монохроматична хвиля з вектором амплітуд Фур'є $p = (p_x, p_y)^*$ падає з “нижнього” напівпростору $z < 0$.

У розглянутій задачі всі компоненти електромагнітного поля можна виразити через дві незалежні дотичні компоненти електричного поля E_x і E_y .

Падаюче поле надамо як

$$\begin{pmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \exp(-ik(Ax + By + \gamma(A, B)z)) + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \exp(ik(Ax + By + \gamma(A, B)z)),$$

(7.42)

де $\gamma(A, B) = \sqrt{1 - A^2 - B^2}$ ($\text{Re } \gamma \geq 0, \text{Im } \gamma \geq 0$), $A = \cos \alpha$, $B = \cos \beta$ – косинуси кутів падіння γ^1 , α , β відносно осей Oz , Ox , Oy .

У спектральній області, тобто у області перетворень Фур'є, розсіяне поле шукаємо як інтеграли Фур'є з невідомими амплітудами A_Θ , B_Θ , C_Θ , D_Θ , $\Theta = x, y$,

$$E_\Theta^s(x, y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_\Theta(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, & z > h, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (B_\Theta(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)z) + C_\Theta(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h))) \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, & 0 < z < h, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_\Theta(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y - \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, & z < 0. \end{cases} \quad (7.43)$$

Геометрія структури і напрямки поширення плоских хвиль наведено на рис.7.19.

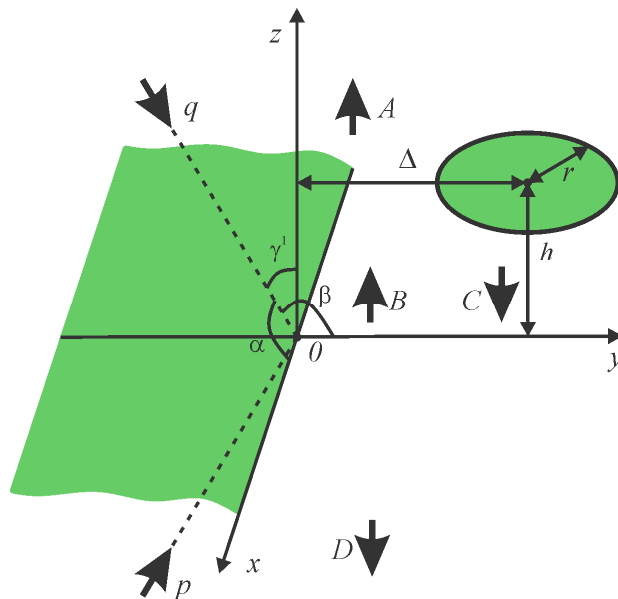


Рис.7.19 Геометрія досліджуваної структури

7.3.2. Операторні рівняння

Як і в пункті 7.2.1 введемо оператори проходження та відбиття напівплощини $y < 0$, $z = 0$, T_1 і R_1 , і диску радіусу r , $x^2 + y^2 < r$, центр якого співпадає з початком координат, T_2 і R_2 , дія яких на довільну функцію описується рівняннями (7.10), (7.11).

Розсіяне поле можна надати як суму поля, розсіяного ізольованою напівплощиною і диском, і поля, перерозсіяного ними. Якщо позначити амплітуду Фур'є поля перерозсіяних хвиль, які поширюються в позитивному напрямку осі Oz через B , а які поширюються в негативному напрямку осі Oz через C (див. (7.43)), то можна записати наступні операторні рівняння:

$$A = e^{-s^-} T_2 e^{+s^+} B + e^{-s^-} R_2 e^{-s^+} q, \quad (7.44)$$

$$B = R_1 e^{+s^-} C + T_1 p, \quad (7.45)$$

$$C = R_2 e^{+s^+} B + T_2 e^{-s^+} q, \quad (7.46)$$

$$D = T_1 e^{+s^-} C + R_1 p, \quad (7.47)$$

де дія операторів s^\pm і e^\pm зводиться до множення на експоненту $\exp(\pm ik \xi_y \Delta)$ і $\exp(\pm ik \gamma(\xi_x, \xi_y) h)$. Вони описують зміну фази поля при зсуві системи координат вздовж осей Oy і Oz .

Зауважимо, що оператори проходження та відбиття пов'язані наступним співвідношенням:

$$T_j = I + R_j, \quad j = 1, 2. \quad (7.48)$$

Віднімемо амплітуду Фур'є падаючого поля (яка пропорційна дельта-функції) від амплітуд Фур'є розсіяного поля. Введемо нові функції B_1 , C_1 за формулами:

$$B_1 = B - p, \quad C_1 = C - e^{-s^+} q. \quad (7.49)$$

Тоді з урахуванням (7.48), (7.49) рівняння (7.44)-(7.48) можна переписати як

$$A = B_1 + e^{-s^-} R_2 e^{+s^+} B_1 + e^{-s^-} R_2 s^+ (e^+ p + e^- q), \quad (7.50)$$

$$B_1 = R_1 e^+ s^- C_1 + R_1 (p + q), \quad (7.51)$$

$$C_1 = R_2 e^+ s^+ B_1 + R_2 s^+ (e^+ p + e^- q), \quad (7.52)$$

$$D = e^+ s^- C_1 + R_1 e^+ s^- C_1 + R_1 (p + q) + p. \quad (7.53)$$

Якщо амплітуди B_1 і C_1 буде знайдено з (7.51), (7.52), тоді з (7.50), (7.53) можна буде знайти амплітуди A і D . Тому нашою метою є звести рівняння (7.51), (7.52) до такого вигляду, щоб їх можна було розв'язати чисельно.

7.3.3. Інтегральні рівняння

Для того, щоб отримати інтегральні рівняння, до яких можливо застосувати квадратурні формули, надамо явно особливості ядер операторів відбиття та амплітуд Фур'є. Ядро оператора відбиття напівплощини має не інтегровану особливість на дійсній осі, яка відповідає постійній поширення відбитої плоскої хвилі. До того ж ядра операторів мають інтегровані кореневі особливості. Введемо новий оператор R за формулою (7.25), а також нові функції

$$B_{2,x}(\xi_x, \xi_y) = \left(B_{1,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} \frac{q_x + p_x}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1-\xi_x^2-\xi_y^2}, \quad (7.54)$$

$$B_{2,y}(\xi_x, \xi_y) = \left(B_{1,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{q_x + p_x}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}} \frac{q_y + p_y}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1-\xi_x^2-\xi_y^2}, \quad (7.55)$$

$$C_{2,\theta}(\xi_x, \xi_y) = C_{1,\theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1-\xi_x^2-\xi_y^2}. \quad (7.56)$$

Амплітуди Фур'є B_2 і C_2 описують лише поле сферичних хвиль.

Після підстановки (7.25), (7.54), (7.55), (7.56) і ядра оператора відбиття напівплощини у явному вигляді у (7.51), (7.52) можна отримати інтегральні рівняння. Для того, щоб записати їх у стислому вигляді, введемо позначення

$$(F_1 g)(\xi_x, \xi_y) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \xi_y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \zeta_y}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \xi_y}, \quad (7.57)$$

$$(F_2 g)(\xi_x, \xi_y) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} + \xi_y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \zeta_y}} \frac{\xi_x}{\sqrt{1-\xi_x^2}} \frac{d\zeta_y}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \zeta_y}}, \quad (7.58)$$

$$(F_3 g)(\xi_x, \xi_y) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{1-\xi_x^2 - \xi_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-\xi_x^2} - \zeta_y}} \frac{g(\xi_x, \zeta_y)}{\sqrt{1-\xi_x^2 - \zeta_y^2}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \xi_y}, \quad (7.59)$$

$$F_4 g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta_x, \zeta_y)}{\sqrt{1-\zeta_x^2 - \zeta_y^2}} d\zeta_x d\zeta_y, \quad (7.60)$$

$$F_5 g = -\frac{i}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1-A^2} - B} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(A, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \zeta_y}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \frac{B}{\text{above}}}, \quad (7.61)$$

$$F_6 g = \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - B}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(A, \zeta_y) d\zeta_y}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \zeta_y}}, \quad (7.62)$$

$$F_7 g = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \zeta_y} g(A, \zeta_y)}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - B}} \frac{d\zeta_y}{\zeta_y - \frac{B}{\text{above}}}, \quad (7.63)$$

$$F_8 g = g(A, B). \quad (7.64)$$

Тоді у позначеннях (7.57)-(7.64) інтегральні рівняння є

$$B_{2,x} = F_1 e^+ s^- C_{2,x}, \quad (7.65)$$

$$B_{2,y} = F_2 e^+ s^- C_{2,x} + F_3 e^+ s^- C_{2,y}, \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned} C_{2,\Theta} = & F_4 e^+ s^+ (R_{2,\Theta,x} B_{2,x} + R_{2,\Theta,y} B_{2,y}) + (q_x + p_x) \cdot F_5 e^+ s^+ R_{2,\Theta,x} \\ & + (q_x + p_x) \cdot F_6 e^+ s^+ R_{2,\Theta,y} + (q_y + p_y) \cdot F_7 e^+ s^+ R_{2,\Theta,y} \\ & + F_8 (R_{2,\Theta,x} s^+ (e^+ p_x + e^- q_x) + R_{2,\Theta,y} s^+ (e^+ p_y + e^- q_y)), \quad \Theta = x, y. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Підінтегральні функції у (7.57), (7.59), (7.61), (7.63) мають не інтегровану особливість на дійсній осі. Для її виключення необхідно

провести процедуру регуляризації, описану в пункті 7.2.3. Після чого можна застосувати схему дискретизації, описану в пункті 7.2.5. В результаті можна отримати наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\hat{B}_2 = M_1 \hat{C}_2, \quad (7.68)$$

$$\hat{C}_2 = M_2 \hat{B}_2 + q_x M_3 + p_x M_4, \quad (7.69)$$

де \hat{B}_2 і \hat{C}_2 – вектори, які відповідають невідомим значенням $B_{2,x}$, $B_{2,y}$, $C_{2,x}$, $C_{2,y}$ у вузлах, M_i , $i=1,\dots,4$, – матриці і вектори, які відповідають правій частині рівнянь (7.65), (7.66), (7.66).

Систему рівнянь (7.68), (7.69) можна розв'язати з використанням ітераційною процедури, організувавши процес за формулою

$$\hat{C}_2^0 = q_x M_3 + p_x M_4, \quad (7.70)$$

$$\hat{B}_2^j = M_1 \hat{C}_2^j, \quad (7.71)$$

$$\hat{C}_2^{j+1} = M_2 \hat{B}_2^j + q_x M_3 + p_x M_4, \quad j=0,1,\dots,L, \quad (7.72)$$

де верхній індекс j – номер ітерації, L – загальне число ітерацій. Формула (7.70) задає початкове наближення ітераційного процесу (7.71), (7.72).

7.3.4. Аналіз збіжності

У зв'язку з тим, що збіжність методу базується на відповідних теоремах [134], розв'язок задачі можна отримати з будь-яким наперед заданим ступенем точності, яка обмежується лише машинною точністю. Дослідимо числову збіжність, використовуючи (7.38)-(7.40), де замість D необхідно писати A^{sw} .

На рис.7.20 наведено залежності похибки від кількості вузлів інтерполяції, довжини інтервалу інтегрування та кількості ітерацій. Починаючи з певного значення параметра, збіжність є монотонною. Рівняння (7.65), (7.66), (7.67) містять експоненційно спадаючий член, який описується

операторами e^{\pm} . У результаті $\varepsilon(a)$ спадає експоненційно (див. рис.7.20 б), якщо $a \gg 1$, на відміну від випадку, наведеного на рис.7.8 б). Швидкість збіжності залежить від kh , збільшується зі збільшенням значення параметру.

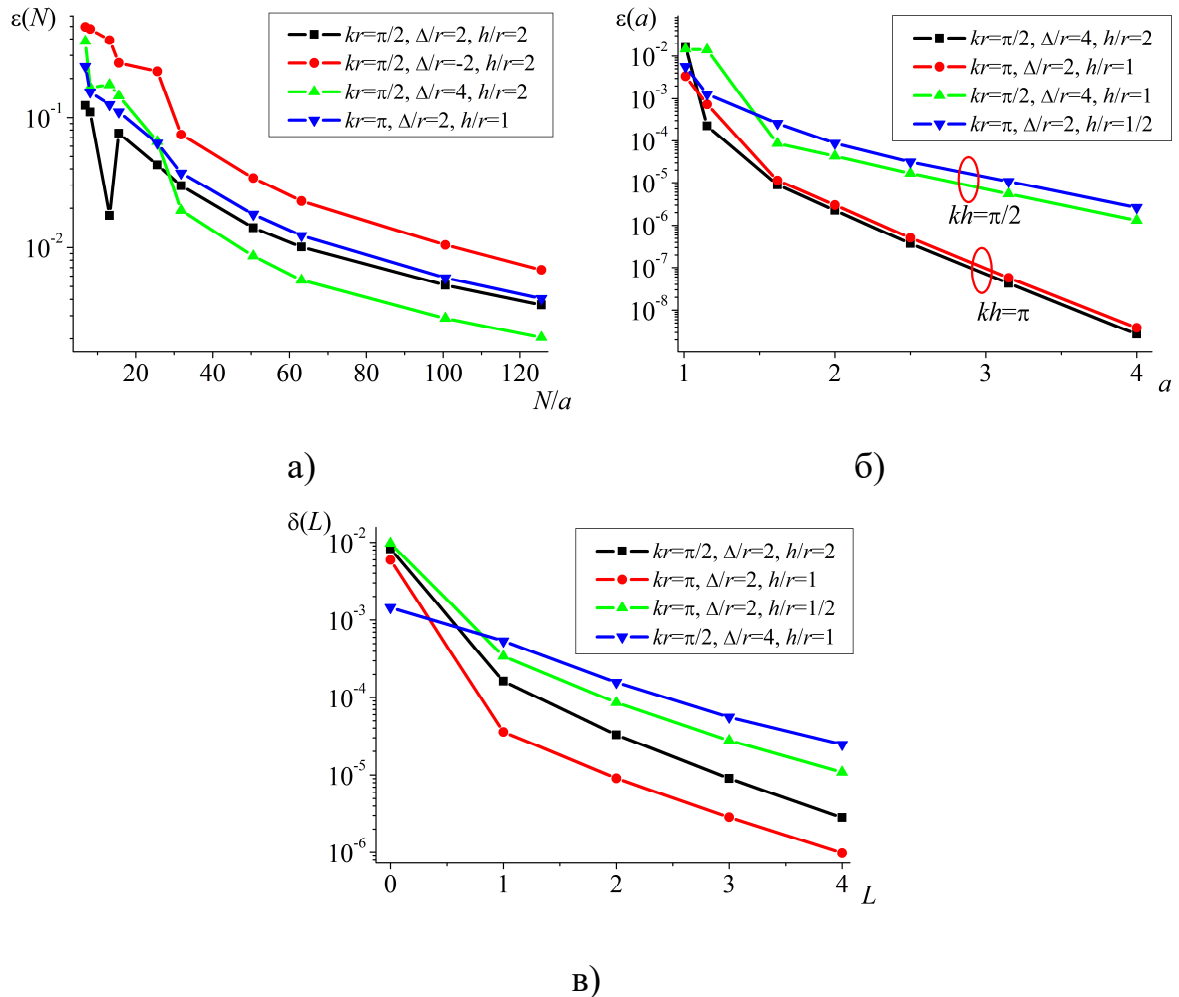


Рис.7.20 Залежності відносної похибки від а) N/a , б) a , в) L

7.3.5. Поля в далекій зоні

Поле у далекій зоні, розсіяне розглянутою структурою, як і у випадку диску і напівплощини, які лежать в одній площині, можна надати як суму трьох доданків (7.41). Позначимо як A_{\ominus}^{sw} і D_{\ominus}^{sw} амплітуди Фур'є поля сферичних хвиль в області $z > h$ і $z < 0$ відповідно. Явні вирази для них можна отримати з (7.50), (7.53) після проведення процедури регуляризації

інтегралів. Використовуючи метод перевалу [38] можна записати вираз для амплітуди поля сферичних хвиль у далекій зоні,

$$|E_{\ominus}^{sw}(\tilde{r} \cos \varphi \sin \theta, \tilde{r} \sin \varphi \sin \theta)| \sim \begin{cases} \frac{2\pi}{k\tilde{r}} A_{\ominus}^{sw}(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta), & z > 0, \\ \frac{2\pi}{k\tilde{r}} D_{\ominus}^{sw}(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta), & z < 0, \end{cases} \quad (7.73)$$

На рис.7.21-рис.7.25 наведено нормовані діаграми спрямованості поля сферичних хвиль.

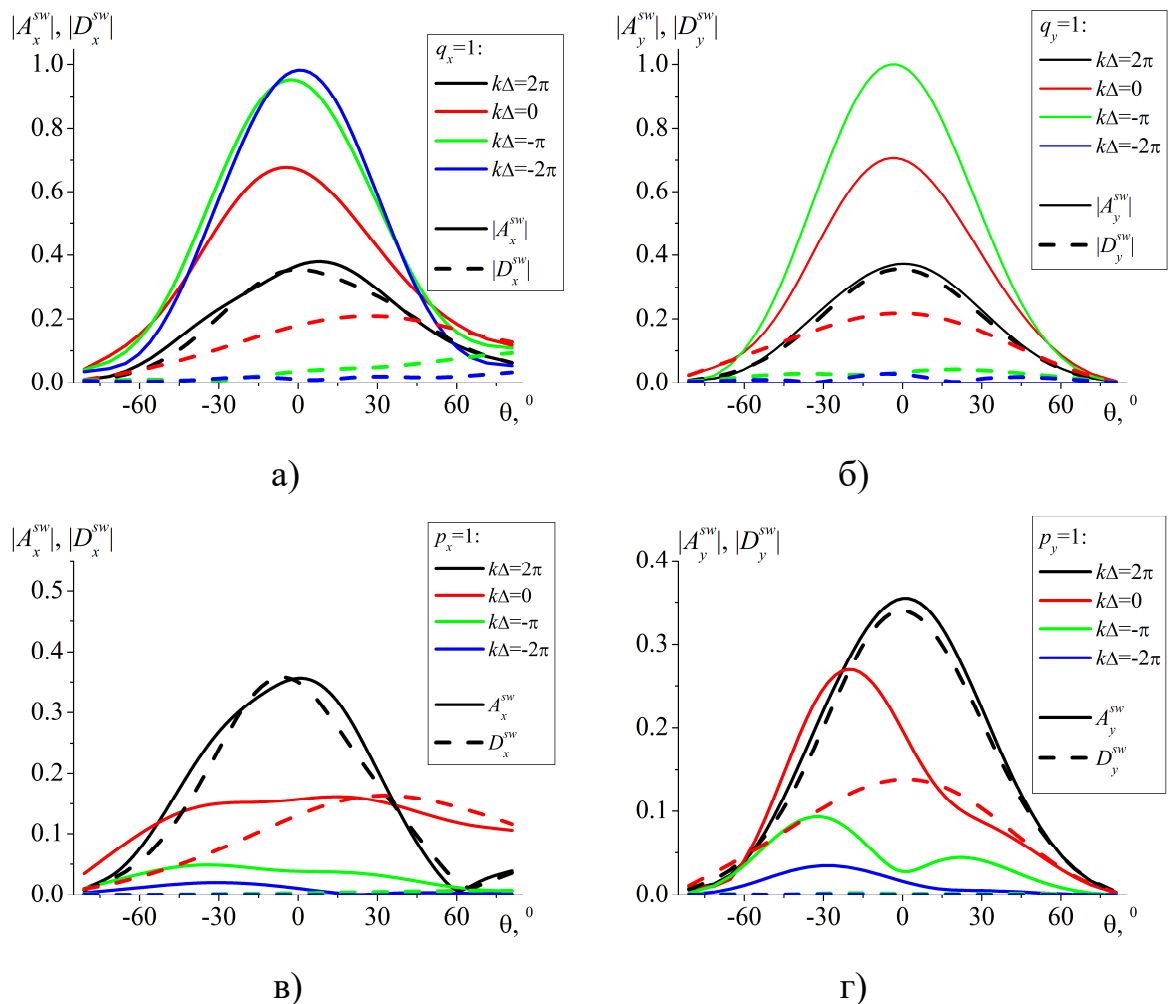


Рис.7.21 Діаграми спрямованості, компоненти A_x^{sw} і A_y^{sw} (суцільні криві), D_x^{sw} і D_y^{sw} (штрихові криві) при різних значеннях $k\Delta$, $\varphi = 90^\circ$, $kr = \pi$, $kh = \pi/2$, нормальне падіння $\alpha = \beta = 90^\circ$. а) $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$; б) $q_y \neq 0$, $q_x = p_x = p_y = 0$; в) $p_x \neq 0$, $q_x = q_y = p_y = 0$; г) $p_y \neq 0$, $q_x = q_y = p_x = 0$

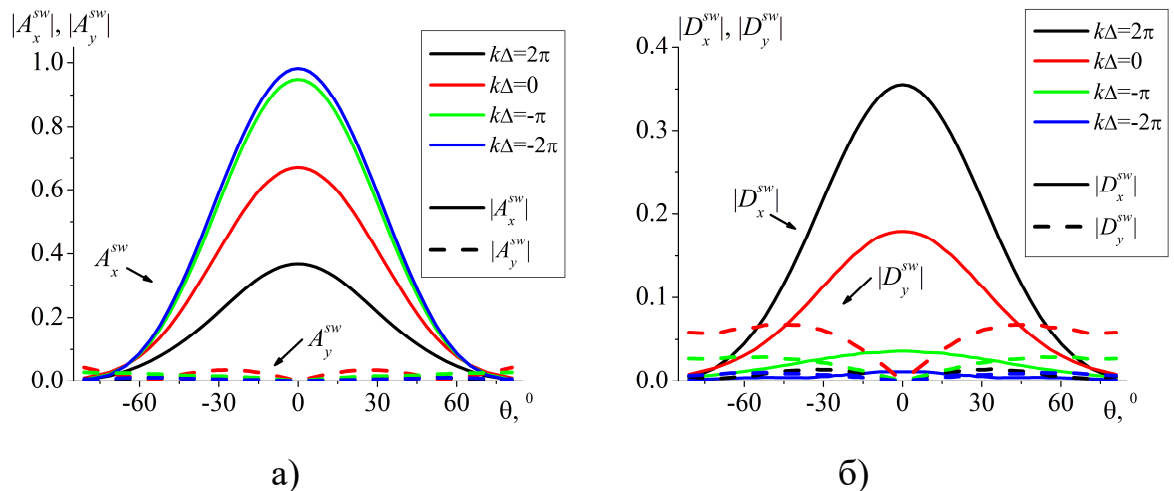


Рис.7.22 Діаграми спрямованості, компоненти A_x^{sw} і D_x^{sw} (суцільні криві) A_y^{sw} і D_y^{sw} (штрихові криві) при різних $k\Delta$, $\varphi = 0^\circ$, $kr = \pi$, $kh = \pi/2$, нормальне падіння $\alpha = \beta = 90^\circ$, $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$. а) A_x^{sw} , A_y^{sw} , б) D_x^{sw} , D_y^{sw}

Дослідження розсіяних полів проводиться для двох значень радіусу, $kr = \pi/2$ ($r = \lambda/4$) і $kr = \pi$ ($r = \lambda/2$), двох значень відстані між площиною та диском по осі Oz , $kh = \pi/2$ і $kh = \pi$, та кількох значень зсуву Δ по осі Oy . Розглянуті значення радіусу відповідають резонансним випадкам. Біля них спостерігаються максимуми та мінімуми повного перерізу розсіювання ізольованого диску [235]. Всі графіки діаграм спрямованості нормовано на глобальний максимум.

У випадку нескінченної ідеально провідної площини значення $kh = \pi/2$ відповідає максимумам (пучностям), а значення $kh = \pi$ відповідає мінімумам (вузлам) амплітуди електричного поля стоячої хвилі, утвореної суперпозицією падаючої та відбитої плоских хвиль. У випадку нескінченної ідеально провідної площини, якщо розмістити ідеально провідний нескінченно тонкий диск в площині $kh = \pi$, розсіювання плоскої хвилі не буде відбуватися, сферичні хвилі не будуть збуджуватися. Проте, як видно з рисунків, у випадку розглянутої структури, відмінне від нуля поле циліндричних хвиль існує через наявність краю. Як наслідок, E^{sw} також

відмінне від нуля. Водночас через наявність стоячої хвилі, при $y < 0$, амплітуда сферичних хвиль для випадку $kh = \pi/2$ (див. рис.7.21 а), б) перевищує амплітуду сферичних хвиль для випадку $kh = \pi$ (див. рис.17 а), б).

Розглянемо розсіяне поле при різному значенні зсуву диску Δ вздовж осі Oy . При $\Delta > 0$ диск знаходиться переважно в полі падаючої плоскої хвилі з невеликим внеском поля краю півплощини. Поле у далекій зоні демонструє майже однакову поведінку для $kh = \pi/2$ і $kh = \pi$.

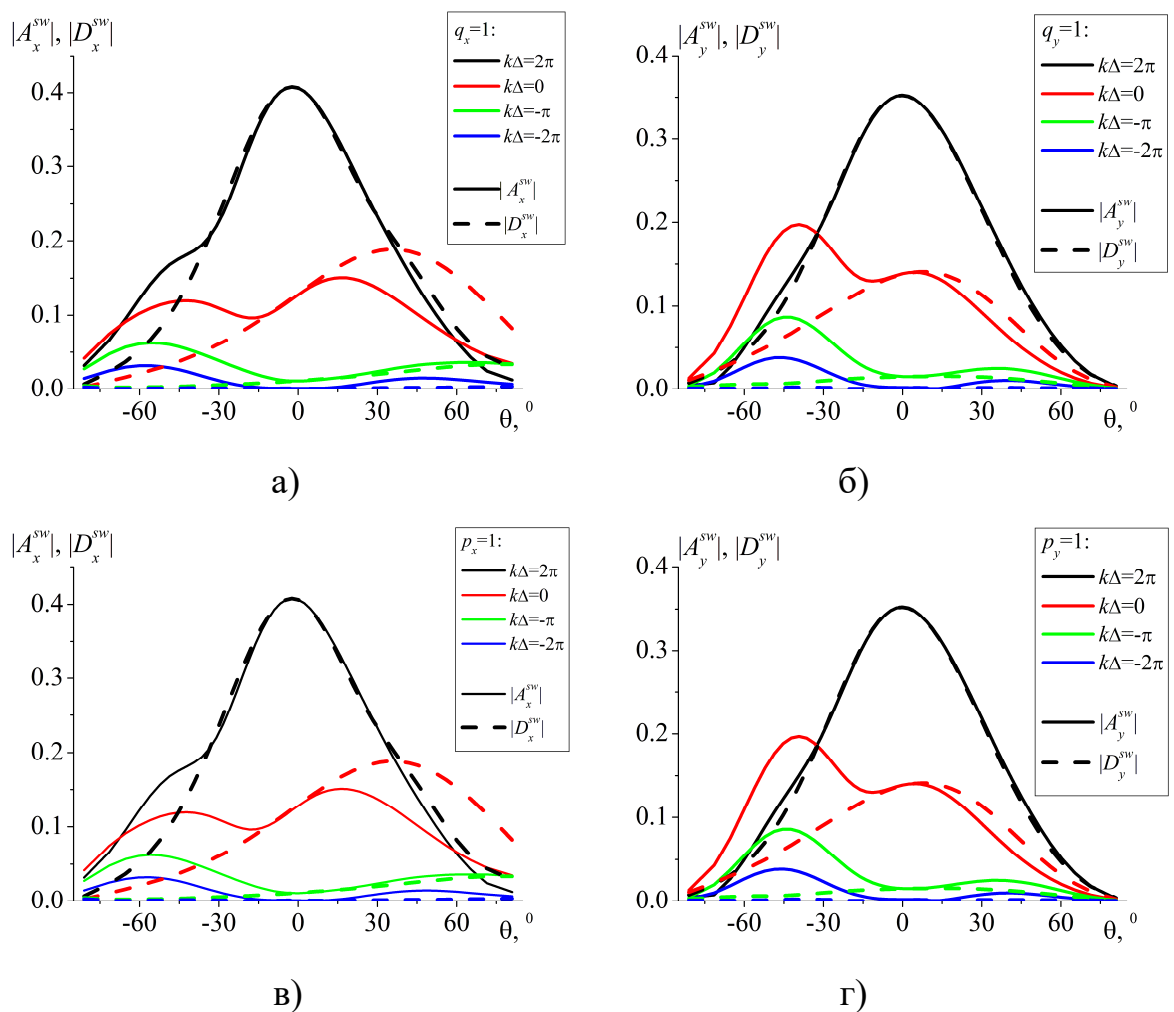


Рис.7.23 Діаграми спрямованості, компоненти A_x^{sw} і A_y^{sw} (суцільні криві), D_x^{sw} і D_y^{sw} (штрихові криві) при різних значеннях $k\Delta$, $\varphi = 90^\circ$, $kr = \pi$, $kh = \pi$, нормальне падіння $\alpha = \beta = 90^\circ$. а) $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$, б) $q_y \neq 0$, $q_x = p_x = p_y = 0$, в) $p_x \neq 0$, $q_x = q_y = p_y = 0$, г) $p_y \neq 0$, $q_x = q_y = p_x = 0$

Розглянемо спочатку випадок $q_x \neq 0$ або $q_y \neq 0$ (падіння “зверху”) і $p_x = 0$, $p_y = 0$. Якщо переміщувати диск у бік від’ємних значень осі Oy , поведінка поля у далекій зоні в значному ступені залежить від відстані h . При $kh = \pi/2$ диск розміщено в пучності стоячої хвилі. У результаті амплітуда сферичної хвилі зростає до деякої постійної величини, коли впливом циліндричної хвилі можна знехтувати порівняно зі стоячою хвилею. При $kh = \pi$ диск розміщено у вузлі стоячої хвилі. В результаті амплітуда сферичної хвилі спадає при переміщенні диску від краю півплощини, проте $|E^{sw}| > 0$ за рахунок збудження циліндричних хвиль.

У випадку $p_x \neq 0$ або $p_y \neq 0$ (падіння “знизу”) значення h не впливає суттєвим чином, оскільки диск взагалі не опромінюється падаючою плоскою хвилею при $\Delta < -r$, знаходячись тут у області тіні.

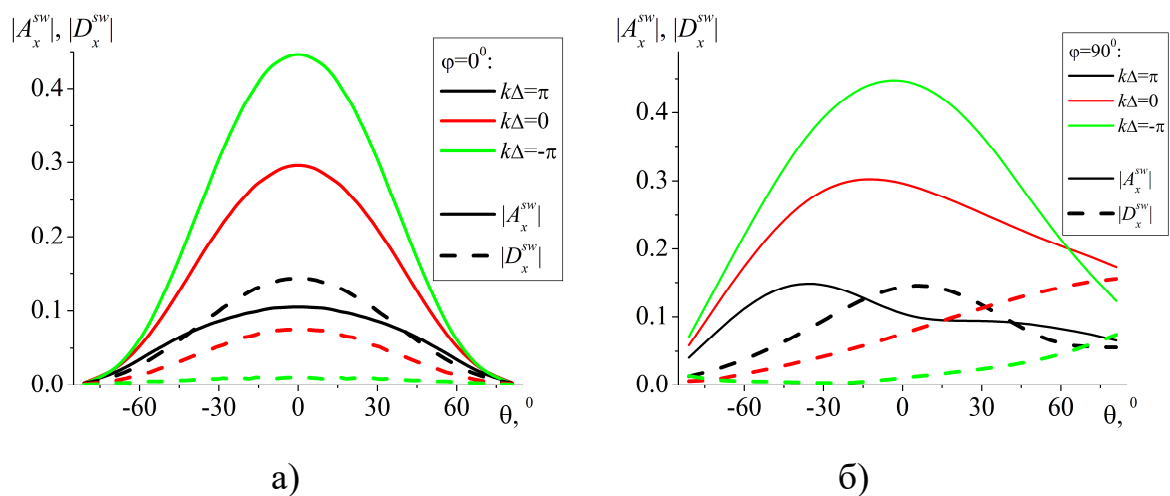


Рис.7.24 Діаграми спрямованості, компоненти A_x^{sw} (суцільні криві), D_x^{sw} (штрихові криві) при різних значеннях $k\Delta$, $\varphi = 0^0$, $kr = \pi/2$, $kh = \pi/2$, нормальне падіння $\alpha = \beta = 90^0$, $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$. а) $\varphi = 0^0$, б) $\varphi = 90^0$ (тут $A_y^{sw} = D_y^{sw} = 0$)

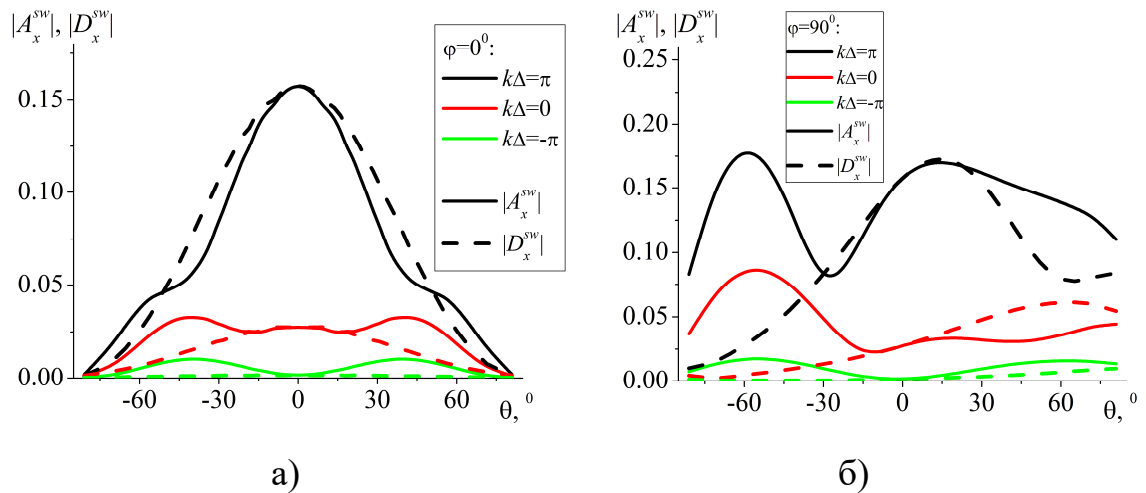


Рис.7.25 Діаграми спрямованості, компоненти A_x^{sw} (суцільні криві), D_x^{sw} (штрихові криві) при різних значеннях $k\Delta$, $\varphi = 0^0$, $kr = \pi/2$, $kh = \pi$, нормальне падіння $\alpha = \beta = 90^0$, $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$. а) $\varphi = 0^0$, б) $\varphi = 90^0$ (тут $A_y^{sw} = D_y^{sw} = 0$)

7.3.6. Поля в ближній зоні

На рис.7.26-рис.7.29 наведено розподіл повного поля у вертикальній площині, $x = 0$, для різного положення диску. Розглядається падіння “зверху” (рис.7.26, рис.7.29) і “знизу” (рис.7.27, рис.7.28). Картини полів нормуються на амплітуду падаючої хвилі. Відбита плоска хвиля існує лише в області $y < 0$. Напівплощина – це напівнескінченна структура, розміщена в області $y < 0$. Таким чином, плоска хвиля відбивається в області $y < 0$ (при ортогональному падінні), а в області $y > 0$ плоска хвиля проходить. На рис.7.26-рис.7.28 чітко видно поле відбитої плоскої хвилі в області $y < 0$, а також пучності при $kz = \pi/2 + \pi n$ і вузли при $kz = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ або $n = 0, -1, -2, \dots$, поля стоячої хвилі. Поблизу поверхні диску дотичні компоненти електричного поля обертаються в нуль, $E_x = E_y = 0$. Також на

рис.7.26-рис.7.28 видно мінімуми дотичних компонент електричного поля і картину сферичної хвилі з пучностями поля поблизу диску.

Як і у випадку напівнескінченної плоскої решітки поблизу площини $y = 0$ виникає межа між двома областями. Поле, розсіяне ізольованою півплощиною на границі $y = 0$ описується E^{err} (див. (7.41)). Площина $y = 0$ діє як межа тіні або перехідна область. Перехідна область виникає і в інших нескінченних структурах з краєм, наприклад, у напівнескінченних стрічкових решітках.

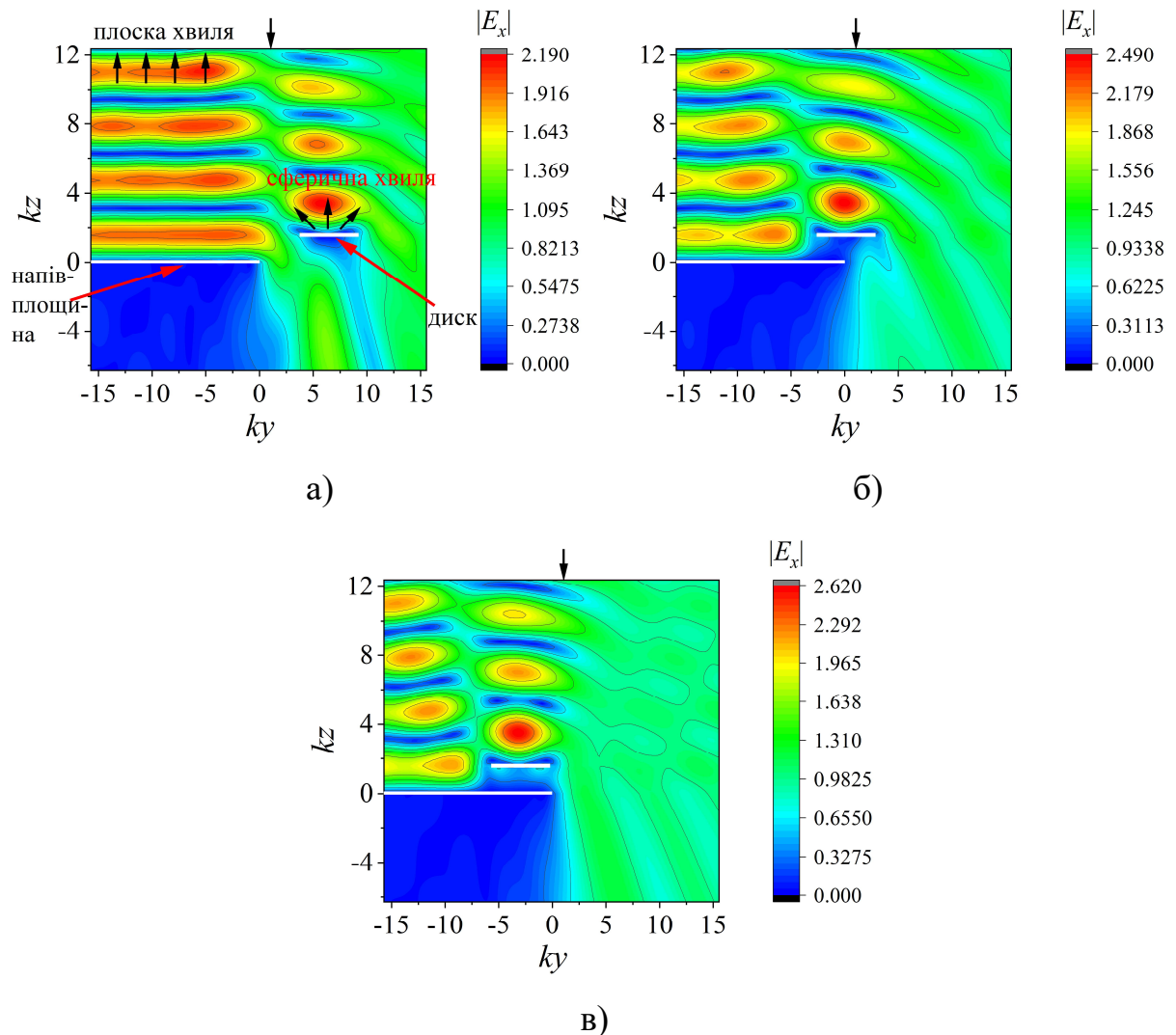


Рис.7.26 Розподіл повного поля, компонента $|E_x|$, у площині $x = 0$ при $kr = \pi$, $kh = \pi/2$, $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$, нормальне падіння. а) $k\Delta = 2\pi$, б) $k\Delta = 0$, в) $k\Delta = -\pi$

При $\Delta < -r$, якщо $q_x = q_y = 0$ і $p_x = 1$, диск не опромінюється плоскою хвилею, оскільки він розташований повністю “над” півплощиною у області тіні (падіння “знизу”). Тут диск знаходиться в полі циліндричної хвилі, що збуджується в результаті розсіяння на ребрі півплощини. Тому для того, щоб краще проілюструвати поле сферичної хвилі, розсіяної диском, на рис.7.28 наведено результати для $kr = 3\pi$. Пучність поля у області $0 < z < h$ з’являється як раз через розсіяння поля краю напівплощини на диску та багатократного перерозсіяння поля між напівплощиною і диском.

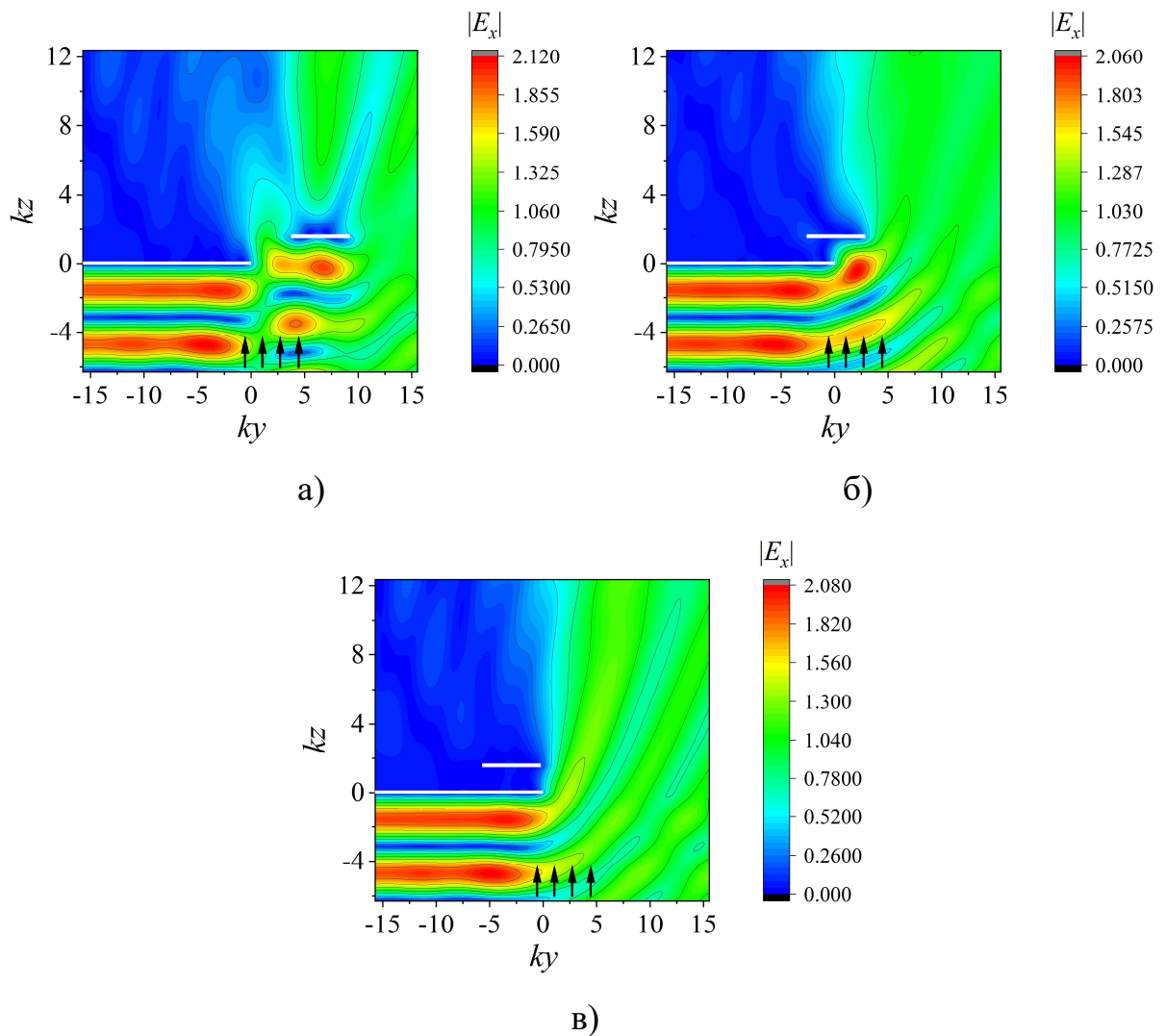


Рис.7.27 Розподіл повного поля, $|E_x|$, у площині $x = 0$ при $kr = \pi$, $kh = \pi/2$, $p_x \neq 0$, $q_x = q_y = p_y = 0$, нормальне падіння. а) $k\Delta = 2\pi$, б) $k\Delta = 0$, в) $k\Delta = -\pi$

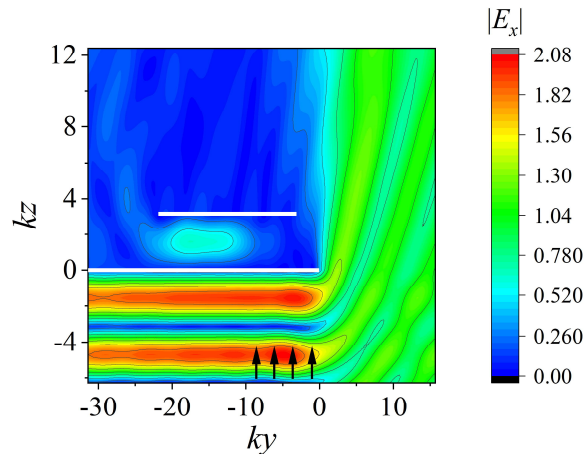


Рис.7.28 Розподіл повного поля, компонента $|E_x|$, у площині $x=0$ при $kr=3\pi$, $kh=\pi$, $k\Delta=-4\pi$, $p_x \neq 0$, $q_x=q_y=p_y=0$, нормальне падіння

Для повного аналізу також необхідно навести розподіл поля в горизонтальній площині. На рис.7.29 наведено розподіл поля в ближній зоні в площині $z=2h$ (“над” структурою), яка відповідає мінімуму амплітуди стоячої хвилі. Графіки симетричні відносно прямої $x=0$, оскільки структура є симетричною. Поле сферичної хвилі помітно в області $y < 0$ особливо для компоненти E_y .

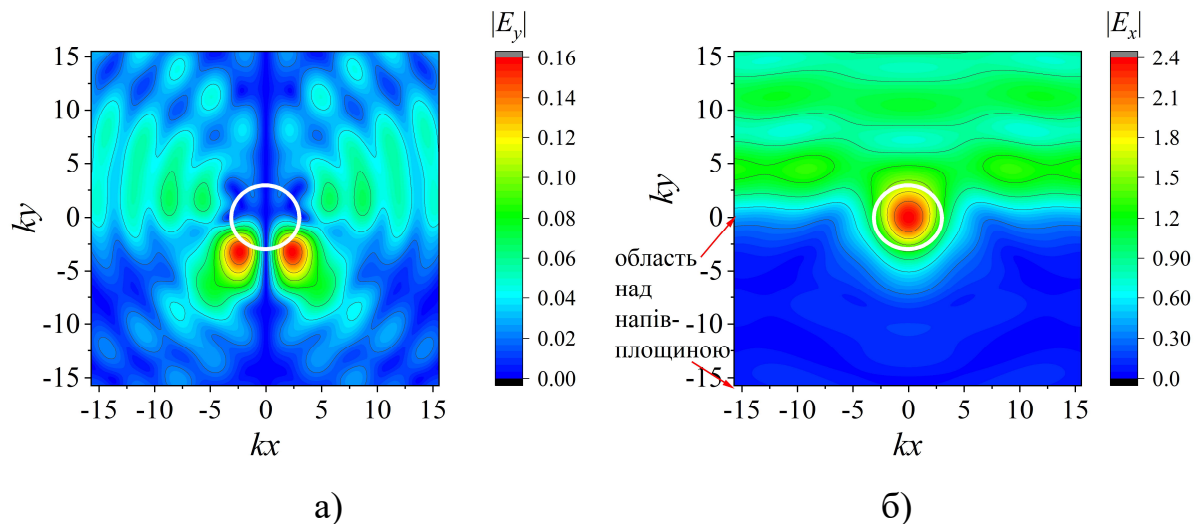


Рис.7.29 Розподіл повного поля у площині $z=2h$ при $kr=\pi$, $kh=\pi/2$, $k\Delta=0$, $q_x \neq 0$, $q_y=p_x=p_y=0$, нормальне падіння. а) компонента $|E_x|$, б) компонента $|E_y|$

7.4. Дифракція плоскої електромагнітної хвилі на напівплощині та двох дисках, які лежать в паралельних площинах

7.4.1. Постановка задачі

Розглянемо ідеально провідні нескінченно тонкі напівплощину $y < 0$, $z = 0$ і два диски радіусу r_1 і r_2 , які задаються рівняннями $(x - \Delta_{x,i})^2 + (y - \Delta_{y,i})^2 < r_i^2$, $z = h_i$, де $\Delta_{x,i}$ – зсув i -го диску відносно осі Ox , $\Delta_{y,i}$ – зсув i -го диску відносно осі Oy , $i = 1, 2$. Досліджуються два випадки розташування дисків. Перший, $h_1 > 0$ і $h_2 > 0$: обидва диски знаходяться з одного боку від напівплощини (рис.7.30 а). Другий, $h_1 > 0$ і $h_2 < 0$: диски знаходяться по різні боки від напівплощини (див рис.7.30 б). Розглядається випадок падіння плоскої хвилі "зверху" – хвиля набігає з області $z > 0$, та "знизу" – хвиля набігає з області $z < 0$ (7.42). Повне поле – сума падаючого і розсіяного полів.

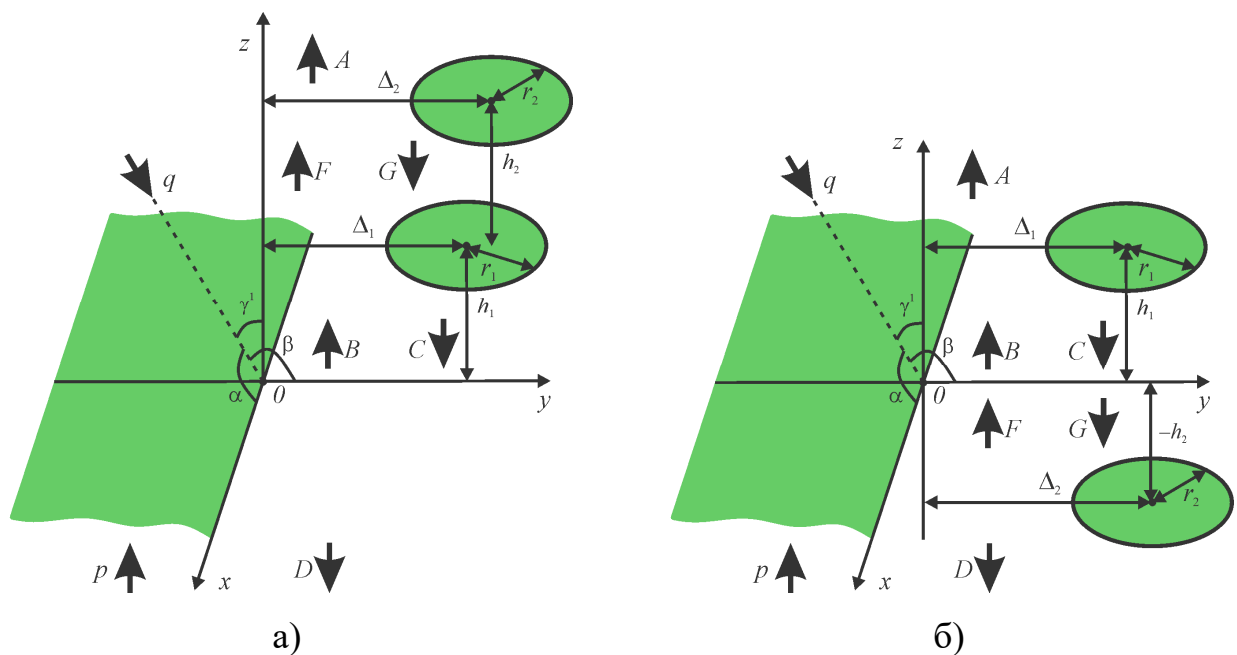


Рис.7.30 Геометрія досліджуваної структури. а) Диски розташовано по один бік від напівплощини. б) Диски розташовано по різні боки від напівплощини

Розсіяне поле подамо як суперпозицію плоских хвиль. У випадку, коли диски знаходяться по один бік від напівплощини ($h_2 > 0$), маємо

$$E_{\Theta}^s(x, y) = \begin{cases} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} A_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, & z > h_2, \\ \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (F_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_1)) + G_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_2))) \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, & h_1 < z < h_2, \\ \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (B_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)z) + C_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_1))) \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, & 0 < z < h_1, \\ \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} D_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y - \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, & z < 0, \Theta = x, y, \end{cases} \quad (7.74)$$

де $A = (A_x, A_y)^*$, $D = (D_x, D_y)^*$ – амплітуди Фур'є відбитого поля і поля, що пройшло, $B = (B_x, B_y)^*$, $C = (C_x, C_y)^*$, $F = (F_x, F_y)^*$, $G = (G_x, G_y)^*$ – амплітуди Фур'є розсіяного поля між дисками та напівплощиною. Ці амплітуди – невідомі. У випадку, коли диски знаходяться по різні боки від напівплощини ($h_2 < 0$), вираз для розсіяного поля має вигляд:

$$E_{\Theta}^s(x, y) = \begin{cases} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} A_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y + \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, & z > h_1, \\ \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (B_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)z) + C_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)(z - h_1))) \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, & 0 < z < h_1, \\ \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (F_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik\gamma(\xi_x, \xi_y)(z + h_2)) + G_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_y \Delta - \gamma(\xi_x, \xi_y)z))) \\ \times \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi_x d\xi_y, & h_2 < z < 0, \\ \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} D_{\Theta}(\xi_x, \xi_y) \exp(ik(\xi_x x + \xi_y y - \gamma(\xi_x, \xi_y)z)) d\xi_x d\xi_y, & z < h_2, \Theta = x, y. \end{cases} \quad (7.75)$$

Введемо оператори проходження та відбиття напівплощини $y < 0$, $z = 0$, T_1 і R_1 , диску радіусу r_1 , $x^2 + y^2 < r_1$, центр якого співпадає з початком координат T_2 і R_2 , диску радіусу r_2 , $x^2 + y^2 < r_2$, центр якого співпадає з початком координат T_3 і R_3 . Їх дія на довільну функцію g може бути описана за допомогою інтегралів (7.10), (7.11)

7.4.2. Операторні рівняння

Розсіяне структурою поле можна подати як суму полів, розсіяних ізольованою напівплощиною та ізольованими дисками, та поля перевідбитого ними.

7.4.2.1. Випадок, коли диски розташовано по один бік від напівплощини

Розглянемо випадок, коли диски розташовані по один бік від напівплощини ($h_2 > 0$). Операторні рівняння є

$$A = e_1^- e_2^- s_2^- T_3 e_2^+ s_2^+ F + e_1^- e_2^- s_2^- R_3 e_1^- e_2^- s_2^+ q, \quad (7.76)$$

$$D = T_1 e_1^+ s_1^- C + R_1 p, \quad (7.77)$$

$$B = R_1 e_1^+ s_1^- C + T_1 p, \quad (7.78)$$

$$C = R_2 e_1^+ s_1^+ B + T_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G, \quad (7.79)$$

$$F = s_1^- T_2 e_1^+ s_1^+ B + s_1^- R_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G, \quad (7.80)$$

$$G = R_3 e_2^+ s_2^+ F + T_3 e_1^- e_2^- s_1^+ q, \quad (7.81)$$

де оператори e_i^\pm визначають зміну амплітуди поля при зсуві системи координат на величину $|h_i|$ вздовж осі Oz у позитивному або негативному напрямку відносно напрямку поширення хвилі, а оператори s_i^\pm визначають зміну амплітуди поля при зсуві системи координат на величину $\pm \Delta_{x,i}$ і $\pm \Delta_{y,i}$.

Зазначимо, що оператори проходження та відбиття пов'язані так

$$T_j = I + R_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7.82)$$

Введемо нові функції, віднявши від невідомих амплітуд частину, пов'язану з падаючим полем,

$$B_1 = B - p, \quad (7.83)$$

$$C_1 = C - e_1^- s_1^+ q, \quad (7.84)$$

$$F_1 = F - e_1^+ p, \quad (7.85)$$

$$G_1 = G - e_1^- e_2^- s_2^- q. \quad (7.86)$$

Використовуючи (7.76)-(7.82) можна записати операторні рівняння відносно нових невідомих функції (7.83)-(7.86).

$$A = e_1^- F_1 + e_1^- e_2^- s_2^- R_3 e_2^+ s_2^+ F_1 + e_1^- e_2^- s_2^- R_3 s_2^+ (e_1^+ e_2^+ p + e_1^- e_2^- q) + p, \quad (7.87)$$

$$D = e_1^+ s_1^- C_1 + R_1 e_1^+ s_1^- C_1 + R_1 (p + q) + q, \quad (7.88)$$

$$B_1 = R_1 e_1^+ s_1^- C_1 + R_1 (p + q), \quad (7.89)$$

$$C_1 = R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + e_2^+ s_1^+ s_2^- G_1 + R_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G_1 + R_2 s_1^+ (e_2^+ p + e_2^- q), \quad (7.90)$$

$$F_1 = e_1^+ B_1 + s_1^- R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + s_1^- R_2 e_2^+ s_1^+ s_2^- G_1 + s_1^- R_2 s_1^+ (e_1^+ p + e_1^- q), \quad (7.91)$$

$$G_1 = R_3 e_2^+ s_2^+ F_1 + R_3 s_2^+ (e_1^+ e_2^+ p + e_1^- e_2^- q). \quad (7.92)$$

7.4.2.2. Випадок, коли диски розташовано по різні боки від напівплощини

Розглянемо випадок, коли диски розташовані по різні боки від напівплощини ($h_2 < 0$). Операторні рівняння відносно амплітуд Фур'є мають вигляд:

$$A = e_1^- s_1^- T_2 e_1^+ s_1^+ B + e_1^- s_1^- R_2 e_1^- s_1^+ q, \quad (7.93)$$

$$D = e_2^- s_2^- T_3 e_2^+ s_2^+ G + e_2^- s_2^- R_3 e_2^- s_2^+ p, \quad (7.94)$$

$$B = R_1 e_1^+ s_1^- C + T_1 e_2^+ s_2^- F, \quad (7.95)$$

$$C = R_2 e_1^+ s_1^+ B + T_2 e_1^- s_1^+ q, \quad (7.96)$$

$$F = R_3 e_2^+ s_2^+ G + T_3 e_2^- s_2^+ p, \quad (7.97)$$

$$G = T_1 e_1^+ s_1^- C + R_1 e_2^+ s_2^- F, \quad (7.98)$$

Введемо нові функції, віднявши від амплітуд Фур'є розсіяного поля частину, яку пов'язано з амплітудою падаючого поля,

$$B_1 = B - p, \quad (7.99)$$

$$C_1 = C - e_1^- s_1^+ q, \quad (7.100)$$

$$F_1 = F - e_2^- s_2^+ p \quad (7.101)$$

$$G_1 = G - q. \quad (7.102)$$

Як і у випадку, розглянутому в п.7.4.2.1, використовуючи (7.85), з (7.93)-(7.98) може бути отримано операторні рівняння відносно нових невідомих функцій (7.99)-(7.102):

$$A = B_1 + e_1^- s_1^- R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + e_1^- s_1^- R_2 s_1^+ (e_1^+ p + e_1^- q) + p, \quad (7.103)$$

$$D = G_1 + e_2^- s_2^- R_3 e_2^+ s_2^+ G_1 + e_2^- s_2^- R_3 s_2^+ (e_2^- p + e_2^+ q), \quad (7.104)$$

$$B_1 = e_2^+ s_2^- F_1 + R_1 (e_1^+ s_1^- C_1 + e_2^+ s_2^- F_1) + R_1 (p + q), \quad (7.105)$$

$$C_1 = R_2 e_1^+ s_1^+ B_1 + R_2 s_1^+ (e_1^+ p + e_1^- q), \quad (7.106)$$

$$F_1 = R_3 e_2^+ s_2^+ G_1 + R_3 s_2^+ (e_2^- p + e_2^+ q), \quad (7.107)$$

$$G_1 = e_1^+ s_1^- C + R_1 (e_1^+ s_1^- C + e_2^+ s_2^- F) + R_1 (p + q). \quad (7.108)$$

Як і у випадку, розглянутому у параграфі 7.3, операторні рівняння (7.89)-(7.92), (7.105)-(7.108) після процедури регуляризації зводяться до інтегральних рівнянь такого вигляду, які б можна було розв'язати чисельно. Явний вигляд рівнянь наведено у додатку Г. Для розв'язання використовується ітераційна процедура вигляду (7.70)-(7.72).

7.4.3. Аналіз збіжності

Введемо відносну похибку за формулами (7.38)-(7.40), де замість D необхідно писати A^{sw} . На рис.7.31 наведено залежності похибки від параметрів. Починаючи з деякого значення, при збільшенні кількості вузлів

та величини інтервалу, похибка спадає монотонно. При збільшенні кількості ітерацій похибка також спадає до нуля, але не монотонно, спостерігаються осциляції. Помітимо, що залежність похибки від числа ітерацій у випадку двох дисків з напівплощиною демонструє зовсім іншу поведінку, на відміну від випадку одного диску з напівплощиною. По-перше, у випадку одного диску похибка спадала монотонно. По-друге, швидкість спадання була значно вищою: для отримання похибки менше ніж 10^{-3} достатньо було лише 2 ітерацій при досліджуваних параметрах у випадку одного диску з напівплощиною. У даному випадку, при певних параметрах, для отримання похибки менше, ніж 10^{-3} , необхідно виконати 30 ітерацій.

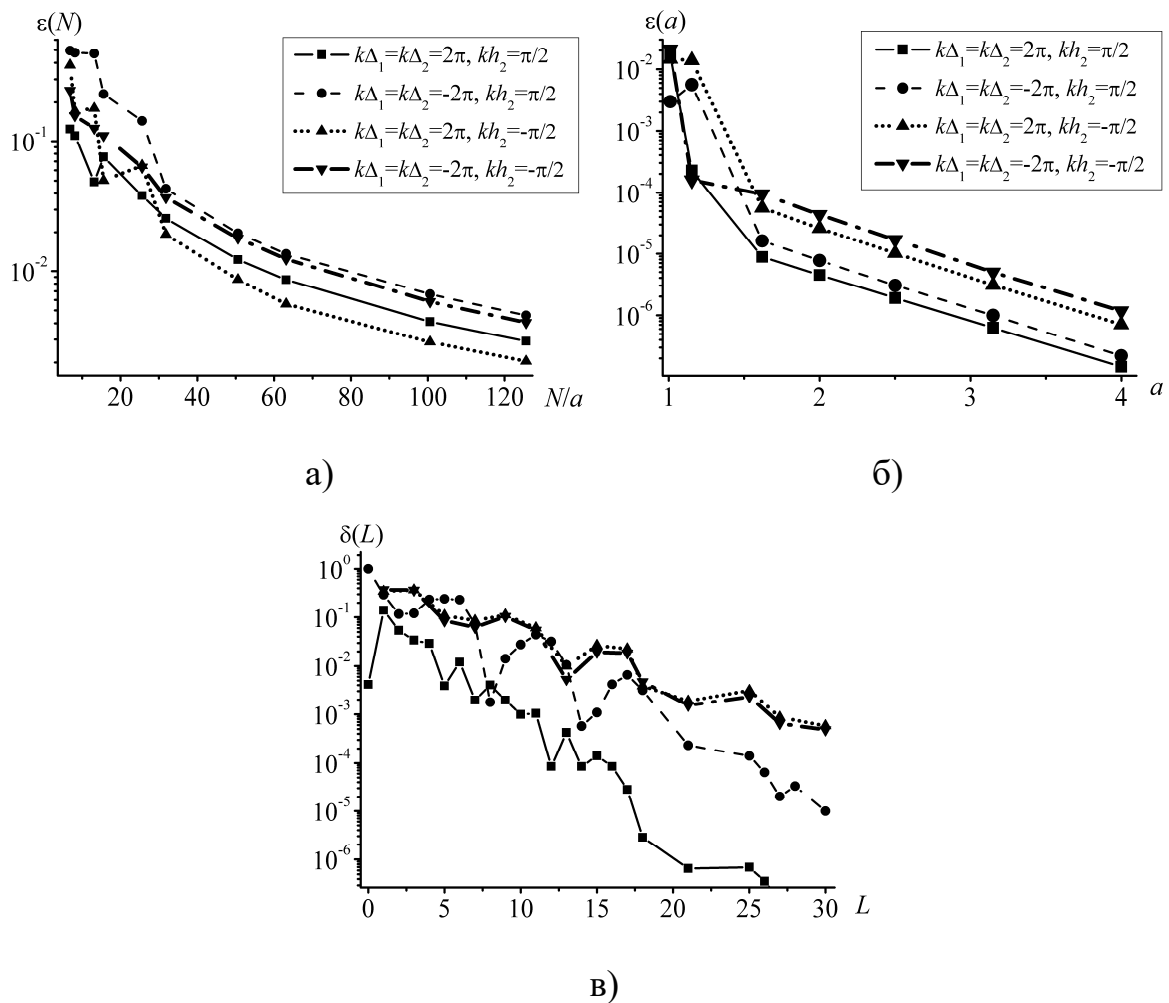


Рис.7.31 Залежності відносної похибки від а) N/a , б) a , в) L , $kr = \pi$,
 $kh_1 = \pi/2$

7.4.4. Поля в далекій зоні

Розсіяне поле у далекій зоні задається виразом (7.41), а поле сферичних хвиль з амплітудами A_{Θ}^{sw} і D_{Θ}^{sw} – виразом (7.73).

На рис.7.32-рис.7.37 наведено діаграми спрямованості поля сферичних хвиль при різних положеннях дисків.

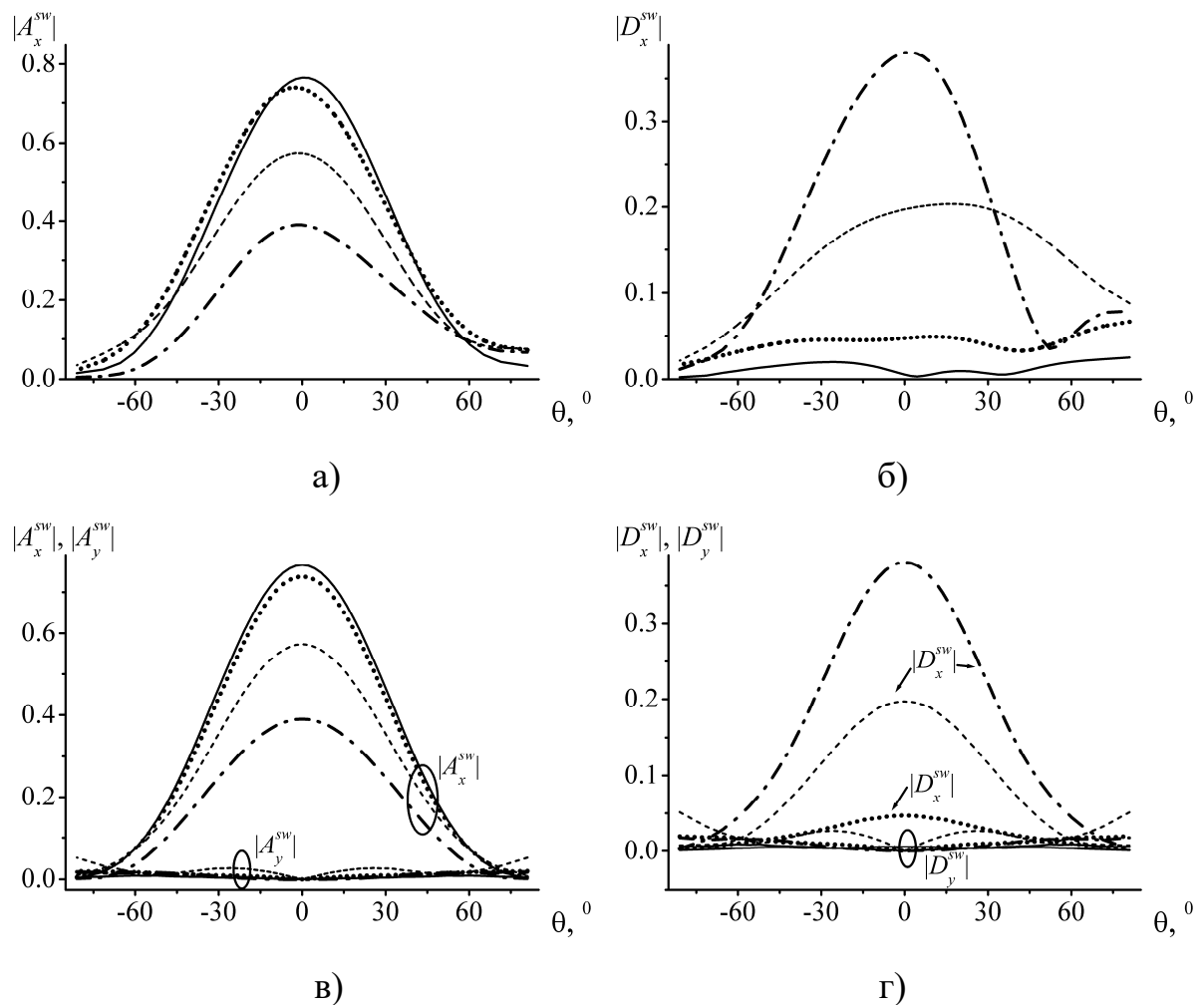


Рис.7.32 Діаграми спрямованості у випадку, коли диски розташовані по різні боки від напівплощини при $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ (штрих-пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$ (штрихові криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$ (пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ (суцільні криві), $kr = \pi$, $kh_1 = -kh_2 = \pi/2$, ортогональне падіння, $q_x \neq 0$, $q_y = 0$. а) $|A_x^{sw}|$ при $\varphi = 90^\circ$, тут $A_y^{sw} = 0$, б) $|D_x^{sw}|$ при $\varphi = 90^\circ$, тут $D_y^{sw} = 0$. в) $|A_x^{sw}|$, $|A_y^{sw}|$ при $\varphi = 0^\circ$, г) $|D_x^{sw}|$, $|D_y^{sw}|$ при $\varphi = 0^\circ$

Числові результати отримано для випадку $\Delta_{1,x} = \Delta_{2,x} = 0$, $r_1 = r_2$. Випадку дисків, розташованих по один бік від напівплощини, відповідають значення $h_2 > 0$. Припускається, що на структуру ортогонально падає плоска хвиля одиничної амплітуди. Діаграми нормуються на загальний максимум. При $\Delta_{1,x} = \Delta_{2,x} = 0$ структура є симетричною відносно осі Oy , тому при $\varphi = 0^\circ$ діаграми спрямованості також є симетричними відносно $\theta = 0^\circ$.

При $kh_1 = \pi/2$ і $\Delta_{y,1} < 0$ перший диск знаходиться у максимумі поля стоячої хвилі, сформованої падаючої і відбитою від напівплощини плоскими хвилями. Через наявність стоячої хвилі амплітуда поля сферичних хвиль при $\Delta_{y,1} = \Delta_{y,2} < 0$ перевищує амплітуду поля сферичних хвиль при $\Delta_{y,1} = \Delta_{y,2} > 0$.

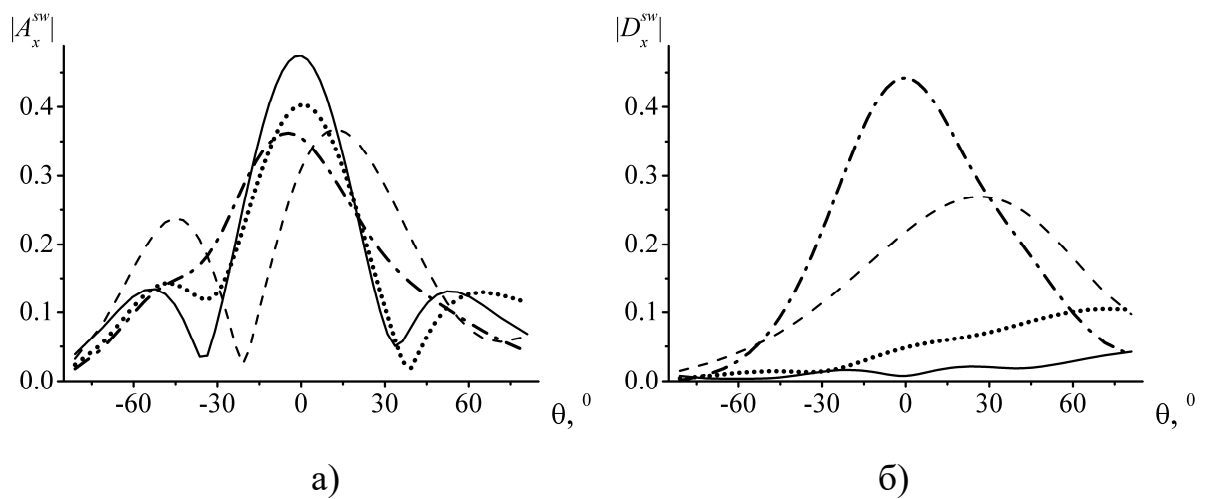


Рис.7.33 Діаграми спрямованості у випадку, коли диски розташовані по один бік від напівплощини при $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ (штрих-пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$ (штрихові криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$ (пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ (суцільні криві), $kr = \pi$, $kh_1 = kh_2 = \pi/2$, ортогональне падіння, $\varphi = 90^\circ$, $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$. Тут $|A_y^{sw}| = |D_y^{sw}| = 0$. а) $|A_x^{sw}|$,

б) $|D_x^{sw}|$

На рис.7.33-рис.7.37 розглядаються діаграми спрямованості у випадку, коли диски знаходяться по один бік від напівплощини. Перший диск знаходиться у пучності поля стоячої хвилі. Як можна бачити, на максимум діаграми спрямованості значним чином впливає положення другого диску. Якщо другий диск розмістити у вузлі стоячої хвилі, за рахунок взаємного впливу дисків, відбувається несуттєве зростання максимуму діаграми спрямованості у порівнянні з випадком $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$. Якщо ж другий диск помістити у пучність поля стоячої хвилі, спостерігається зростання максимуму більш ніж у 2 рази. При $h_2 > 0$ розглядаються випадки падіння плоскої хвилі "зверху" ($p_x = p_y = 0$), коли диски освітлюються падаючою хвилею, та "знизу" ($q_x = q_y = 0$), коли диски можуть знаходитися в області тіні від напівплощини і не освітлюються падаючою хвилею напряду.

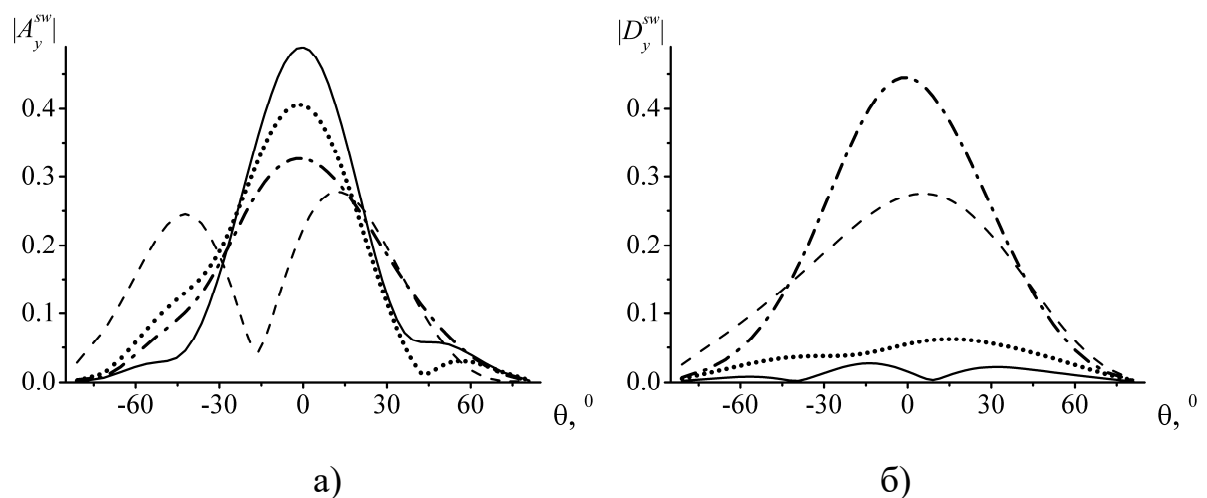


Рис.7.34 Діаграми спрямованості у випадку, коли диски розташовані по один бік від напівплощини при $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ (штрих-пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$ (штрихові криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$ (пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ (суцільні криві), $kr = \pi$, $kh_1 = kh_2 = \pi/2$, ортогональне падіння, $\varphi = 90^\circ$, $q_y \neq 0$, $q_x = p_x = p_y = 0$. Тут $|A_x^{sw}| = |D_x^{sw}| = 0$. а) $|A_y^{sw}|$, б) $|D_y^{sw}|$

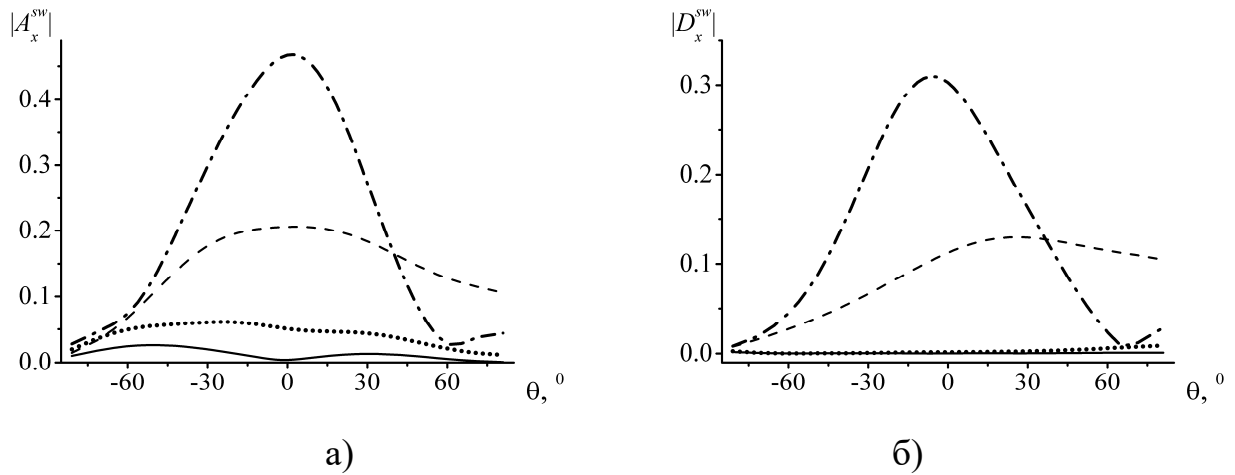


Рис.7.35 Діаграми спрямованості у випадку, коли диски розташовані по один бік від напівплощини, при $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ (штрих-пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$ (штрихові криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$ (пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ (суцільні криві), $kr = \pi$, $kh_1 = kh_2 = \pi/2$, ортогональне падіння, $\varphi = 90^\circ$, $p_x \neq 0$, $q_x = q_y = p_y = 0$. Тут $|A_y^{sw}| = |D_y^{sw}| = 0$. а) $|A_x^{sw}|$, б) $|D_x^{sw}|$

З рис.7.35, рис.7.36 видно, що навіть якщо диски знаходяться в області тіні, $\Delta_{y,1} = \Delta_{y,2} < r_1 = r_2$, сферичні хвилі мають не нульову амплітуду через розсіяння краєм. Поле, розсіяне краєм напівплощини розсіюється дисками, також збуджуючи сферичну хвилю.

7.4.5. Поля в ближній зоні

На рис.7.38 наведено розподіл повного поля в ближній зоні у вертикальній площині ($x = 0$). Для обчислення інтегралів у (7.74), (7.75) проводилася процедура регуляризації. Після чого застосовувалися квадратурні формули. Як і у випадку одного диску, розташованого над напівплощиною, добре видно поле стоячої хвилі, утвореної падаючою і відбитою від напівплощини плоскими хвилями, яке існує в області $y < 0$ і

поле сферичної хвилі. Перший диск розміщено у пучності, а другий диск – у вузлі стоячої хвилі на рис.7.38 б). Як видно, конструкція, яка складається з двох дисків вносить значне збурення у електромагнітне поле. Розподіл поля у горизонтальній напівплощині суттєво не відрізняється від випадку напівплощини і одного диску, тому тут не наводиться.

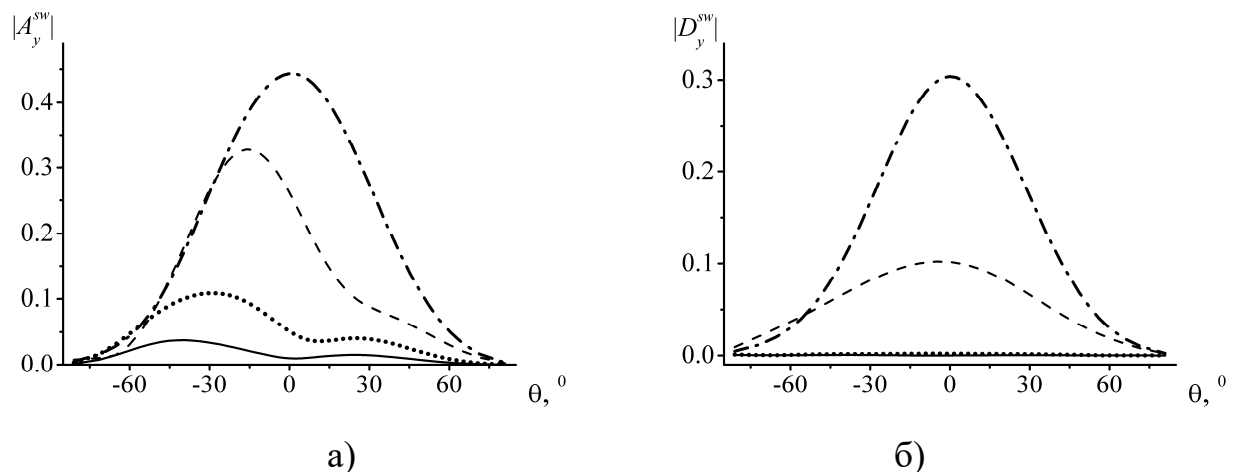


Рис.7.36 Діаграми спрямованості у випадку, коли диски розташовані по один бік від напівплощини при $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ (штрих-пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$ (штрихові криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$ (пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ (суцільні криві), $kr = \pi$, $kh_1 = kh_2 = \pi/2$, ортогональне падіння, $\varphi = 90^\circ$, $p_y \neq 0$, $q_x = q_y = p_x = 0$. Тут $|A_x^{sw}| = |D_x^{sw}| = 0$. а) $|A_y^{sw}|$, б) $|D_y^{sw}|$

$$|D_y^{sw}|$$

Висновки до розділу 7

З використанням операторного методу отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію акустичної і електромагнітної хвилі на нескінченно тонкому ідеально провідному кільці та на кільцевій щілині у площині. Неоднорідність надавалася як об'єднання двох ключових неоднорідностей, диска та круглого отвору в площині, оператори розсіяння яких вважалися відомими. Задачі зведено до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

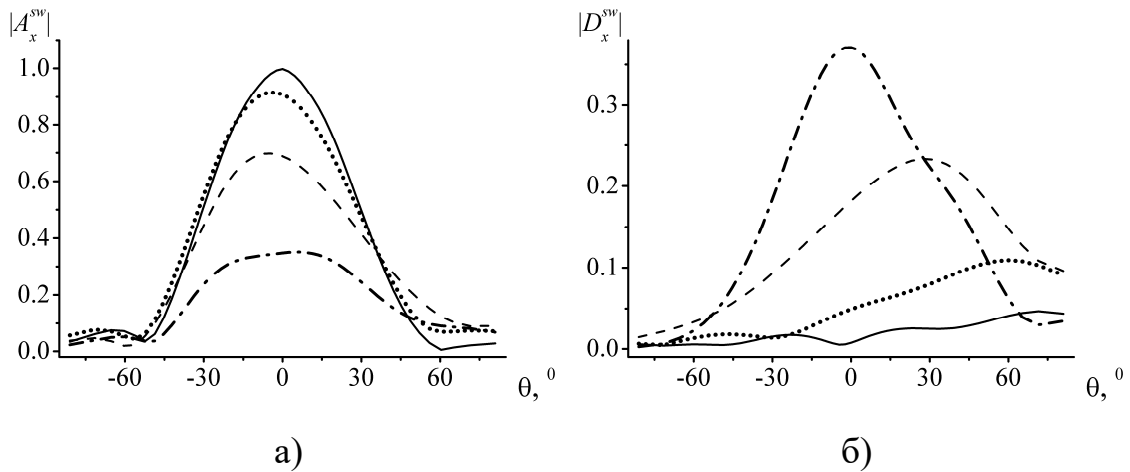


Рис.7.37 Діаграми спрямованості у випадку, коли диски розташовані по один бік від напівплощини при $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$ (штрих-пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 0$ (пунктирні криві), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -\pi$ (криві з точок), $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$ (суцільні криві), $kr = \pi$, $kh_1 = \pi/2$, $kh_2 = \pi$, ортогональне падіння, $\varphi = 90^\circ$, $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$. Тут $|A_y^{sw}| = |D_y^{sw}| = 0$. а) $|A_x^{sw}|$, б) $|D_x^{sw}|$

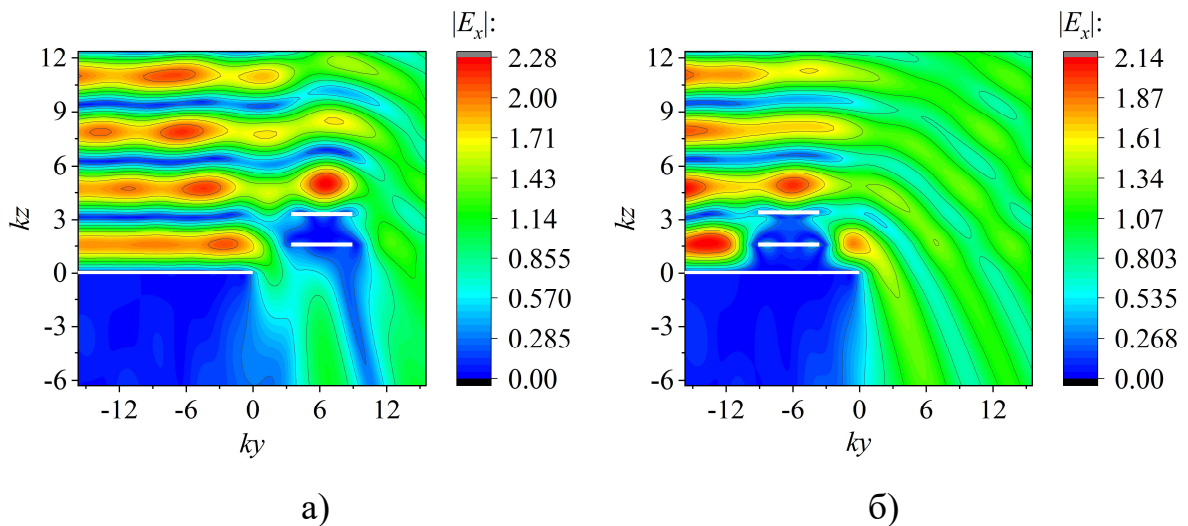


Рис.7.38 Розподіл повного поля, компонента $|E_x|$, у площині $x=0$ при $kr = \pi$, $kh_1 = kh_2 = \pi/2$, $q_x \neq 0$, $q_y = p_x = p_y = 0$, нормальне падіння.

а) $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = 2\pi$, б) $k\Delta_{y,1} = k\Delta_{y,2} = -2\pi$

Вперше строгим методом розв'язано задачу про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на системі, яка складається з ідеально провідних

нескінченно тонких напівплощини та дисків. Розглянуто випадок одного диску, який лежить у тій самій площині, що і напівплощина і, як дуальну, розглянуто задачу про круглий отвір в напівплощині. Також розглянуто більш загальний випадок, коли один диск і напівплощина лежать в різних площинах, випадок двох дисків і напівплощини. Диски можуть знаходитись по один бік від напівплощини та по різні боки від напівплощини. Показано, що операторні рівняння цієї задачі можливо звести до інтегральних, які можуть бути чисельно розв'язані за допомогою дискретизації на базі квадратурних формул. Для виключення особливостей проведено процедуру регуляризації. Досліджено діаграми спрямованості поля сферичних хвиль, а також розподіл повного поля у ближній зоні відносно дисків при різних параметрах. Досліджено розсіяні поля при розміщенні дисків у області тіні від напівплощини, в напівтіні та в області, що повністю освітлюється хвилею, яка падає.

Досліджено числову збіжність алгоритму. Проведено порівняння з наближеними результатами, коли замість напівплощини використано стрічку скінченних розмірів, отриманими в HFSS. На основі цих результатів робиться висновок про вірність побудованого алгоритму.

Показано, що за рахунок розсіяння плоскої хвилі на краю напівплощини поле сферичних хвиль має відмінну від нуля амплітуду навіть у випадку, якщо диски знаходяться цілком у області тіні та не освітлюються падаючою плоскою хвилею.

Розділ 8. Дифракція власних хвиль на системах аксіально-симетричних перешкод в круглому хвилеводі

Круглий хвилевід з аксіально-симетричними неоднорідностями є елементом фільтрів, антенних систем, лазерів [270]-[272]. Розроблено цілу низку методів для досліджень такого роду структур.

Метод сіток запропоновано у [273] для аналізу аксіально-симетричних оптичних хвилеводів. З використанням методу сіток у [274] система концентричних кілець розглядалась як фокусуючий елемент лазера.

У [275] за допомогою методу часткових областей у поєднанні з методом моментів отримано розв'язок задачі про дифракцію хвиль двох неспіввісних круглих хвилеводів, з'єднаних за допомогою круглої діафрагми нульової товщини. Числові результати отримано для двох однакових співвісних хвилеводів. Поле в області діафрагми розкладається за власними хвилям круглого хвилеводу, який має радіус, рівний радіусу діафрагми. У [276] розглядається кругова діафрагма скінченної товщини. Метод часткових областей використовується у [277] для аналізу фільтру на основі круглого хвилеводу з двома круглими діафрагмами. Для збудження використовувався прямокутний хвилевід, з'єднаний з круглим за допомогою прямокутної діафрагми. Розв'язок задачі про дифракцію на зміщеній відносно осі хвилеводу діафрагмі скінченної товщини отримано в [278]. Система круглих діафрагм скінченної товщини розглядається в [279] за допомогою інтегральних рівнянь. Система, яка складається з однакових або різних за висотою прямокутних гофр, аналізується в [280], [281].

В антенній техніці досить широке застосування знаходять структури, де у якості опромінювачів використовуються гофровані хвилеводи. Привабливість створення випромінювачів на основі круглих гофрованих хвилеводів обумовлена можливістю збудження в них квазі HE_{11} - хвиль, які можуть забезпечити аксіально-симетричну діаграму спрямованості, низький

рівень бічних пелюстків і крос-поляризації [282]-[286]. Для розрахунку геометричних параметрів перетворювача хвиль H_{11} - HE_{11} використовують, наприклад, напівнескінченний періодичний гофрований хвилевід і вимагають виконання умови мінімальності коефіцієнта відбиття або певного розподілу електромагнітного поля в періодичній частині структури. Після чого до перетворювача хвиль пристиковують гофрований хвилевід змінного радіуса з відкритим кінцем і оптимізують його властивості. Проте для визначення властивостей напівнескінченного гофрованого хвилеводу застосовують, як правило, або наближені методи, засновані на визначенні поверхневого опору хвилеводу, або доводиться розв'язувати трансцендентне рівняння відносно постійних поширення (у загальному випадку комплексних) власних хвиль хвилеводу. Процес розв'язання таких рівнянь досить складно автоматизувати, тому що існує ймовірність втрати коренів.

Можливість поширення хвиль HE_{11} - типу в гофрованих круглих хвилеводах була теоретично обґрунтована, наприклад, в роботі [287]. У цій роботі обговорювалися переваги створення рупорних випромінювачів, що працюють на такій хвилі. Проте застосований метод анізотропної поверхневої провідності, надавав можливість отримати результати з достатньою точністю лише у випадку, коли ширина гофри була значно меншою за довжину хвилі. Таким чином, виникла необхідність розвитку методів, здатних досліджувати електродинамічні властивості гофрованих хвилеводів при довільному співвідношенні геометричних параметрів структури й довжини хвилі.

Аналіз перетворювачів хвиль TE_{11} - HE_{11} на основі круглих хвилеводів з кільцевими гофрами змінної величини наведено у роботі [288], а з гофрами у вигляді дротів – у роботі [289]. У цих роботах для дослідження поодинокі неоднорідності, східчастої неоднорідності, застосовується процедура методу часткових областей. Властивості всієї структури визначаються при каскадному з'єднанні матриць розсіювання поодинокі неоднорідностей

(методом S-матриць). У роботі [290] для дослідження гофрованих хвилеводів застосовується метод інтегральних рівнянь. Поле у всьому хвилеводі виражається через поздовжнє поле, індуковане на стиках гофр і круглого хвилеводу. Вдалося значно підвищити швидкість збіжності методу в порівнянні з роботами [288], [289]. У роботах [291], [292] застосовується метод сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджується випадок аксіально-симетричних хвиль. Допускається можливість заповнення гофр діелектриком. Проте, загальним недоліком методів, наведених у роботах [290], [291], [292], є те, що вони застосовувалися лише до гофрованих хвилеводів, менший радіус яких є постійним.

У випадку, якщо розв'язок задачі для поодинокі неоднорідності є відомими, для отримання розв'язку для скінченної або напівнескінченної системи неоднорідностей досить ефективним є застосування операторного методу. Операторний метод використовувався для дослідження напівскінченної системи діафрагм скінченної товщини у випадку H_{0p} -хвиль у [293]. Скінченна та напівнескінченна система щілин у внутрішньому порожньому провіднику коаксіального хвилеводу розглядалася з використанням операторного методу у [294], [295]. У роботах [293]-[295] для отримання операторів проходження та відбиття поодинокі неоднорідності використовувалася процедура методу часткових областей у поєднанні з методом моментів або з методом лишок.

У даному розділі з використанням операторного методу розглянуто задачі про дифракцію на скінченній та напівнескінченній системі аксіальних круглих діафрагм, дисків, кілець та кільцевих щілин, прямокутних гофр у круглому хвилеводі [296]-[298]. Оператори розсіяння поодинокі неоднорідності отримано методом часткових областей у поєднанні з методом моментів. Важливо, що у роботах [293]-[295] операторні рівняння записано для скінченної системи неоднорідностей в цілому. Ці операторні рівняння дозволяють отримати не лише поле, яке пройшло або відбите поле, але й

поле між неоднорідностями. У цьому ж розділі буде використано ітераційну процедуру запису операторних рівнянь. У випадку, якщо цікавить лише поле, яке пройшло та відбите поле (коефіцієнти проходження та відбиття), такий підхід виявляється найбільш ефективним з точки зору використання комп'ютерної пам'яті та часу обчислень. При цьому підході не треба розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, записану для всієї структури в цілому, а треба кілька разів послідовно розв'язати систему рівнянь меншої розмірності. Кількість цих систем дорівнює кількості неоднорідностей. Обґрунтування ефективності застосування ітераційної процедури надано в розділі 5.

В продовження дослідження, яке було розпочато і висвітлено у кандидатській дисертації, у цьому розділі також застосовано генетичний алгоритм оптимізації параметрів фільтру на базі неперіодичної системи аксіально-симетричних щілин в порожньому внутрішньому провіднику коаксіального хвилеводу, записано відповідні операторні рівняння для розв'язання задачі дифракції [299]-[301].

8.1. Постановка задачі

Розглянемо дифракцію власних хвиль H_{1m} - і E_{1m} - типу круглого хвилеводу радіусу a , які набігають з області $z < 0$ на систему аксіально-симетричних неоднорідностей у хвилеводі. Вісь хвилеводу співпадає з віссю Oz . Хвилевід заповнено діелектриком з діелектричною проникністю $\varepsilon_0\varepsilon$, де $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Передбачається, що діелектрик має не великі втрати, $\varepsilon'' \ll 1$. Розглянемо п'ять типів неоднорідностей: кругла діафрагма радіусу a_1 , диск радіусу a_1 , кільце з більшим та меншим радіусами a_2 і a_1 , кільцева щілина з більшим та меншим радіусами a_2 і a_1 , прямокутна гофра. Гофру будемо моделювати як дві ступінчаті неоднорідності. Неоднорідності розташовано

співвісно з хвилеводом, мають нульову товщину. Стінки хвилеводу та неоднорідностей є ідеально провідними.

При використанні операторного методу спочатку необхідно отримати розв'язок “ключової задачі” – задачі про дифракцію на поодинокій неоднорідності. Геометрію п'яти поодиноких неоднорідностей наведено на рис.8.1. Після цього мають бути розв'язані операторні рівняння, які, в даній задачі, є матричними, для скінченної та напівнескінченної системи неоднорідностей.

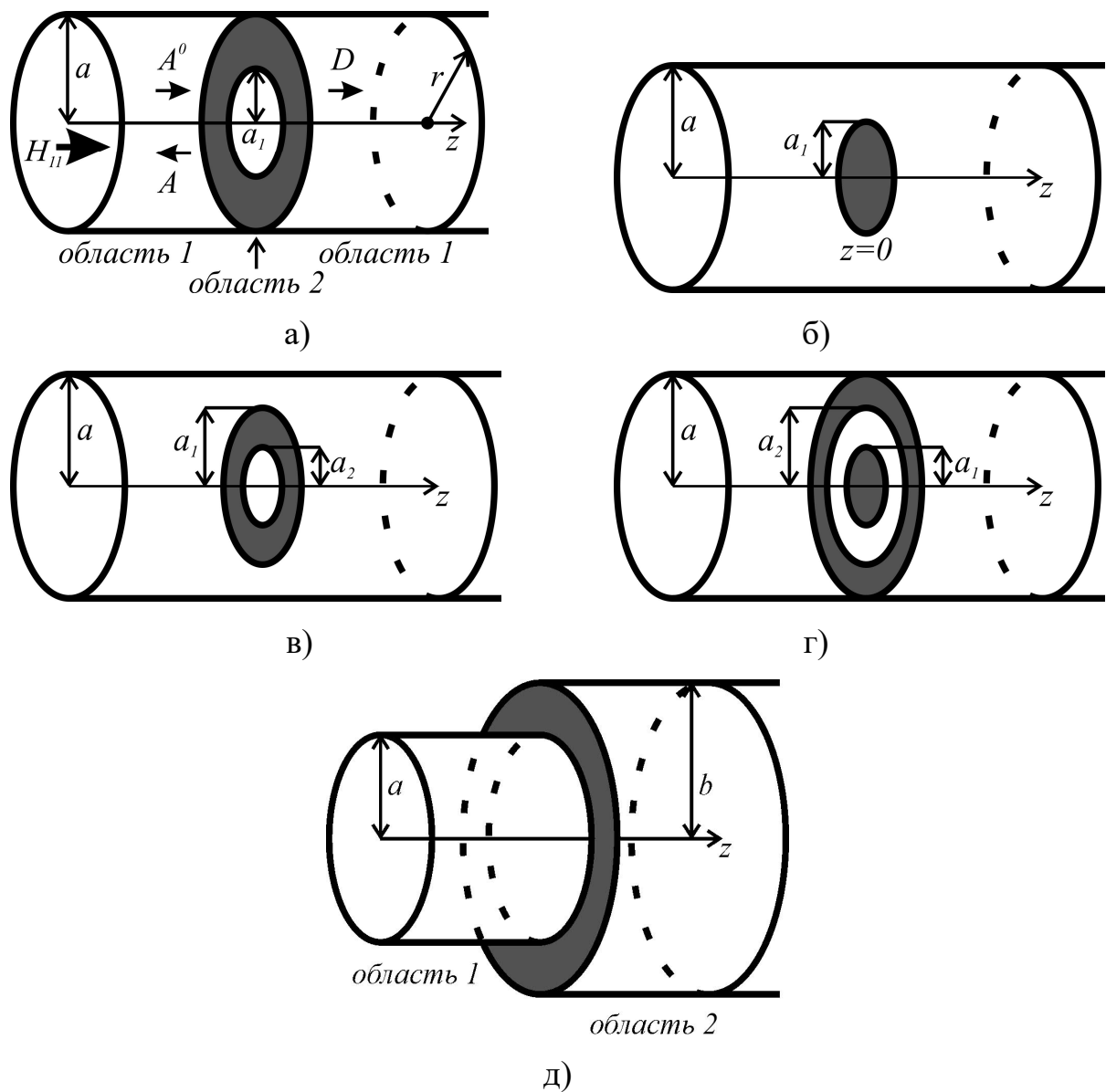


Рис.8.1 Геометрія поодинокій неоднорідності. а) Кругла діафрагма, б) диск, в) кільце, г) кільцева щілина, д) ступінчаста неоднорідність

8.2. Кругла діафрагма, диск, щілина

Припустимо, що на поодинокую неоднорідність, яка розташована в площині $z = 0$, з області $z < 0$ набігають хвилі H_{1m} - і E_{1m} -типу круглого хвилеводу. Вектор амплітуд падаючої хвилі позначимо як $A^0 = (A_m^{0,H}, A_m^{0,E})_{m=1}^\infty$. Верхній індекс H або E відповідає хвилям H_{1m} або E_{1m} типу. Вектор амплітуд відбитих хвиль в область $z < 0$ та хвиль, які пройшли в область $z > 0$, позначимо як $A = (A_m^H, A_m^E)_{m=1}^\infty$ і $D = (D_m^H, D_m^E)_{m=1}^\infty$. Область хвилеводу радіусом a позначимо як область 1. Область неоднорідності при $z = 0$ позначимо як область 2.

Поперечні компоненти електричного поля можна представити за допомогою скалярних потенціалів у вигляді [302]

$$\vec{E}_{\tau,j} = \sum_{n=1}^{\infty} (\vec{e}_{j,n}^H(r, \varphi) V_{j,n}^H(z) + \vec{e}_{j,n}^E(r, \varphi) V_{j,n}^E(z)), \quad (8.1)$$

де $\vec{e}_{j,n}^H(r, \varphi) = z \times \nabla_\tau \psi_{j,n}^H$, $\vec{e}_{j,n}^E(r, \varphi) = -\nabla_\tau \psi_{j,n}^E$ – базисні вектор-функції, $\psi_{j,n}^H$, $\psi_{j,n}^E$ – скалярні потенціали, які відповідають H_{1n} - і E_{1n} - хвилям, $j = 1, 2$ – номер області, ∇_τ – градієнт по поперечним координатам (r, φ) , $V_{j,n}^H(0)$, $V_{j,n}^E(0)$ – амплітуди, які у випадку падаючого поля вважаються заданими, а у випадку розсіяного поля є невідомими, (r, φ) – координати полярної системи координат. Інші компоненти електричного або магнітного поля можуть бути знайдені з рівнянь Максвелла. Вираз аналогічний (8.1) можна записати і для поперечних компонентів магнітного поля, взявши у якості базисних вектор-функцій

$$\vec{h}_m^H = [\vec{z}; \vec{e}_m^H], \quad \vec{h}_m^E = [\vec{z}; \vec{e}_m^E] \quad (8.2)$$

де \vec{z} – орт осі Oz , $[\cdot; \cdot]$ – векторний добуток.

Запишемо скалярні потенціали і функції $V_{j,n}^H(z)$, $V_{j,n}^E(z)$ для кожної з областей і для кожної неоднорідності у явному вигляді. Введемо позначення:

$$\gamma_n^H = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu'_n}{k\sqrt{\varepsilon}a}\right)^2}, \quad \gamma_n^E = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_n}{k\sqrt{\varepsilon}a}\right)^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma \geq 0, \quad \operatorname{Im} \gamma \geq 0,$$

$$G^H(x, r) = \frac{J_1(xr)}{J_1(xa)} - \frac{Y_1(xr)}{Y_1(xa)}, \quad (8.3)$$

$$G^E(x, r) = \frac{J_1(xr)}{J_1(xa)} - \frac{Y_1(xr)}{Y_1(xa)}, \quad (8.4)$$

$J_1(x)$, $Y_1(x)$ – функції Беселя і Неймана індексу 1, μ_n , μ'_n , η_n , η'_n – n -й корінь рівнянь $J_1(x) = 0$, $J'_1(x) = 0$, $G_1^E(x, a_1) = 0$, $(G_1^H(x, r))'_{r=a_1} = 0$ відповідно.

Маємо наступні вирази. Для круглого хвилеводу радіуса a (область 1):

$$\psi_{1,n}^H = J_1\left(\frac{\mu'_n}{a}r\right) \cos(\varphi), \quad (8.5)$$

$$\psi_{1,n}^E = J_1\left(\frac{\mu_n}{a}r\right) \sin(\varphi), \quad (8.6)$$

$$V_{1,n}^{H,E}(z) = A_n^{H,E} \exp(-ik\sqrt{\varepsilon}\gamma_n^H z) + A_n^{H,E,0} \exp(ik\sqrt{\varepsilon}\gamma_n^{H,E} z), \quad z < 0, \quad (8.7)$$

$$V_{1,n}^{H,E}(z) = D_n^{H,E} \exp(ik\sqrt{\varepsilon}\gamma_n^{H,E} z), \quad z > 0. \quad (8.8)$$

У (8.7), (8.8) і надалі необхідно вибрати лише один верхній індекс H або E . Позначення “ H, E ” введено для стислості.

Для неоднорідності у вигляді круглої діафрагми, диску та кільцевої щілини (область 2) при $z = 0$ амплітуди позначимо як

$$V_{2,n}^{H,E} = B_n^{H,E}. \quad (8.9)$$

У зв'язку з тим, що у випадку кільця область поза металом не є однозв'язною, цей випадок необхідно розглянути окремо від інших неоднорідностей. Скалярні потенціали у області неоднорідності (область 2) мають вигляд:

- для круглої діафрагми:

$$\psi_{2,n}^H = J_1\left(\frac{\mu'_n}{a_1} r\right) \cos(\varphi), \quad (8.10)$$

$$\psi_{2,n}^E = J_1\left(\frac{\mu_n}{a_1} r\right) \sin(\varphi); \quad (8.11)$$

- для диску

$$\psi_{2,n}^H = G^H(\eta'_n, r) \cos(\varphi), \quad (8.12)$$

$$\psi_{2,n}^E = G^E(\eta_n, r) \sin(\varphi); \quad (8.13)$$

- для щілини маємо вирази (8.12), (8.13), але у (8.3), (8.4) замість a необхідно підставити a_2 .

З граничних умов випливають наступні рівняння

$$\vec{H}_\tau(z \rightarrow -0) = \vec{H}_\tau(z \rightarrow +0), \quad (r, \varphi) \in S, \quad (8.14)$$

$$\vec{E}_{\tau,1}(z \rightarrow -0) = \begin{cases} \vec{E}_{\tau,2}, & (r, \varphi) \in S, \\ 0, & (r, \varphi) \in S_a / S, \end{cases} \quad (8.15)$$

$$\vec{E}_{\tau,1}(z \rightarrow +0) = \begin{cases} \vec{E}_{\tau,2}, & (r, \varphi) \in S, \\ 0, & (r, \varphi) \in S_a / S, \end{cases} \quad (8.16)$$

де $\vec{E}_{\tau,2}$ – поперечні компоненти електричного поля на неоднорідності, $S_a = \{0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ – поперечний перетин круглого хвилеводу, S – область, яка не зайнята металом при $z = 0$.

Введемо скалярний добуток за формулою

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{B}^* ds, \quad (8.17)$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_a = \iint_{S_a} \vec{A} \cdot \vec{B}^* ds. \quad (8.18)$$

Використовуючи (8.1), (8.9) і ідею методу моментів, розкладемо електричне поле на неоднорідності у ряд за власними хвилями (базисними

функціями) нескінченного хвилеводу, поперечний перетин якого співпадає з поперечним перетином неоднорідності $\{\vec{e}_{2,k}^H, \vec{e}_{2,k}^E\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\vec{E}_{\tau,2} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^H \vec{e}_{2,k}^H + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^E \vec{e}_{2,k}^E. \quad (8.19)$$

Взявши скалярний добуток (8.18) виразів (8.15) або (8.16) з власною хвилею з номером n круглого хвилеводу, враховуючи, що дотичні компоненти електричного поля на ідеальному провіднику дорівнюють нулю, використовуючи (8.7), (8.8), отримаємо

$$A_n^{H,E} = \frac{\langle \vec{E}_{\tau,2}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{H,E}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle_a} - A_n^{0,H,E}, \quad (8.20)$$

$$D_n^{H,E} = \frac{\langle \vec{E}_{\tau,2}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{H,E}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle_a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

Використовуючи зв'язок між електричним і магнітним полем та (8.2), помножимо векторно рівняння (8.14) на \vec{z} . У отриманий вираз підставимо (8.19) (8.20), (8.21) та помножимо скалярно на базисні функції. Маючи на увазі ортогональність базисних функцій, в результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих амплітуд поля на неоднорідності:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} B_k^H \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^E \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle = \\ & = \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{0,\Theta} \eta_n^{\Theta} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.22)$$

яку можна розв'язати методом редукції. У (8.22) провідність $\eta_n^H = \gamma_n^H / Z$, $\eta_n^E = 1/(\gamma_n^E Z)$.

8.3. Кільце

У випадку кільця амплітуди позначимо як

$$V_{2,n}^{H,E} = B_n^{H,E}, \text{ при } 0 < r < a_1, \quad (8.23)$$

$$V_{2,n}^{H,E} = C_n^{H,E}, \text{ при } a_2 < r < a. \quad (8.24)$$

Тоді маємо вирази (8.10), (8.11) при $0 \leq r < a_1$ і вирази (8.12), (8.13) при $a_2 < r < a$, але у (8.3), (8.4) замість a необхідно підставити a_2 .

Надамо скалярний добуток по двозв'язній області інтегрування (8.17) як суму інтегралів по кожній однозв'язній області,

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{a_1} + \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{a_2}, \\ \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{a_i} &= \iint_{S_{a_i}} \vec{A} \cdot \vec{B}^* ds, \end{aligned}$$

де $S_{a_1} = \{0 \leq r \leq a_1; 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $S_{a_2} = \{a_2 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Виконуючи ті самі дії, що і при записі системи (8.22), використовуючи (8.23), (8.24), отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} B_k^H \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^H, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a_1}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{a_i} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^E \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^E, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a_1}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{a_i} \\ & \sum_{k=1}^{\infty} C_k^H \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^H, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a_2}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{a_i} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^E \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^E, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a_2}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{a_i} = \\ & = \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{0,\Theta} \eta_n^{\Theta} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{a_i}, \quad i=1, 2; \quad m=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.25)$$

8.4. Прямокутна гофра скінченної товщини

Прямокутну горфу будемо розглядати як об'єднання двох ступінчастих неоднорідностей. Спочатку з використанням методу моментів отримаємо розв'язок задачі про дифракцію на поодинокій ступінчастій неоднорідності. Властивості ж прямокутної гофри можна отримати з операторних рівнянь. У випадку ступінчастої неоднорідності область хвилеводу радіусом a , при $z < 0$, позначимо як область 1. Область хвилеводу радіусом b , при $z > 0$, позначимо як область 2 (див. рис.8.1 д). Хвилевід заповнено вакуумом ($\varepsilon = 1$).

Припустимо, що на ступінчасту неоднорідність набігає власна хвиля хвилеводу з області 1 з вектором амплітуд $A^0 = (A_m^{0,H}, A_m^{0,E})_{m=1}^{\infty}$, а в області 2 – з вектором амплітуд $B^0 = (B_m^{0,H}, B_m^{0,E})_{m=1}^{\infty}$

Скалярні потенціали та функції $V_{j,n}^H(z)$, $V_{j,n}^E(z)$ може бути записано як

$$\psi_{I,n}^H = J_1\left(\frac{\mu_{n,I}r}{a}\right)\cos(\varphi),$$

$$\psi_{II,n}^H = J_1\left(\frac{\mu_{n,I}r}{b}\right)\cos(\varphi),$$

$$\psi_{I,n}^E = J_1\left(\frac{\mu_{n,I}r}{a}\right)\sin(\varphi),$$

$$\psi_{II,n}^E = J_1\left(\frac{\mu_{n,I}r}{b}\right)\sin(\varphi),$$

$$V_{I,n}^H = A_n^H \exp(-ik\gamma_n^{H,I}z) + A_n^{H,0} \exp(ik\gamma_n^{H,I}z),$$

$$V_{II,n}^H = B_n^H \exp(ik\gamma_n^{H,II}z) + B_n^{H,0} \exp(-ik\gamma_n^{H,II}z),$$

$$V_{I,n}^E = A_n^E \exp(-ik\gamma_n^{E,I}z) + A_n^{E,0} \exp(ik\gamma_n^{E,I}z),$$

$$V_{II,n}^E = B_n^E \exp(ik\gamma_n^{E,II}z) + B_n^{E,0} \exp(-ik\gamma_n^{E,II}z),$$

$$\text{де } \gamma_n^{H,I} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu'_n}{ka}\right)^2}, \quad \gamma_n^{H,II} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu'_n}{kb}\right)^2}, \quad \gamma_n^{E,I} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_n}{ka}\right)^2}, \quad \gamma_n^{E,II} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_n}{kb}\right)^2},$$

$$\text{Re } \gamma \geq 0, \quad \text{Im } \gamma \geq 0.$$

Діючи так само, як і в параграфі 8.2, можемо записати систему рівнянь для визначення невідомих амплітуд A_n^H і A_n^E

$$\begin{aligned} & \langle \vec{e}_{l,m}^H, \vec{e}_{l,m}^H \rangle \gamma_m^{H,II} (A_m^H - A_m^{H,0}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{H,II} \langle \vec{e}_{ll,n}^H, \vec{e}_{l,m}^H \rangle B_n^{H,0} + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^H + A_l^{H,0}) (Q_{m,l}^{H,H,I,I} + S_{m,l}^{H,H,I,I}) + \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^E + A_l^{E,0}) S_{m,l}^{H,E,I,I} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{l,m}^H \rangle / \gamma_n^{E,II} B_n^{E,0} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \langle \vec{e}_{l,m}^E, \vec{e}_{l,m}^E \rangle / \gamma_m^{E,II} (A_m^E - A_m^{E,0}) + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^H + A_l^{H,0}) S_{m,l}^{E,H,I,I} + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^E + A_l^{E,0}) S_{m,l}^{E,E,I,I} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{l,m}^E \rangle / \gamma_n^{E,II} B_n^{E,0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.27)$$

де

$$Q_{m,l}^{\alpha,\beta,q,r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{H,II} \langle \vec{e}_{ll,n}^H, \vec{e}_{q,m}^\alpha \rangle \langle \vec{e}_{ll,n}^H, \vec{e}_{r,l}^\beta \rangle}{\langle \vec{e}_{ll,n}^H, \vec{e}_{ll,n}^H \rangle}, \quad S_{m,l}^{\alpha,\beta,q,r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{q,m}^\alpha \rangle \langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{r,l}^\beta \rangle}{\gamma_n^{E,II} \langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{ll,n}^E \rangle},$$

індекси q, r відповідають номеру області номеру 1 чи 2 індекси α, β відповідають типу хвиль H або E . Вирази для визначення коефіцієнтів B_n^H і B_n^E мають вигляд

$$B_n^H = \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^H + A_l^{H,0}) \frac{\langle \vec{e}_{ll,n}^H, \vec{e}_{l,l}^H \rangle}{\langle \vec{e}_{ll,n}^H, \vec{e}_{ll,n}^H \rangle} - B_n^{H,0}, \quad (8.28)$$

$$B_n^E = \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^H + A_l^{H,0}) \frac{\langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{l,l}^H \rangle}{\langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{ll,n}^E \rangle} + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^E + A_l^{E,0}) \frac{\langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{l,l}^E \rangle}{\langle \vec{e}_{ll,n}^E, \vec{e}_{ll,n}^E \rangle} - B_n^{E,0} \quad (8.29)$$

Амплітуди Фур'є поля, відбитого поодинокую гофрою A і поля, яке пройшло D , можна визначити з операторних рівнянь [176]:

$$A = \tau_{2,1} e C_1 + \rho_{1,2} A^0, \quad (8.30)$$

$$D = \tau_{2,1} e B_1, \quad (8.31)$$

$$B_1 = \rho_{2,1} \epsilon C_1 + \tau_{1,2} A^0, \quad (8.32)$$

$$C_1 = \rho_{2,1} \epsilon C_1 \quad (8.33)$$

де оператор s визначає зміну амплітуди поля при зсуві системи координат вздовж осі Oz на величину, яка дорівнює довжині гофри, $\rho_{1,2}$, $\rho_{2,1}$ і $\tau_{2,1}$ – оператори проходження та відбиття ступінчастої неоднорідності.

Скалярні добутки у (8.22), (8.23) може бути обчислено аналітично і виражено через функції Беселя. Явні вирази наведено, наприклад, у [276], [295], [297]. Скалярний добуток для кільця може бути записано явно з використанням отриманих виразів для діафрагми і для диску.

Амплітуди поля, яке пройшло, та відбитого поля можна знайти з (8.20), (8.21), підставивши вираз для $\vec{E}_{\tau,2}$ через амплітуди поля на неоднорідності (8.19). Використовуючи розв'язок систем рівнянь (8.22), (8.23), чи (8.26)-(8.29) і використовуючи розв'язок операторних рівнянь (8.30)-(8.33), а також представлення для поля (8.1)-(8.8), введемо матричні оператори проходження t_1 та відбиття r_1 поодинокій неоднорідності за формулами

$$D = t_1 A^0,$$

$$A = r_1 A^0.$$

8.5. Скінченна та напівнескінченна система неоднорідностей. Операторний метод

Розглянемо скінченну систему еквідистантно розташованих однакових неоднорідностей. Відстані між неоднорідностями або період позначимо як L . Оператори проходження і відбиття системи, яка складається з N неоднорідностей, позначимо як t_N і r_N . Також окремо розглянемо випромінювання з відкритого кінця круглого гофрованого хвилеводу, у якому гофри мають різні розміри та розташовані не еквідистантно.

Для отримання операторів розсіювання системи, яка складається з N -неоднорідностей будемо використовувати ітераційну процедуру. Будемо вважати оператори розсіювання системи, яка складається з $N-1$ -ї неоднорідності, відомі. Позначимо вектор амплітуд падаючої хвилі як q , відбитої хвилі як A , хвилі, яка пройшла як D , а хвиль між $N-1$ -ю та N -ю неоднорідностями як B_{N-1} і C_{N-1} (див. рис.8.2). Вони пов'язані наступними операторними рівняннями.

$$A = t_{N-1}eC + r_{N-1}q, \quad (8.34)$$

$$A = r_N q, \quad (8.35)$$

$$D = t_1 e B, \quad (8.36)$$

$$D = t_N q, \quad (8.37)$$

$$B = r_{N-1}eC + t_{N-1}q, \quad (8.38)$$

$$C = r_1 e B, \quad (8.39)$$

де оператор e має діагональну матрицю та визначає перетворення комплексних амплітуд поля при зсуві системи координат на величину L вздовж осі Oz в напрямку поширення хвиль.

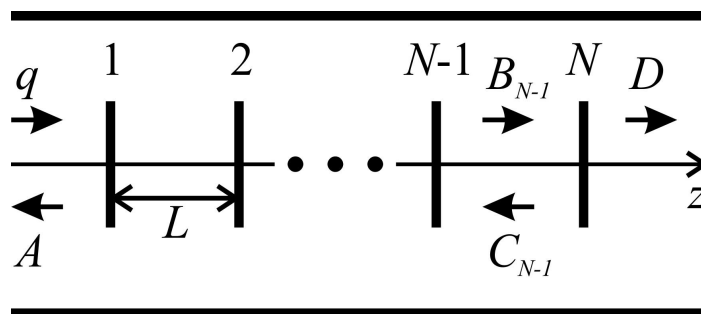


Рис.8.2 Скінченна система еквідистантно розташованих однакових неоднорідностей

Знайдемо B , C з (8.38), (8.39) і підставимо у (8.34), (8.36). Підставимо (8.35) у (8.34), а (8.37) у (8.36). Маючи на увазі, що власні функції, які відповідають H_{1n} - і E_{1n} - хвилям, утворюють базис, послідовно підставимо

замість однієї з компонент вектора q одиницю, а замість всіх інших компонент нуль. Остаточно отримаємо вирази для знаходження невідомих операторів проходження та відбиття системи, яка складається з N неоднорідностей

$$t_N = t_1 e(I - r_{N-1} e r_1 e)^{-1} t_{N-1},$$

$$r_N = r_{N-1} + t_{N-1} e r_1 e (I - r_{N-1} e r_1 e)^{-1} t_{N-1}.$$

Оператор відбиття напівнескінченної періодичної системи може бути знайдено з нелінійного операторного рівняння другого роду [15]

$$r = r_1 + t_1 (I - e r e r_1)^{-1} e r t_1. \quad (8.40)$$

Розглянемо тепер скінченну систему неоднорідностей у хвилеводі, радіус якого може змінюватись східчастим способом за довільним законом від значення a_0 при $z=0$ до значення a_1 при $z=L$ (див. рис.8.3). У напівпросторі $z > L$ розташовується або вільний простір, або напівнескінченна періодична структура.

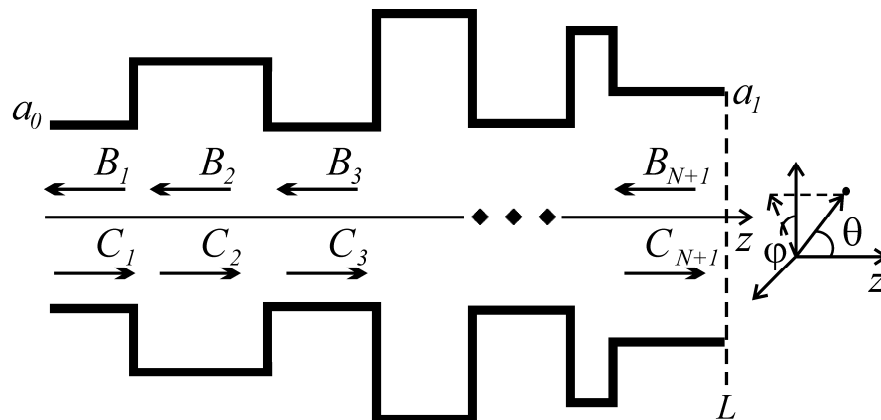


Рис.8.3 Скінченна система нееквідистантно розташованих гофр

В результаті використання ітераційної процедури можуть бути отримані рівняння вигляду (8.34)-(8.39). Проте, на останньому кроці процесу у рівняннях (8.36), (8.39) необхідно взяти відповідний оператор відбиття від напівнескінченної періодичної системи або оператори проходження та

відбиття від відкритого кінця хвилеводу (у випадку напівнескінченної періодичної системи рівняння (8.36), (8.37) необхідно виключити на останньому кроці ітераційної процедури).

8.6. Числові результати

Будемо припускати, що на систему неоднорідностей набігає H_{11} -хвиля круглого хвилеводу.

Для підтвердження вірності побудованої моделі спочатку проведемо порівняння результатів, отриманих запропонованим методом, з результатами, отриманими в комерційному пакеті HFSS. На рис.8.4 наведено залежності коефіцієнта проходження та відбиття H_{11} -хвилі, а також коефіцієнти перетворення хвилі H_{11} у хвилю E_{11} за амплітудою від хвильового числа. При $\mu'_1 < ka < \mu_1$ хвилевід працює у одномодовому режимі. При збільшенні частоти, при $ka > \mu_1$ можливе також поширення E_{11} -хвилі круглого хвилеводу. Частина енергії хвилі H_{11} перетворюється у енергію хвилі E_{11} , яка поширюється у бік менших та більших значень осі Oz . Характер поведінки кривих, отриманих запропонованим методом, співпадає з характером поведінки кривих, отриманих за допомогою HFSS, що підтверджує правильність результатів. При розрахунках було враховано всі хвилеводні хвилі, що поширюються, і 2 затухаючі хвилі.

На рис.8.5 наведено залежності коефіцієнта відбиття від радіусу діафрагми для $N = 1$, $N = 2$ і напівнескінченної системи. Для розглянутого значення частоти круглий хвилевід працює у одномодовому режимі. Криві носять монотонний характер, спадаючи від $R = 1$ при повністю заповненій області неоднорідності металом, $a_1 = 0$, до $R = 0$ при відсутній діафрагмі, $a_1 = a$, де R – коефіцієнт відбиття. У випадку напівнескінченної структури спостерігається повне відбиття, $R = 1$, приблизно до значення $a_1 / a \approx 0.75$.

На рис.8.6-рис.8.10 наведено залежності коефіцієнта відбиття структур, які складаються з $N = 2$, $N = 10$ і напівнескінченної системи однакових неоднорідностей від періоду L .

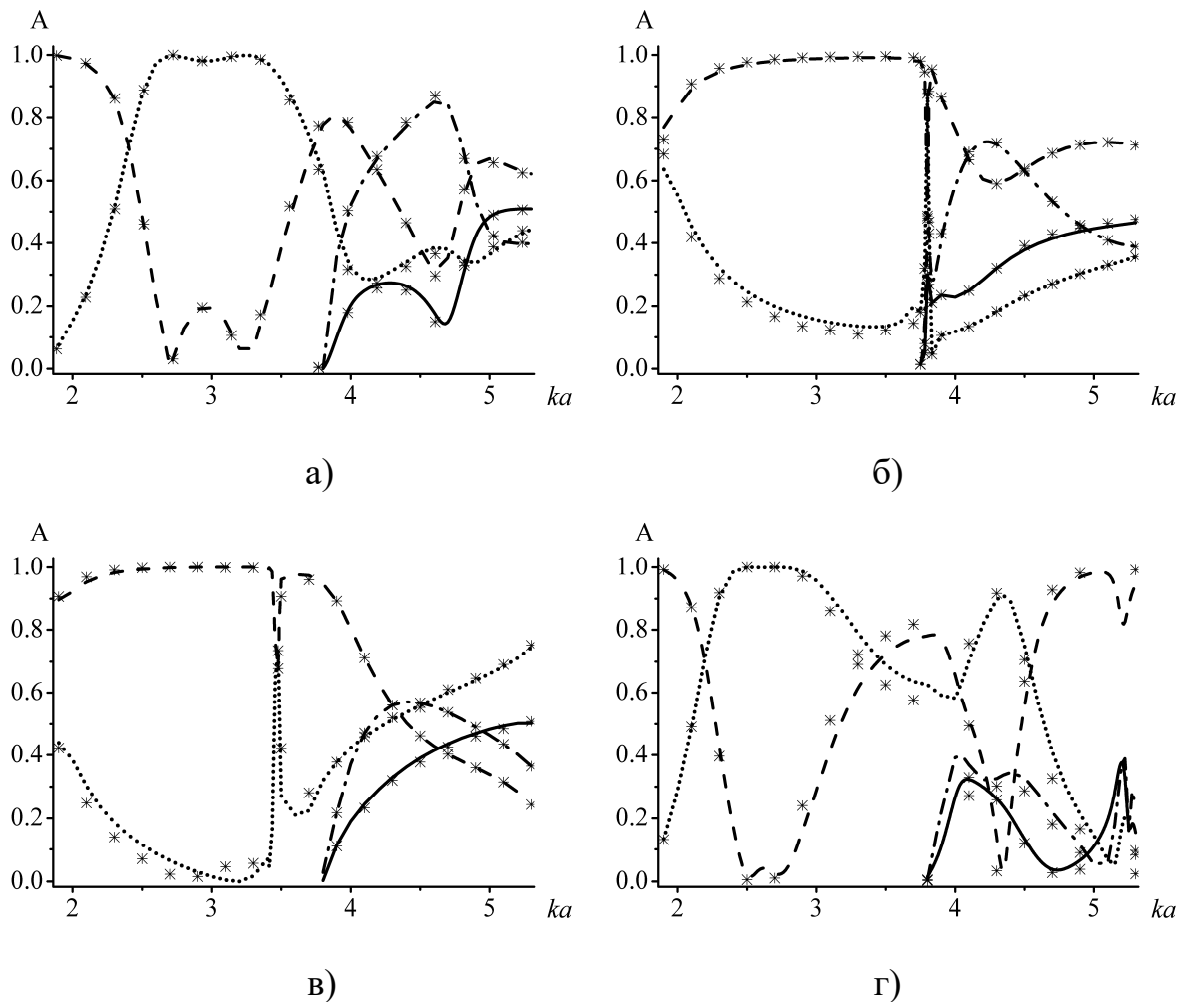


Рис.8.4 Залежності амплітуди A коефіцієнта відбиття (штрихові криві), проходження (пунктирні криві) хвилі H_{11} -, коефіцієнта перетворення хвилі H_{11} - у хвилю E_{11} - в області $z < 0$ (штрих-пунктирні криві) та в області $z > 0$ (суцільні криві) від хвильового числа при $\varepsilon = 1$ для $N = 2$ неоднорідностей. а) кругла діафрагма $a_1/a = 0.6$, б) диск $a_1/a = 0.6$, в) кільце, $a_1/a = 0.3$, $a_2/a = 0.6$, г) щілина, $a_1/a = 0.3$, $a_2/a = 0.6$. Для порівняння маркерами наведено результати, отримані в HFSS

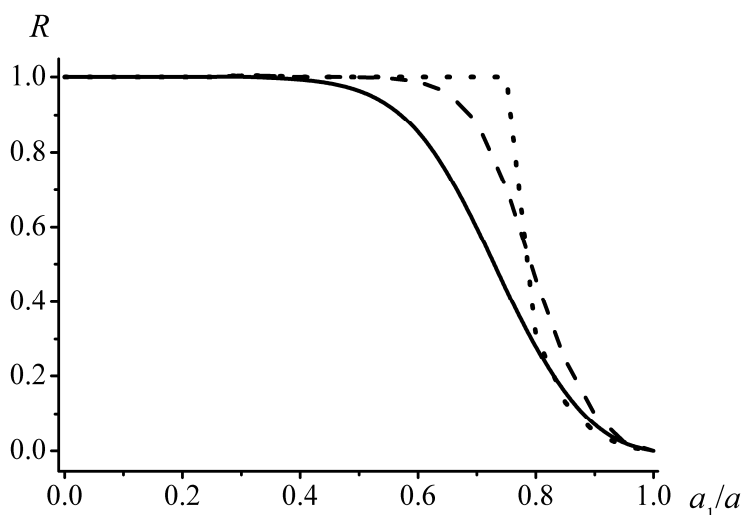


Рис.8.5 Залежності коефіцієнта відбиття хвилі H_{11} - від меншого радіусу a_1 для поодинокі круглої діафрагми $N = 1$ (суцільна крива), двох круглих діафрагм $N = 2$ (штрихова крива), напівнескінченної системи круглих діафрагм (пунктирна крива) при $ka = 2$, $\varepsilon = 1$, $L/a = 1$

Для кращого візуального відображення на рис.8.10 результати наводяться у дБ. Передбачається, що хвилевід заповнено діелектриком з $\varepsilon' = 4$. Криві побудовано для різних значень втрат у діелектрику ε'' . Залежності носять практично періодичний характер з періодом $L/\lambda_g = 0.5$, де λ_g – довжина хвилеводної хвилі H_{11} -типу. При відносно малих значеннях періоду присутні невеликі відхилення від періодичності, які викликані впливом затухаючих хвилеводних хвиль. Спостерігається наявність ярко виражених зон запирання. В зонах запирання при відсутності втрат коефіцієнт відбиття напівнескінченної структури дорівнює 1. В зонах прозорості спостерігаються осциляції. Кількість мінімумів коефіцієнта відбиття є меншою на одиницю ніж кількість неоднорідностей на кожному періоді. При збільшенні числа неоднорідностей коефіцієнт відбиття для скінченної структури наближається до коефіцієнта відбиття для напівнескінченної структури у зонах запирання. Криві для скінченної структури наближаються до кривих для напівнескінченної структури при

збільшенні значення втрат також і у зонах прозорості. Залежності для напівнескінченної структури є граничним випадком для залежностей для скінченної структури.

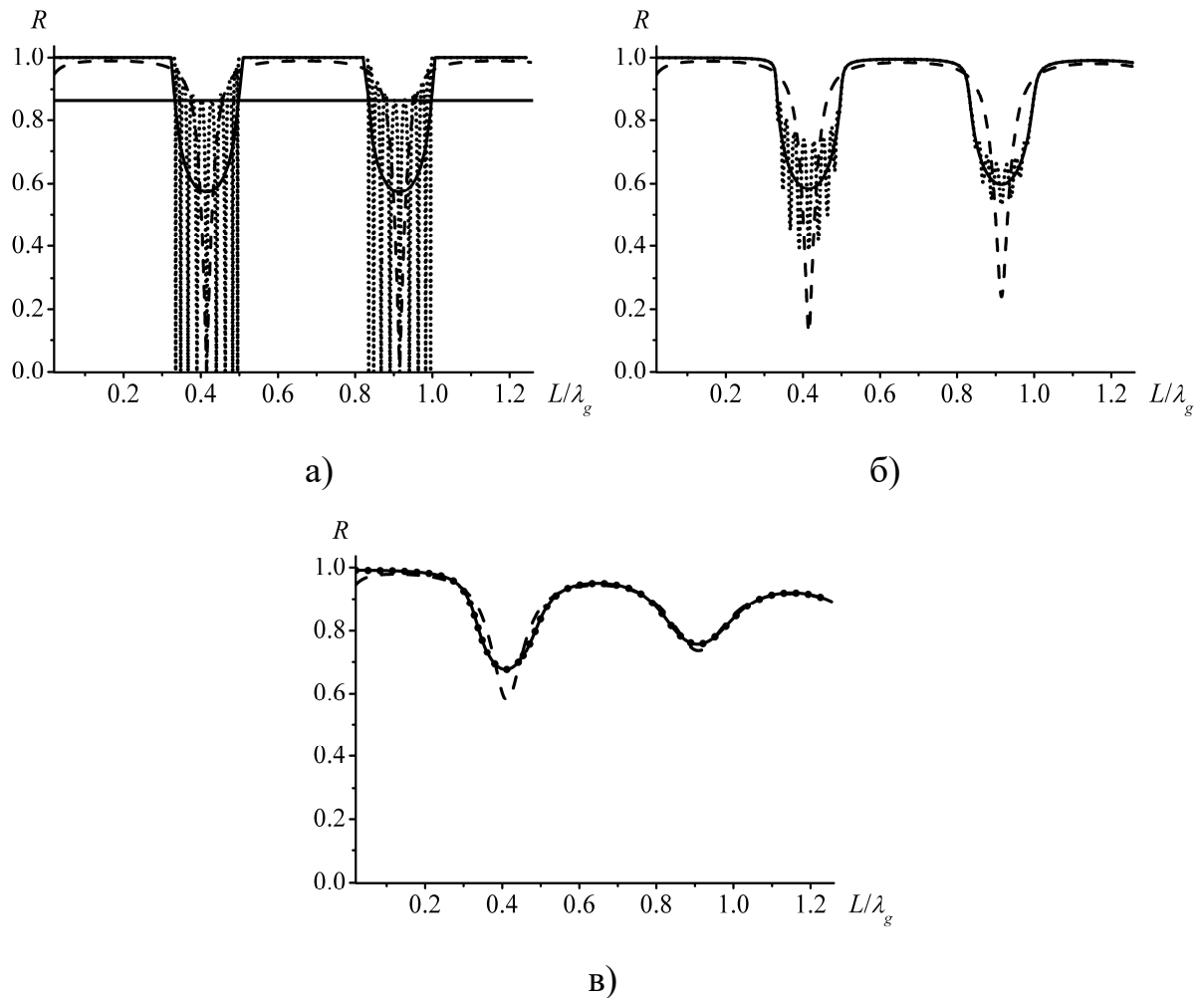


Рис.8.6 Залежності коефіцієнта відбиття хвилі H_{11} - від відстані між неоднорідностями для двох $N = 2$ (штрихові криві), десяти $N = 10$ (пунктирні криві) та напівнескінченної системи (суцільні криві) круглих діафрагм при $ka\sqrt{\varepsilon'} = 2$, $\varepsilon' = 4$, $a_1/a = 0.6$. Горизонтальною лінію відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокі діафрагми. а) $\varepsilon'' = 0$ (діелектрик без втрат), б) $\varepsilon'' = 0.01$, в) $\varepsilon'' = 0.1$

В зоні запирання значення коефіцієнта відбиття для $N = 10$ неоднорідностей і для напівнескінченної системи співпадають з графічною

точністю. У випадку кільця та диску зони запирання з'являються при майже однакових значеннях періоду. Проте у випадку кільця їх ширина перевищує ширину у всіх інших розглянутих випадках. Для щілини ширина зони запирання найменша.

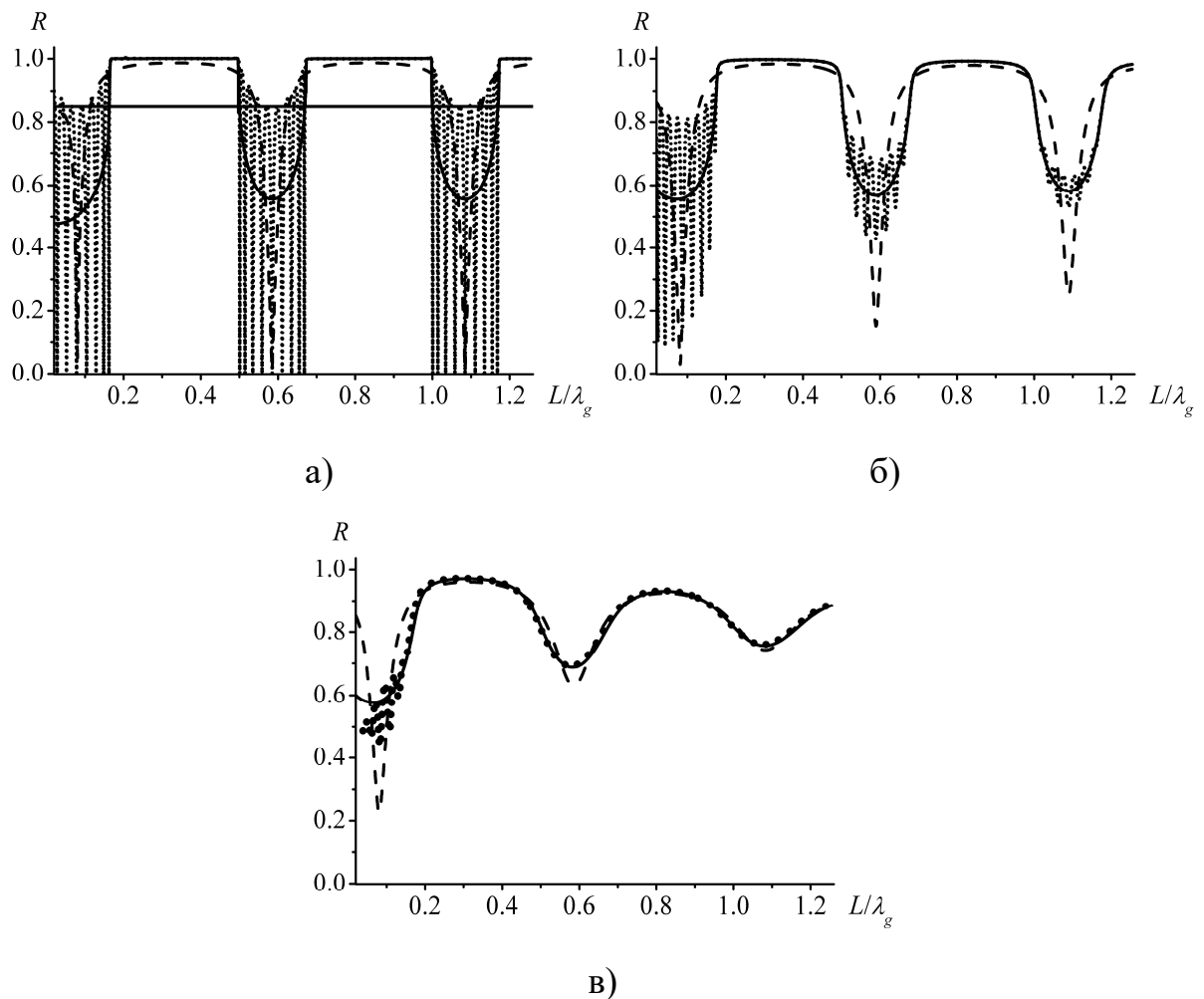


Рис.8.7 Залежності коефіцієнта відбиття хвилі H_{11} - від відстані між неоднорідностями для двох $N = 2$ (штрихові криві), десяти $N = 10$ (пунктирні криві) та напівнескінченної системи (суцільні криві) дисків при $ka\sqrt{\varepsilon'} = 2$, $\varepsilon' = 4$, $a_1/a = 0.6$. Горизонтальною лінією відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокого диску. а) $\varepsilon'' = 0$ (діелектрик без втрат), б) $\varepsilon'' = 0.01$, в) $\varepsilon'' = 0.1$

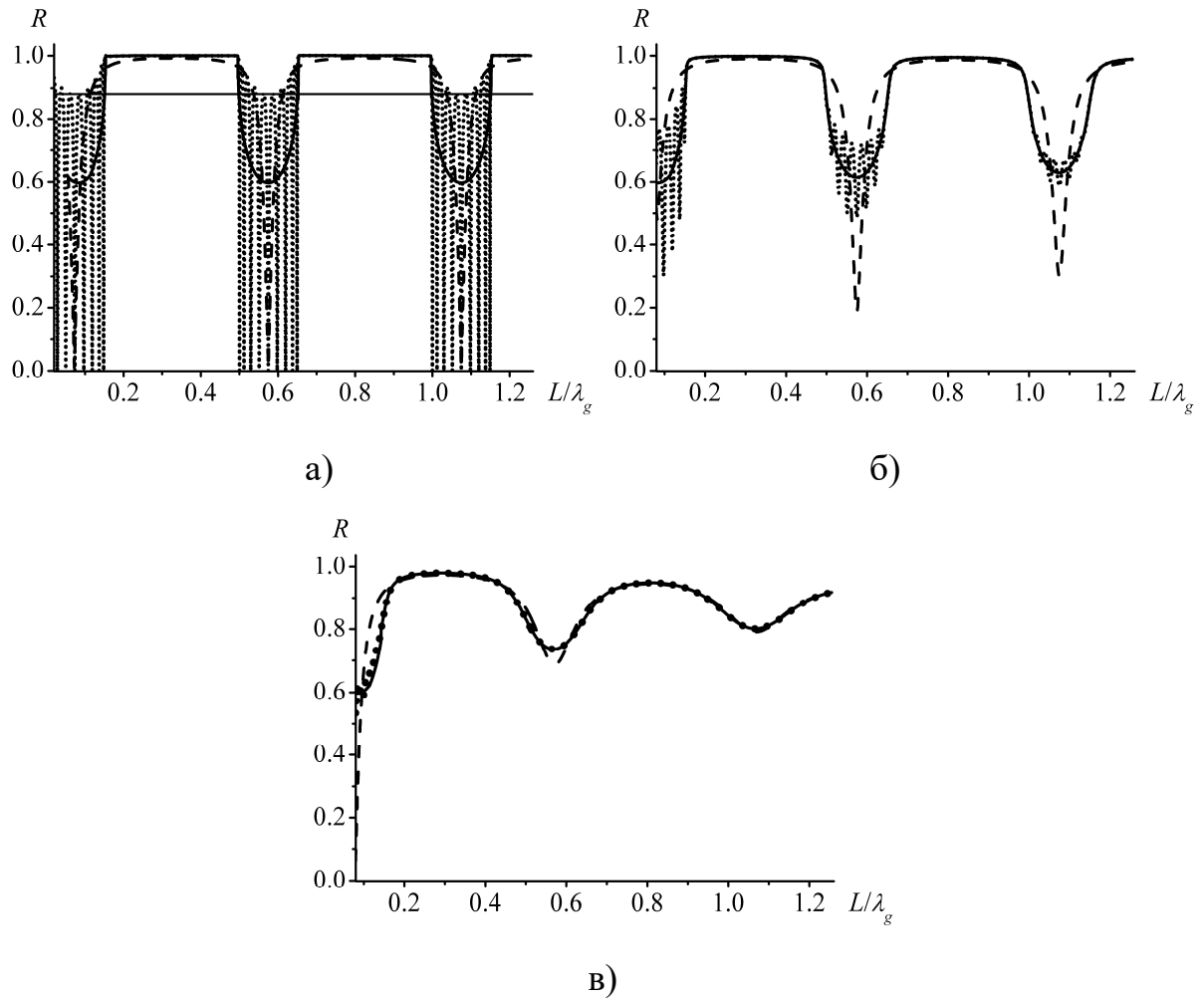


Рис.8.8 Залежності коефіцієнта відбиття хвилі H_{11} від відстані між неоднорідностями для двох $N = 2$ (штрихові криві), десяти $N = 10$ (пунктирні криві) та напівнескінченної системи (суцільні криві) кілець при $ka\sqrt{\varepsilon'} = 2$, $\varepsilon' = 4$, $a_1/a = 0.3$, $a_2/a = 0.6$. Горизонтальною лінією відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокого кільця. а) $\varepsilon'' = 0$ (діелектрик без втрат), б) $\varepsilon'' = 0.01$, в) $\varepsilon'' = 0.1$

На рис.8.11 наведено залежності коефіцієнта відбиття (за потужністю) структури, що представляє собою стик скінченноелементної (8 гофр) і напівнескінченної системи гофр, геометрія якої відповідає [283], табл. 2, а також структури, у якій менший радіус a змінюється від 1.34 см до 2.1 см. Значення у сантиметрах, а не у відносних величинах надано для кращого порівняння з результатами, наведеними в літературі. Для порівняння також

наведено графік з [283]. Розбіжності в кривих, отриманих наведеним методом та з [283] не перевищують 0.5 дБ за винятком менших значень частоти (лівий край кривих). Проте в роботі [283] повідомлялося про зростання похибки результатів поблизу цієї області. Відмітимо, що запропоноване число гофр є оптимальним. Збільшення числа гофр призводить до незначної зміни коефіцієнта відбиття, але збільшує розміри пристрою.

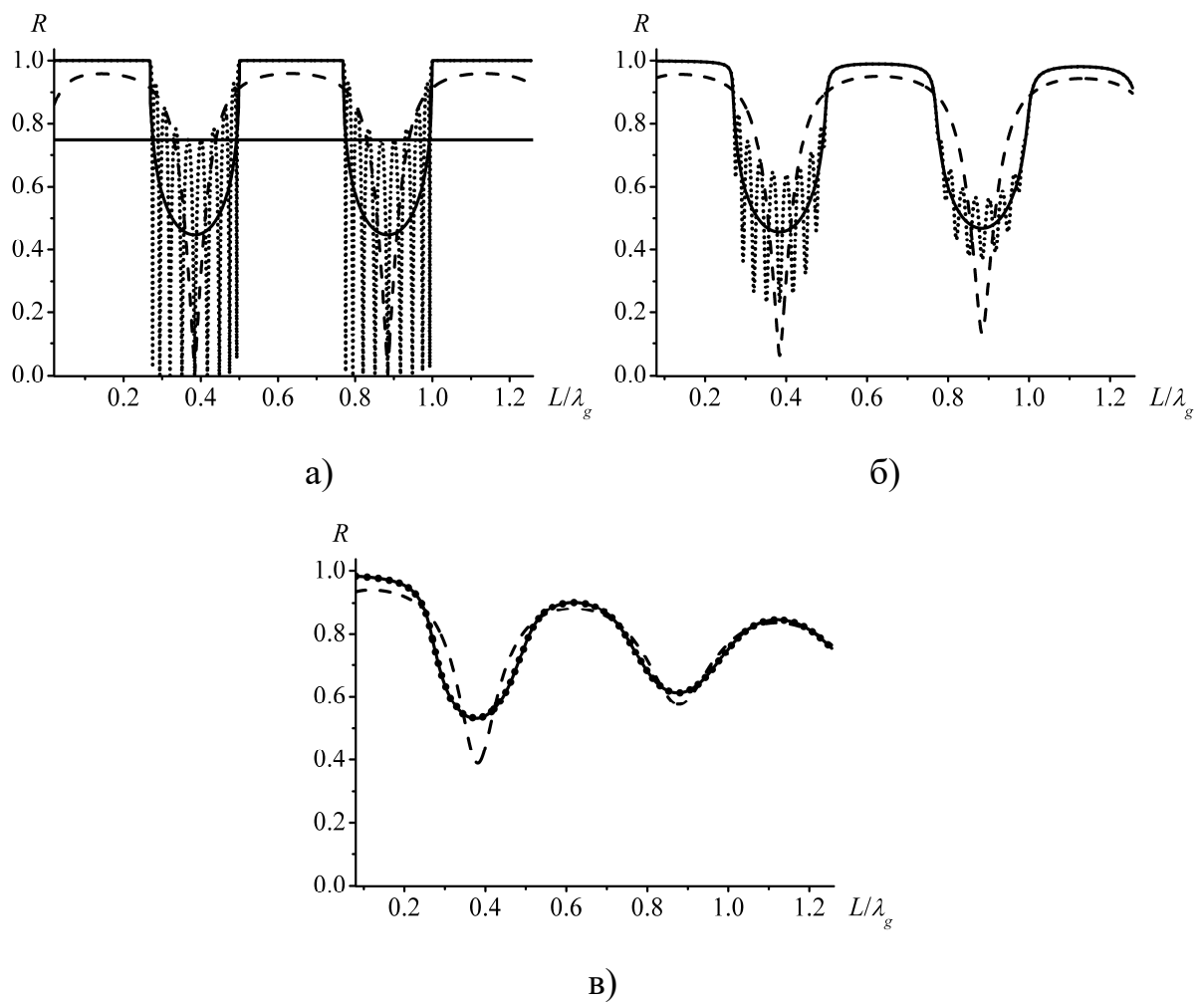


Рис.8.9 Залежності коефіцієнта відбиття хвилі H_{11} - від відстані між неоднорідностями для двох $N = 2$ (штрихові криві), десяти $N = 10$ (криві з точок) та напівнескінченної системи (суцільні криві) щілин при $ka\sqrt{\varepsilon'} = 2$, $\varepsilon' = 4$, $a_1/a = 0.3$, $a_2/a = 0.6$. Горизонтальною лінією відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокій щілини. а) $\varepsilon'' = 0$ (діелектрик без втрат), б) $\varepsilon'' = 0.01$, в) $\varepsilon'' = 0.1$

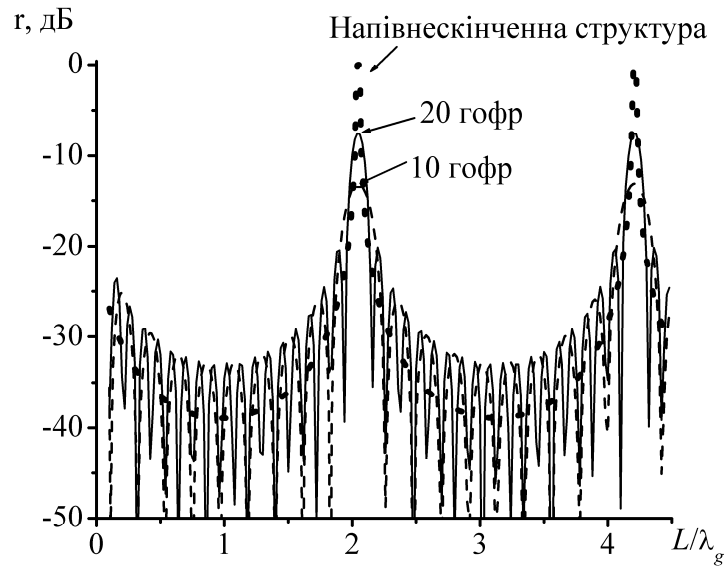


Рис.8.10 Залежність коефіцієнта відбиття хвилі H_{11} - від періоду для десяти $N = 10$ (штрихова крива), двадцяти $N = 20$ (суцільна крива) та напівнескінченної системи (штрихова крива) гофр

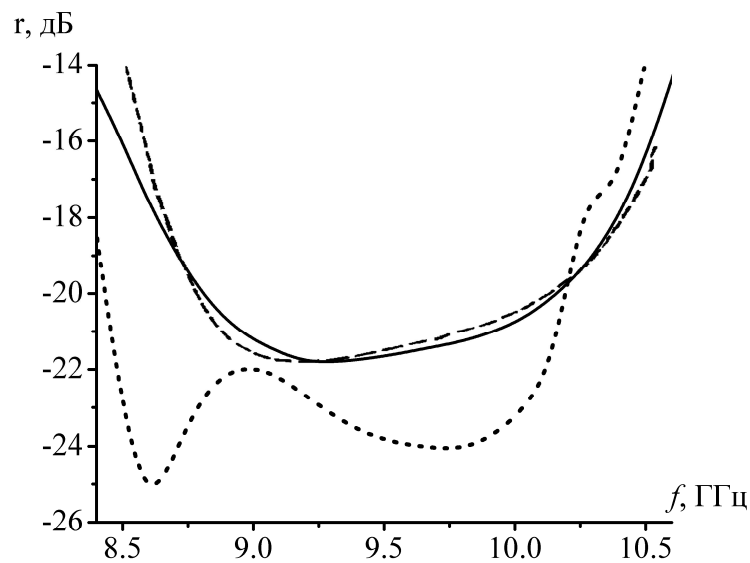


Рис.8.11 Залежності коефіцієнта відбиття (за потужністю) структури, яка складається з скінченної кількості гофр (вісім) і напівнескінченної періодичної системи (суцільна крива), структури, у якій менший радіус a змінюється від 1.34 см до 2.1 см (пунктирна крива). Для порівняння також у вигляді штрихової кривої наведено результати з роботи [283]

На рис.8.12 проведено порівняння результатів, отриманих наведеним методом, з результатами з [304]. Геометричні параметри обрано такими, як і в [304], табл.1(i). При обчисленнях враховувалося 3 хвилі типу H - і 3 хвилі типу E - між неоднорідностями. Збільшення цього числа призводило до зміни значення коефіцієнта відбиття не більше, ніж на 0.1% на всьому розглянутому частотному відрізку. Результати співпадають з графічною точністю.

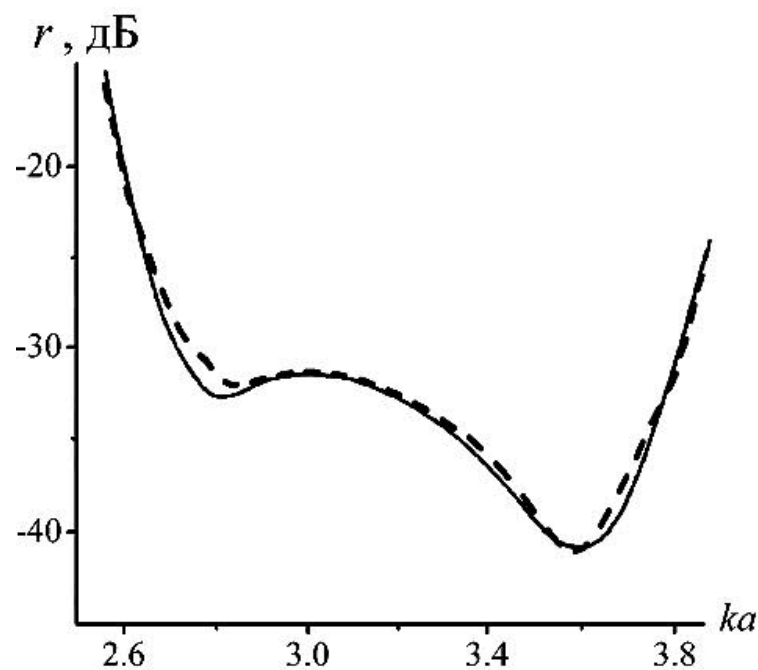


Рис.8.12 Залежності коефіцієнта відбиття хвилі H_{11} - від ka для гофрованого хвилеводу з [304], табл.1 (i). Суцільна крива – з [304], штрихова крива – наведений метод

Діаграма спрямованості виражається через вектор амплітуд $C_{N+1} = (C_{n,N+1}^H, C_{n,N+1}^E)_{n=1}^{\infty}$ або $D = (D_n^H, D_n^E)_{n=1}^{\infty}$, де індекси H і E відповідають H - і E - хвилям, і може бути обчислена за формулою [303]

$$D_1(\theta, \varphi) = \frac{k^4 c}{8\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left((C_{n,N+1}^H)^2 |\Pi^H(R, \theta)R|^2 \sin^2(\varphi) + C_{n,N+1}^E |\Pi^E(R, \theta)R|^2 \cos^2(\varphi) \right),$$

де R – відстань, $\Pi^{H,E}(R,\theta)$ – функції Герца, вираз для яких при $kR \gg 1$ отримано за допомогою методу перевалу, причому $|\Pi^{H,E}(R,\theta)R|$ не залежить від R .

На рис.8.13 наведено залежності коефіцієнта відбиття H_{11} -хвилі гофрованого хвилеводу з відкритим кінцем від параметра ka_0 . Радіуси $a_0 = 2.9$ см, $a_1 = 4.2$ см. Геометрію структури наведено на вставці до рисунка. На відрізку $ka = 2.8 \dots 4$ коефіцієнт відбиття не перевершує -20 дБ, за винятком значень, близьких до $ka_0 \approx 3.05$, де коефіцієнт відбиття досягає -18 дБ.

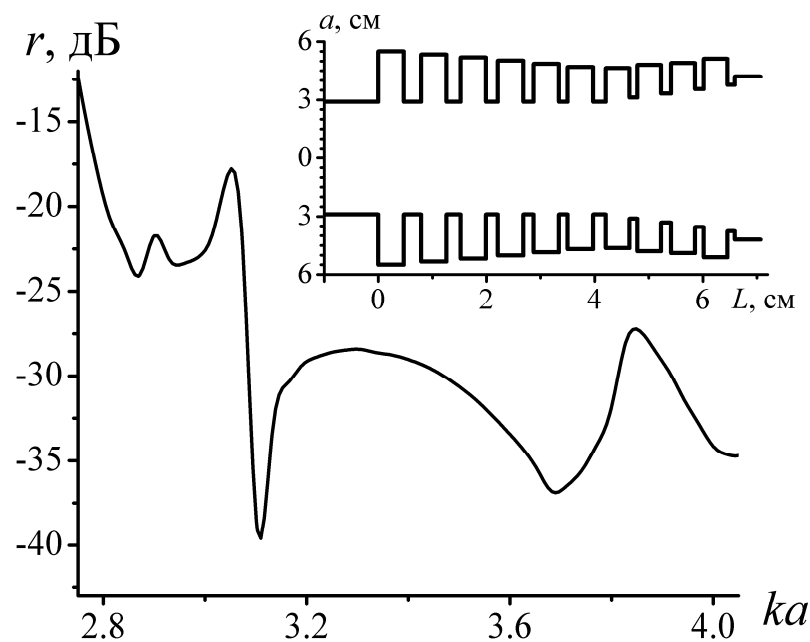


Рис.8.13 Залежність коефіцієнта відбиття H_{11} -хвилі гофрованого хвилеводу з відкритим кінцем від параметра ka , радіус якого змінюється від $a = 2.9$ см до $a = 4.2$ см. Геометрію наведено на вставці

На рис.8.14 наведено діаграми спрямованості в 20% смузі частот випроміненого з хвилеводу поля, збудженого хвилею H_{11} , геометрія якого

відповідає рис.8.13. Суцільні криві відповідають H площині, пунктирні криві – E площині.

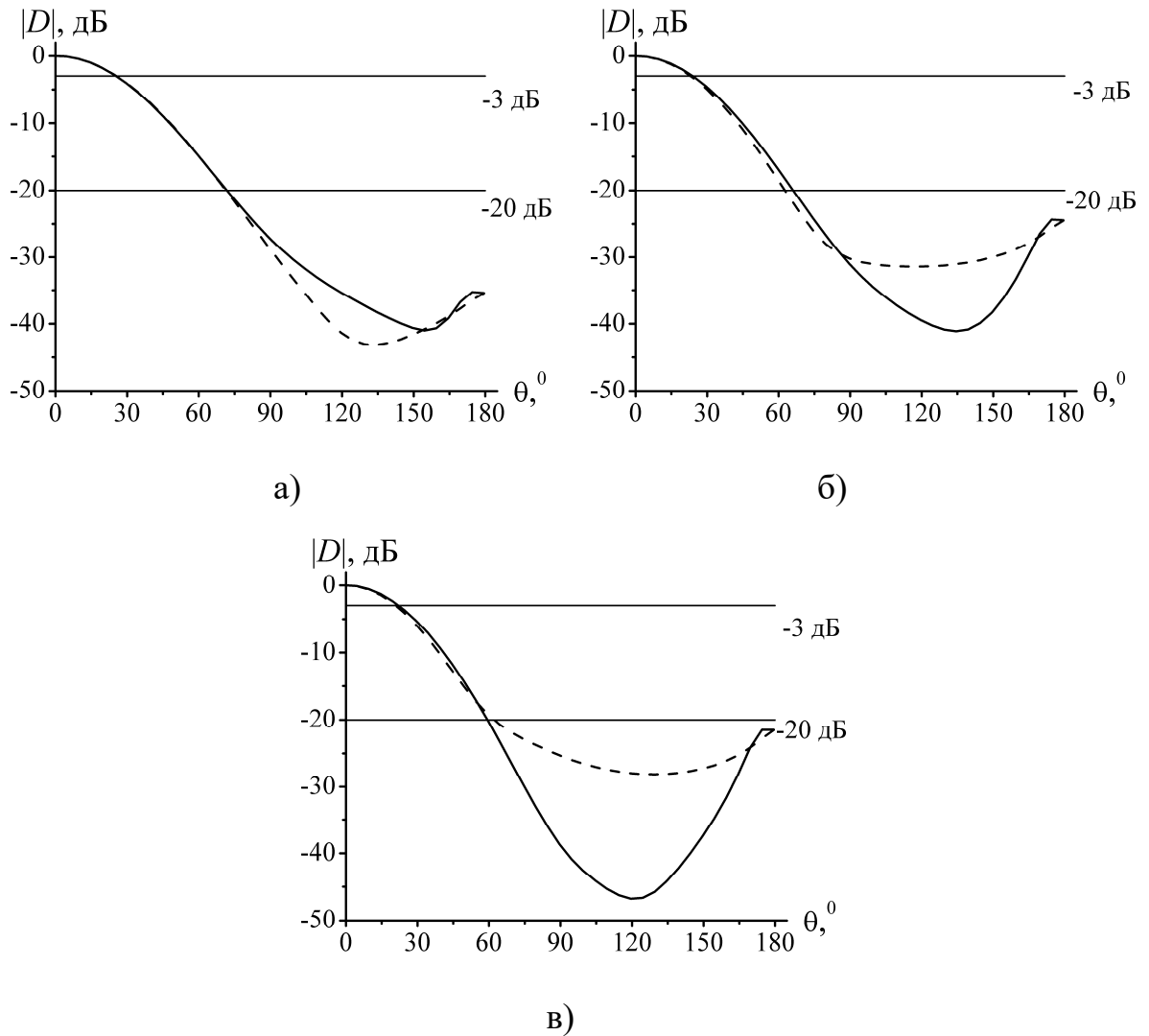


Рис.8.14 Діаграми спрямованості випроміненого з хвилеводу поля, збудженого H_{11} -хвилею. Геометрія хвилеводу відповідає рис.8.13. Суцільні криві – H -площина, штрихові криві – E -площина. а) $ka = 2.85$, б) $ka = 3.15$, в) $ka = 3.48$

Рис.8.14 а) побудовано при $ka_0 = 2.85$, рис.8.14 б) побудовано на центральній частоті, $ka_0 = 3.15$, рис.8.14 в) побудовано при $ka_0 = 3.48$. Діаграми спрямованості в H і E площинах співпадають з графічною

точністю до рівня в -20 дБ у всьому розглянутому частотному проміжку. З цього можна зробити висновок, що з досліджуваного гофрованого хвилеводу випромінюється квазі HE_{11} - хвиля, діаграма спрямованості якої є близькою до осесиметричної. Ширина діаграми спрямованості за рівнем -3 дБ зменшується з ростом частоти від значення 24.5° до значення 23° , а за рівнем -20 дБ – від 71.5° до 59° . Зі зростанням частоти зростає і випромінювання у напрямку $z < 0$, що в умовах реального фланця скінченної товщини буде призводити до появи додаткових бічних пелюстків і зростання крос-поляризаційного випромінювання. У роботі [305] показано, що при відповідному виборі геометрії зовнішньої стінки (у вигляді конуса), розбіжності в значеннях діаграми спрямованості випроміненого поля з хвилеводу в припущенні нульової товщини стінок і стінок скінченної товщини не перевершують 1° за рівнем -12 дБ. При цьому співвідношення між радіусами зовнішньої й внутрішньої стінки повинне не перевищувати значення 1.1 і виконуватися умова $ka_1 > 3$, де a_1 – радіус хвилеводу у площині розкриву. Для порівняння на рис.8.15 наведено діаграми спрямованості H_{11} - хвилі, випроміненої з регулярного круглого хвилеводу поблизу центральної частоти інтервалу. Ширина діаграми спрямованості за рівнем -3 дБ у H площині складає, як і на рис.8.14 б), приблизно 24° , проте чітко помітно розбіжність діаграм спрямованості в H і E площинах.

8.7. Генетичний алгоритм оптимізації параметрів коаксіального хвилеводу з системою щілин в порожньому внутрішньому провіднику

Коаксіальний фільтр з неоднорідностями у вигляді розривів центрального провідника у випадку повітряного заповнення має менші втрати, ніж фільтри, що використовують паралельні індуктивні штирі або діафрагми [306]. На практиці досить часто використовуються структури з

неперіодичним розташуванням неоднорідностей. Проте для оптимізації їх характеристик необхідно розробити ефективний числовий метод.

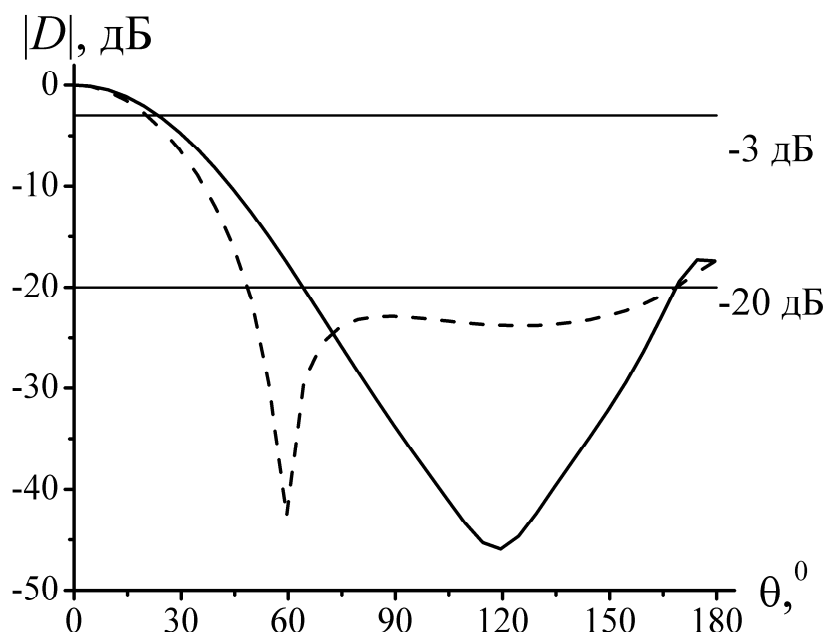


Рис.8.15 Діаграми спрямованості випроміненого з регулярного круглого хвилеводу поля, збудженого H_{11} -хвилею, $ka = 4.5$. Суцільні криві – H -площина, штрихові криві – E -площина.

Більшість методів оптимізації параметрів можна розділити на два класи: детерміністичні та стохастичні. При застосуванні детерміністичних методів виникає проблема збіжності до локального, а не глобального екстремуму. Водночас стохастичні алгоритми, хоча й пред'являють більш високі вимоги до машинних ресурсів, здійснюють глобальний пошук. Серед стохастичних алгоритмів досить перспективним є генетичний алгоритм [307], [308]. Його особливістю є те, що аналіз “кожної особини в популяції”, тобто фільтра з деяким набором параметрів, може проводитися незалежно від інших “особин”. Це забезпечує можливість організації паралельних обчислень [203], [309], [310]. Генетичні алгоритми найбільш пристосовані для розв’язання задач з великим числом дискретних параметрів [204].

У даному параграфі з використанням генетичного алгоритму розв'язується задача про оптимізацію параметрів фільтру на основі коаксіального хвилеводу з аксіально-симетричними щілинами в порожньому внутрішньому провіднику. У просторі коаксіального хвилеводу розміщено діелектричні шайби, які можуть виступати у якості фіксаторів внутрішнього провідника [311]. Більший радіус коаксіального хвилеводу вважається постійним і дорівнює b , довжина структури вздовж поздовжньої осі Oz дорівнює L (див. рис.8.16).

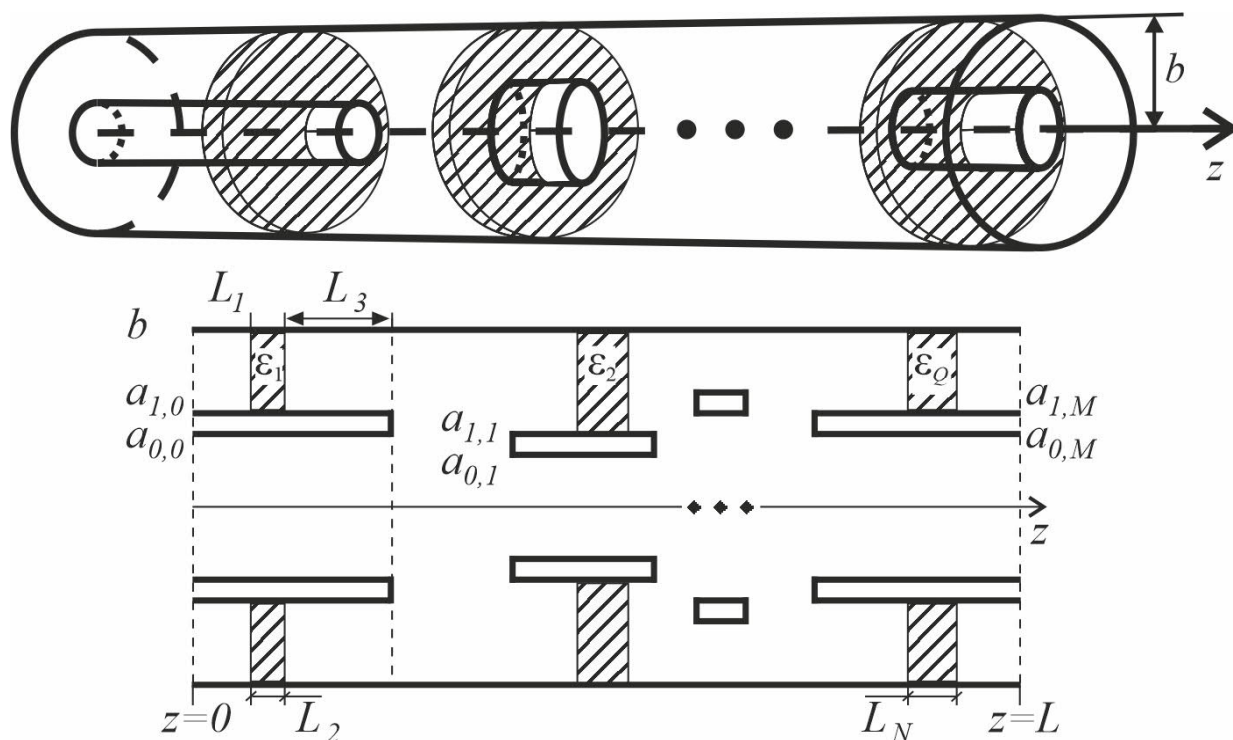


Рис.8.16 Геометрія досліджуваної структури

Для визначення електродинамічних властивостей структури обрано операторний метод. При його використанні необхідним є розв'язок ключової задачі – задачі про дифракцію на поодинокій неоднорідності. У якості поодиноких розглянуто два типи неоднорідностей: стик коаксіального хвилеводу з порожнім внутрішнім провідником і круглого хвилеводу і стик напівнескінчених коаксіальних хвилеводів, заповнених матеріалом з різною

діелектричною проникністю. Їх оператори розсіяння визначалися методом часткових областей (див., наприклад [295], [312]) з використанням методу моментів. Далі, з операторних рівнянь визначаються властивості всієї структури. На відміну від робіт [295], [312], у яких операторні рівняння були записані для всієї структури в цілому, у даному параграфі пропонується застосувати рекурентну процедуру запису операторних рівнянь.

8.7.1. Операторні рівняння

Розглянемо багатоеlementну структуру, останнім N -м елементом якої є або діелектрична шайба в коаксіальному хвилеводі (рис.8.17 а), або стик коаксіального хвилеводу з порожнім внутрішнім провідником і круглого хвилеводу (рис.8.17 б) або рис.8.17 в). Процедура визначення операторів розсіяння для кожної зі згаданих структур не має істотних відмінностей, тому докладно розглянемо лише випадок, наведений на рис.8.17 в). Будемо припускати, що нам відомі оператори розсіяння $t_{N,i,j}$ поодинокі N -ї неоднорідності – стику коаксіального хвилеводу з порожнім внутрішнім провідником і круглого хвилеводу, індекси i, j відповідають номерам областей на вставці до рис.8.17 в), а також оператори розсіяння $T_{N-1,v,w}$ структури, що складається з $N-1$ -го елемента, індекси v, w відповідають номерам областей на рис.8.17 б). Позначимо амплітуди Фур'є падаючого поля як B_0, C_0, D_0 і F_0 , а розсіяного поля як $B_1, C_1, D_1, F_1, A_1, A_2$. Тоді вони зв'язані між собою наступними операторними рівняннями

$$A_1 = T_{N-1,1,3} B_0 + T_{N-1,2,3} C_0 + T_{N-1,3,3} e A_2, \quad (8.41)$$

$$A_2 = t_{N,1,3} D_0 + t_{N,2,3} F_0 + t_{N,3,3} e A_1, \quad (8.42)$$

$$B_1 = T_{N-1,1,1} B_0 + T_{N-1,2,1} C_0 + T_{N-1,3,1} e A_2, \quad (8.43)$$

$$C_1 = T_{N-1,1,2} B_0 + T_{N-1,2,2} C_0 + T_{N-1,3,2} e A_2, \quad (8.44)$$

$$D_1 = t_{N,1,1} D_0 + t_{N,3,1} \epsilon A_1 + t_{N,2,1} F_0, \quad (8.45)$$

$$F_1 = t_{N,1,2} D_0 + t_{N,2,2} F_0 + t_{N,3,2} \epsilon A_1. \quad (8.46)$$

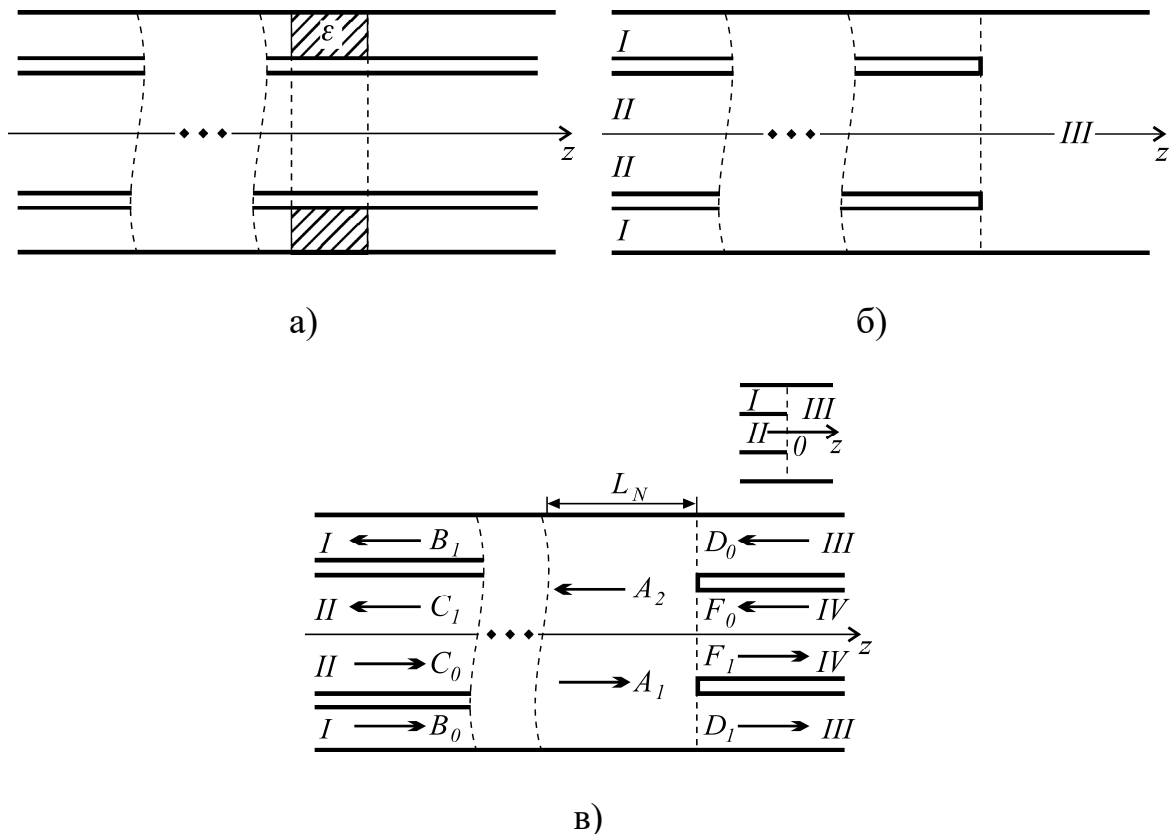


Рис.8.17 Схематичне зображення багатоелементної структури, останнім N -м елементом якої є: а) діелектрична шайба в коаксіальному хвилеводі, б) стик коаксіального хвилеводу з порожнім внутрішнім провідником і круглого хвилеводу, в) стик круглого хвилеводу і коаксіального хвилеводу з порожнім внутрішнім провідником

Оператор e має діагональну матрицю й визначає зміну амплітуд поля при зсуві системи координат у напрямку поширення хвиль на величину L_N , яка дорівнює відстані між N -ю та $N-1$ -ю неоднорідністю. Після підстановки рівняння (8.42) у рівняння (8.41) і далі послідовно в рівняння (8.43)-(8.46), можемо записати вирази для невідомих амплітуд:

$$\begin{aligned}
B_1 &= (T_{N-1,1,1} + T_{N-1,3,1} e^{t_{N,3,3}} e^{AT_{N-1,1,3}}) B_0 + \\
&+ (T_{N-1,2,1} + T_{N-1,3,1} e^{t_{N,3,3}} e^{AT_{N-1,2,3}}) C_0 + \\
&+ T_{N-1,3,1} e^{(t_{N,3,3} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,1,3}} + t_{N,1,3})} D_0 + \\
&+ T_{N-1,3,1} e^{(t_{N,3,3} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,2,3}} + t_{N,2,3})} F_0,
\end{aligned} \tag{8.47}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= (T_{N-1,1,2} + T_{N-1,3,2} e^{t_{N,3,3}} e^{AT_{N-1,1,3}}) B_0 + \\
&+ (T_{N-1,2,2} + T_{N-1,3,2} e^{t_{N,3,3}} e^{AT_{N-1,2,3}}) C_0 + \\
&+ T_{N-1,3,2} e^{(t_{N,3,3} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,1,3}} + t_{N,1,3})} D_0 + \\
&+ T_{N-1,3,2} e^{(t_{N,3,3} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,2,3}} + t_{N,2,3})} F_0,
\end{aligned} \tag{8.48}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= t_{N,3,1} e^{AT_{N-1,1,3}} B_0 + t_{N,3,1} e^{AT_{N-1,2,3}} C_0 + \\
&+ (t_{N,3,1} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,1,3}} + t_{N,1,1}) D_0 + \\
&+ (t_{N,3,1} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,2,3}} + t_{N,2,1}) F_0,
\end{aligned} \tag{8.49}$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= t_{N,3,2} e^{AT_{N-1,1,3}} B_0 + t_{N,3,2} e^{AT_{N-1,2,3}} C_0 + \\
&+ (t_{N,3,2} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,1,3}} + t_{N,1,2}) D_0 + \\
&+ (t_{N,3,2} e^{AT_{N-1,3,3}} e^{t_{N,2,3}} + t_{N,2,2}) F_0,
\end{aligned} \tag{8.50}$$

де

$$A = (I - T_{N-1,3,3} e^{t_{N,3,3}} e)^{-1}.$$

Рівняння (8.47)-(8.50) дозволяють виразити оператори розсіяння структури, що складається з N неоднорідностей через оператори розсіяння структури, що складається з $N-1$ -ї неоднорідності.

8.7.2. Алгоритм оптимізації параметрів

Метою процесу оптимізації є вибір таких параметрів структури, щоб значення такої характеристики як коефіцієнт відбиття, або проходження, або втрат, і т.д., або їхньої комбінації знаходилося в певних інтервалах, границі яких можуть залежати від хвильового числа

$$c(k) < \sigma(k) < d(k).$$

В якості керуючих (змінюваних) параметрів обрано геометричні параметри структури: радіус круглого хвилеводу меншого радіуса $a_{0,m}$, менший радіус коаксіального хвилеводу $a_{1,m}$, більший радіус коаксіального хвилеводу або радіус круглого хвилеводу більшого радіуса b , відстань між неоднорідностями L_n і діелектрична проникність середовищ ε_q , $m = 0, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$, $q = 1, \dots, Q$; N – число неоднорідностей. Товщина внутрішнього провідника коаксіального хвилеводу вважається постійною й дорівнює $a_{1,m} - a_{0,m} = \delta$. Крім того, радіуси вихідного й кінцевого хвилеводів $a_{0,0}$, $a_{0,M}$ вважаються заданими. Значення $M = \frac{N-2}{4}$ дорівнює числу щілин. Причому, у зв'язку з тим, що число стиків круглого й коаксіального хвилеводів є парним, а кожна діелектрична вставка є шайбою, то величина $N-2$ кратна чотирьом. Також передбачається, що значення діелектричної проникності відрізняється від одиниці лише у шайб у коаксіальному хвилеводі. Тоді $Q = \frac{N+2}{4}$ співпадає з числом шайб. Значить, для кожної “особини” можемо записати вектор керуючих параметрів $\mathbf{p} = (a_{0,m}, \delta, b, L_n, \varepsilon_q)$, що складається з $\frac{3N}{2} + 3$ компонентів.

У якості цільової функції обрано функцію вигляду

$$f = \sum_{l=1}^K \omega_l u_l(\sigma(k_l)),$$

де k_l – значення хвильового числа, ω_l – вагові коефіцієнти, $l = 1, \dots, K$, K – кількість дискретних значень хвильового числа. Функція $u_l(\sigma)$ – так звана функція відстані. Вона визначає, наскільки “далеко” знаходяться отримані характеристики структури від оптимальних. Вона, як правило, вибирається кусково-лінійної, якщо потрібно мінімізувати або максимізувати значення характеристики σ . У нашому випадку потрібно мінімізувати коефіцієнт

проходження або відбиття, які доцільно приводити в логарифмічній шкалі, тоді $c(k_l) = -\infty$. При цьому вибираються деякі значення ξ_l , $l = 1, \dots, K$, при досягненні яких, $\sigma = \xi_l$, вважається, що параметр σ є вже достатньо малим і у подальшій мінімізації немає необхідності. Тоді при $\sigma < \xi_l$ значення функції відстані вважається постійними α_l . Також у випадку, якщо значення σ знаходяться досить далеко від необхідного, тобто $\sigma > d(k_l) + \zeta_l$, де ζ_l – задані числа, $l = 1, \dots, K$, то функція відстані є постійною й дорівнює β_l . При $\xi_l < \sigma < d(k_l) + \zeta_l$ функція відстані вибирається лінійною, а поза цим інтервалом – постійною,

$$u_l(\sigma) = \begin{cases} \alpha_l, & \sigma < \xi_l, \\ \frac{\beta_l - \alpha_l}{d(k_l) + \zeta_l - \xi_l} (\sigma - \xi_l) + \alpha_l, & \xi_l < \sigma < d(k_l) + \zeta_l, \\ \beta_l, & \sigma > d(k_l) + \zeta_l. \end{cases}$$

Задача полягає у досягненні мінімального значення вагової функції на дискретній множині значень хвильового числа $\{k_l\}_{l=1}^K$, які вибиралися розподіленими рівномірно на заданому відрізку.

У роботі в якості “особин” вибирався хвилевід з неоднорідностями, геометричні параметри яких визначаються вектором \mathbf{p} . На кожному кроці процедури генетичного алгоритму створюється так звана “популяція”, або впорядкована множина “особин”. На першому кроці вектор параметрів кожної “особини” \mathbf{p} створюється випадковим чином так, що кожний його компонент вибирається з певного наперед заданого інтервалу. На кожному наступному кроці відбуваються рекомбінації за допомогою “попарного схрещування особин”. Це значить, що з “популяції” випадково вибираються дві “особини” з номерами m і n , задані векторами $\mathbf{p}_n = (p_j^n)_{j=1}^{3N_n/2+3}$ і $\mathbf{p}_m = (p_j^m)_{j=1}^{3N_m/2+3}$. Випадковим чином вибираються два компоненти $p_{j_0}^n$ і $p_{j_1}^n$ з номерами j_0 і j_1 , $j_0 < j_1$, і створюються дві нові “особини” з векторами

$$\mathbf{p}_{nm} = (p_1^n, \dots, p_{j_0-1}^n, p_{j_0}^m, \dots, p_{j_1}^m, p_{j_1+1}^n, \dots),$$

$$\mathbf{p}_{mn} = (p_1^m, \dots, p_{j_0-1}^m, p_{j_0}^n, \dots, p_{j_1}^n, p_{j_1+1}^m, \dots),$$

які розміщуються в “нову популяцію”. Процес “схрещування” триває доти, поки “нова популяція” не досягне заданого розміру. Під час “схрещування” можливі так звані мутації, які полягають у тому, що з деякою заданою ймовірністю значення компонент векторів \mathbf{p}_{nm} і \mathbf{p}_{mn} змінюються за законом

$$p_j^{m,n} = p_j^{m,n} + \varpi, \quad (8.51)$$

де ϖ – випадкова величина.

Процедура оптимізації здійснюється за принципом сервер-клієнт, тобто створиться комп'ютерна мережа в якій один комп'ютер, або сервер, управляє процесом оптимізації, а інші (клієнти) – проводять обчислення, тобто розв'язують відповідну граничну задачу. Сервер відправляє клієнтам вектор параметрів \mathbf{p} , який відповідає обраній “особині”, і значення хвильового числа. Клієнт виконує обчислення при отриманих від сервера параметрах і відправляє серверу значення необхідних елементів матриці розсіяння. Після чого сервер обчислює цільову функцію. Такий процес виконується для кожної “особини в популяції”. Після того, як шукані параметри для всіх “особин” визначені, сервер здійснює процес рекомбінації, створюючи нову “популяцію”. Закон вибору “особин для схрещування” має нерівномірний розподіл: імовірність вибору “особин для схрещування” тим вище, чим меншою для них є значення цільової функції. Даний спосіб організації процесу дозволяє значно скоротити обмін інформацією між сервером і клієнтами, з огляду на порівняно невисоку швидкість мережі, якій зв'язані комп'ютери.

Через те, що кожна “нова популяція” утвориться на основі “старої”, то фактично доводиться повністю обчислювати оператори розсіяння лише першої “популяції”. Для кожної “нової популяції” обчислювати заново необхідно лише оператори розсіяння тих неоднорідностей, чий параметри

було змінено в результаті процесу мутації (8.51). Мутація застосовувалася неоднорідна [313]. Це значить, що параметри мутації залежать від номеру популяції.

Визначення операторним методом елементів матриці розсіяння структури, яка складається з 50 неоднорідностей, займає приблизно в сто разів менше часу, ніж визначення методом часткових областей операторів розсіяння поодинокого стику коаксіального й круглого хвилеводів (тобто поодинокій неоднорідності). Таким чином, з огляду на час обчислень, доцільно оператори розсіяння “нових” неоднорідностей зберігати у комп’ютерну пам’ять, а оператори розсіяння “старих” неоднорідностей не обчислювати заново, а використовувати збережені. Після чого, розв’язувати операторні рівняння вигляду (8.41)-(8.50).

8.7.3. Числові результати

Використовуючи наведений вище алгоритм, проведено оптимізацію параметрів досліджуваної структури. Обчислення проводилися на 8 двоядерних комп’ютерах, з’єднаних у єдину локальну мережу.

Інтервали зміни керуючих параметрів для всіх досліджуваних структур вибиралися однаковими. Їх наведено в табл.8.1. Значення діелектричної проникності шайб ε належать дискретній множині, що відповідає реальним діелектрикам [314]. Окремо для кожної структури вибиралися лише її довжина L й інтервали зміни хвильового числа k . Значення довжини структури $L > L_{\min}$ не обмежувалися зверху. Імовірність мутації дорівнює 0.1 для першої популяції, і обмежувалася зверху значенням 0.2.

Спочатку розглянемо пропускаючий фільтр T - хвилі з шириною смуги пропускання 1% в 20% смугі частот відносно значення $kb = 3.3$. Смуга пропускання вимірюється на рівні -3 дБ. Значення $L_{\min} = 10b$, $K = 120$. На інтервалах $kb \in (2.9; 3.28) \cup (3.32; 3.55)$ у якості σ обирався коефіцієнт

проходження t , на інтервалі $kb \in (3.285; 3.315)$ – коефіцієнт відбиття r й виконувалася їх мінімізація. Коефіцієнти відповідають потужності й обчислюються в логарифмічній шкалі. У якості мети ставилося досягти значення σ не більше ніж $\xi_l = -30$ дБ.

Таблиця 8.1 Інтервали зміни керуючих параметрів

параметр	min	max
$a_{0,0} = a_{0,M}$	$0.5b$	$0.5b$
$a_{0,m}$	$0.18b$	$0.8b$
δ	$0.03b$	$0.03b$
ширина щілини	$0.1b$	$2b$
ширина шайби	$0.1b$	$0.4b$
відстань між шайбою та щілиною	$0.2b$	$2b$
ε_q	1	6

На рис.8.18 наведено залежності коефіцієнта відбиття й проходження від хвильового числа. Як видно, поставлена мета була повністю досягнута. Процес оптимізації було зупинено на 23-й популяції. Кожна популяція для всіх розглянутих випадків містила 80 особин. Залежність коефіцієнтів проходження пропускаючого фільтра зі смугою пропускання 10% в 30% смузі наведено на рис.8.19. У якості центральної частоти обрано значення $kb = 3.3$. На відміну від випадку, наведеного на рис.8.18, необхідно було 53 популяції, щоб процес оптимізації можна було вважати завершеним для кількості точок на частотній осі $K = 60$. Отримані фільтри, характеристики яких наведено на рис.8.18, рис.8.19, містять 7 щілин.

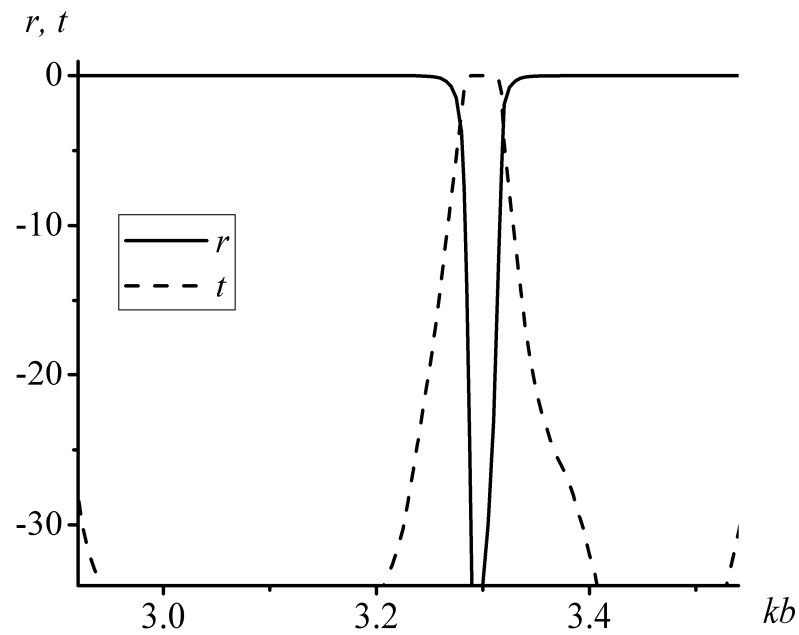


Рис.8.18 Залежність коефіцієнта відбиття (суцільна крива) і проходження (штрихова крива) T -хвилі коаксіального хвилеводу для вузькополосного фільтру з шириною полоси пропускання 1% від центральної частоти $kb = 3.3$

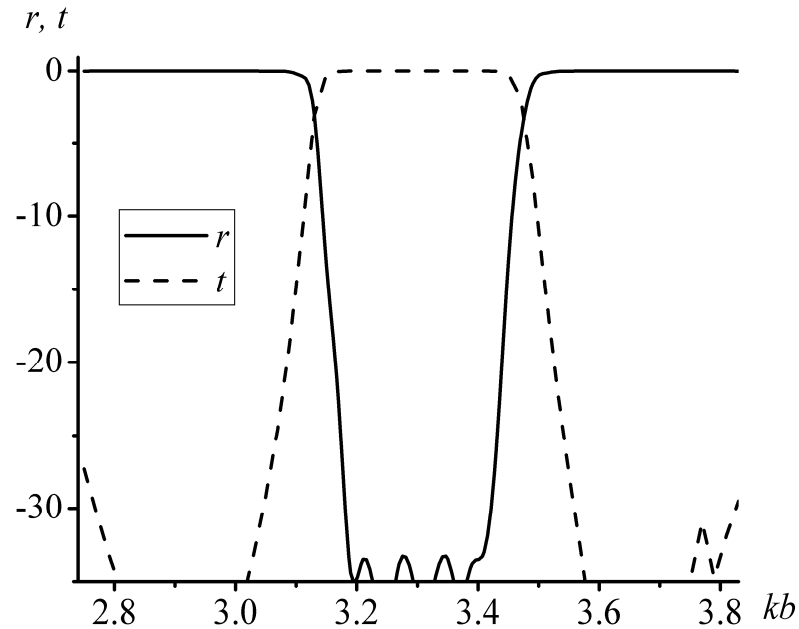


Рис.8.19 Залежність коефіцієнта відбиття (суцільна крива) і проходження (штрихова крива) T -хвилі коаксіального хвилеводу для широкополосного фільтру з шириною полоси пропускання 10% від центральної частоти

$$kb = 3.3$$

Запропонована структура може також використовуватися і як фільтр основної хвилі круглого хвилеводу – хвилі H_{11} -типу. На рис.8.20 наведено характеристики пропускаючого вузькосмугового фільтру зі смугою пропускання 1% від центральної частоти $kb = 4.2$. Через те, що критична частота H_{11} - хвилі коаксіального хвилеводу є меншою за критичну частоту H_{11} - хвилі круглого хвилеводу, то на інтервалі зміни параметра kb близькому до необхідної смуги пропускання, у якості σ обирався коефіцієнт R , який дорівнює

$$R = 10 \log_{10}(1 - \tilde{t}^2),$$

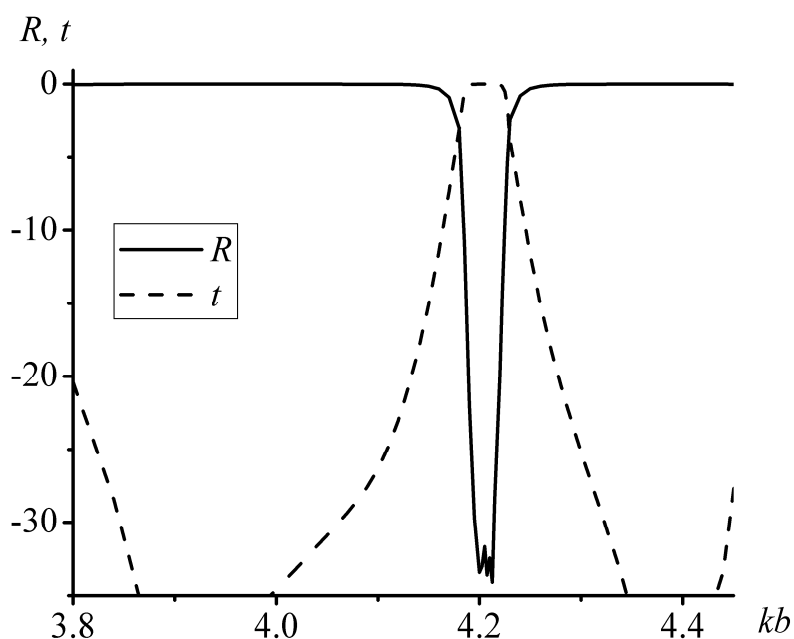


Рис.8.20 Залежність коефіцієнта R (суцільна крива) і коефіцієнта проходження (штрихова крива) H_{11} -хвилі круглого хвилеводу для вузькополосного фільтру з шириною полоси пропускання 1% від центральної частоти $kb = 4.2$

де \tilde{t} – коефіцієнт проходження по амплітуді. Початково ставилася задача досягти значення σ не більше ніж $\xi_l = -30$ дБ у 10% смузі, $K = 60$. Проте

отримані в результаті процесу оптимізації параметри дозволили розширити смугу запирання переважно вбік менших значень хвильового числа kb . Довжина структури була обмежена знизу значенням $L_{\min} = 5b$, у процесі оптимізації вона досягла величини $L = 9b$. Кількість щілин дорівнює 8. Процес оптимізації завершився на 44-й популяції.

Висновки до розділу 8

В рамках єдиного підходу з використанням операторного методу побудовано строгу модель розсіяння власних хвиль типу H_{1m} - і E_{1m} - на системі аксіально-симетричних неоднорідностей у круглому хвилеводі. Розв'язок ключової задачі отримано методом часткових областей у поєднанні з методом моментів. Розглянуто як скінченну, так і напівнескінченну періодичну послідовність. Операторні рівняння записано з використанням ітераційної процедури, що дозволяє скоротити час обчислень.

Вірність результатів підтверджується за рахунок порівняння з результатами, отриманими в HFSS і відомими з літератури.

Запропонований метод оптимізації на базі генетичного алгоритму дозволив скоротити час розрахунків за рахунок здійснення паралельних обчислень і за рахунок збереження в пам'яті операторів розсіяння вже розглянутих неоднорідностей.

ВИСНОВКИ

Результати досліджень, які надано в даній роботі, отримано в рамках нового наукового напрямку в радіофізиці – створення нових штучних з унікальними електродинамічними характеристиками матеріалів (метаматеріалів), не існуючих у природних середовищах і дослідження їх параметрів. Мета дисертації полягала, по-перше, в розвитку чисельно-аналітичних методів, на базі яких можливо створення максимально узагальнюючих моделей для дослідження явища дифракції електромагнітних та акустичних хвиль на неоднорідностях складнокомпозиційної структури. По-друге, – в виявленні нових фізичних ефектів і закономірностей, спостерігаємих при взаємодії падаючих хвиль з системами неоднорідностей у вигляді плоских ідеально провідних та імпедансних екранів, розміщених у вільному просторі, в діелектричному середовищі з втратами, в плоских діелектричних хвилеводах й інших хвилеведучих структурах. Автором було запропоновано та всебічно досліджено оригінальні фізико-математичні моделі взаємодії хвиль різної природи з нескінченними, напівнескінченними періодичними структурами, періодичними структурами з різного роду дефектами у періодичності, аперіодичними, у яких були присутні як ідеально провідні, так і розсіювачі з імпедансними границями (в тому числі, графенові).

Основні результати дослідження можна сформулювати так:

- розвинено чисельно-аналітичні методи для розв'язання крайових задач, на основі яких запропоновано максимально узагальнюючі моделі й ефективні алгоритми з використанням сучасних комп'ютерних технологій для всебічного дослідження явища дифракції хвиль на різного роду неоднорідностях з довільною топологією та матеріальними параметрами, дозволяючими на строгому електродинамічному рівні знаходити характеристики розсіяних полів;

- встановлено нові закономірності взаємодії таких електродинамічних структур з падаючими полями різної природи.

Ці два аспекти базуються на основних отриманих результатах.

Вперше отримано розв'язок задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на напівнескінченній періодичній стрічковій решітці типу жалюзі. Показано, що властивості решітки можна знайти з нелінійного операторного рівняння, яке, після дискретизації і регуляризації сингулярних інтегралів, можливо розв'язати чисельно з використанням ітераційної процедури з параметром релаксації та методу Зейделя.

Вперше для розв'язання задачі про дифракцію хвиль на плоскій напівнескінченній періодичній стрічковій решітці у випадку E - і H -поляризації застосовано метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Показано, що у випадку H -поляризації властивості напівнескінченної періодичної решітки типу жалюзі наближаються до властивостей плоскої напівнескінченної періодичної решітки при куті повороту стрічок $\psi \rightarrow 0^\circ$. Таким чином показано, що метод, розвинений для аналізу напівнескінченної періодичної решітки типу жалюзі, також можна застосувати і для аналізу плоскої напівнескінченної періодичної решітки. З використанням отриманого алгоритму проведено дослідження електродинамічних властивостей напівнескінченної ножової решітки, отримано розв'язок задачі про дифракцію на напівнескінченній стрічковій решітці у поєднанні зі скінченною решіткою. Розвинені методи дозволили вивчити вплив краю на характеристики розсіяних полів. Показано, що за рахунок введення додаткової плоскої стрічкової решітки в область над напівнескінченною решіткою типу жалюзі вдається суттєво зменшити відбиття циліндричної хвилі, збудженої за рахунок наявності краю, в бік опромінювача. Амплітуда відбитого поля предканторовою напівнескінченною ножовою решіткою є значно меншою за амплітуду відбитого поля напівнескінченною ножовою решіткою у разі, коли кожен шар – це одноелементна плоска решітка.

Для аналізу плоскої напівнескінченної періодичної стрічкової решітки розвинено два абсолютно різні підходи. При використанні першого підходу розсіяне поле було надано як сума поля струмів, які течуть стрічками нескінченної ідеально періодичної решітки і струмів корекції, збуджених за рахунок наявності краю. Ці струми знайдено у результаті розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. При використанні другого підходу отримано операторні рівняння відносно амплітуд Фур'є розсіяного поля. Тут використовується трансляційна симетрія напівнескінченної періодичної структури.

Вперше знайдено строгий розв'язок задач про дифракцію H - і E -поляризованої хвилі на нескінченній періодичній решітці без однієї стрічки. Отримані результати, на відміну від наближених асимптотичних, наприклад на основі розв'язку Кірхгофа, дозволяють у строгій формі описати струми корекції, які виникають за рахунок дефекту у періодичності. Розв'язок цієї задачі може слугувати у якості граничного випадку для порівняння з розв'язком у більш загальному випадку, коли зазор між двома стрічками є довільним.

Вперше отримано розв'язок задачі про дифракцію на нескінченних імпедансних решітках зі стрічок нульової товщини з порушенням періодичності: на напівнескінченній періодичній решітці, решітці з порушенням періодичності у вигляді відсутності елемента, зсуву стрічок, двошаровій нескінченній решітці з порушенням періодичності у вигляді відсутності скінченної кількості стрічок у кожному шарі. Вперше строгими методами розглянуто графенові стрічкові решітки з порушенням періодичності. Використання таких новітніх матеріалів, як графен, провідність якого залежить від хімічного потенціалу і може бути змінена динамічно, дозволяє додати ступені свободи і ефективно керувати характеристиками розсіяних полів, формуючи електромагнітні поля з

заданими характеристиками, прогнозувати створення настроюваних пристроїв, в тому числі й у перспективному ТГц діапазоні.

Вперше отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію H -поляризованої хвилі на двошаровій нескінченній періодичній решітці у відсутності скінченної кількості стрічок у кожному шарі. Встановлено, що плоска хвиля може проходити крізь хвилеводний канал, сформований відсутніми стрічками, у область поза решіткою навіть у зоні запирання відповідної нескінченної ідеально періодичної структури, збуджуючи циліндричну хвилю. Показано, що при використанні графенових стрічок значенням максимуму головного пелюстка можна керувати за рахунок зміни хімічного потенціалу. Ця властивість є основою для створення антен з частотно керованою шириною та динамічно керованим максимумом головного пелюстка.

Запропоновані моделі дозволили кількісно вивчити електромагнітний взаємозв'язок як ідеально провідних, так і імпедансних стрічок нульової товщини у періодичних решітках. У випадку E -поляризації взаємозв'язок стрічок у нескінченних періодичних стрічкових решітках поблизу області аномалії Релея-Вуда є значно слабшим, ніж у випадку H -поляризації. Видалення з нескінченної ідеально періодичної решітки однієї стрічки не призводить до суттєвого зростання густини струмів корекції у випадку E -поляризації поблизу зон аномалій Релея-Вуда. Зовсім інша ситуація спостерігається для напівнескінченної решітки, коли густина струмів корекції на стрічках суттєво зростає як у випадку E -поляризації, так і у випадку H -поляризації. У випадку графенової напівнескінченної періодичної решітки, на відміну від решіток з ідеально провідних стрічок, у яких спостерігалася їх сильна взаємодія лише поблизу аномалій Релея-Вуда, тут взаємозв'язок є помітно сильнішим як поблизу аномалії Релея-Вуда, так і поблизу плазмонних резонансів. Більше того, максимуми поблизу плазмонних резонансів є набагато більш вираженими. За рахунок зміни

хімічного потенціалу графену можна контролювати ступінь взаємозв'язку стрічок у решітці.

Побудовано фізично коректні моделі випромінюючих, поглинаючих систем, хвилеводних збуджувачів, які складаються з імпедансних розсіювачів, проведено оптимізацію їх параметрів.

Вперше методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язки задач про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на скінченних, нескінченних періодичних одношарових та багатшарових решітках з імпедансних стрічок нульової товщини. При аналізі фізичних результатів обрано графенові стрічки. Виявлено положення плазмонних резонансів на частотній осі, вплив на нього хімічного потенціалу графену, ширини стрічок, періоду решітки. У випадку графенової решітки, розташованої над ідеально провідною площиною, показано, що на відміну від плоскої графенової решітки, при визначених значеннях параметрів структури, поглинання практично відсутнє навіть поблизу плазмонних резонансів. З іншого боку, змінюючи відстань від площини до решітки, вдається досягти практичного повного поглинання падаючої плоскої хвилі. За рахунок зміни значень хімічного потенціалу графенових стрічок положенням плазмонних резонансів і, як наслідок, зони поглинання вздовж частотної осі вдається керувати. Зміна хімічного потенціалу практично не призводить до зсуву резонансів на решіткових модах вздовж частотної осі, проте дозволяє контролювати рівень енергії, яка є випроміненою з діелектричного хвилеводу, а також амплітуду збуджених власних хвиль хвилеводу. Показано, що за рахунок надання кожній стрічці значення хімічного потенціалу не залежно від інших стрічок, після проведення процедури оптимізації, вдається зменшити рівень бічних пелюстків і зменшити ширину головного пелюстка діаграми спрямованості. Проведено процедуру оптимізації параметрів на базі паралельного генетичного алгоритму. Отримано діаграми спрямованості з рівнем бічних пелюстків

менше за -20 дБ і шириною головного пелюстка за рівнем -20 дБ від 13° до 25° в залежності від частоти. Окрім теоретичної цінності результатів стосовно фундаментальних закономірностей взаємодії електромагнітних полів з графеновими решітками, вони являють і практичну цінність, вказуючи на перспективність застосування розглянутих структур у перестроюваних поглиначах, антенах з настроюваним рівнем випромінювання, а також збуджувачів власних хвиль діелектричного хвилеводу.

Доведено, що операторні рівняння задач про дифракцію на скінченній багатошаровій системі скінченних стрічкових решіток є еквівалентними до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Запропонований підхід з використанням операторного методу у сукупності з методом сингулярних інтегральних рівнянь дозволив суттєво скоротити час обчислень. Так, у припущенні, що системи лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язуються методом Гауса, при використанні лише методу сингулярних інтегральних рівнянь час обчислень є пропорційним до $t \sim (Mnp)^3$. При використанні методу сингулярних інтегральних рівнянь у поєднанні з операторними рівняннями, записаними з застосуванням ітераційної процедури, час обчислень є пропорційним до $t \sim (Np)^3 + 2Mq^3$, де N – число стрічок у кожному шарі, M – число шарів, p і q – кількість вузлів у квадратурних формулах. Показано, що використання моделі напівнескінченної періодичної системи шарів полегшує ідентифікацію резонансів. Встановлено значення параметрів структури, при яких спостерігається розширення смуги, в якій досягається максимум поглинання, порівняно з випадком одношарової решітки.

У рамках єдиного підходу вперше операторним методом отримано строгий розв'язок задач про дифракцію плоскої акустичної та електромагнітної хвилі на нескінченно тонкому ідеально провідному кільці

або кільцевому отворі у площині. Вперше отримано строгий розв'язок задачі про дифракцію електромагнітних хвиль на системі, яка складається з напівплощини та дисків. Операторний метод тут розвинено на структури, розсіяні поля у яких є суперпозицією плоских, циліндричних та сферичних хвиль. Доведено, що операторні рівняння можна звести до інтегральних рівнянь, які, після проведення процедури регуляризації, в свою чергу, можна дискретизувати з використанням квадратурних формул і розв'язати чисельно. Показано, що за рахунок розсіяння плоскої хвилі на краю напівплощини поле сферичних хвиль має відмінну від нуля амплітуду навіть у випадку, якщо диски знаходяться цілком у області тіні та не освітлюються падаючою плоскою хвилею.

В рамках єдиного, розвиненого у роботі підходу, з використанням операторного методу побудовано строгу модель розсіяння власних хвиль типу H_{1m} - і E_{1m} - на системі аксіально-симетричних неоднорідностей у круглому хвилеводі. Розв'язок ключової задачі отримано методом часткових областей у поєднанні з методом моментів. Розглянуто як скінченну, так і напівнескінченну періодичну послідовність. Використання ітераційної процедури запису рівнянь дозволяє скоротити час обчислень. Запропонований метод оптимізації на базі генетичного алгоритму дозволив скоротити час розрахунків завдяки здійсненню паралельних обчислень і за рахунок збереження в пам'яті операторів розсіяння вже розглянутих неоднорідностей.

Вірність отриманих результатів підтверджується декількома фактами. По-перше, для низки задач в дисертації розв'язок отримано різними методами. Проведено порівняння результатів. По-друге, у деяких граничних випадках проведено порівняння з результатами, відомими з літератури або отриманими відомими методами, з результатами, отриманими на базі асимптотичних розв'язків, а також з результатами, отриманими в комерційних пакетах. По-третє, вірність результатів підтверджується

числовою перевіркою виконання граничних умов, закону збереження енергії та відповідністю фізичним закономірностям.

Методи, розвинені у дисертації, є строгими. Збіжність наближеного розв'язку, отриманого в результаті дискретизації рівнянь, редукції матриць, до точного базується на відповідних теоремах. Для підтвердження факту збіжності, а також для виявлення швидкості збіжності, у кожному випадку проведено числове дослідження відносної похибки при зміні параметрів. Показано, що для скінченно-елементних структур похибка розв'язку спадає з алгебраїчною швидкістю. При дослідженні збіжності ітераційного процесу розв'язку нелінійного операторного рівняння у задачі про дифракцію плоскої хвилі на напівнескінченних решітках виявлено, що залежності похибки від числа ітерацій можуть мати осциляції з неспадаючою амплітудою. Для того, щоб досягти збіжності процесу було введено параметр релаксації, зміна значень якого також впливає на швидкість збіжності. Операторні рівняння отримано в роботі з використанням єдинообразної процедури їх запису. Сингулярні інтегральні рівняння з додатковими умовами, отримані для розглянутих в дисертації задач, мають єдиний вигляд, що дозволяє застосувати єдину схему їх дискретизації, дозволяють уніфікувати розв'язання низки задач про дифракцію.

Список використаних джерел

1. Hills N. L., Karp S. N. Semi-infinite diffraction gratings – I. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1965. Vol. 18, no. 1/2. P. 203-233.
2. Hills N. L. Semi-infinite diffraction gratings – II, inward resonance. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1965. Vol. 18, no. 3. P. 385-395.
3. Фельд Я. Н. Дифракция электромагнитной волны на полубесконечной решетке. Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, № 7. С.882-889.
4. Фельд Я.Н. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах. Доклады АН СССР. 1955. Т. 102, № 2. С. 257-260.
5. Denison D. R., Scharstein R. W. Decomposition of the scattering by a finite linear array into periodic and edge components. Microwave and Optical Technology Letters. 1995. Vol. 9, no. 6. P. 338-343.
6. Millar R. F. Plane wave spectra in grating theory. III. Scattering by a semiinfinite grating of identical cylinders. Canadian Journal of Physics. 1964. Vol. 42, no. 6. P. 1149-1184.
7. Linton C. M., Martin P. A. Semi-infinite arrays of isotropic point-scatterers. A unified approach. SIAM Journal on Applied Mathematics. 2004. Vol. 64, no.3. P. 1035-1056.
8. Linton C. M., Porter R., Thompson I. Scattering by a semi-infinite periodic array and the excitation of surface waves. SIAM Journal on Applied Mathematics. 2007. Vol. 67, no. 5. P. 1233-1258.
9. Cho Y. H. Arbitrarily polarized plane-wave diffraction from semi-infinite periodic grooves and its application to finite periodic grooves. Progress in Electromagnetic Research M. 2011. Vol. 18. P. 43-54.

10. Capolino F., Albani M. Truncation effects in a semi-infinite periodic array of thin strips: A discrete Wiener-Hopf formulation. *Radio Science*. 2009. Vol. 44, no.2. P. 1-14.
11. Nishimoto M., Ikuno H. Analysis of electromagnetic wave diffraction by a semi-infinite strip grating and evaluation of end-effects. *Progress in Electromagnetic Research*. 1999. Vol.23. P. 39-58.
12. Nepa P., Manara G., Armogida A. EM scattering from the edge of a semi-infinite planar strip grating using approximate boundary conditions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2005. Vol. 53, no. 1. P. 82-90.
13. Caminita F., Nannetti M., Maci S. An efficient approach to the solution of a semi-infinite strip grating printed on infinite grounded slab excited by a surface wave. *XXIX URSI General Assembly*. Chicago, Illinois, August 7-13, 2008. BPS 2.5.
14. Vorobyov S. N., Lytvynenko L. M. Electromagnetic wave diffraction by semi-infinite strip grating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2011. Vol. 59, no. 6. P. 2169-2177.
15. Литвиненко Л. М., Резник І. І., Литвиненко Д. Л. Дифракція хвиль на напівнескінченних періодичних структурах. *Доповіді АН Української РСР*. 1991. № 6. С. 62-66.
16. Литвиненко Д. Л., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Метод анализа дифракции волн на многослойных периодических структурах. *Радиофизика и радиоастрономия*. 1997. Т.2, № 4. С.485-491.
17. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Анализ дифракции волн на последовательности идентичных ленточных решеток. *Многоволновый режим. Радиофизика и радиоастрономия*. 1999. Т. 4, № 3. С. 276-286.
18. Грибовский А. В., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Дифракция электромагнитных волн на многослойной структуре из бесконечных металлических экранов с прямоугольными отверстиями. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2000. Т. 5, № 2. P. 166-170.

19. Lytvynenko L. M., Prosvirnin S.L. Wave reflection by a periodic layered metamaterial. *The European Physical Journal Applied Physics*. 2009. Vol. 46, no. 3. 32608-(p1-p6).
20. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Погарский С. А., Калиберда М. Е. Дифракция волн на периодических многослойных структурах. Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2017. 268 с.
21. Lytvynenko L.M., Prosvirnin S.L., Pogarsky S.A., Kaliberda M.E. Wave diffraction by periodic multilayer structures. Second Edition. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers. 2021. 272 p.
22. Воробьев С. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Операторный метод в задаче дифракции электромагнитных волн на полубесконечных ленточных решетках. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2005. Т. 10, № 3. С. 273-283.
23. Lytvynenko L. M., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by semi-infinite venetian blind type grating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2013. Vol. 61, no. 12. P. 6120-6127.
24. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by semi-infinite periodical multielement knife-type strip grating of fractals. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія "Фізика. Радіоелектроніка"*. 2014. Вип. 21. Т. 22, № 1. С. 139-148.
25. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої електромагнітної хвилі на багатоеlementній плоскій напівнескінченній решітці. *Радиофизика і радиоастрономія*. 2014. Т. 19, № 4. С. 348-357.
26. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про взаємодію напівнескінченної решітки типу жалюзі та скінченної решітки зі стрічок. *Радиофизика і радиоастрономія*. 2015. Т. 20, № 4. С. 322-339.
27. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S.A. Operator method in the waves diffraction problem by a semiinfinite grating of strips placed in parallel

planes. 2013 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter And Submillimeter Waves. Kharkiv, Ukraine, 23-28 June, 2013. E-4.

28. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by plane semi-infinite grating. The Seventh International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Kharkiv, Ukraine, 15-19 September, 2014. P. 96-99.

29. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Electromagnetic interaction of a single strip with a plane semi-infinite grating. 2015 International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT). Kharkiv, Ukraine, 21-24 April, 2015. P. 138-140.

30. Калиберда М. Е., Погарский С. А., Шевченко Б. В., Позняков А. В. Модификация эффективной отражающей поверхности объекта за счет применения фрактальной решетки типа жалюзи с модифицированным краем. VIII Международная научная конференция "Функциональная база нанoeлектроники". Одесса, Украина, 28 сентября, 2015. с. 90-93.

31. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Diffraction by the semi-infinite knife-type grating of material strips. 2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2017. Lviv, Ukraine, 17-20 October, 2017.

32. Масалов С. А., Рыжак А. В., Сухаревский О. И., Шкиль В. М. Физические основы диапазонных технологий типа "Стелс". Санкт-Петербург: Военный инженерно-космический университет имени А. Ф. Можайского. 1999. 163 с.

33. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб А. Г. Дифракция волн на решетках. Харьков: издательство ХГУ, 1973. 287 с.

34. Кириленко А. А., Масалов С. А., Шестопалов В. П. Дифракция волн на ленточной решетке типа жалюзи. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, №. 2, С. 413-428.

35. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Том 1. Дифракционные решетки. Киев: Наукова думка. 1986. 232 с.
36. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Київ: Наукова думка. 1984. 240 с.
37. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 512 с.
38. Felsen L. B., Marcuvits N. Radiation and scattering of waves. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973. ch. 4.
39. Ortega J. M., Rheinboldt W. C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York: Academic Press, 1970, ch. 7.
40. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука. 1989. 432 с.
41. Вайнбранд М. М., Ермолаев С. В., Кинбер Б. Е., Рачко О. Р., Червенко М. Ю. Синтез отражательных поляризаторов из решетки параллельных ленточных проводников и плоского зеркала. Компьютерная оптика (Computer optics). 1998. № 3. С. 63-70.
42. Saidatul N. A., Azremi A. A. H., Ahmad R. B., Soh P. J., Malek F. Multiband fractal planar inverted F antenna (F-Pifa) for mobile phone application. Progress in Electromagnetics Research B. 2009. vol. 14. P. 127-148.
43. Modern Antenna Handbook. Editor Balanis C. A. John Wiley and Sons. 2011. 1680p.
44. Kaliberda M.E., Pogarsky S.A. Solution of the diffraction problem by the semi-infinite grating with modified end with the help of singular integral equations apparatus. Waves, Wavelets and Fractals. 2018. Vol. 4, no. 1. P. 1-9.
45. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Шевченко Б. В. Фрактальна решітка типу жалюзі з модифікованим краєм як основа для створення бажаної ефективною площі розсіювання об'єкта. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2016. Вип. 185. С.54-57.

46. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
47. Гандель Ю. В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики. Вопросы кибернетики. 1986. Вып. 124. С. 166-183.
48. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Особенности численного метода решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках. Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1229-1239.
49. Гандель Ю. В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках. Электромагнитные явления. 1998. Т. 1, № 2. С.220-232.
50. Варшавская Н.А., Гандель Ю.В. Дифракция плоской монохроматической волны на предканторовых решетках. Электромагнитные явления. 1998. Т.1, №4. С. 455-464.
51. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: H -polarization case. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2017. Vol. 25. P. 4496-4509.
52. Koval'ova A. A., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Analysis of the H-polarized electromagnetic wave diffraction by a semi-infinite periodical strip grating. 2016 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Lviv, Ukraine, 05-07 July, 2016. P. 252-255.
53. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M., Ugrimova A., Ilina T. A., Shcherbatiuk E. Waves scattering by graphene semi-infinite grating. IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2019). Lviv, July 2-6, 2019. P. 98-101.
54. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: E-polarization case. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2018. Vol. 26, no.5. P. 2406-2416.

55. Tong M.S., Chew W.C. Nystrom method with edge condition for electromagnetic scattering by 2-D open structures. *Progress in Electromagnetic Research*. 2006. Vol. 62. P. 49-68.
56. Nosich A.A., Gandel Y.V. Numerical analysis of quasioptical multireflector antennas in 2-D with the method of discrete singularities: E-wave case. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2007. Vol. 55, no.2. P. 399-406.
57. Zygmund A. *Trigonometric series I & II*. Cambridge: Cambridge University Press; 1959.
58. Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа*. М.-Л.: Изд. Физико-математической литературы. 1962. 708 с.
59. Миттра Р., Ли С. *Аналитические методы теории волноводов*. М.: Мир. 1974. 325 с.
60. Geim K., Novoselov K. S. The rise of grapheme. *Nature Mater*. 2007. Vol. 6. P. 183-191.
61. Otsuji T., Boubanga Tombet S. A., Satou A., Fukidome H., Suemitsu M., Sano E., Popov V., Ryzhii M., Ryzhii V. Graphene-based devices in terahertz science and technology. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2012. Vol. 45. P. 303001.
62. Tamagnone M., Gomez-Diaz J. S., Mosig J. R., Perruisseau-Carrier J. Reconfigurable THz plasmonic antenna concept using a graphene stack. *Applied Physics Letters*. 2012. Vol. 101. – P. 214102.
63. Schwierz F. Graphene transistors. *Nature Nanotechnology*. 2010. Vol. 5, № 7. P. 487-496.
64. Avouris P. Graphene: electronic and photonic properties and devices. *Nano Letters*. 2010. Vol. 10, № 11. P. 4285-4294.
65. Cheng Min, Fu Ping, Weng Minghua, Chen Xiyao, Zeng Xiahui, Feng Shangyuan, Chen Rong. Spatial and angular shifts of terahertz wave for the graphene metamaterial structure. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2015. Vol. 48, № 23. P.285105.

66. Huidobro P. A., Kraft M., Kun R., Maier S. A., Pendry J. B. Graphene, plasmons and transformation optics. *Journal of Optics*. 2016. Vol. №18. P.044024.
67. Jornet J. M., Akyildiz I. F. Graphene-based plasmonic nano-antenna for terahertz band communication in nanonetworks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. 2013. Vol. 31, №. 12. P. 685-694.
68. Tong K., Wang Y., Wang F., Sun J., Wu X. Surface plasmon resonance biosensor based on graphene and grating excitation. *Applied Optics*. 2019. Vol. 58, no.7. P. 1824-1829.
69. Shapoval O. V., Nosich A. I. Bulk refractive-index the THz-range plasmon resonances on a micro-size. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2016. Vol. 49, no.5. P. 055105/8.
70. Chen J., Li J., Liu Q.-H. Designing graphene-based absorber by using HIE-FDTD method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2017. Vol. 65, no.4. P. 1896-1902.
71. Xu N., Chen J., Wang J., Qin X., Shi J. Dispersion HIE-FDTD method for simulating graphene-based absorber,” *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2017. Vol. 11, no.1. P. 92-97.
72. Chen P. Y., Alu. A. Atomically thin surface cloak using graphene monolayers. *ACS Nano*. 2011. Vol. 5, no. 7. P. 5855-5863.
73. Long Ju, Baisong Geng, Jason Horng, Caglar Girit, Michael Martin, Zhao Hao, Hans A. Bechtel, Xiaogan Liang, Alex Zettl, Y. Ron Shen, Feng Wang. Graphene plasmonics for tunable terahertz metamaterials. *Nature Nanotechnology* 2010. Vol. 6, no. 10. P. 630-634.
74. Huang Y., Wu L.-S., Tang M., Mao J. Design of a beam reconfigurable THz antenna with graphene-based switchable high-impedance surface. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2012. Vol. 11, no. 4. P. 836-842.
75. Llatser I., Kremers C., Cabellos-Aparicio A., Jornet J.M., Alarcón E., Chigrin D. N. Graphene-based nano-patch antenna for terahertz radiation. *Photonics and*

Nanostructures –Fundamentals and Applications. 2012. Vol. 10, no. 4. – P. 353-358.

76. Yao Y., Kats M.A., Genevet P., Yu N., Song Y., Kong J., Capasso F. Broad electrical tuning of graphene-loaded plasmonic antennas. *Nano Letters*. 2013. Vol. 13, no. 3. P. 1257-1264.

77. D'Aloia A. G., D'Amore M., Sarto M. S. Adaptive broadband radar absorber based on tunable graphene. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2016. Vol. 64, no. 6. P. 2527-2531.

78. Chen J., Xu N., Zhang A., Guo J. Using dispersion HIE-FDTD method to simulate the graphene-based polarizer. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2016. Vol. 64, no.7. P. 3011-3017.

79. Tamagnone M., Gomez-Diaz J. S., Mosig J. R., Perruisseau-Carrier J. Analysis and design of terahertz antennas based on plasmonic resonant graphene sheets. *Journal of Applied Physics*. 2012. Vol. 112, no.11. P. 114915.

80. Jablan M., Buljan H., Soljagic M. Plasmonics in graphene at infrared frequencies. *Physical Review B*. 2009. Vol. 80. P. 245435.

81. Horng J., Chen C.-F., Geng B., Girit C., Zhang Y., Hao Z., Bechtel H.A., Martin M., Zettl A., Crommie M.F., Shen Y.R., Wang F. Drude conductivity of Dirac fermions in graphene. *Physical Review B*. Vol. 83. 2011. P. 165113.

82. Nikitin A. Y., Guinea F., Garcia-Vidal F. J., Martin-Moreno L. Edge and waveguide terahertz surface plasmon modes in graphene microribbons. *Physical Review B*. 2011. Vol. 84. P. 161407(R).

83. Zhang B., Jornet J. M., Akyldiz I. F., Wu Z.-P. Mutual coupling reduction for ultra-dense multi-band plasmonic nano-antenna arrays using graphene-based frequency selective surface. *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. P. 33214–33225.

84. Han M. Y., Oezylmaz B., Zhang Y., Kim P. Energy band gap engineering of graphene nanoribbons. *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98, № 20. P. 206805.

85. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene. *Journal of Applied Physics*. 2008. Vol. 103. P. 064302.
86. Hanson G. W. Dyadic Green's functions for an anisotropic, non-local model of biased graphene. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2008. Vol. 56, no. 3. P. 747-757.
87. Gusynin V. P., Sharapov S. G., Carbotte J. B. On the universal AC optical background in graphene. *New Journal of Physics*. 2009. Vol. 11. P. 095013.
88. Shao Y., Yang J. J., Huang M. A review of computational electromagnetic methods for graphene modelling. *International Journal of Antennas Propagation*. 2016. P. 7478621.
89. Chen J., Wang J. Three-dimensional dispersive hybrid implicit-explicit finite-difference time-domain method for simulations of graphene. *Computer Physics Communications*. 2016. Vol. 207. P. 211-216.
90. Wang F., Huang S., LI L., Chen W., Xie Z. Dual-band tunable perfect metamaterial absorber based on graphene. *Applied Optics*. 2018. Vol. 57, no.24. P. 6916-6922.
91. Torabi E.-S., Fallahi A., Yahaghi A. Evolutionary optimization of graphene-metal metasurfaces for tunable broadband terahertz absorption. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2017. Vol. 65, no. 3. P. 1464-1467.
92. Khavasi A. Design of ultra-broadband graphene absorber using circuit theory. *Journal of Optical Society of America B*. 2015. Vol. 32, no. 9. P. 1941-1946.
93. Zhang A.-Q., Liu Z.-G., Lu W.-B., Chen H. Dynamically tunable attenuator on a graphene-based microstrip line. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2019, Vol. 67, no.2. P. 746-753.
94. Zhang A.-Q., Liu Z.-G., Lu W.-B., Chen H. Graphene-based dynamically tunable attenuator on a coplanar waveguide or a slotline. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2019. Vol. 67, no.1. P. 70-77.

95. Li P., Shi Y., Jiang L.-J., Bagci H. DGTD analysis of electromagnetic scattering from penetrable conductive objects with IBC. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2015. Vol. 63, no.12. P. 5686-5697.
96. Nikitin A. Y., Guinea F., Garcia-Vidal F. J., Martin-Moreno L. Surface plasmon enhanced absorption and suppressed transmission in periodic arrays of graphene ribbons. *Physical Review B*. 2012. Vol. 85. P. 081405(R).
97. Zinenko T. L. Scattering and absorption of terahertz waves by a free-standing infinite grating of graphene strips: Analytical regularization analysis. *Journal of Optics*. 2014. Vol. 17, no. 5. P. 055604/8.
98. Zinenko T.L., Matsushima A., Nosich A.I. Surface-plasmon, grating-mode, and slab-mode resonances in the H- and E-Polarized THz wave scattering by a graphene strip grating embedded into a dielectric slab. *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*. 2017. Vol. 23, № 4. P. 4601809.
99. Shapoval O.V., Gomez-Diaz J. S., Perruisseau-Carrier J., Mosig J. R., Nosich A.I. Integral equation analysis of plane wave scattering by coplanar graphene-strip gratings in the THz range. *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. 2013. Vol. 3, № 5. P. 666-674.
100. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Моделирование графеновых решеток методами интегральных уравнений. Lambert Academic Publishing, 2018. 108 с. ISBN 978-613-9-89111-5.
101. Калиберда М.Е., Погарский С.А., Роюк М.П., Ильина Т.А. Дифракция волны на плоской графеновой решетке, расположенной над идеально проводящей плоскостью. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка»*. 2017. Вип. 27. С. 49-52.
102. Roiuk M., Kaliberda M., Pogarsky S., Lytvynenko L. Diffraction by finite graphene grating above perfectly electric conducting plane. *The 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS)*. Odessa, Ukraine, 04-07 September, 2018. P. 94-97.

103. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Modeling of graphene planar grating in the THz range by the method of singular integral equations. *Frequenz*. 2018. Vol. 72, no. 5-6. P. 277-284.
104. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Simulation of infinite periodic graphene planar grating in the THz range by the method of singular integral equations. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*. 2018. Vol. 26, no.4. P. 1724-1735.
105. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Singular integral equations in diffraction by multilayer grating of graphene strips in the THz range. *The European Physical Journal Applied Physics (EPJ Applied Physics)*. 2018. Vol. 82, no. 2. P. 21301.
106. Kaliberda M., Pogarsky S., Roiuk M., Lytvynenko L. Diffraction by double layer graphene strip grating. *IEEE 3th Міжнародна конференція з інформаційно-телекомунікаційних технологій та радіоелектроніки (УкрМіКо'2018/UkrMiCo'2018)*. Odessa, Ukraine, 10-14 September, 2018.
107. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Diffraction by double layer graphene strip grating. *2nd URSI AT-RASC*. Gran Canaria, 28 May – 1 June 2018.
108. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations analysis of THz wave scattering by an infinite graphene strip grating embedded into a grounded dielectric slab. *Journal of the Optical Society of America A (JOSA A)*, 2019. Vol. 36, no. 10. P. 1787-1794.
109. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. THz waves scattering by finite graphene strip grating embedded into dielectric slab. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2020. Vol. 56, no.1. P. 8500107.
110. Kaliberda M., Lytvynenko L., Ilina T., Pogarsky S. Excitation of guided waves and grating-mode resonances in the scattering by graphene strip grating inside dielectric slab. *European Microwave Conference in Central Europe*. Prague, Czech Republic, 13-15 May, 2019. P. 473-476.

111. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Singular integral equations in THz waves scattering by finite number of graphene strips with dielectric substrate. 2022 IEEE 41th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, 10-14, October, 2022. P. 243-246.
112. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in THz plane wave scattering by graphene semi-infinite grating. Telecommunications and Radio Engineering. 2020. Vol. 79, no. 9. P. 731-742.
113. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in plane wave scattering by infinite graphene strip grating with brake of periodicity. Frequenz. 2021. Vol. 75, no. 7-8. P. 239-249.
114. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Scattering by infinite graphene strip grating with brake of periodicity. 2019 16th European Radar Conference. Paris, France. 2019. P. 19230988. Proceedings of the 49th European Microwave Conference. Paris, France, 1–3 October, 2019. P. 1028-1031.
115. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A., Sauleau R. Excitation of guided waves of grounded dielectric slab by a THz plane wave scattered from finite number of embedded graphene strips: Singular integral equation analysis. IET Microwaves, Antennas and Propagation. 2021. Vol. 15. P. 1171-1180.
116. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of eigenmodes of planar dielectric waveguide with PEC wall by graphene strip grating at THz. Waves in Random and Complex Media. 2024. Vol. 34, no. 3. P. 1389-1406.
117. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of natural waves of planar dielectric waveguide with PEC wall by graphene strip grating in THz range. Proceedings of the 50th European Microwave Conference. Utrecht, Netherlands, 12-14 January, 2021. P. 20348885.
118. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in scattering of planar dielectric waveguide eigenwaves by the system of graphene strips at THz. Plasmonics. 2022. Vol.17. P. 505-517.

119. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Modeling of scattering of dielectric waveguide eigenwaves by system of graphene strips at THz. 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, April 22-24, 2020. P. 230-233.
120. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Radiation of planar dielectric waveguide eigenwaves scattered by graphene strip grating in THz range. 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Copenhagen, Denmark, 15-20 March, 2020.
121. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. SLL reduction in planar dielectric waveguide with graphene strips using genetic algorithm. 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Düsseldorf, Germany, 22-26 March, 2021.
122. Slipchenko T. M., Nesterov M. L., Martin-Moreno L., Nikitin A. Y. Analytical solution for the diffraction of an electromagnetic wave by a graphene grating. *Journal of Optics*. 2013. Vol. 15, no.11. P. 114008.
123. Yakovlev A. B., Padooru Y. R., Hanson G. W., Mafi A., Karbasi S. A generalized additional boundary condition for mushroom-type and bed-of-nails-type wire media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2010. Vol. 59, no.3. P. 527-532.
124. Fuscaldo W., Burghignoli P., Vaccarelli P., Galli A. Efficient 2-D leaky-wave antenna configurations based on graphene metasurfaces. *International Journal of Microwaves and Wireless Technology*. 2017. Vol. 9, no.6. P. 1293-1303.
125. Hwang R. B. Rigorous formulation of the scattering of plane waves by 2-d graphene-based gratings: out-of-plane incidence. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2014. Vol. 62, №. 9. P. 4736-4745.
126. Каліберда М. Є., Литвіненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі дифракції хвиль на напівнескінченній графеновій решітці. *Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник*. 2019. Вип. 196. С. 112-116.

127. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої хвилі на плоскій графеновій решітці типу жалюзі. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2019. Вип. 197. С. 38-42.
128. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Операторний метод в задачі дифракції хвиль на двох графенових смужках, розташованих у паралельних площинах. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2017. Вип. 188. С. 12-15.
129. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of the H-polarized plane wave by finite and semi-infinite multilayer systems of infinite graphene strip gratings in the THz range. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2020. Vol.12, no.5. P.380-386.
130. Kaliberda M., Pogarsky S., Lytvynenko L. Modeling of wave scattering by multilayer system of infinite graphene strip gratings using integral equations combined with operator method. *IEEE 39th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*. Kyiv, 16-18 April, 2019. P. 18934763.
131. Lovat G., Hanson G. W., Araneo R., Burghignoli P. Semiclassical spatially dispersive intraband conductivity tensor and quantum capacitance of graphene. *Physical Review B*. 2013. Vol. 87, no.11. P. 115429.
132. Lovat G., Burghignoli P., Araneo R. Low-frequency dominant-mode propagation in spatially dispersive graphene nanowaveguides. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*. 2012. Vol. 55, no.2. P. 328-333.
133. Fuscaldo W., Burghignoli P., Baccarelli P., Galli A. Complex mode spectra of graphene-based planar structures for THz applications,” *Journal of Infrared, Millimeter, Terahertz Waves*. 2015. Vol. 36, no.8. P. 720-733.
134. Lifanov I.K. *Singular integral equations and discrete vortices*. Utrecht: VSP, 1996, 485 p.

135. Nishimoto M., Ikuno H. Numerical analysis of plane wave diffraction by a semi-infinite grating. *IEEJ Transactions on Fundamentals and Materials*. 2001. Vol. 121, no. 10. P. 905-910.
136. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2016. Vol. 30, no. 18. P. 2411-2426.
137. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed: E-polarization case. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2018. Vol. 32, no. 3. P. 332-347.
138. Butler C.M., Wilton R.D. General analysis of narrow strips and slots. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1980. Vol.28, no.1. P. 42-48.
139. Сологуб В. Г. Об одном методе исследования задачи дифракции на конечном числе лент, расположенных в одной плоскости. *Доклады АН УССР. Сер. А*. 1975. № 6. С. 549-552.
140. Twelsky V. On a multiple scattering theory of the finite grating and Wood's anomalies. *Journal of Applied Physics*. 1952. Vol. 23. P. 1099-1118.
141. Matsushima A., Itakura T. Singular integral equation approach to plane wave diffraction by an infinite strip grating at oblique incidence. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 1990. Vol.4, no. 6. P. 505-519.
142. Matsushima A., Itakura T. Singular integral equation approach to electromagnetic scattering from a finite periodic array of conducting strips. *Journal on Electromagnetic Waves and Applications*. 1991. Vol. 5, no.6. P. 545-562.
143. Matsushima A., Nakamura Y., Tomino S. Application of integral equation method to metal-plate lens structures. *Progress in Electromagnetic Research*. 2005. Vol.54. P. 245-262.
144. Lovat G., Burghignol P., Capolino F., Jackson D.R., Wilton D. R. High-gain omnidirectional radiation patterns from a metal strip grating leaky-wave antenna.

2007 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. Hawaii, Aloha, June 09-15, 2007. P. 9-15.

145. Baccarelli P., Burghignoli P., Frezza F., Galli A., Lampariello P., Lovat G., Paulotto S. Modal properties of surface and leaky waves propagating at arbitrary angles along a metal strip grating on a grounded slab. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2005. Vol. 53, no. 1. P. 36-46.

146. Kaganovsky Y., Shavit R. Analysis of radiation from a line source in a grounded dielectric slab covered by a metal strip grating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2009. Vol. 57, no. 1. P. 135-143.

147. Shapoval O. V., Sauleau R, Nosich A. I. Scattering and absorption of waves by flat material strips analyzed using generalized boundary conditions and Nystrom-type algorithm. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2011. Vol. 59, no. 9. P. 3339-3346.

148. Balaban M. V., Smotrova E.I., Shapoval O. V., Bulygin V. S., Nosich A. I. Nystrom-type techniques for solving electromagnetics integral equations with smooth and singular kernels. *International Journal on Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields*. 2012. Vol. 25, no 5. P. 490-511.

149. Воробьев С.Н., Просвирнин С.Л. Метод моментов в задаче дифракции на ленте. *Радиотехника и электроника*. 1985. Т. 30, № 1. С. 163-165.

150. Воробьев С.Н., Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л., Дифракция электромагнитных волн на структуре из конечного числа неэквидистантно расположенных лент различной ширины. Сравнение спектрального и операторного методов. *Радиофизика и радиоастрономия*. 1996. Т.1, №. 1. С. 110-118.

151. van de Hulst H. C. *Light scattering by small particles*. New York: Dover Publ. 1981. 470 p.

152. Ruck G.T. *Radar cross section handbook*. Vol.1,2. New York: Plenum Press. 1970. 472 p.

153. Theory and phenomena of metamaterials (Metamaterials Handbook). Editor Capolino F. Boca Raton, FL: CRC Press. 2009. 926 p.
154. Silberstein E., Lalanne P., Hugonin J.-P., Cao Q. Use of grating theories in integrated optics. *Journal of the Optical Society of America A*. 2001. Vol. 18, no.11. P. 2865-2875.
155. Barrelet C.J., Bao J., Loncar M., Park H.-G., Capasso F., Lieber C.M. Hybrid single-nanowire photonic crystal and microresonator structures. *Nano Letters*. 2006. Vol. 6, no. 1. P. 11-15.
156. Baldwin GL, Heins AE. On the diffraction of a plane wave by an infinite plane grating. *Mathematica Scandinavica*. 1954. Vol. 2. P. 103-118.
157. Uchida K, Noda T Matsunaga T, Spectral domain analysis of electromagnetic wave scattering by an infinite metallic grating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1987. Vol. 35, no. 1. P. 46-52.
158. Yevtushenko F.O., Dukhopelnykov S.V., Nosich A.I. H-polarized plane-wave scattering by a PEC strip grating on top of a dielectric substrate: analytical regularization based on the Riemann-Hilbert Problem solution. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2020. Vol. 34, no.4. P. 483-499.
159. Yevtushenko F.O., Dukhopelnykov S.V., Zinenko T.L. E-polarized plane-wave scattering from a PEC strip grating on a dielectric substrate: analytical regularization and lattice-mode resonances. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2021. Vol. 35, no. 10. P. 1388-1405.
160. Замятин Е.В., Просвирнин С.Л. Дифракция электромагнитных волн на решетке с малыми случайными флуктуациями размеров. *Радиотехника и электроника*. 1985. Т. 30, №. 11. С. 2124-2131.
161. Воробьев С.Н., Замятин Е.В., Просвирнин С.Л. Метод решения задач дифракции волн на решетках со случайными флуктуациями параметров. *Известия ВУЗов. Радиофизика*. 1989. Т. 32, № 9. С. 1084-1090.
162. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Позняков А. В. Аналіз дефектів періодичній решітці у вигляді відсутньої однієї стрічки. *Радиотехника*.

Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2016. Вип. 187. С. 74-78.

163. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Е-поляризованої хвилі на нескінченній періодичній стрічковій решітці за відсутністю однієї стрічки. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2016. Т. 21, № 3. С. 189-197.

164. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Analysis of the H-polarized electromagnetic wave diffraction by an infinite periodical strip grating without one strip. 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter And Submillimeter Waves (MSMW'2016). Kharkiv, Ukraine, 20-24 June, 2016. H-4.

165. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Analysis of the E-polarized electromagnetic wave diffraction by an infinite periodical strip grating without one strip. 2016 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Lviv, Ukraine, 05-07 July, 2016. P. 248-251.

166. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Infinite periodic grating with one strip removed in the case of small strips width relative to the period. The 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 05-11 September, 2016. P. 101-104.

167. Luneburg E., Westfahl K. Diffraction of plane waves by an infinite strip grating. *Ann Phys.* 1971. Vol. 27. P. 257-288.

168. Sologub V. G. Diffraction of a plane wave by an infinite strip grating in the short-wavelength case. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1972. Vol. 12, no.4. P. 159-176.

169. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Electromagnetic interaction of two semi-infinite coplanar gratings of flat PEC strips with arbitrary gap between them. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications.* 2019. Vol. 33, no.12. P. 1557-1573.

170. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Diffraction by two semi-infinite gratings placed in the same plane. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv, Ukraine, 29 May-2 June, 2017.
171. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію Н-поляризованої хвилі на двох однакових напівнескінченних решітках, розташованих в одній площині. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2021. Т. 26, №3. С. 239-249
172. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Method of singular integral equations in scattering by double-layer infinite strip grating with several strips removed in every layer. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2021. Vol. 35, no. 11. P. 1433-1447.
173. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про дифракцію Н-поляризованої плоскої хвилі на двошаровій нескінченній періодичній стрічковій решітці за відсутності однієї стрічки у кожному шарі. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2020. Т.25, №2. С. 136-146.
174. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in scattering by double-layer infinite strip grating without one strip in every layer. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine, 21-25 September, 2020.
175. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. THz wave scattering by double-layer infinite graphene strip grating without one strip in every layer. *Proceedings of the 50th European Microwave Conference, Utrecht, Netherlands, 12-14 January, 2021*. P. 20348903.
176. Lytvynenko L.M., Prosvirnin S.L. *Wave diffraction by periodic multilayer structures*. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers. 2012. 164 p.
177. Rodriguez-Berral R., Medina F., Mesa F., Garcia-Vigueras M. Quasi-analytical modeling of transmission/reflection in strip/slit gratings loaded with

- dielectric slabs. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2012. Vol. 60, no.3. P. 405-418.
178. Chen J., Li J., Liu Q. H. Analyzing graphene-based absorber by using the WCS-FDTD method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2017. Vol. 65, no.10. P. 3689-3696.
179. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. THz wave scattering by graphene strip grating embedded into a dielectric slab with PEC plane. 2018 Asia-Pacific Microwave Conference (APMC 2018). Kyoto, Japan, November 6-9, 2018. P. 639-641.
180. Kalinichev V. I. Radiation behavior of planar double-layer dielectric waveguides combined with a finite metal-strip grating. *Microwave and Optical Technology Letters*. 1996. Vol. 11, no.2. P. 69-73.
181. Bledowski A., Zakowicz W. Radiation properties of a planar dielectric waveguide loaded with conducting-strip diffraction grating. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1997. Vol. 45, no. 9. P. 1637-1640.
182. Nguyen N.-H., Ghiotto A., Vuong T.-P., Vilmot A., Martin T., Wu K. Dielectric slab air-filled substrate integrated waveguide (SAFSIW) bandpass filters. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*. 2020. Vol. 30, no. 4. P. 363-366.
183. Nejat M., Nozhat N. Ultrasensitive THz refractive index sensor based on a controllable perfect MTM absorber. *IEEE Sensors Journal*. 2019. Vol. 19, no.22. P.10490-10497.
184. Asgari S., Granpayeh N. Tunable mid-infrared refractive index sensor composed of asymmetric double graphene layers. *IEEE Sensors Journal*. 2019. Vol. 19, no.14. P. 5686-5691.
185. Dukhopelnykov S. V., Sauleau R., Nosich A. I. Integral equation analysis of terahertz backscattering from circular dielectric rod with partial graphene cover. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2022. Vol. 56, no.6. P. 1-8.

186. Valencia C., Riso M. A., Cuevas M., Depine R. A. Green formulation for studying electromagnetic scattering from graphene-coated wires of arbitrary section. *Journal of the Optical Society of America B*. 2017. Vol. 34, no.6. P.1075-1083.
187. Gerasik V., Wartak M. S., Zhukov A. V., Belonenko M. B. Free electromagnetic radiation from the graphene monolayer with spatially modulated conductivity in THz range. *Modern Physics Letters B*. 2016. Vol. 30, no.11. P. 1650185.
188. Kobayashi K. Combined perturbation and Wiener-Hopf analysis of the diffraction by a finite sinusoidal grating. *Microwave and Optical Technology Letters*. 1991. Vol. 4. P. 495-501.
189. Vinogradova E.D., Kobayashi K., Eizawa T. Full wave analysis of plane wave diffraction by a finite sinusoidal grating: E-polarization case. *Wave Motion*. 2019. Vol. 86. P. 44-62 (2019).
190. Zinenko T. L., Matsushima A., Nosich A. I. Terahertz range resonances of metasurface formed by double-layer grating of microsize graphene strips inside dielectric slab. *Proceedings of the Royal Society A*. 2020. Vol. 476, no. 2240. P. 20200173.
191. Perret E., Zerounian N., David S., Aniel F. Complex permittivity characterization of benzocyclobutene for terahertz applications. *Microelectronic Engineering*. 2008. Vol. 85, no.11. P. 2276-2281.
192. Ghassemiparvin B., Ghalichechian N. Permittivity and dielectric loss measurement of paraffin films for mmW and THz applications. 2016 International Workshop on Antenna Technology (IWAT). Florida, USA. 2016. P. 48-50.
193. Sahin S., Nahar N.K., Sertel K. Dielectric properties of low-loss polymers for mmW and THz applications. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2019. Vol. 40, no.5. P. 557-573.
194. Zouaghi W., Vob D., Gorath M. Nicolosoc N., Roskos H.G. How good would the conductivity of graphene have to be to make single-layer-graphene

metamaterials for terahertz frequencies feasible? *Carbon*. 2015. Vol. 94. P. 301-308.

195. Fuscaldo W., Burghignoli P., Baccarelli P., Galli A. Graphene Fabry-Perot cavity leaky-wave antennas: plasmonic versus nonplasmonic solutions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2017. Vol. 65, no. 4. P. 1651-1660.

196. Gomez-Diaz J.S., Moldovan C., Capdevila S., Romeu J., Bernard L.S., Magrez A., Ionescu A.M., Perruisseau-Carrier J. Selfbiased reconfigurable graphene stacks for terahertz plasmonics. *Nature Communications*. 2015. Vol. 6. P. 6334.

197. Andrenko A. S., Nosich A.I. H-scattering of thin-film modes from periodic gratings of finite extent. *Microwave and Optical Technology Letters*. 1992. Vol. 5, no. 7. P. 333-337.

198. Nosich A. I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 1994. Vol. 8, no. 3. P. 329-353.

199. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Operator method in approximate solution of dielectric waveguide eigenwaves scattering by graphene strips. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2021). Lviv, Ukraine, 26-28 August, 2021. P. 84-87.

200. Soleimani H., Oraizi H. A novel 2D leaky wave antenna based on complementary graphene patch cell. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2020. Vol. 53. P. 255301.

201. Esquiús-Morote M., Gomez-Diaz J.S., Perruisseau-Carrier J. Sinusoidally modulated graphene leaky-wave antenna for electronic beamscanning at THz. *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. 2014. Vol.4, no. 1. P. 116-122.

202. Soleimani H., Oraizi H. Sinusoidally modulated leaky wave antenna based on cylindrical graphene waveguide. *Journal of the Optical Society of America B*. 2019. Vol. 36, no. 11. P. 3189-3195.

203. Wu A. S., Yu H., Jin S., Lin K.-C., Schiavone G. An incremental genetic algorithm approach to multiprocessor scheduling. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. 2004. Vol. 15, no. 9. P. 824-834.
204. Haupt R. Comparison between genetic and gradient-based optimization algorithms for solving electromagnetics problems. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1995. Vol. 31, no. 3. P. 1932-1935.
205. Zinenko TL, Matsushima A, Okuno Y. Scattering and absorption of electromagnetic plane waves by a multilayered resistive strip grating embedded in a dielectric slab. *Trans. IEICE Electronics*. 1999. Vol. E82. P.2255-2264.
206. Matsushima A., Zinenko T. L., Nishimori H., Okuno Y. Plane wave scattering from perpendicularly crossed multilayered strip gratings. *Progress in Electromagnetic Research*. 2000. Vol. 28. P. 185-203.
207. Yasir M., Bistarelli M., Cataldo A., Bozzi M., Perregrini L., Bellucci S. Tunable phase shifter based on few-layer graphene flakes. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*. 2019. Vol. 29, no. 1. P. 47-49.
208. Quhe R., Ma J., Zeng Z., Tang K., Zheng J., Wang Y., Ni Z., Wang L., Gao Z., Shi J., Lu J. Tunable band gap in few-layer graphene by surface adsorption. *Scientific Reports*. 2013. Vol.3. P. 1794.
209. Pierantoni L., Mencarelli D., Bozzi M., Moro R., Moscato S., Perregrini L., Micciulla F., Cataldo A., Bellucci S. Broadband microwave attenuator based on few layer graphene flakes. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2015, Vol. 63, no. 8. 2491–2497.
210. Maffucci A., Micciulla F., Cataldo A., Miano G., Bellucci S. Bottom-up realization and electrical characterization of a graphene-based device. *Nanotechnology*. 2016. Vol. 27, no.9. P. 095204.
211. Nishad A.K., Sharma R. Analytical time-domain models for performance optimization of multilayer GNR interconnects. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 2014. Vol. 20, no.1. P. 17-24.

212. Berman O.L., Boyko V.S., Kezerashvili R.Y., Kolesnikov A.A., Lozovik Y.E. Graphene-based photonic crystal. *Physics Letters A*. 2010. Vol. 374, no.47. P. 4784-4786.
213. Berman O.L., Kezerashvili R.Y. Graphene-based one-dimensional photonic crystal. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2012. Vol. 24, no.1. P. 015305.
214. Колесников А.А., Лозовик Ю. Е. Графеновый фотонный кристалл. *Труды МФТИ*. 2013. Т.5, № 1. С 53-59.
215. Tavakol M.R., Rahmani B., Khavasi A. Tunable polarization converter based on one-dimensional graphene metasurfaces. *Journal of the Optical Society of America B*. 2018. Vol. 35, no. 10. P. 2574-2581.
216. Лерер А.М., Головачева Е.В., Грибникова Е.И., Иванова И.Н., Приходько Г.И. Моделирование электродинамических характеристик двумерных графеновых решеток в терагерцовом диапазоне частот. *Наноматериалы и наноструктуры*. 2017. Т.8, №4. С. 3-7.
217. Лерер А.М. Теоретическое исследование двумерно периодических наноплазмонных структур. *Радиотехника и электроника*. 2012. Т. 57, № 11. С. 1160-1169.
218. Lerer A. M., Makeeva G. S., Golovanov O. A. Diffraction of electromagnetic waves by multilayer graphene metasurfaces in the terahertz frequency band. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2020. Vol. 62, no. 10. P. 700-712.
219. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Diffraction of the H-polarized plane wave by a finite layered graphene strip grating. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2019. Vol.11, no.4. P. 326-333.
- 220 Denisova A. R., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Rebrik A. A. Diffraction by material strips placed in parallel planes. 2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2017. Lviv, Ukraine, 17-20 October 2017. 2017.
- 221 Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Modeling of wave scattering by graphene strip gratings using integral equations combined with

- operator method. 2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Kiev, Ukraine, 2018. P. 30-33.
- 222 Kaliberda M., Pogarsky S., Ilina T., Lytvynenko L. Operator method in diffraction by layered graphene grating. The 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 04-07 September, 2018. P. 98-101.
- 223 Pogarsky S., Smirnova K., Shcherbatiuk E., Kaliberda M. THz waves scattering by multilayer system of infinite graphene strip gratings. European Microwave Conference in Central Europe. Prague, Czech Republic, 13th-15th May, 2019. P. 477-480.
224. Black N., Wiltse J. C. Millimeter-wave characteristics of phase-correcting fresnel zone plates. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1987. Vol. 35, no. 12. P. 1122-1129.
225. Ji Y., Fujita M. Design and analysis of a folded fresnel zone plate antenna. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1994. Vol.15, no. 8. P.1385-1406.
226. Dikmen F., Karachuha E., Tuchkin Y. A. Scalar wave diffraction by a perfectly soft infinitely thin circular ring. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2001. Vol. 9, no. 2. P. 199-219.
227. Агафонова М. А. Методы интегральных уравнений в задачах дифракции на полосе и щели. Телекоммуникации и транспорт. 2013. Т. 11. С. 21-24.
228. Dikmen F., Tuchkin Y. A. Analytical regularization method for electromagnetic wave diffraction by axially symmetrical thin annular strips. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2009. Vol. 17, no. 2. P. 107-124.
229. Казьмин И.А., Лерер А.М., Шевченко В.Н. Дифракция электромагнитной волны на двумерно периодической решетке из круглых и кольцевых отверстий. Радиотехника и электроника. 2008. Т.53, №2. С. 191-197.

230. Li S., Scharstein R. W. High frequency scattering by a conducting ring. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2005. Vol. 53, no. 6. P.1927-1938.
231. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у скалярній задачі дифракції на аксіально-симетричних неоднорідностях в екрані. Радіофізика і радіоастрономія. 2018. Т. 23, № 1. С. 36-42.
- 232 Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in scalar wave scattering by circular slot in screen in case of dirichlet conditions. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine, 21-25 September, 2020.
233. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевій щілині в площині або на кільці. Радіофізика і радіоастрономія. 2021. Т. 26, №4. С. 350-357.
234. Литвиненко Л. М., Просвирнин С.Л., Хижняк А.Н. Полуобращение оператора с использованием метода моментов в задачах дифракции волн на структурах из тонких дисков. Харьков, РИАН УССР. Препринт №19, 1988. 31 с.
235. Nomura Y., Katsura S. Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole. Journal of the Physical Society of Japan. 1955. Vol.10, no. 4. P. 285-304.
236. Jones D. S. Note on diffraction by an edge. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1950. Vol. 3, no. 4. P. 420-434.
237. Jones D. S. A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems. The Quarterly Journal of Mathematics. 1952. Vol. 3, no. 1. P. 189-196.
238. Copson E. T. On an integral equation arising in the theory of diffraction. The Quarterly Journal of Mathematics. 1946. Vol. os-17, no. 1. P. 19-34.
239. Copson E. T. Diffraction by a plane screen. Proceedings of the Royal Society A. 1950. Vol. 202, no. 1069. P. 277-284.

240. Noble D. Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. London: Pergamon Press, 1958. 246 p.
241. Хестанов Р. Х. Дифракция произвольного поля на полуплоскости. Радиотехника и электроника. 1970. Т. 15, №2. С. 289-297.
242. Bertoni H. L., Green A., Felsen L.B. Shadowing an inhomogeneous plane wave by an edge. Journal of the Optical Society of America. 1978. Vol. 68, no.7. P. 983-989.
243. Meister E., Rottbrand K., Speck F. O. Wiener-Hopf equations for waves scattered by a system of parallel Sommerfeld half-planes. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1991. Vol. 14. P. 525-552.
244. Cinar G., Buyukaksoy A. Diffraction of a normally incident plane wave by three parallel half-planes with different face impedances. IEEE Transactions on Antennas and Propagations. 2004. Vol. 52, № 2. P. 478-484.
245. Gorobets N.N., Yeliseyeva N.P., Antonenko Y.A. Optimisation of radiation characteristics of wire-screened antennas. Telecommunications and Radio Engineering. 2012. Vol. 71, no.1. P.59-69.
246. Yeliseyeva N.P., Gorobets N.N., Gorobets A.N. Characteristics of near field of the horizontal vibrator located above a square screen. Journal of Communication Technology and Electronics. 2016. Vol.61, no.7. P. 749-766.
247. Yeliseyeva N.P., Gorobets A.N., Katrich V.A., Nesterenko M.V. Radiation fields of a system of two impedance crossed vibrators excited in-phase and placed over a rectangular screen. Progress in Electromagnetic Research B. 2017. Vol. 77. P. 71-84.
248. Bouwkamp C. J. On the diffraction of electromagnetic waves by small circular disks and holes. Philips Research Reports. 1950. Vol.5. P. 401-422.
249. Maixner J., Andrejewski W. Strenge theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden ebenen Schirm. Ann. d. Phys. 1950. Vol. 442. P. 157-168.

31 с.

250. Hongo K., Naqvi Q.A. Diffraction of electromagnetic wave by disk and circular hole in a perfectly conducting plane. *Progress in Electromagnetic Research*. 2007. Vol. 68. P. 113-150.

251. Hongo K., Jafri ADU, Naqvi QA. Scattering of electromagnetic spherical wave by a perfectly conducting disk. *Progress in Electromagnetic Research*. 2012. Vol. 129. P. 315-343.

252. Jafri A.D.U., Naqvi Q.A., Syed A.A., Hongo K. Scattering of an arbitrarily oriented dipole field by a circular disk with surface impedance. *Progress in Electromagnetic Research*. 2012. Vol. 132. P. 403-424.

253. Losada V., Boix R. R., Horno M. Resonant modes of circular microstrip patches in multilayered substrates. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1999. Vol. 47, no. 4. P. 488-498.

254. Losada V., Boix R. R., Horno M. Full-wave analysis of circular microstrip resonators in multilayered media containing uniaxial anisotropic dielectrics, magnetized ferrites, and chiral materials. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2000. Vol. 48, no. 6. P. 1057-1064.

255. Losada V., Boix R. R., Medina F. Fast and accurate algorithm for the short-pulse electromagnetic scattering from conducting circular plates buried inside a lossy dispersive half-space. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2003. Vol. 41, No. 5. P. 988-997.

256. Di Murro F., Lucido M., Panariello G., Schettino F. Guaranteed-convergence method of analysis of the scattering by an arbitrarily oriented zero-thickness PEC disk buried in a lossy half-space // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2015. Vol. 63, no. 8. P. 3610-3620.

257. Сологуб В. Г. Коротковолновая асимптотика решения задачи о дифракции на круглом диске. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1972. Т. 12, № 2. С. 388-412.

258. Луговой А. В., Сологуб В.Г. О рассеянии электромагнитных волн диском, расположенным на границе раздела двух сред. Журнал технической физики. 1973. Т. 43, №3. С. 678-681.
259. Lucido M., Panariello G., Schettino F. Scattering by a zero-thickness PEC disk: A new analytically regularizing procedure based on Helmholtz decomposition and Galerkin method. *Radio Science*. 2017. Vol. 52, no. 1. P. 2-14.
260. Balaban M.V., Sauleau R., Benson T.M., Nosich A.I. Dual integral equations technique in electromagnetic wave scattering by a thin disk. *Progress in Electromagnetic Research B*. 2009. Vol. 16. P. 107-126.
261. Гринберг Г.А., Пименов Ю.В. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких, идеально проводящих экранах. Журнал технической физики. 1957. Т.27, №10. С. 2326-2339.
262. Bliznyuk N.Yu., Nosich A.I., Khizhnyak A.N. Accurate computation of a circular-disk printed antenna axisymmetrically excited by an electric dipole. *Microwave and Optical Technology Letters*. 2000. Vol.25, no. 3. P.211-216.
263. Saidoglu N.Y., Nosich A.I. Method of analytical regularization in the analysis of axially symmetric excitation of imperfect circular disk antennas. *Computers & Mathematics with Applications*. 2020. Vol. 79, no.10. P.2872-2884.
264. Lucido M, Balaban M.V, Nosich A.I. Plane wave scattering from thin dielectric disk in free space: Generalized boundary conditions, regularizing Galerkin technique and whispering gallery mode resonances. *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2021. Vol. 15, no.10. P. 1159-1170.
265. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Electromagnetic wave scattering by half-plane and disk placed in the same plane or circular hole in half-plane. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2022. Vol. 36, no. 10. P. 1463-1483.
266. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering by PEC half-plane and disk placed on parallel planes. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2023. Vol. 15, no.2. P. 311-312.

267. Каліберда М. Є., Литвиненко Л.М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про дифракцію плоскої хвилі на нескінченно тонких ідеально провідних напівплощині та двох дисках. *Радіофізика і радіоастрономія (An operator method for the problem of plane wave diffraction by infinitely thin, perfectly conducting half-plane and two disks. Radio Physics and Radio Astronomy)*. 2022. Т. 27, №3. С. 167-180.
268. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in the E-polarized plane wave scattering by coplanar half-plane and disk: basic equations and convergence. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2021). Lviv, Ukraine, 26-28 August, 2021. P. 88-91.
269. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Plane wave scattering by two PEC zero-thickness disks placed above half-plane. 2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week. Kharkiv, 14-18 November, 2022. P. 22625890.
270. Degtyarev A. V., Dubinin M. M., Gurin O. V., Maslov V. A., Muntean K. I., Ryabyh V. N., Senyuta V. S. Control of tightly focused laser beams in the THz range. *Microwave and Optical Technology Letters*. 2021. Vol. 63. no.11. P. 2888-2892.
271. Furlan W. D., Ferrando V., Monsoriu J. A., Zagrajek P., Czerwinska E., Szustakowski M. 3D printed diffractive terahertz lenses. *Optics Letters*. 2016. Vol. 41, no.8. P. 1748.
272. Wilk R., Vieweg N., Kopschinski O., Koch M. Liquid crystal based electrically switchable Bragg structure for THz waves. *Optics Express*. 2009. Vol. 17, no. 9. P. 7377-7382.
273. Lu Y.-C., Yang L., Huang W.-P., Jian S.-S. Improved full-vector finite-difference complex mode solver for optical waveguides of circular symmetry. *Journal of Lightwave Technology*. 2008. Vol. 26, no. 13. P. 1868-1876.
274. Dzyubenko M. I., Maslov V. A., Odarenko E. N., Radionov V. P. Modelling of output mirrors based on circular gradient structures for THz lasers. *Quantum Electronics*. 2019. Vol. 49, no.5. P. 512-513.

275. Scharstein R.W., Adams A.T. Galerkin solution for the thin circular iris in a TE₁₁-mode circular waveguide. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1988. Vol. 36. no. 1. P. 106-113.
276. Scharstein R.W., Adams A.T. Thick circular iris in a TE₁₁ circular waveguide. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1988. Vol. 36, no.11. P. 1529-1531.
277. Balaji U. Design of resonant iris filter with dielectric filled cavities. 2011 IEEE Long Island Systems, Applications and Technology Conference. Farmingdale, NY, USA. 6 May 2011 P. 12036481.
278. Shen Z., MacPhie R.H. Scattering by a thick off-centered circular iris in circular waveguide. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1995. Vol. 43, no. 11. P. 2639- 2642.
279. Christie V.L., Kumar L., Balakrishnan N. Analysis of propagation characteristics of circular corrugated waveguides using coupled integral equation technique. Electromagnetics. 2007. Vol. 27, no.4. P. 229-240.
280. Kesari V., Jain P. K., Basu B. N. Analysis of a disc-loaded circular waveguide for interaction impedance of a gyrotron amplifier. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 2005. Vol. 26, no. 8. P. 1093-1110.
281. Kesari V., Keshari J. P. Propagation characteristics of a variant of disc-loaded circular waveguide. Progress in Electromagnetics Research M. 2012. Vol. 26. P. 23-37.
282. Соболев Д. И., Белоусов В. И., Денисов Г. Г., Калынова Г. И. Высокоэффективные преобразователи мод гладкого и гофрированного круглого волновода. Тезисы докл. 21-ой международной конференции "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии", "КрыМиКо-2011", СевГТУ, Севастополь. 2011. Т.1. С. 649-650.
283. Da Silva L. C. A Method of analysis of TEn-to-HEn mode converters. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1988. Vol. 36, no.3. P.480-488.

284. Da Silva L. C. Castello Branco M. G. Analysis of the junction between smooth and corrugated cylindrical waveguides in mode converters. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1990. Vol. 38, no.6. P.800-802.
285. James G. L. TE_{11} to HE_{11} mode converters for small angle corrugated horns. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1982. Vol. 30, no.6. P.1057-1062.
286. Teniente J, Gonzalo R., del-Río C. Innovative high-gain corrugated horn antenna combining horizontal and vertical corrugations. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2006. Vol. 5. P.380-383.
287. Minxett H. C., Thomas B. MacA. A method of synthesizing radiation pattern with axial symmetry. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1966. Vol. 14, no.5. P.654-656.
288. James G. L. Analysis and design of TE_{11} -to- HE_{11} corrugated cylindrical waveguide mode converters. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1981. Vol. 29, no.10. P. 1059-1066.
289. James G. L., Thomas B. M. TE_{11} to HE_{11} corrugated cylindrical waveguide mode converters using ring-loaded slots. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1982. Vol. 30, no.3. P.278-285.
290. Lee H. S., Eom H. J., Scattering from a cylindrical waveguide with rectangular corrugations. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2001. Vol.49, no.2. P.315-320.
291. Духопельников С.В. Математическая модель для расчета гофрированного волновода на базе сингулярных интегральных уравнений и метода дискретных особенностей. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи керування". 2006. Вип. 6, №733. С. 117-133.

292. Духопельников С. В. Математические модели для расчета дифракции в цилиндрическом волноводе с патрубками частично заполненными диэлектриком. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи керування". 2007. Вип. 7, №775. С. 140-151.
293. Pogarsky S. A., Chumachenko V. A. Wave diffraction by bounded periodical structures with axial symmetry. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 2001. Vol. 22, no. 11. P. 1623-1631.
294. Калиберда М.Е., Литвиненко Л.Н., Погарский С.А. Дифракция волн типа H_{0m} и E_{0m} на системе аксиально-симметричных неоднородностей в коаксиальном тракте. Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 5. С. 539-545.
295. Lytvynenko L. M., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Solution of waves transformation problem in axially symmetric structures. Frequenz. 2012. Vol. 66, no. 1-2. P. 17-25.
296. Каліберда М.Є., Погарський С.О., Білоусов В. А. Дифракція аксиально-симметричних хвиль на обмеженій та напівнескінченній послідовності гофр у круглому хвилеводі. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2011. Вип. 167. С. 10-13.
297. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Білоусов В. А. Операторний метод у задачі випромінення з відкритого кінця круглого гофрованого хвилеводу. Радіофізика і радіоастрономія. 2012. Т. 17, № 1. С. 74-80.
298. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію хвиль круглого хвилеводу на аксіально симметричних неоднорідностях. Радіофізика і радіоастрономія (Operator method in diffraction problem of waves of circular waveguide by the annular discontinuities. Radio Physics and Radio Astronomy. 2022. Т. 27, №1. С. 5-16.
299. Kaliberda M.Ye., Pogarsky S.A., Ulyankin Ye.Ye. Electrodynamic characteristics of a coaxial hollow inner conductor waveguide with a system of

axially symmetric nonperiodically arranged inhomogeneities. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2015. Vol. 74, no. 7. P. 577-583.

300. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Паралельний генетичний алгоритм у задачі оптимізації параметрів фільтра на основі коаксіального хвилеводу з системою щілин в порожнистому внутрішньому провіднику. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2012. Т. 17, № 4. С. 362-368.

301. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Belousov V. A. The parameters of filters based on a system of slots in the hollow inner conductor of a coaxial waveguide with parallel genetic algorithm optimization. 2013 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter And Submillimeter Waves. Kharkiv, Ukraine, 23-28 June, 2013. E-1.

302. Marcuvitz N. *Waveguide Handbook*, R. L. Series Vol. 10. New York: McGraw-Hill. 1951. 426 p.

303. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио. 1966. 431 с.

304. Oliver D. A., Xiang J. Design of Profiled Corrugated Horns. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1988. Vol. 36, no.7. P. 936-940.

305. Conforti E., Giarola A. J. Radiation from Cone-Shaped Flanged Open-Ended Thin-Wall Circular Waveguide. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1988. Vol. 36, no. 5. P. 623-628.

306. Young L. The practical realization of series-capacitance couplings for microwave filters. *The Microwave Journal*. 1962. Vol. 5, no. 12. P. 79-81.

307. Holland J. H. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. – Ann Arbor, MI: University of Michigan Press. 1975. 183 p.

308. Goldberg D. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Massachusetts: Addison-Wesley. 1989. 412 p.

309. Hou E.S.H., Ansari N., Hong Ren. A genetic algorithm for multiprocessor scheduling. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 1994. Vol.5, no.2. P. 113-120
310. Lucci L., Nesti R. Pelosi G, Selleri S. Phase centre optimization in profiled corrugated circular horns with parallel genetic algorithms. Progress in Electromagnetic Research. 2004. Vol. 46. – P. 127-142.
311. Сазонов Д. М., Гридин А. М., Мишустин Б. А. Устройства СВЧ. М: Высшая школа. 1981. 295 с.
312. Kaliberda M. E., Litvinenko L. N., Pogarsky S. A. Diffraction of H_{0m} and E_{0m} modes by a system of axially symmetric discontinuities in a coaxial circuit. Journal of Communications Technology and Electronics. 2010. Vol. 55, №. 5. P. 505-511.
313. Michalewicz Z. Genetic algorithms + Data Structures = Evolution Programs. New York: Springer-Verlag. 1996. 387 с.
314. Вольман В. И. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств. Москва: Радио и связь. 1982. 328 с.

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Монографії:

1. Калиберда М. Е., Погарский С. А. Операторный метод в задачах дифракции волн на неоднородностях. Lambert Academic Publishing, 2014. 108 с. ISBN 978-3-659-64070-4

Внесок здобувача: постановка та розв'язання граничних задач, комп'ютерне моделювання, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

2. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Погарский С. А., Калиберда М. Е. Дифракция волн на периодических многослойных структурах. Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2017. 268 с.

Внесок здобувача: розв'язання задач дифракції на структурах, розсіяні поля у яких мають одночасно дискретний та неперервний спектр, розв'язання задач дифракції на системах перешкод у хвилеводах, оптимізація параметрів, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

3. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Моделирование графеновых решеток методами интегральных уравнений. Lambert Academic Publishing, 2018. 108 с. ISBN 978-613-9-89111-5.

Внесок здобувача: постановка та розв'язання граничних задач, комп'ютерне моделювання, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

4. Lytvynenko L.M., Prosvirnin S.L., Pogarsky S.A., Kaliberda M.E. Wave diffraction by periodic multilayer structures. Second Edition. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers. 2021. 272 p.

Внесок здобувача: розв'язання задач дифракції на структурах, розсіяні поля у яких мають одночасно дискретний та неперервний спектр, розв'язання задач дифракції на системах перешкод у хвилеводах, оптимізація параметрів, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

Наукові праці у наукових фахових виданнях України:

5. Каліберда М.Є., Погарський С.О., Білоусов В. А. Дифракція аксиально-симетричних хвиль на обмеженій та напівнескінченній послідовності гофр у круглому хвилеводі. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2011. Вип. 167. С. 10-13.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

6. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Білоусов В. А. Операторний метод у задачі випромінення з відкритого кінця круглого гофрованого хвилеводу. Радіофізика і радіоастрономія. 2012. Т. 17, № 1. С. 74-80.

Переклад англійською:

Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Belousov V. A. Operator method in the problem of radiation from an open end of a circular corrugated waveguide. Radio Physics and Radio Astronomy. 2012. Vol. 3, № 3. P. 259-264. DOI: 10.1615/RadioPhysicsRadioAstronomy.v3.i3.90

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

7. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Паралельний генетичний алгоритм у задачі оптимізації параметрів фільтра на основі коаксіального хвилеводу з системою щілин в порожнистому внутрішньому провіднику. Радіофізика і радіоастрономія. 2012. Т. 17, № 4. С. 362-368.

Внесок здобувача: постановка задачі, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

8. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by semi-infinite periodical multielement knife-type strip grating of fractals. Вісник Дніпропетровського університету. Серія “Фізика. Радіоелектроніка”. 2014. Вип. 21. Т. 22, № 1. С. 139-148.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

9. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про взаємодію напівнескінченної решітки типу жалюзі та скінченної решітки зі стрічок. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2015. Т. 20, № 4. С. 322-339. DOI: 10.15407/rpra20.04.332

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

10. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Е-поляризованої хвилі на нескінченній періодичній стрічковій решітці за відсутністю однієї стрічки. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2016. Т. 21, № 3. С. 189-197. DOI: 10.15407/rpra21.03.189

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

11. Калиберда М.Е., Погарский С.А., Роюк М.П., Ильина Т.А. Дифракция волны на плоской графеновой решетке, расположенной над идеально проводящей плоскостью. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка»*. 2017. Вип. 27. С. 49-52.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

12. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у скалярній задачі дифракції на аксіально-симетричних неоднорідностях в екрані. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2018. Т. 23, № 1. С. 36-42.

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

13. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі дифракції хвиль на напівнескінченній графеновій решітці. *Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник*. 2019. Вип. 196. С. 112-116.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

14. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої хвилі на плоскій графеновій решітці типу жалюзі. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2019. Вип. 197. С. 38-42.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

15. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про дифракцію Н-поляризованої плоскої хвилі на двошаровій нескінченній періодичній стрічковій решітці за відсутності однієї стрічки у кожному шарі. Радіофізика і радіоастрономія. 2020. Т.25, №2. С. 136-146. DOI: 10.15407/rpra25.02.136

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці у фахових виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних SCOPUS:

16. Lytvynenko L. M., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by semi-infinite venetian blind type grating. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2013. Vol. 61. No. 12. P. 6120-6127. DOI: 10.1109/TAP.2013.2281510

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

17. Kaliberda M.Ye., Pogarsky S.A., Ulyankin Ye.Ye. Electrodynamic characteristics of a coaxial hollow inner conductor waveguide with a system of axially symmetric nonperiodically arranged inhomogeneities. Telecommunications and Radio Engineering. 2015. Vol. 74, no. 7. P. 577-583. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v74.i7

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Погарський С. О., Ульянов Є. Є. Електродинамічні характеристики коаксіального хвилеводу з порожнім внутрішнім провідником з системою аксіально-симетричних неперіодично розташованих неоднорідностей. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2014. вип. 177. С. 109-113.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

18. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. N., Pogarsky S. A. Diffraction of H-polarized electromagnetic waves by a multi-element planar semi-infinite grating. Telecommunications and Radio Engineering. - 2015. - Vol. 74, no. 9, P. 753-767. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v74.i9.10

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої електромагнітної хвилі на багатоеlementній плоскій напівнескінченній решітці. Радіофізика і радіоастрономія. 2014. Т. 19, № 4. С. 348-357. DOI: 10.15407/rpra19.04.348

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

19. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed. Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2016. Vol. 30, no. 18. P. 2411-2426. DOI: 10.1080/09205071.2016.1254071

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

20. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Poznyakov A. V. Analysis of periodic gratings with defects in the form of absence of a single strip. Telecommunications and Radio Engineering. 2017. Vol. 76, no. 6. P. 461-467. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v76.i6.10

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Погарський С. О., Позняков А. В. Аналіз дефектів періодичній решітці у вигляді відсутньої однієї стрічки. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2016. Вип. 187. С. 74-78.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

21. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: H -polarization case. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2017. Vol. 25. P. 4496-4509. DOI: 10.3906/elk-1703-170.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

22. Kaliberda M., Pogarsky S. Operator methods in the problem of wave diffraction by two graphene strips located within parallel planes. Telecommunications and Radio Engineering. 2017. Vol. 76, no. 13. P. 1141-1147.

Переклад статті:

Каліберда М. Є., Погарський С. О. Операторний метод в задачі дифракції хвиль на двох графенових смужках, розташованих у паралельних площинах. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2017. Вип. 188. С. 12-15.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

23. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in diffraction problem by an infinite periodic strip grating with one strip removed: E-polarization case. Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2018. Vol. 32, no. 3. P. 332-347. DOI: 10.1080/09205071.2017.1383943.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

24. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Modeling of graphene planar grating in the THz range by the method of singular integral equations. *Frequenz*. 2018. Vol. 72, no. 5-6. P. 277-284. DOI: 10.1515/freq-2017-0059.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

25. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Singular integral equations in diffraction by multilayer grating of graphene strips in the THz range. *The European Physical Journal Applied Physics (EPJ Applied Physics)*. 2018. Vol. 82, no. 2. P. 21301. DOI: 10.1051/epjap/2018170324

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

26. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Simulation of infinite periodic graphene planar grating in the THz range by the method of singular integral equations. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*. 2018. Vol. 26, no.4. P. 1724-1735. DOI: 10.3906/elk-1712-92

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

27. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Method of singular integral equations in diffraction by semi-infinite grating: E-polarization case. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*. 2018. Vol. 26, no.5. P. 2406-2416. DOI: 10.3906/elk-1802-19

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

28. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Diffraction of the H-polarized plane wave by a finite layered graphene strip grating. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2019. Vol.11, no.4. P. 326-333. DOI: 10.1017/S1759078718001290

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

29. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Electromagnetic interaction of two semi-infinite coplanar gratings of flat PEC strips with arbitrary gap between them. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2019. Vol. 33, no.12. P. 1557-1573. DOI: 10.1080/09205071.2019.1615996.

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

30. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations analysis of THz wave scattering by an infinite graphene strip grating embedded into a grounded dielectric slab. *Journal of the Optical Society of America A (JOSA A)*, 2019. Vol. 36, no. 10. P. 1787-1794. DOI: 10.1364/JOSAA.36.001787

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

31. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. THz waves scattering by finite graphene strip grating embedded into dielectric slab. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2020. Vol. 56, no.1, P. 8500107. DOI: 10.1109/JQE.2019.2950679

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

32. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of the H-polarized plane wave by finite and semi-infinite multilayer systems of infinite graphene strip gratings in the THz range. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2020. Vol.12, no.5. P.380-386. DOI: 10.1017/S1759078719001430

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

33. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in THz plane wave scattering by graphene semi-infinite grating. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2020. Vol. 79, no. 9. P. 731-742. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v79.i9

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

34. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Method of singular integral equations in scattering by double-layer infinite strip grating with several strips removed in every layer. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2021. Vol. 35, no. 11. P. 1433-1447. DOI: 10.1080/09205071.2021.1893833

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

35. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in plane wave scattering by infinite graphene strip grating with brake of periodicity. *Frequenz*. 2021. Vol. 75, no. 7-8. P. 239-249. DOI: 10.1515/freq-2020-0030

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

36. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A., Sauleau R. Excitation of guided waves of grounded dielectric slab by a THz plane wave scattered from finite number of embedded graphene strips: Singular integral equation analysis. *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2021. Vol. 15. P. 1171-1180. DOI: 10.1049/mia2.12120

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

37. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of eigenmodes of planar dielectric waveguide with PEC wall by graphene strip grating at THz. *Waves in Random and Complex Media*. 2024. Vol. 34, no. 3. P. 1389-1406. DOI: 10.1080/17455030.2021.1938287

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

38. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію Н-поляризованої хвилі на двох однакових напівнескінченних решітках, розташованих в одній площині. Радіофізика і радіоастрономія (Operator method in the problem of the H-polarized wave diffraction by two semi-infinite gratings place in the same plane. Radio Physics and Radio Astronomy). 2021. Т. 26, №3. С. 239-249. DOI: 10.15407/rpra26.03.239

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

39. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Singular integral equations in scattering of planar dielectric waveguide eigenwaves by the system of graphene strips at THz. Plasmonics. 2022. Vol.17. P. 505-517. DOI: 10.1007/s11468-021-01511-9

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

40. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на кільцевій щілині в площині або на кільці. Радіофізика і радіоастрономія (Operator method in the problem of a plane electromagnetic wave diffraction by an annular slot in the plane or by a ring. Radio Physics and Radio Astronomy). 2021. Т. 26, №4. С. 350-357. DOI: 10.15407/rpra26.04.350

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

41. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Electromagnetic wave scattering by half-plane and disk placed in the same plane or circular hole in half-plane. Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2022. Vol. 36, no. 10. P. 1463-1483. DOI: 10.1080/09205071.2022.2032379

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

42. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering by PEC half-plane and disk placed on parallel planes. International Journal of Microwave and Wireless Technologies. 2023. Vol. 15, no.2. P. 311-312. DOI: 10.1017/S1759078722000472

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

43. Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію хвиль круглого хвилеводу на аксіально симетричних неоднорідностях. Радіофізика і радіоастрономія (Operator method in diffraction problem of waves of circular waveguide by the annular discontinuities. Radio Physics and Radio Astronomy. 2022. Т. 27, №1. С. 5-16. DOI: 10.15407/rpra27.01.005

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

44. Каліберда М. Є., Литвиненко Л.М., Погарський С. О. Операторний метод у задачі про дифракцію плоскої хвилі на нескінченно тонких ідеально провідних напівплощині та двох дисках. Радіофізика і радіоастрономія (An operator method for the problem of plane wave diffraction by infinitely thin, perfectly conducting half-plane and two disks. Radio Physics and Radio Astronomy). 2022. Т. 27, №3. С. 167-180. DOI: 10.15407/rpra27.03.167

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці у фахових закордонних виданнях:

45. Kaliberda M.E., Pogarsky S.A. Solution of the diffraction problem by the semi-infinite grating with modified end with the help of singular integral equations

apparatus. *Waves, Wavelets and Fractals*. 2018. Vol. 4, no. 1, P. 1-9. DOI: 10.1515/wwfaa-2018-0001

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці апробаційного характеру (тези доповідей на наукових конференціях) за темою дисертації:

46. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Belousov V. A. The parameters of filters based on a system of slots in the hollow inner conductor of a coaxial waveguide with parallel genetic algorithm optimization. 2013 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. Kharkiv, Ukraine, 23-28 June, 2013. E-1.

Внесок здобувача: постановка задачі, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

47. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S.A. Operator method in the waves diffraction problem by a semiinfinite grating of strips placed in parallel planes. 2013 International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. Kharkiv, Ukraine, 23-28 June, 2013. E-4. DOI: 10.1109/MSMW.2013.6622094

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

48. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Wave diffraction by plane semi-infinite grating. The Seventh International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Kharkiv, Ukraine, 15-19 September, 2014. P. 96-99.

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

49. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Electromagnetic interaction of a single strip with a plane semi-infinite grating. 2015 International Conference on Antenna

Theory and Techniques (ICATT). Kharkiv, Ukraine, 21-24 April, 2015. P. 138-140. DOI: 10.1109/ICATT.2015.7136806

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

50. Калиберда М. Е., Погарский С. А., Шевченко Б. В., Позняков А. В. Модификация эффективной отражающей поверхности объекта за счет применения фрактальной решетки типа жалюзи с модифицированным краем. VIII Международная научная конференция "Функциональная база нанoeлектроники". Одесса, Украина, 28 сентября, 2015. с. 90-93.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

51. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Analysis of the H-polarized electromagnetic wave diffraction by an infinite periodical strip grating without one strip. 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'2016). Kharkiv, Ukraine, 20-24 June, 2016. H-4. DOI: 10.1109/MSMW.2016.7538194

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

52. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Analysis of the E-polarized electromagnetic wave diffraction by an infinite periodical strip grating without one strip. 2016 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Lviv, Ukraine, 05-07 July, 2016. P. 248-251. DOI:10.1109/MMET.2016.7544072

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів

53. Koval'ova A. A., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Analysis of the H-polarized electromagnetic wave diffraction by a semi-infinite periodical strip grating. 2016 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory

(ММЕТ). Lviv, Ukraine, 05-07 July, 2016. P. 252-255. DOI: 10.1109/ММЕТ.2016.7544073

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

54. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Infinite periodic grating with one strip removed in the case of small strips width relative to the period. The 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 05-11 September, 2016. P. 101-104. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2016.7724161

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

55. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Diffraction by two semi-infinite gratings placed in the same plane. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Kyiv, Ukraine, 29 May-2 June, 2017. DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100345

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

56. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Diffraction by the semi-infinite knife-type grating of material strips. 2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2017. Lviv, Ukraine, 17-20 October, 2017. DOI: 10.1109/YSF.2017.8126627

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

57. Denisova A. R., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Rebrik A. A. Diffraction by material strips placed in parallel planes. 2017 IEEE International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2017. Lviv, Ukraine, 17-20 October 2017. 2017. DOI: 10.1109/YSF.2017.8126626

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

58. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Modeling of wave scattering by graphene strip gratings using integral equations combined with operator method. 2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Kiev, Ukraine, 2018. P. 30-33. DOI: 10.1109/MMET.2018.8460262

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

59. Roiuk M., Kaliberda M., Pogarsky S., Lytvynenko L. Diffraction by finite graphene grating above perfectly electric conducting plane. The 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 04-07 September, 2018. P. 94-97. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8520112

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

60. Kaliberda M., Pogarsky S., Iliina T., Lytvynenko L. Operator method in diffraction by layered graphene grating. The 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS). Odessa, Ukraine, 04-07 September, 2018. P. 98-101. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8520222

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

61. Kaliberda M., Pogarsky S., Roiuk M., Lytvynenko L. Diffraction by double layer graphene strip grating. IEEE 3th Міжнародна конференція з інформаційно-телекомунікаційних технологій та радіоелектроніки (UkrMiCo'2018/UkrMiCo'2018). Odessa, Ukraine, 10-14 September, 2018.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

62. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. THz wave scattering by graphene strip grating embedded into a dielectric slab with PEC plane. 2018 Asia-Pacific

Microwave Conference (APMC 2018). Kyoto, Japan, November 6-9, 2018. P. 639-641. DOI: 10.23919/APMC.2018.8617535

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

63. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Diffraction by double layer graphene strip grating. 2nd URSI AT-RASC. Gran Canaria, 28 May – 1 June 2018.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

64. Kaliberda M., Lytvynenko L., Ilna T., Pogarsky S. Excitation of guided waves and grating-mode resonances in the scattering by graphene strip grating inside dielectric slab. European Microwave Conference in Central Europe. Prague, Czech Republic, 13-15 May, 2019. P. 473-476.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

65. Pogarsky S., Smirnova K., Shcherbatiuk E., Kaliberda M. THz waves scattering by multilayer system of infinite graphene strip gratings. European Microwave Conference in Central Europe. Prague, Czech Republic, 13th-15th May, 2019. P. 477-480.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

66. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M. Scattering by infinite graphene strip grating with brake of periodicity. 2019 16th European Radar Conference. Paris, France. 2019. P. 19230988. Proceedings of the 49th European Microwave Conference. Paris, France, 1–3 October, 2019. P. 1028-1031. DOI: 10.23919/EuMC.2019.8910731

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

67. Kaliberda M., Pogarsky S., Lytvynenko L. Modeling of wave scattering by multilayer system of infinite graphene strip gratings using integral equations

combined with operator method. IEEE 39th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, 16-18 April, 2019. P. 18934763. DOI: 10.1109/ELNANO.2019.8783623

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

68. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Lytvynenko L. M., Ugrimova A., Ilina T. A., Shcherbatiuk E. Waves scattering by graphene semi-infinite grating. IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2019). Lviv, July 2-6, 2019. P. 98-101. DOI: 10.1109/UKRCON.2019.8879907

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

69. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Modeling of scattering of dielectric waveguide eigenwaves by system of graphene strips at THz. 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, April 22-24, 2020. P. 230-233. DOI: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088799

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

70. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Radiation of planar dielectric waveguide eigenwaves scattered by graphene strip grating in THz range. 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Copenhagen, Denmark, 15-20 March, 2020. DOI: 10.23919/EuCAP48036.2020.9135852

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

71. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in scalar wave scattering by circular slot in screen in case of dirichlet conditions. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine, 21-25 September, 2020. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252632

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

72. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in scattering by double-layer infinite strip grating without one strip in every layer. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine, 21-25 September, 2020. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252628

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

73. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. THz wave scattering by double-layer infinite graphene strip grating without one strip in every layer. Proceedings of the 50th European Microwave Conference, Utrecht, Netherlands, 12-14 January, 2021. P. 20348903. DOI: 10.23919/EuMC48046.2021.9338085

Внесок здобувача: вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

74. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. Scattering of natural waves of planar dielectric waveguide with PEC wall by graphene strip grating in THz range. Proceedings of the 50th European Microwave Conference. Utrecht, Netherlands, 12-14 January, 2021. P. 20348885. DOI: 10.23919/EuMC48046.2021.9338089

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

75. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. SLL reduction in planar dielectric waveguide with graphene strips using genetic algorithm. 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). Düsseldorf, Germany, 22-26 March, 2021. DOI: 10.23919/EuCAP51087.2021.9411043

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, проведення оптимізації параметрів, аналіз фізичних результатів.

76. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Operator method in approximate solution of dielectric waveguide eigenwaves scattering by graphene strips. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2021). Lviv, Ukraine, 26-28 August, 2021. P. 84-87. DOI: 10.1109/UKRCON53503.2021.9575513

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

77. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Operator method in the E-polarized plane wave scattering by coplanar half-plane and disk: basic equations and convergence. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON-2021). Lviv, Ukraine, 26-28 August, 2021. P. 88-91. DOI: 10.1109/UKRCON53503.2021.9576051

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

78. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Kaliberda L.M. Singular integral equations in THz waves scattering by finite number of graphene strips with dielectric substrate. 2022 IEEE 41th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). Kyiv, 10-14, October, 2022. P.243-246. DOI: 10.1109/ELNANO54667.2022.9927016

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

79. Kaliberda M. E., Pogarsky S.A., Lytvynenko L.M. Plane wave scattering by two PEC zero-thickness disks placed above half-plane. 2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week. Kharkiv, 14-18 November, 2022. P. 22625890. DOI: 10.1109/UkrMW58013.2022.10037159

Внесок здобувача: побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

80. Калиберда М. Е., Погарский С. А., Дроздов К. С. Розрахунок характеристик діелектричного електронегативного метаматеріала у круглому хвилеводі на основі багат шарового діелектрика. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2012. Вип. 170. С. 28-31.

Переклад англійською:

Kaliberda M. Ye., Pogarsky S. A., Drozdov, K. S. Calculation of dielectric electronegative metamaterial properties in a circular multilayered dielectric waveguide. Telecommunications and Radio Engineering. 2013. Vol. 72, no. 16. P. 1481-1486. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i16.30 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

81. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Білоусов В. А. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь у задачі дифракції на скінченному метаматеріалі на основі розімкнутих прямокутних рамок. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2013. вип. 172. С. 14-17.

Переклад англійською:

Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Belousov V. A. The method of hypersingular integral equations in a problem on diffraction by the finite metamaterial based upon open rectangular frames. Telecommunications and Radio Engineering. 2014. Vol. 73, no. 12. P. 1033-1040. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v73.i12.10 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

82. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Method of hypersingular integral equations in diffraction problem by strip grating of rectangular split-ring resonators. The VIII-th

International Conference “Antenna Theory and Techniques” (ICATT), Odessa, Ukraine. 2013. Vol. 8. P. 420-422. DOI: 10.1109/ICATT.2013.6650798 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв’язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

83. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик коаксіального хвилеводу з системою щілин. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 54309. 2014.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп’ютерної програми.

84. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Electrodynamic characteristics calculation of metamaterial in circular waveguide periodically filled by dielectric discs. International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dnipropetrovsk, Ukraine. 2014. P. 134-136.

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв’язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

85. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик коаксіального хвилеводу з системою щілин у випадку аксіально-несиметричних хвиль. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 58013. 2015.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп’ютерної програми.

86. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Паралельний розрахунок фільтру частот на основі коаксіального хвилеводу з системою щілин у порожньому внутрішньому провіднику. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 62120. 2015.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп’ютерної програми.

87. Каліберда М. Є., Погарський С. О., Шевченко Б. В. Фрактальна решітка типу жалюзі з модифікованим краєм як основа для створення бажаної ефективної площі розсіювання об’єкта. Радіотехніка. Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. 2016. Вип. 185. С.54-57.

Переклад англійською:

Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Shevchenko B. V. Venetian blind type fractal grating with modified edge as the basis for creation of the required efficient scattering area of the object. *Telecommun. and Radio Engineering*. 2016. Vol. 75, no. 16. P. 1435-1441 DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v75.i16.20. (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

88. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик двох прямокутних хвилеводів, зв'язаних системою щілин у спільній стінці. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 72455 від 23.06.2017. 2017.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

89. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик одношарової графенової решітки// Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №81279 від 07.09.2018. 2018.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

90. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Визначення електродинамічних характеристик одношарової графенової решітки. Визначення електродинамічних характеристик нескінченної періодичної графенової решітки зі стрічок. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №89874 від 18.06.2019. 2019.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

91. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Скінченна графенова решітка з металевою площиною. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №91487 від 09.08.2019. 2019.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

92. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Електродинамічні характеристики нескінченної графенової решітки зі стрічок. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №98244 від 18.06.2020. 2020.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

93. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Електродинамічні характеристики скінченної графенової стрічкової решітки в діелектричній пластині. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №100695 від 23.09.2020.

Внесок здобувача: постановка задачі, написання комп'ютерної програми.

94. Каліберда М. Є., Погарський С. О. Дифракція Н-поляризованої хвилі на скінченній графеновій стрічковій решітці, розташованій на діелектричній підкладці. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2022. Вип. 36. С.66-73. DOI: 10.26565/2311-0872-2022-36-05

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, побудова математичної моделі, аналіз фізичних результатів.

95. Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., Pogarsky S. A. GPU acceleration of Nystrom type method for solving singular integral equations in H-polarized EM waves scattering by strip gratings. Frequenz. 2023. Vol.77, no.7-8. P. 329-336. DOI: 10.1515/freq-2022-0195 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка задачі, вибір методу розв'язання, отримання сингулярного інтегрального рівняння, аналіз фізичних результатів.

96. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A., Sierhieieva A. A. Integral equations in the H-polarized wave scattering from metasurface formed by finite multilayer graphene strip grating inside grounded dielectric slab. Optical and Quantum Electronics. 2023. Vol.55. P. 1050. DOI: 10.1007/s11082-023-05288-5(SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка і розв'язання задачі, аналіз результатів.

97. Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Tunability of radiation pattern of the H-polarized natural waves of dielectric waveguide with infinite graphene plane and finite number of graphene strips at THz. Applied Sciences. 2023. Vol.13, no.19. P. 10563. DOI: 10.3390/app131910563 (SCOPUS)

Внесок здобувача: постановка і розв'язання задачі, аналіз фізичних результатів.

ДОДАТОК Б

Поле у далекій зоні, розсіяне плоскою напівнескінченною решіткою

У випадку H -поляризації поле у далекій зоні, розсіяне плоскою напівнескінченною решіткою, можна подати як

$$H_x^{ref}(\varphi, \rho) \cong H_x^F(\varphi, \rho) + H_x^c(\varphi, \rho) + H_x^{erfc}(\varphi, \rho).$$

Тоді, застосовуючи метод перевалу [38], отримаємо:

$$H_x^F(\varphi, \rho) = \sum_q \varepsilon_q(\varphi) a_q \exp(ik\rho \cos(\varphi - w_q)),$$

$$H_x^{erfc}(\varphi, \rho) = \exp\left(ik\rho - \frac{\pi i}{4}\right) \times$$

$$\left[\frac{\pi}{kl} \sum_q \operatorname{sgn}(w_q - \varphi) c^{inf}(-\cos w_q) \times \right.$$

$$\exp\left(-2ik\rho \left(\sin \frac{\varphi - w_q}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}C(\psi) - \sqrt{2}iS(\psi)\right)$$

$$\left. - \frac{i}{kl} \sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}} \left(\frac{2c^{inf}(-\cos \varphi)}{f(-\cos \varphi)} \sin \varphi + \sum_q \frac{c^{inf}(-\cos w_q)}{\sin \frac{w_q - \varphi}{2}} \right) \right],$$

$$H_x^{s,c}(\varphi, \rho) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} c(-\cos \varphi) \sin \varphi \exp(i(k\rho - \pi/4)), \quad 0 < \varphi < \pi,$$

$$\varepsilon_q(\theta) = \begin{cases} 0, & \varphi < w_q, \\ 1, & \varphi > w_q. \end{cases}$$

Сумування проводиться по всіх q , які відповідають плоским хвилям, які

поширюються, $|\zeta_q| < 1$. Інтеграли Френеля мають вигляд $C(\psi) = \int_0^\psi \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$,

$S(\psi) = \int_0^\psi \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$, де $\psi = 2\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \sin\left|\frac{w_l - \varphi}{2}\right|$, $w_q = \pi/2 + \arcsin \zeta_q$.

У випадку E -поляризації поле у далекій зоні можна подати як

$$E_x^s(\varphi, \rho) \cong E_x^F(\varphi, \rho) + E_x^{s,c}(\varphi, \rho) + E_x^{erfc}(\varphi, \rho), \quad k\rho \rightarrow \infty,$$

де доданок, який визначає вклад мод Флоке, розсіяних нескінченною частиною структури, є

$$E_x^p(\varphi, \rho) = \sum_q \varepsilon_q(\varphi) a_q \exp(ik\rho \cos(\varphi - w_q)),$$

$$\varepsilon_q(\theta) = \begin{cases} 0, & \varphi < w_q, \\ 1, & \varphi > w_q. \end{cases}$$

Поле циліндричних хвиль і доданок, який забезпечують неперервне асимптотичне представлення поля є

$$E_x^{s.c}(\varphi, \rho) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} c_1(-\cos \varphi) \exp(i(k\rho - \pi/4)),$$

$$E_x^{erfc}(\varphi, \rho) = \exp\left(ik\rho - \frac{\pi i}{4}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{\pi}{kl} \sum_q \operatorname{sgn}(w_q - \varphi) \frac{c^{inf}(-\cos w_q)}{\sin w_q} \times \right.$$

$$\times \exp\left(-2ik\rho \left(\sin \frac{\varphi - w_q}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}C(\psi) - \sqrt{2}iS(\psi)\right) -$$

$$\left. - \frac{i}{kl} \sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}} \left(\frac{2c^{inf}(-\cos \varphi)}{f(-\cos \varphi)} + \sum_q \frac{c^{inf}(-\cos w_q)}{\sin w_q \sin \frac{w_q - \varphi}{2}} \right) \right],$$

$$c^{inf}(\xi) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n \frac{\sin(kd(\zeta_n - \xi))}{kl(\zeta_n - \xi)},$$

де $C(\psi)$, $S(\psi)$ –інтеграли Френеля, всі інші позначення пояснюються після (1.105). Сумування проводиться по всім q , які відповідають плоским хвилям, які поширюється, $|\zeta_q| < 1$.

ДОДАТОК В

Явний вигляд правої частини сингулярного інтегрального рівняння

Як і у випадку одношарової нескінченної решітки зі збоєм періодичності, необхідно спростити вираз $R^\pm(y)$, позбавившись від особливостей на шляху інтегрування. З рівнянь (4.3), (4.7) отримуємо рівність

$$\frac{\partial H^i(z=0)}{\partial z} \mp \frac{\partial H^i(z=-h)}{\partial z} = \left(\frac{\partial H^{\text{inf}}(z=0)}{\partial z} \mp \frac{\partial H^{\text{inf}}(z=-h)}{\partial z} \right), \quad y \in L \cup L^0,$$

і, як наслідок

$$R^\pm(y) = -\frac{\partial H^0(z=0)}{\partial z} \pm \frac{\partial H^0(z=-h)}{\partial z}, \quad y \in L \cup L^0.$$

Наведемо явний вигляд $R^\pm(y)$, підставивши вирази для поля, випроміненого струмами, які течуть стрічками нескінченної ідеально періодичної решітки у вигляді потенціалів подвійного шару. Для стислості запишемо загальний вигляд потенціалу подвійного шару, не конкретизуючи, у якій саме області розглядається поле,

$$H(y, z) = \frac{i}{4} \int_{-d}^d 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \exp(ik\zeta_n y') \frac{\partial}{\partial z'} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(y - y' - lm)^2 + (z - z')^2} \right) dy', \quad z' = 0.$$

де α_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – амплітуди Фур'є з (4.5), $H_p^{(1)}(x)$, як і раніше, функція Ханкеля першого роду порядку p . Після диференціювання по z і z' , беручи до уваги фазовий множник, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^0(z=0)}{\partial z} &= \frac{ik}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-b_n) \exp(ik\zeta_n (y'+lm)) \frac{H_1^{(1)}(k |y - y' - lm|)}{|y - y' - lm|} dy' \\ &+ \frac{ik}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(ik\zeta_n (y'+lm)) \cdot H(y, y') dy', \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H^0(z = -h)}{\partial z} = \frac{ik}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n) \exp(ik\zeta_n(y'+lm)) \frac{H_1^{(1)}(k|y-y'-lm|)}{|y-y'-lm|} dy' + \frac{ik}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-d}^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-b_n)_n \exp(ik\zeta_n(y'+lm)) \cdot H(y, y') dy',$$

де

$$H(y, y') = h^2 k \times \frac{H_0^{(1)}(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + h^2}) - H_1^{(1)}(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + h^2}) / (k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + h^2})}{(y-y'-lm)^2 + h^2} - h^2 \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + h^2})}{((y-y'-lm)^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + h^2})}{\sqrt{(y-y'-lm)^2 + h^2}}.$$

Знак “-” перед b_n з’являється у зв’язку з тим, що плоскі хвилі з амплітудами b_n поширюються у негативному напрямку осі Oz . Функції $R^\pm(y)$ є регулярними при $y \notin L_0$.

ДОДАТОК Г

Коефіцієнти рівнянь у випадку імпедансних решіток в діелектричному
хвилеводі

У випадку нескінченної періодичної решітки в діелектричному
хвилеводі з ідеально провідною площиною коефіцієнти дорівнюють:

$$a_n = A_n b_n,$$

$$c_n = C_n b_n,$$

$$f_n = F_n b_n,$$

$$g_n = G_n b_n,$$

де

$$A_n = \frac{2\gamma_n^1 \exp(-ik_1(-k_1\gamma_n^1 + k\gamma_n^1))}{\gamma_n \sqrt{\varepsilon} + \gamma_n^1},$$

$$C_n = -\frac{(\gamma_n \sqrt{\varepsilon} - \gamma_n^1) \exp(2ik_1 h_1 \gamma_n^1)}{\gamma_n \sqrt{\varepsilon} + \gamma_n^1},$$

$$F_n = -i \left(\exp(-ik_1 h_2 \gamma_n^1) \gamma_n \sqrt{\varepsilon} + \gamma_n \sqrt{\varepsilon} \exp(ik_1 \gamma_n^1 (2h_1 - h_2)) + \right. \\ \left. + \gamma_n^1 \exp(-ik_1 h_2 \gamma_n^1) - \gamma_n^1 \exp(ik_1 \gamma_n^1 (2h_1 - h_2)) \right) / P_n,$$

$$G_n = -i \left(\exp(ik_1 h_2 \gamma_n^1) \gamma_n \sqrt{\varepsilon} + \gamma_n \sqrt{\varepsilon} \exp(ik_1 \gamma_n^1 (2h_1 + h_2)) + \right. \\ \left. + \gamma_n^1 \exp(ik_1 h_2 \gamma_n^1) - \gamma_n^1 \exp(ik_1 \gamma_n^1 (2h_1 + h_2)) \right) / P_n,$$

$$P_n = 2 \sin(k_1 h_2 \gamma_n^1) (\gamma_n \sqrt{\varepsilon} + \gamma_n^1).$$

У випадку скінченної періодичної решітки в діелектричному хвилеводі
маємо:

$$a(\xi) = 2\gamma(\xi) \left(\exp(-ikh\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \gamma(\xi)) + \right. \\ \left. + \exp(-ih(-2k_1\gamma(\xi) + k\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon}))) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} - \gamma(\xi)) \right) / P(\xi) / \sqrt{\varepsilon},$$

$$c(\xi) = \exp(ik_1 h \gamma(\xi)) \times \\ \times \left(-\gamma^2(\xi/\sqrt{\varepsilon})\varepsilon + \gamma^2(\xi) - \exp(2ik_1 h \gamma(\xi)) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} - \gamma(\xi))^2 \right) / P(\xi),$$

$$f(\xi) = -\left(\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \gamma(\xi)\right) \left(\exp(-ik_1 h \gamma(\xi)) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \gamma(\xi)) \right. \\ \left. + \exp(-ihk_1 \gamma(\xi)) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} - \gamma(\xi)) \right) / P(\xi),$$

$$g(\xi) = \left(\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} - \gamma(\xi)\right) \exp(ik_1 h \gamma(\xi)) \left(\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \gamma(\xi) \right. \\ \left. + \exp(2ihk_1 \gamma(\xi)) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} - \gamma(\xi)) \right) / P(\xi),$$

$$d(\xi) = -a(\xi),$$

$$P(\xi) = \exp(ik_1 h \gamma(\xi)) \times \\ \times \left(\gamma^2(\xi/\sqrt{\varepsilon})\varepsilon - \gamma^2(\xi) + \exp(-2ik_1 h \gamma(\xi)) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \gamma(\xi))^2 \right),$$

У випадку скінченної періодичної решітки в діелектричному хвилеводі з ідеально провідною площиною маємо:

$$a(\xi) = \frac{2\gamma(\xi) \exp(-ih_1(k\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon}) + k_1\gamma(\xi)))}{\sqrt{\varepsilon}(\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \gamma(\xi))},$$

$$c(\xi) = -\frac{2\gamma(\xi) \exp(2ik_1 h_1 \gamma(\xi)) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} - \gamma(\xi))}{\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \gamma(\xi)},$$

$$f(\xi) = -\frac{i}{2 \sin(k_1 h_2 \gamma(\xi)) (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon}) + \gamma(\xi))} \\ \times \left(\exp(-ik_1 h_2 \gamma(\xi)) \gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} + \exp(ik_1 \gamma(\xi)(2h_1 - h_2)) \gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} \right. \\ \left. + \exp(-ik_1 h_2 \gamma(\xi)) \gamma(\xi) - \exp(ik_1 \gamma(\xi)(2h_1 - h_2)) \gamma(\xi) \right),$$

$$g(\xi) = \exp(2ik_1 h_2 \gamma(\xi)) f(\xi).$$

$$A(\xi) = 2b(\xi/\sqrt{\varepsilon})\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon}) \exp(-ikh_1(-\sqrt{\varepsilon}\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon}) + \gamma(\xi))) / (Q_2(\xi)\sqrt{\varepsilon}),$$

$$B(\xi) = b(\xi/\sqrt{\varepsilon}) / (\gamma(\xi/\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon}\gamma(\xi)) / (Q_2(\xi)\sqrt{\varepsilon}).$$

ДОДАТОК Д

Інтегральні рівняння

I. Випадок, коли диски розташовані по один бік від напівплощини

Зауважимо, що ядро оператора відбиття напівплощини має не інтегровану особливість на дійсній осі у точці, яка відповідає постійній поширення відбитої плоскої хвилі. Крім того, ядра операторів відбиття напівплощини та диску мають інтегровану кореневу особливість. В результаті, амплітуди Фур'є розсіяного поля також можуть мати особливості. Введемо нові функції, які б не мали особливостей, за формулами

$$U_{j,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) = R_{j,\Theta,\Xi}(\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y) \cdot \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad j = 2, 3,$$

$$B_{2,x}(\xi_x, \xi_y) = \left(B_{1,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} \frac{q_x + p_x}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2},$$

$$B_{2,y}(\xi_x, \xi_y) = \left(B_{1,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{q_x + p_x}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}} \frac{q_y + p_y}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2},$$

$$C_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = C_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2},$$

$$F_{2,x}(\xi_x, \xi_y) = \left(F_{1,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \exp(ik\gamma(A, \xi_y)h_1) \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} \frac{q_x + p_x}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2},$$

$$F_{2,y}(\xi_x, \xi_y) = \left(F_{1,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \exp(ik\gamma(A, \xi_y)h_1) \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{q_x + p_x}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - B} \sqrt{\sqrt{1-A^2} - \xi_y}} + \frac{i}{2\pi} \exp(ik\gamma(A, \xi_y)h_1) \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - \xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2} - B}} \frac{q_y + p_y}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}.$$

$$G_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = G_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad \Theta = x, y.$$

Взагалі кажучи, у зв'язку з тим, що коренева особливість є інтегрованою, її можна було явно не виділяти явно. Проте, ми її виділили для побудови швидко збіжної схеми дискретизації на базі відповідних квадратурних формул.

Остаточно отримаємо інтегральні рівняння

$$B_{2,x} = F_1 e_1^+ s_1^- C_{2,x},$$

$$B_{2,y} = F_2 e_1^+ s_1^- C_{2,x} + F_3 e_1^+ s_1^- C_{2,y},$$

$$C_{2,\Theta} = e_2^+ s_2^- s_1^+ G_{2,\Theta} + F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} (e_1^+ s_1^+ B_{2,\Xi} + e_2^+ s_2^- s_1^+ G_{2,\Xi}) + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{2,\Theta,x} e_1^+ s_1^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} s_1^+ (e_1^+ p_\Xi + e_1^- q_\Xi),$$

$$F_{2,\Theta} = s_1^- F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} (e_1^+ s_1^+ B_{2,\Xi} + e_2^+ s_2^- s_1^+ G_{2,\Xi}) + (q_x + p_x) \cdot s_1^- F_5 U_{2,\Theta,x} e_1^+ s_1^+ + (q_x + p_x) \cdot s_1^- F_6 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + (q_y + p_y) \cdot s_1^- F_7 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} s_1^+ (e_1^+ p_\Xi + e_1^- q_\Xi),$$

$$G_{2,\Theta} = F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} e_2^+ s_2^+ F_{2,\Xi} + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{3,\Theta,x} e_2^+ e_1^+ s_2^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{3,\Theta,y} e_2^+ e_1^+ s_2^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{3,\Theta,y} e_2^+ e_1^+ s_2^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} s_2^+ (e_2^+ e_1^+ p_\Xi + e_2^- e_1^- q_\Xi), \quad \Theta = x, y.$$

II. Випадок, коли диски розташовані по різні боки від напівплощини

$$F_{2,\Theta}(\xi_x, \xi_y) = F_{1,\Theta}(\xi_x, \xi_y) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}, \quad \Theta = x, y,$$

$$G_{2,x}(\xi_x, \xi_y) = \left(G_{1,x}(\xi_x, \xi_y) + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} \frac{q_x + p_x}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2},$$

$$G_{2,y}(\xi_x, \xi_y) = \left(G_{1,y}(\xi_x, \xi_y) - \frac{i}{2\pi} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \frac{q_x + p_x}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B} \sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}} + \frac{i}{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-\xi_y}}{\sqrt{\sqrt{1-A^2}-B}} \frac{q_y + p_y}{\xi_y - \underset{\text{below}}{B}} \right) \sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}.$$

Тоді

$$B_{2,x} = e_2^+ s_2^- F_{2,x} + F_1 (e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}),$$

$$B_{2,y} = e_2^+ s_2^- F_{2,y} + F_2 (e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}) + F_3 (e_1^+ s_1^- C_{2,y} + e_2^+ s_2^- F_{2,y}),$$

$$C_{2,\Theta} = F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} e_1^+ s_1^+ B_{2,\Xi} + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{2,\Theta,x} e_1^+ s_1^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{2,\Theta,y} e_1^+ s_1^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{2,\Theta,\Xi} s_1^+ (e_1^+ p_\Xi + e_1^- q_\Xi),$$

$$F_{2,\Theta} = F_4 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} e_2^+ s_2^+ G_{2,\Xi} + (q_x + p_x) \cdot F_5 U_{3,\Theta,x} e_2^+ s_2^+ + (q_x + p_x) \cdot F_6 U_{3,\Theta,y} e_2^+ s_2^+ + (q_y + p_y) \cdot F_7 U_{3,\Theta,y} e_2^+ s_2^+ + F_8 \sum_{\Xi=x,y} U_{3,\Theta,\Xi} s_2^+ (e_2^- p_\Xi + e_2^+ q_\Xi),$$

$$G_{2,x} = e_1^+ s_1^- C_{2,x} + F_1 (e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}),$$

$$B_{2,y} = e_1^+ s_1^- F_{2,y} + F_2 (e_1^+ s_1^- C_{2,x} + e_2^+ s_2^- F_{2,x}) + F_3 (e_1^+ s_1^- C_{2,y} + e_2^+ s_2^- F_{2,y}).$$